

角振動する円柱まわりの非定常粘性流れ

岡 島 厚・浅 沼 強・高 田 浩 之*

Unsteady Viscous Flow Around an Oscillating Circular Cylinder

By

Atsushi OKAJIMA, Tsuyoshi ASANUMA and Hiroyuki TAKATA

Abstract: To examine some aerodynamic characteristics of a circular cylinder located in a uniform viscous cross-flow, the authors have carried out some numerical calculations of the unsteady viscous flow around a cylinder and further some experiments by towing a test model in water or oil. Then the results are summarized as follows;

- 1) There can be seen a good agreement between the calculated values and the measured ones of aerodynamic forces exerted on a stationary or oscillating cylinder at the range of small Reynolds number, $Re=40\sim80$.
- 2) According to the numerical calculations, the points of flow separation on an oscillating cylinder are found to behave in the same phase with the fluctuation of lift force.
- 3) Such unsteady forces acting on an oscillating cylinder can be measured over the wide range of Reynolds number, $Re=40\sim15,000$, showing the phenomenon of synchronization at a certain range of ratio of the frequency of forced oscillation to that of Kármán vortex street for a stationary cylinder.
- 4) Regarding the experiments, the unsteady aerodynamic forces exerted on a stationary or oscillating cylinder are found to be weakly depended upon Reynolds number.

概 要

一様流れの中で角振動する円柱まわりの流れの様相および円柱に働く流体力などを数値解析（レイノルズ数 $Re=40\sim80$ ）ならびにかなり広いレイノルズ数範囲（ $Re=40\sim10^4$ ）にわたる実験によって求めた。すなわち、数値解法の精度などを吟味したあと、数値解析による抵抗や変動揚力の値は実測値とよく一致することから、本数値解法および実験の妥当性を確認した。そして角振動する円柱まわりの流れの様相とくに流れのはく離点の移動と変動揚力の変化は互に同位相で両者の間に深い関連性があることを見い出した。さらに円柱の振動とカルマン渦列との間のいわゆる synchronization 現象の様子を明らかにした。そして静止および角振動する円柱に働く変動揚力は $Re=10^2\sim10^4$ の範囲ではほとんどレイノルズ数にはよらないことがわかった。

* 東京大学工学部

記 号

記号は、本文中でできるだけ定義したが、ここで主要なものをまとめて示す。

(x, y)	直線直交座標系	$\zeta^n(i, j)$	格子点 (i, j) における $n\Delta t$ 時後の ζ の値
(r, θ)	極座標系	U	一様流速
(ξ, η)	曲線直交座標系 ($\xi = \log r/a, \eta = \theta$)	p	圧力
h	一般直交座標系における scale factor	τ_s	物体表面上に働く粘性せん断力
	(ξ, η) 曲線直交座標系では,	L	円柱に働く揚力. (単位スパン長さ当り)
	$h \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$	D	円柱に働く抵抗. (単位スパン長さ当り)
	$= ae^\xi$ である.	$C_p \equiv \left(\frac{p}{(1/2)\rho U^2}\right)$	圧力係数
ρ	流体の密度	$C_\tau \equiv \left(\frac{\tau_s}{(1/2)\rho U^2}\right)$	粘性せん断力係数
μ	流体の粘性係数	$C_L \equiv \left(\frac{L}{(1/2)\rho U^2 d}\right)$	円柱の揚力係数
ν	流体の動粘性係数	$C_D \equiv \left(\frac{D}{(1/2)\rho U^2 d}\right)$	円柱の抵抗係数
t	時間	ϕ	位相差. 準定常の場合を $\phi=0$ とする.
q_ξ, q_η	(ξ, η) 座標系における ξ, η 軸方向のそれぞれの速度成分		
ζ	$\left(\equiv \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(hq_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(hq_\xi) \right] \right)$, 渦度		
ϕ	流れ関数. この ϕ と q_ξ, q_η との関係は		
	$hq_\xi = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad hq_\eta = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ である.		
a	円柱半径		
d	($\equiv 2a$) 円柱直径		
f_c	円柱の強制振動数		
f_K	カルマン渦列の振動数		
ΔV	無次元周速度変動振幅		
V_0	円柱の表面速度 ($= \Delta V \sin 2\pi f_c t$)		
Re	Reynolds 数 ($\equiv \frac{Ud}{\nu}$)		
St_c	$\left(\equiv \frac{df_c}{U}\right)$, 円柱の強制無次元振動数		
St_K	$\left(\equiv \frac{df_K}{U}\right)$, 静止円柱後流のカルマン渦列のストロハル数		
S	格子間隔		
		添 字	
		x, y	x, y 軸方向の成分
		r, θ	r, θ 軸方向の成分
		ξ, η	ξ, η 軸方向の成分
		o	物体表面上の値
		∞	無限遠の値または, 無限遠の位置と定めた場所の値
		s, u	定常値そして非定常値
		P, S	圧力による成分, そして粘性せん断による成分
		—	定常分
		\sim	変動分
		$ $	変動振幅

1. 序 言

風の方向と直角に煙突が振動することや橋りょうや建造物の振動あるいはボイラの騒音などはいずれも円柱後流に周期的に流出する渦列によって生ずる流体力学的励振力によるものであり、最近においても煙突やランチャー上のロケットの風による倒壊事故や熱交換器の蒸発管の破損事故などに見られるように、一様流れの中におかれた円柱に働く流体力や円柱まわり流れの挙動についての研究は重要性を増しており、また空力弾性学的見地からも興味深い問題である。一方軸流圧縮機における翼の破損は主としてフラッタや旋回失速などの空力弾性的自励振動や非定常流れによる強制振動によって翼の疲労を引き起こすことに原因している場合が多く、また翼下流に生ずる周期的渦列が圧縮機騒音の原因の一つになっていると考えられている。

本研究はそのような非定常流れにおける翼の作動特性を特に流れの粘性効果に注目して明らかにしようとする一連の研究の一環をなすものであって、一様粘性流れの中におかれた静止円柱および中心軸まわりに角振動する円柱まわりの非定常粘性流れの様相や円柱に働く非定常流体力などを数値解析および実験によって明らかにするとともに、今まで数多くなされた円柱まわりの流れに関する数値計算および実験結果と比較することによって本計算法ならびに実験の妥当性を確認し、振動する楕円翼に対する研究のために準備をも兼ねている。

本報告は数値解析と実験の二つの部分からなり、数値解析は Navier-Stokes の式を大型電子計算機を使用した数値計算によって、解くものであり、取り扱うレイノルズ数範囲が実際の場合などとはかけ離れて小さい範囲に限定される欠点はあるけれども、振動する円柱まわりの粘性境界層や後流の静的および動的な挙動などについて詳細な検討が可能である。特に流れがはく離するような状態までを含めて取り扱うためにはほかに適切な理論的な方法は現在の所ないように思われる。

また実験は、数値解析の結果と比較することによって相互の精度を確認するとともに、考察の範囲をレイノルズ数の大きい領域にまで拡張するために計画したものであり、この目的のために特に曳行式液槽を試作し、その液体中に円柱を曳行し、揚力や抵抗の測定を行なった。

2. 数値解析

2.1 ま え が き

Navier-Stokes の式を数値解法によって解くことは、かなり古くから行なわれている。すなわち、一様流中におかれた静止円柱まわりの定常流れに対しては、いまだ電子計算機が出現していなかった時代から、この煩雑な数値計算がなされた。たとえば、1933 年、Thom [1] はレイノルズ数 (Re 数) が 10 および 20 というとくに低い場合を定常の渦度の式と Poisson の式を連立させて解いており、現在行なわれている方法と大差はない。また同時に巧妙な実験を行ない、静止円柱まわりの流線や抵抗の値が計算結果とよく一致していることを示している。その後川口 [2] は $Re=40$ に対する同様の計算を手回し計算機で行ない、かなり精度の良い計算結果を得ている。なおこの場合、無限遠の境界条件としては今井 [3] が Oseen の近似式から導いた far-field (物体から十分遠く離れた領域) における流れ関数や渦度の漸近

解を採用している. また Allen & Southwell [4] は $Re=0, 1, 10, 100$ および $1,000$ のときの静止円柱まわりの定常解を求めているが, とくに, $Re=100$ や $1,000$ における流れの様子や抵抗の値などは, 実測結果と非常に相違している. これは数値解法における境界の位置や境界条件の与え方が不適当であったものと思われる. Apelt [5] はさきの川口の解を初期値として, さらに精度の高い差分の近似式を用いて $Re=40$ および 44 における静止円柱まわりの定常流れを解いており, また高見ら [6] は $Re=2, 4, 10, 15$ の場合を解くに当り, 無限遠の境界条件としてさきの今井の漸近解の第二次近似までを用いて, さらに精度の高い計算を行なっている. 最近, Hamielec & Raal [7] は $Re=1\sim 500$ にわたり, 抵抗係数, 圧力分布そして双子渦の形状などに及ぼす無限遠の位置の影響を調べている.

以上の数値計算はいずれも時間項を含まない Navier-Stokes の式を解いたものであるが, 非定常流れに対する場合は時間項を含めた Navier-Stokes の式を, 適当な初期値から始めて, 順次微小時間ステップごとに解かねばならない. このような例としては, 円柱が急に動き始めた場合に限って, Payne [8] ($Re=40, 100$), 川口 & Jain [9] ($Re=40\sim 100$) および Son & Hanratty [10] ($Re=40, 200, 500$) などかなり多くの人々によって計算されており, 円柱が動き始めてからの円柱まわりの流れや抵抗などの時間的变化を求め, 時間が十分たてば, 定常の値に落ちつくことなどを示している. Fromm [11] らは二次元の平行流路中に置かれた角柱まわりの流れを $Re=15\sim 6,000$ の広い Re 数範囲にわたって大規模な計算を行ない, その結果, 流れに微小かく乱を与えると $Re<40$ では減衰するが, $Re>40$ では角柱の後流に明瞭なカルマン渦列の生ずることを示した.

しかしながら, 一様粘性流れの中で, たとえば角振動する円柱まわりの流れを数値解法によって解いた例はいまだない.

そこで本報告では, 一様な粘性流れの中で静止および角振動する円柱まわりの流れを数値解法によって求め, これらの円柱に働く非定常流体力および円柱近傍の流れの挙動を明らかにしようとした. 順序として, まず従来数多く報告されている静止円柱の場合につき計算を行ない, 従来の結果と比較して, 本研究の計算方法の妥当性を確認した. ついで角振動する円柱について所要の計算を行ない, 得られた計算結果に対し考察を加えた.

2.2 基礎式と境界条件

一様流れにおかれた角振動する円柱まわりの流れを数値解法によって解くための基礎式と境界条件は次の通りである.

2.2.1 基礎式 流れは二次元, 非圧縮で外力がないものとすれば, 粘性流れに対する Navier-Stokes の方程式および連続の式は, 極座標 (r, θ) に対し $\xi=\log(r/a)$, $\eta=\theta$ (a は半径) の関係をもつ曲線座標系 (ξ, η) 上において,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_\xi}{\partial t} + \frac{q_\xi}{h} \frac{\partial q_\xi}{\partial \xi} + \frac{q_\eta}{h} \frac{\partial q_\xi}{\partial \eta} - \frac{q_\eta}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\rho h} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\nu}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial q_\eta}{\partial t} + \frac{q_\xi}{h} \frac{\partial q_\eta}{\partial \xi} + \frac{q_\eta}{h} \frac{\partial q_\eta}{\partial \eta} + \frac{q_\xi q_\eta}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\rho h} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\nu}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(hq_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(hq_{\eta}) = 0 \quad (2-2)$$

である。ここで、 q_{ξ}, q_{η} はそれぞれ ξ, η 方向の速度成分で、 h は座標系の scale factor で今の場合 $h = ae^{\xi}$ 、 ρ は流体密度、 ν は動粘性係数、 p は圧力、 t は時間、そして ζ は渦度で、

$$\zeta = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial(hq_{\eta})}{\partial \xi} - \frac{\partial(hq_{\xi})}{\partial \eta} \right] \quad (2-3)$$

である。

さらに (2-1) 式から圧力項を消去すれば、いわゆる渦の式が導かれ、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{h} \left(q_{\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + q_{\eta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = \frac{\nu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \right) \quad (2-4)$$

となる。

ここで、 $hq_{\xi} = \partial \psi / \partial \eta$ 、 $hq_{\eta} = -\partial \psi / \partial \xi$ の関係をもつ流れ関数 ψ を導入すると、(2-2) の連続の式は自動的に満足され、渦度 ζ と流れ関数 ψ との間には、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -h^2 \zeta \quad (2-5)$$

の関係がある。計算をするに当っては、その精度をそろえる意味からも、流れ関数 ψ は、物体まわりのポテンシャル流れに相当する流れ関数 $\psi_p (= 2aU \sinh \xi \sin \eta)$ とそれからの摂動分 $\tilde{\psi}$ とに分けて考える方が都合がよい。すなわち、 $\psi = \psi_p + \tilde{\psi}$ とすると、(2-4)、(2-5) 式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial(\psi_p + \tilde{\psi})}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial(\psi_p + \tilde{\psi})}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right] = \frac{\nu}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \right] \quad (2-6)$$

および

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2} = -h^2 \zeta \quad (2-7)$$

となる。

これら (2-6)、(2-7) 式が円柱まわり流れに対する基礎方程式であって、これらの式を次に述べる境界条件のもとに解けばよいわけである。

2.2.2 境界条件 物体表面上では流れが表面に沿い、しかも滑りがない。すなわち物体表面速度に等しいとおけばよいので、たとえば角振動する円柱の場合には、

$$\left. \begin{aligned} (q_{\xi})_0 &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_0 = 0 \\ (q_{\eta})_0 &= -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_0 = V_0(t) (= \Delta V \sin 2\pi f c t) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

と与えられる。ここに添字 0 は物体表面の値を示し、 $V_0(t)$ は円柱の表面上の速度 ΔV は振動速度の振幅 $f c$ は強制振動数である。

次に円柱から十分遠く離れた領域の境界条件としては、流れの速度が一様流速に等しくなるとすればよい。しかしこの条件を数値解法に適用する場合、実際には円柱からある有限の距離 r_{∞} だけ離れた位置に境界をとり、しかも境界条件は ψ と ζ に対する形で与えなければならない。そのためには、十分離れた領域 (far-field) において近似度の高い Oseen の近似式による解を、それらの漸近的な形として適用することが有効である。元来 Oseen の近似式

は線型であるから、その解は定常分 (添字 s) と非定常分 (添字 u) とに分けて考えることができ、渦度の定常分 ζ_s と非定常分 ζ_u はそれぞれ、

$$U \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial \eta^2} \right) \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial \zeta_u}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta_u}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta_u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta_u}{\partial \eta^2} \right) \quad (2-10)$$

となる。ここに U は一様流速である。

定常分に対する (2-9) 式はすでに今井 [3] によって解かれており、その結果のみ極座標 (r, θ) を用いて書くと、 r_∞ における流れ関数の摂動分 $\tilde{\psi}_{\infty s}$ および渦度 $\zeta_{\infty s}$ の第一近似は、次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\psi}_{\infty s} &= aU \left[\left(\frac{\bar{C}_L}{2\pi} \right) \log r_\infty - \left(\frac{\bar{C}_D}{2} \right) \left(\operatorname{erf} \beta - \frac{\theta}{\pi} \right) \right], \quad |\theta| < \pi \\ \zeta_{\infty s} &= - \left(\frac{U Re \bar{C}_D}{4\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{\beta}{r_\infty} \right) e^{-\beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

ここで \bar{C}_L, \bar{C}_D はそれぞれ物体に働く揚力および抵抗係数の定常分、

$$\beta = \sqrt{\frac{U r_\infty}{\nu}} \sin \frac{\theta}{2}$$

また

$$\operatorname{erf} \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-x^2} dx$$

である。

次に同様にして、 r_∞ における $\tilde{\psi}_\infty$ と ζ_∞ の非定常成分 ($\tilde{\psi}_{\infty u}, \zeta_{\infty u}$) についても、定常の場合に準じて (2-10) 式から求め、それらの漸近的な性質を検討する。渦度の非定常成分 $\zeta_{\infty u}$ は、近似的に

$$\zeta_{\infty u} \sim \frac{e^{-\beta^2}}{r_\infty} \exp \left[-\frac{k^2}{Re} \left(\frac{r_\infty}{a} \right) \right] \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{r_\infty}{U} \right) \right] \quad (2-12)$$

と表わされる。ここで k は無次元振動数、 $k = 2\pi f d / U$ である。上式によると、後流渦の非定常分の強さは、 Re 数や振動数によって影響を受け、さらに物体からの距離 r_∞ に対して指数関数的に 0 になることがわかる。それゆえ $\zeta_{\infty u}$ によって誘起される流れ関数の非定常成分 ($\tilde{\psi}_{\infty u}$) も同様に指数関数的に 0 に収れんすることになる。一方非定常循環に相当する流れ関数 $(\Gamma_u / 2\pi)(\log r) e^{i\omega t}$; ($\omega \equiv 2\pi f$) は円柱まわりの領域の圧力が一価でなければならないことから $\Gamma_u = 0$ である。以上により非定常成分 $\tilde{\psi}_{\infty u}, \zeta_{\infty u}$ はともに物体からの距離 r_∞ に対して指数関数的に 0 に収れんする。それゆえ無限遠 ($r = r_\infty$) における $\tilde{\psi}_\infty$ と ζ_∞ に対する境界条件としては、定常成分 $\tilde{\psi}_{\infty s}$ と $\zeta_{\infty s}$ に対する (2-11) 式をそのまま与えればよいことになる。

2.2.3 空力的諸係数 前節に示した境界条件 (2-8), (2-11) 式のもとに基礎式 (2-6), (2-7) 式を解いて、円柱まわりの流れ関数 ψ と渦度 ζ の分布がわかれば、それらを用いて、円柱に働く圧力、揚力および抵抗などを次のように求めることができる。

さて、計算の便宜上、すべての物理量を一様流速 U と円柱の半径 a によって次のよう

に無次元化する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} q_{\xi}' &= \frac{q_{\xi}}{U}, & q_{\eta}' &= \frac{q_{\eta}}{U}, & x' &= \frac{x}{a}, & y' &= \frac{y}{a}, \\ p' &= \frac{p}{\rho U^2}, & \phi' &= \frac{\phi}{aU}, & \zeta' &= \frac{\zeta a}{U} \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

Re 数は $Re=2aU/\nu$ である。なお本節以降、これら無次元量 $q_{\xi}', q_{\eta}' \dots$ を、あらためて $q_{\xi}, q_{\eta} \dots$ とダッシュを省いて表示することにする。

a) 円柱表面上の圧力分布、圧力の基準点として円柱後縁を採り、動圧 $(1/2)\rho U^2$ で無次元化すると、表面上の任意の点の圧力係数 C_p は、(2-1) 式中に $q_{\xi}=0$, $q_{\eta}=V_0(t)$ を代入して、円柱表面に沿って ($\xi=0$)、積分すれば、

$$C_p(\eta) - C_p(\eta=0) = \frac{4}{Re} \int_0^{\eta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)_0 d\eta - 2\eta \cdot \left(\frac{\partial V_0(t)}{\partial t} \right) \quad (2-14)$$

として求められる。

b) 物体表面上の粘性せん断力分布；粘性によって物体表面上に働くせん断力を動圧 $(1/2)\rho U^2$ で無次元化した粘性せん断力係数 $C_{\tau}(\eta)$ は、次式

$$C_{\tau}(\eta) = \frac{4}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_{\eta}}{h} \right) \right] = \frac{4}{Re} [\zeta_0 - 2V_0(t)] \quad (2-15)$$

で与えられる。

c) 揚力および抵抗；求められた円柱表面上に働く圧力分布 $C_p(\eta)$ や粘性によるせん断力分布 $C_{\tau}(\eta)$ から、実際に円柱に働く揚力 C_L と抵抗 C_D を次のように求めることができる。 C_L, C_D はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} C_L &= C_{LP} + C_{LS} \\ C_D &= C_{DP} + C_{DS} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

である。添字 P と S はそれぞれ圧力と粘性せん断力による成分を示すものであり、これら流体力の各成分は、

$$\left. \begin{aligned} C_{LP} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C_p(\eta) \sin \eta d\eta \\ C_{DP} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C_p(\eta) \cos \eta d\eta \\ C_{LS} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C_{\tau}(\eta) \cos \eta d\eta \\ C_{DS} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C_{\tau}(\eta) \sin \eta d\eta \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

で求められる。なお、揚力と抵抗の方向は図 1 に矢印で示された方向が正とする。

2.3 数値解法

与えられた境界条件 (2-8), (2-11) 式のもとに、数値解法によって基礎式 (2-6), (2-7) を解くに当り、いま一様流速 U の中におかれた半径 a の円柱が図 1 に示すように、その中心軸

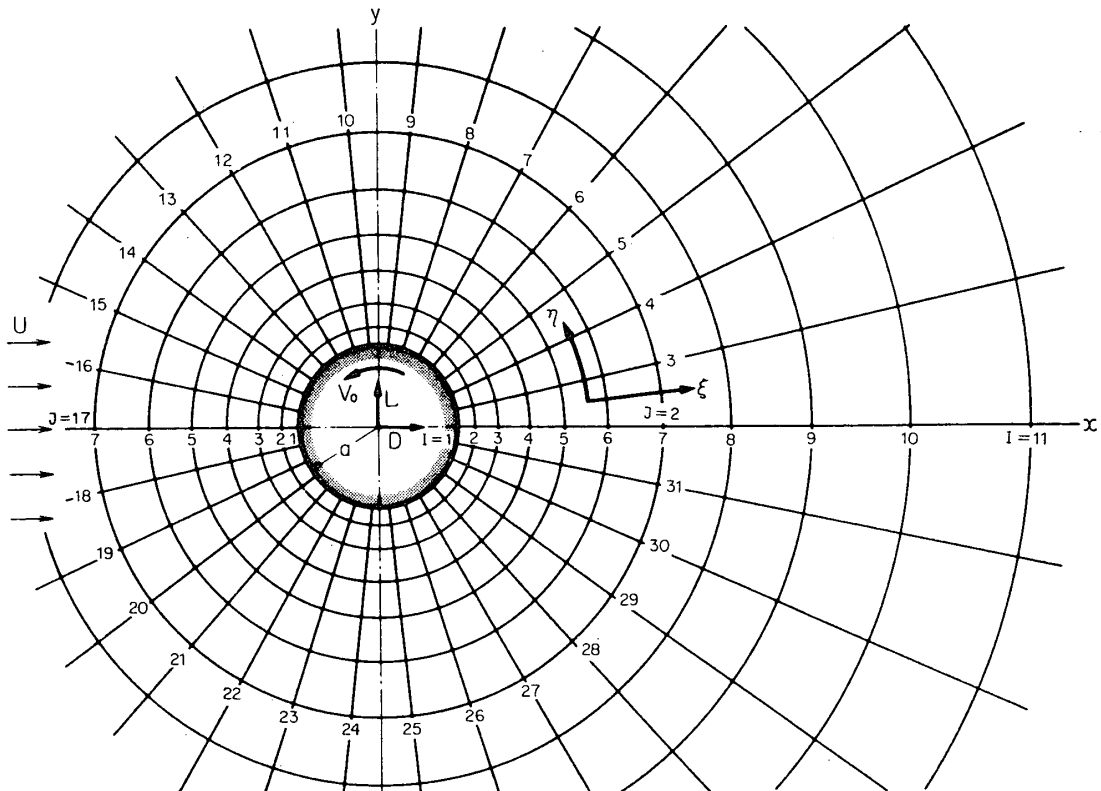


図 1 円柱まわりの流れの計算の座標系 (標準分割, $N=30$, $S=\pi/15$)

まわりに, 無次元振動数 $Stc(=fcd/U, f_c$; 角振動の強制振動数), 円柱表面上の振動速度振幅 ΔV (すなわち周速 $V_0 = \Delta V \sin 2\pi fct$) で角振動する場合を考える.

2.3.1 座標系と格子分割

このように角振動する円柱近傍の流れは円柱表面上の境界条件が時間的に変化するので特に複雑である. そのうえ円柱表面の圧力分布や粘性せん断力分布およびそれらによる揚力や抵抗などの流体力をできるだけ精度良く求めるために円柱近傍はできるだけ細かい格子に分割したい. また円柱から十分離れた領域の流れは単調であるので, 格子間隔をあくくしてもよく, またそれによって, 同じ格子数でもかなり円柱から離れたところに, 無限遠の境界をとることができるので, 図 1 に示すような座標系 (ξ, η) を採用する. そして変換された (ξ, η) 座標面上において, 図 2 に示すように η 方向に円周を N 等分し, その格子番号を j とする. したがって円周上の格子間隔は $S=2\pi a/N$ である. いま円柱の後縁を $j=2$ とし順次左回りに $3, 4, 5, \dots$ とし, 前縁を $j=17$, そして一周して, 後縁で $N+2$ が 2 , その前の $N+1$ が 1 にそれぞれ対応させることによって接続している. ξ 方向にも格子間隔 S で分割し, 円柱表面を $i=1$ として $2, 3, \dots, i, \dots$ そして無限遠の境界 $i=M$ まで格子点をとる. そして便宜上, このような分割法を標準分割という.

また Re 数や振動数の早い場合は図 3 および図 4 に示すような円柱近傍 (物体表面 $i=1$ から $i=MH$ までの範囲) のみさらに細かく格子間隔を $(S/2)$ にする方法 (細分割) を用

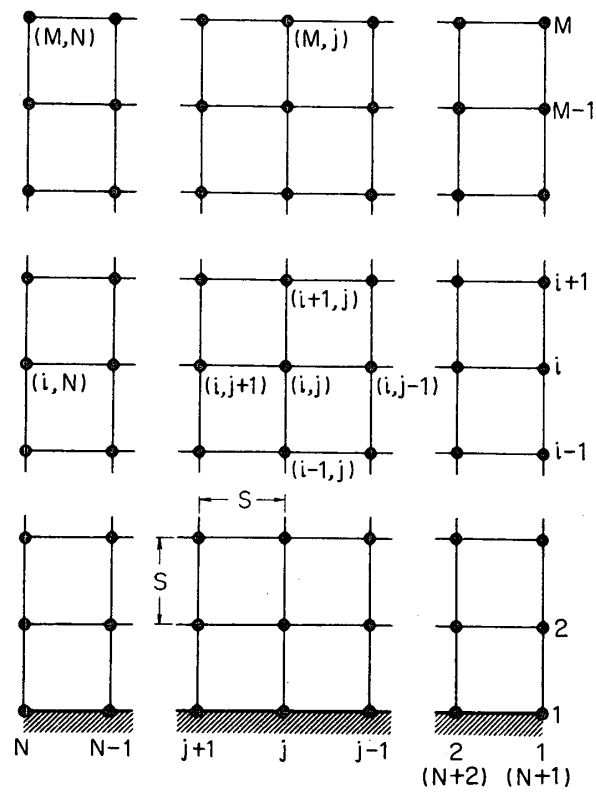
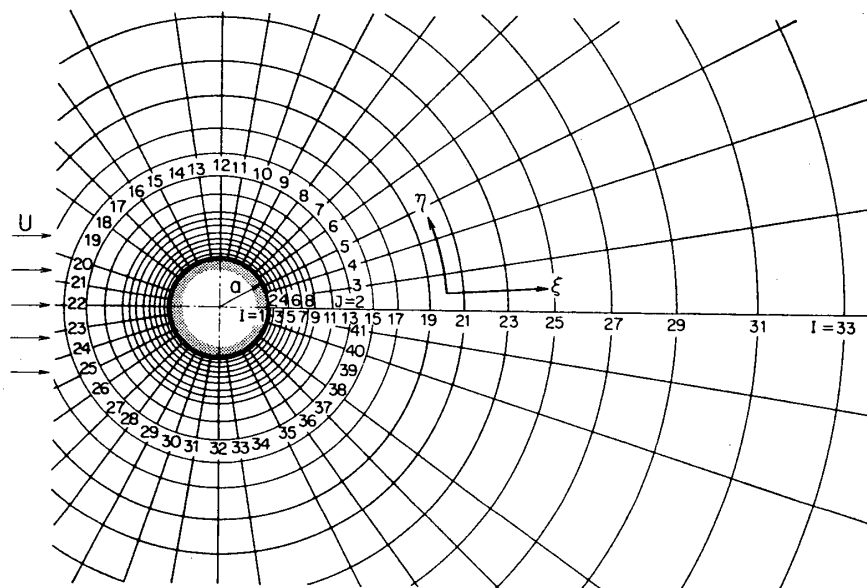


図 2 格子分割 (標準分割)

図 3 円柱まわりの流れの計算の座標系 (細分割, $N=40$, $S=\pi/20$)

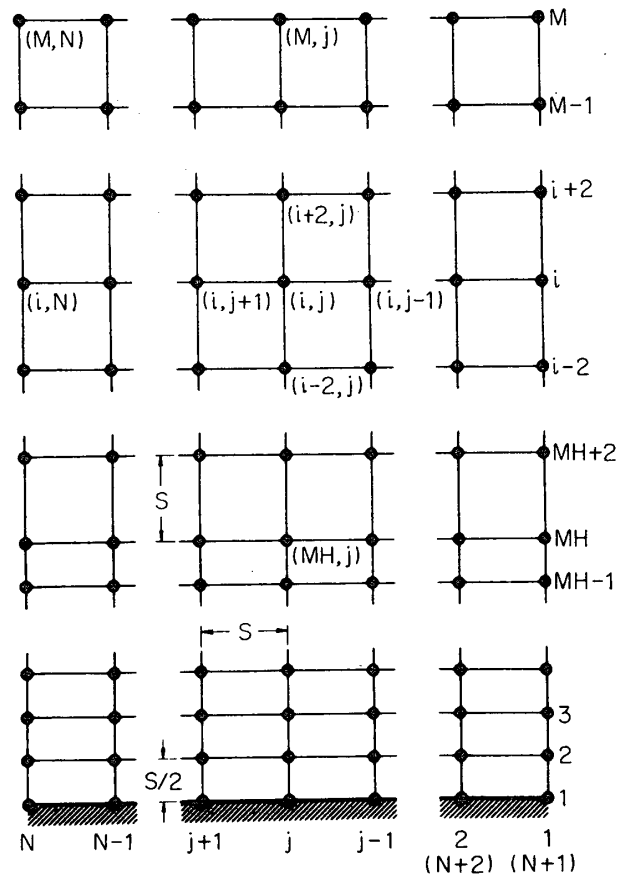


図 4 格子分割 (細分割)

いる。なお、格子の分割法や分割数の影響については 2.4 で述べる。

2.3.2 差分法 前章の基礎式を差分の形に直して ψ, ζ の値を計算するわけであるが、説明の都合上、格子の分割は図 2 に示す様な標準分割をした場合について述べる。すなわち円柱まわりの領域を $(M \times N)$ 個の格子点に分割し、各格子点における $\psi(i, j)$, $\zeta(i, j)$ の値を、各時間ステップ Δt ごとに、与えられた境界条件のもとに逐次計算をすればよい。すなわち、今時刻 t における値 $\psi'(i, j)$ および $\zeta'(i, j)$ が全てわかっているとき、渦度の式(2-6)から、時刻 $(t + \Delta t)$ における $\zeta^{t+\Delta t}(i, j)$ の値を各格子点にわたって求める。(2-6) 式の差分への直し方については、Pearson [12] によれば、数値解法の安定性の面から implicit な方法が推奨されている。すなわち、 $(\partial \zeta / \partial t)$ の値を (2-6) 式における左辺の第 2 項および右辺の時刻 t および $(t + \Delta t)$ の時刻に対応するそれぞれの値の平均値で近似して計算する。

そのため、たとえば ψ の微分形は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &\approx \frac{\psi(i+1, j) - \psi(i-1, j)}{2S} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &\approx \frac{\psi(i, j+1) - \psi(i, j-1)}{2S} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} &\approx \frac{\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) - 2\phi(i, j)}{S^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} &\approx \frac{\phi(i, j+1) + \phi(i, j-1) - 2\phi(i, j)}{S^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

などで与えられ、また ζ についても全く同様に近似すれば、結局、(2-6) 式から $\zeta^{t+\Delta t}(i, j)/\Delta t$ の値は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^{t+\Delta t}(i, j) - \zeta^t(i, j)}{\Delta t} &= \text{Re} \left[\frac{1}{2} \nabla h^2 \zeta^t(i, j) + \frac{1}{2} \nabla h^2 \zeta^{t+\Delta t}(i, j) \right] \\ &+ \frac{1}{16S^2h^2} [\zeta^t(i, j+1) + \zeta^{t+\Delta t}(i, j+1) - \zeta^t(i, j-1) - \zeta^{t+\Delta t}(i, j-1)] \\ &\times [\psi^t(i+1, j) + \psi^{t+\Delta t}(i+1, j) - \psi^t(i-1, j) - \psi^{t+\Delta t}(i-1, j)] \\ &- \frac{1}{16S^2h^2} [\zeta^t(i+1, j) + \zeta^{t+\Delta t}(i+1, j) - \zeta^t(i-1, j) - \zeta^{t+\Delta t}(i-1, j)] \\ &\times [\psi^t(i, j+1) + \psi^{t+\Delta t}(i, j+1) - \psi^t(i, j-1) - \psi^{t+\Delta t}(i, j-1)] \end{aligned} \quad (3-2)$$

ただし

$$\psi^t(i, j) = \psi_p(i, j) + \tilde{\psi}^t(i, j),$$

であり、

$$\nabla h^2 \zeta^t(i, j) = \frac{1}{S^2h^2} [\zeta^t(i, j+1) + \zeta^t(i, j-1) + \zeta^t(i+1, j) + \zeta^t(i-1, j) - 4\zeta^t(i, j)]$$

である。

この様にして、物体表面 ($i=1$) および無限遠 ($i=M$) を除く、すべての格子点上の $\zeta(i, j)$ を知れば、次にこれに対応する $\tilde{\psi}(i, j)$ は (2-7) 式から得られる。(2-7) 式を解くには、一般に良く用いられる successive overrelaxation 法を用いるのが便利である [13]。point 法に比較して収束性が良いことや誤差のばらつきが一樣なこと、時間ステップ Δt もかなり大きく取れることなどの利点をもつ successive line overrelaxation 法を用いる。

(2-7) 式を successive line overrelaxation 法によって書けば、

$$\tilde{\psi}^{(K+1)}(i, j) = \tilde{\psi}^{(K)}(i, j) + A_c [\tilde{\psi}^{(K+1)*}(i, j) - \tilde{\psi}^{(K)}(i, j)] \quad (3-3)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{(K+1)*}(i, j) &= \frac{1}{4} [\tilde{\psi}^{(K)}(i+1, j) + \tilde{\psi}^{(K+1)}(i-1, j) + \tilde{\psi}^{(K+1)*}(i, j+1) + \tilde{\psi}^{(K+1)*}(i, j-1) \\ &+ S^2h^2(i, j)\zeta(i, j)] \end{aligned}$$

であり、 $\tilde{\psi}^{(K)}(i, j)$ は格子点 (i, j) における $\tilde{\psi}$ についての K 回の繰返し計算によって得られた値 (第 K 近似値) である。また A_c は計算の収れんを早めるために導入した加速の係数であって、試行錯誤的に最適値を求めた結果、この場合 $A_c=1.4$ とする。

この様にして $\tilde{\psi}(i, j)$ は、(3-3) 式をまず j 方向に、次に i 方向に順次計算を行ない、 $\tilde{\psi}(i, j)$ の繰返し計算に対する変化量が全領域にわたって、ある一定微小値 ε_ψ (たとえば 10^{-5}) より小さくなれば、計算は収束したものと見なす。

次に、境界条件を ψ と ζ を用いて差分の形で表示しよう。まず円柱表面 ($i=1$) の条件

は式 (2-8) であるが、これは速度に対するものであるので、 ψ と ζ で表示し直さなければならぬ。すなわち

$$\psi(1, j) = C(\text{一定}) \quad (3-4)$$

ここでは、便宜上 $C=0$ とする。

さらに、 $\psi(2, j)$ を Taylor 展開すると、

$$\psi(2, j) = \psi(1, j) + \frac{\partial \psi(1, j)}{\partial \xi} \cdot \frac{S}{1!} + \frac{\partial^2 \psi(1, j)}{\partial \xi^2} \cdot \frac{S^2}{2!} + \dots$$

ここで

$$\frac{\partial \psi(1, j)}{\partial \xi} = -h_0 V_0 \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(1, j)}{\partial \xi^2} = -h_0^2 \zeta(1, j)$$

であり、 $h_0=1$ であるから、式 (3-5) から表面上の渦度 $\zeta(1, j)$ は

$$\zeta(1, j) = \frac{2[\psi(1, j) - \psi(2, j) - V_0 S]}{S^2} \quad (3-6)$$

であり、さらに精度の高い近似式としては、

$$\zeta(1, j) = \frac{3[\psi(1, j) - \psi(2, j) - V_0 S]}{S^2} - \frac{1}{2} h^2(2, j) \cdot \zeta(2, j) \quad (3-7)$$

がある。

次に無限遠の $\tilde{\psi}, \tilde{\zeta}$ の値 $\tilde{\psi}(M, j), \tilde{\zeta}(M, j)$ は、(2-11) 式を与えればよいが、実際に数値解法上の与え方は 2.4 で後述する。

2.3.3 計算過程 数値解法のために用意された (3-2), (3-3) 式などを使って、実際に計算する手順を図 5 の計算のフローチャートに従って説明する。

i) まず、境界を含めた全格子点にわたって、 $\psi(i, j)$ と $\zeta(i, j)$ の初期値を与える。たとえば、静止円柱まわりの流れの計算の場合には、円柱まわりのポテンシャル流れを初期値とし、角振動する円柱まわりの流れの場合には、すでに求めた静止円柱まわりの粘性流れ（定常解）を初期値として採用する。

ii) 時間ステップ Δt 後における $\tilde{\psi}(i, j), \tilde{\zeta}(i, j)$ の第 0 近似値として適当な推定値を仮定する。

iii) 物体表面および無限遠の境界を除き、(ii) で得た $\tilde{\psi}, \tilde{\zeta}$ を用いて、全格子点における Δt 後の $\zeta(i, j)$ の値を (3-2) 式から求める。

iv) $\tilde{\psi}$ を successive line overrelaxation の方法によって (3-3) 式から求める。すなわち、まず周方向 (j 方向) にそして半径方向 (i 方向) に順次計算を行ない、 $\psi(i, j)$ の繰返し計算による変化量が、全領域にわたって、ある微小量 $\epsilon_\psi (=10^{-5})$ より小さくなれば収れんしたものとし、次に移る。

v) (iii) で除かれた円柱表面上の $\zeta(1, j)$ を (3-6) または (3-7) 式から求める。

vi) 渦度の変化が最も激しい円柱表面上の $\zeta(1, j)$ の変化が、ある微小値 $\epsilon_\zeta (=10^{-3})$ より小さくなるまで (iii) ~ (v) の計算過程を繰返す。

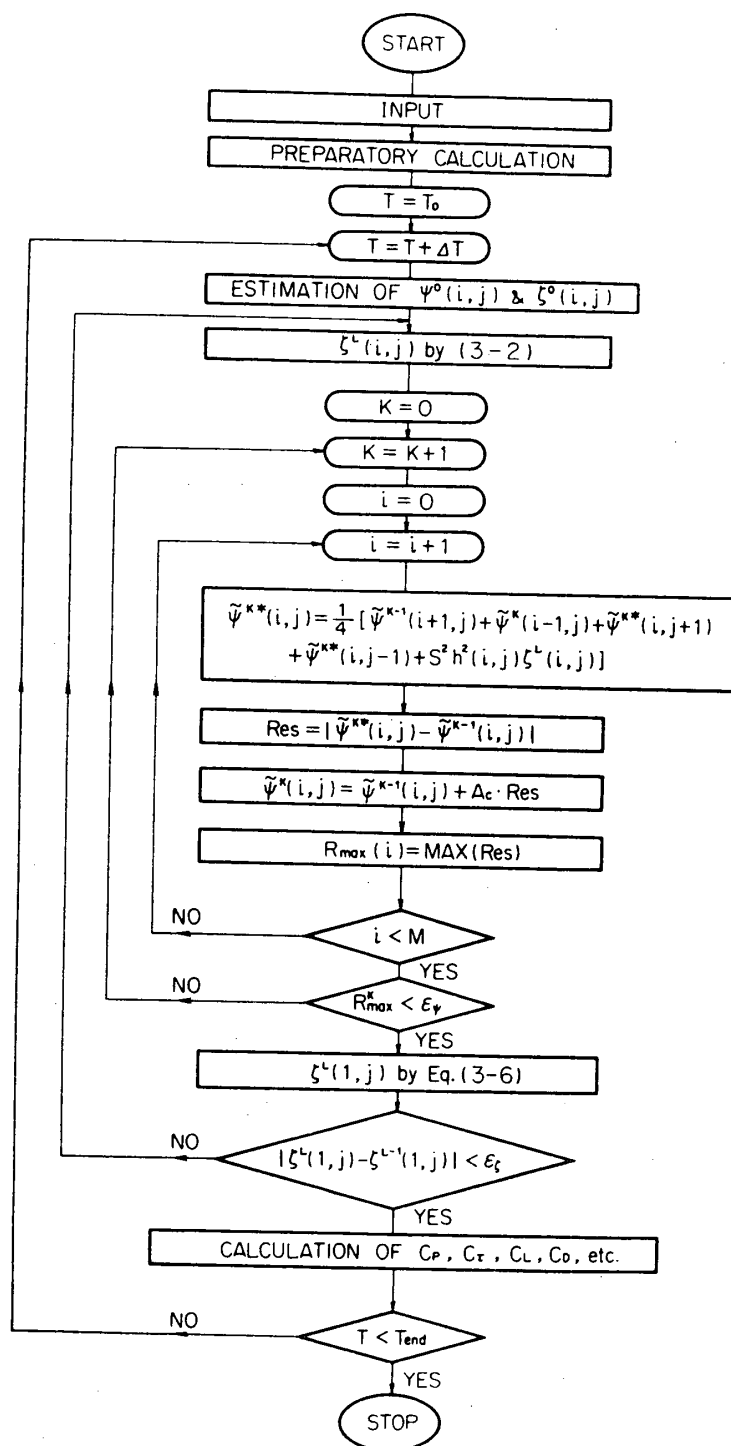


図 5 数値計算の過程

以上により時間ステップ Δt だけ進んだ計算が完了したことになる。次に、
 vii) 必要ならば得られた $\tilde{\psi}(i, j)$, $\zeta(i, j)$ の値に基づいて, (2-14), (2-15), (2-16) そして

(2-17) 式から表面上の圧力分布, 粘性せん断力, 揚力および抵抗などの空力的諸係数を計算する.

viii) 次の時間ステップ $t=t+\Delta t$ として, その時刻における新しい境界条件を与えて, (ii)~(vii) の計算過程を繰り返し計算をすればよい.

2.4 数値解法の吟味

実際に, 一連の計算に入る前に, 数値解法はあくまでも近似解法であるので, その近似度を確かめておかなければならない. すなわち格子の分割法, 時間ステップの大きさ, 差分への直し方, そして境界条件の与え方などが計算結果の精度に及ぼす影響について吟味し, そして, 計算の所要時間ができるだけ短く, かつ計算精度の高い方法を選定した.

2.4.1 格子の分割 計算領域における格子分割は計算精度に最も大きく影響する要因の一つである. もちろん格子の分割を細分化すればする程計算の精度を上げることができる. しかし計算の所要時間は, ただ格子数の自乗に比例して多くなる (実計算時間 $= 3n^2(a+3b)$ [14], ここで n は格子の数, a は乗除算, b は加減算に要する電子計算機のそれぞれの計算時間である) だけでなく, 後述のように格子の細分化に応じて時間ステップもまた細かくしなければならないので所要の計算時間は急激に増大する. そこで, 格子の分割方法の計算結果におよぼす影響について吟味するために, まず静止円柱の場合の抵抗 \bar{C}_D について比較すると表 1 のようになる. 同じ標準分割で $N=40$ (表中 No. 2) と $N=30$ (No. 3) および細分割で $N=40$ (No. 1) によって計算された抵抗 \bar{C}_D の値はそれぞれの間には若干の相違がある. 最も細かい格子に分割した $N=40$, $r_\infty=111a$ で細分割法を用いて計算した No. 1 の値は, Son & Hanratty [10] ($N=60$) の計算値ともよく合っており, 格子の分割はできるだけ細かくすることが望ましい.

また標準分割と細分割による影響については, 近く報告する楕円翼の場合からも吟味する. 翼厚比 20% の楕円翼 ($Re=80$, 迎え角 $\alpha=5^\circ$) の場合において, 翼弦に垂直に働く法

表 1 静止円柱に働く抵抗

No.	Re	Method	N	r_∞	\bar{C}_D^*	\bar{C}_L^*	\bar{C}_{DP}	\bar{C}_{Ds}	\bar{C}_D
1	40	F	40	111a	0	0	0.971	0.519	1.490
2		S	40	111a	0	0	1.037	0.526	1.563
3		S	30	535a	0	0	1.220	0.577	1.797
4		S	30	23a	1.8	0	1.166	0.558	1.724
5		S	30	23a	0	0	1.263	0.593	1.856
	40	Apelt					0.928	0.568	1.496
		Kawaguti					1.053	0.565	1.618
		Son & Hanratty					1.00	0.51	1.51
6	80	F	40	111a	0	0	0.823	0.331	1.154
7		S	40	111a	0	0	1.024	0.357	1.381

F : 細分割, S : 標準分割, \bar{C}_D^* , \bar{C}_L^* は本文式 (2-11) の値.

線力 C_N を標準分割 ($N=30$) と細分割 ($N=30, MH=9$) との二つの方法で計算し, 図 6 に比較してある. 図において, 時間 $t=0\sim 1.6$ は標準分割で計算し, 時間 $t=1.6\sim 2.6$ は細分割で計算を継続したものであり, $\Delta p(2\pi)$ は翼面上の圧力を算出するために, 翼表面上に沿って一周積分したときに生ずる圧力差 $\Delta p(2\pi) = p(2\pi) - p(0)$ であり, 物理的には当然 $\Delta p(2\pi) = 0$ でなければならないが, 数値計算では格子の分割法や時間ステップなどが不適当であると, $\Delta p(2\pi) = 0$ ならないで, ときには非常に大きな値となる場合もある. この $\Delta p(2\pi)$ はその計算の精度を表わすものと考えられる. 図によると, 標準分割の場合には, $\Delta p(2\pi)$ はかなり大きな値となるが, 細分割にすると, 急激に $\Delta p(2\pi)$ は 0 に近づき, また計算された法線力 C_N の値は, 後述する実験によって得られた本実測値ともよく一致している.

したがって後者の方法では, 格子点の数をそれほどふやさないで (この場合, 930 個の格子点から 1,050 個の格子点と 120 格子点の増加のみ) 精度を上げることができるので, 細分割の方が精度的にもきわめて有効なことがわかる.

次に非定常流の場合として, 角振動する円柱 ($Re=40, Stc=df_c/U=0.1, \Delta V=0.2$) に働く揚力 C_L を $N=30$ と $N=40$ でいずれも標準分割の場合について求め比較すると, 図 7 のように, 揚力振幅で約 6%, 位相差で約 10% 程度の相違が見られる.

2.4.2 境界条件の与え方 数値計算

算を行なうに当り, 物体表面および物体から十分遠く離れた領域における境界条件の与え方について吟味しよう.

a) 物体表面の境界条件; この条件は, (3-4) 式と (3-6) または (3-7) 式によって与え

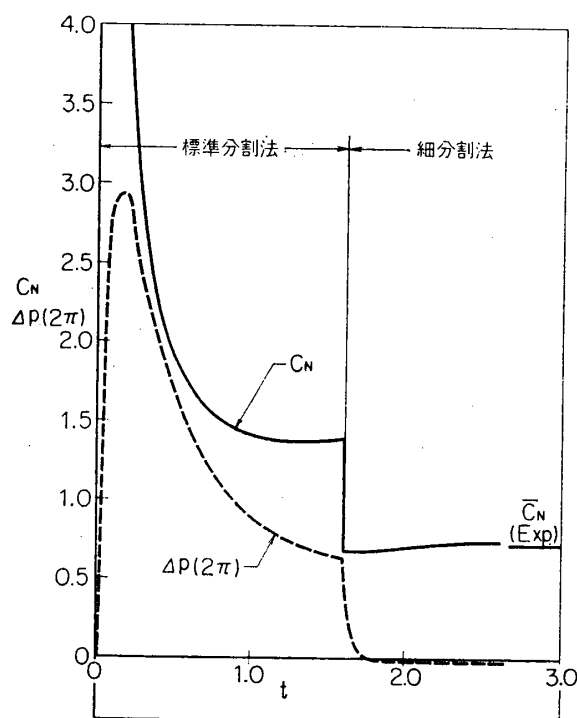


図 6 格子分割法の影響 (迎え角 $\alpha=5^\circ$ の楕円翼 (20% 翼厚) の場合 $Re=80, \alpha=5^\circ$)

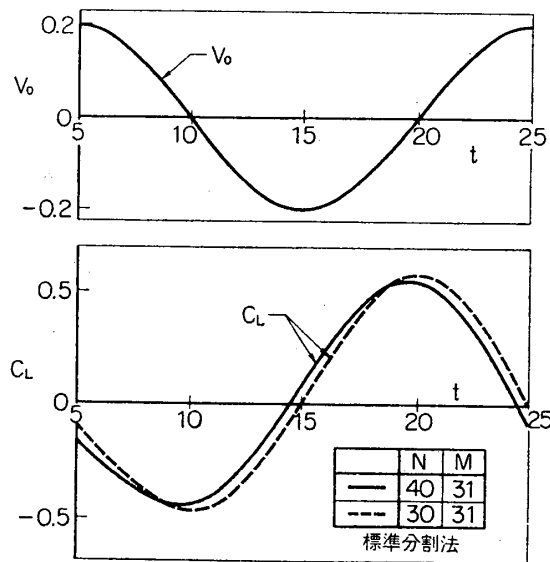


図 7 格子分割数 N の影響 (角振動する円柱の場合, $Re=40, Stc=0.1, \Delta V=0.2$)

られるが、渦度 $\zeta(1, j)$ を与える (3-6) 式と (3-7) 式により計算結果にいかなる相違が生ずるかを吟味する。

いま角振動する円柱 ($Re=40$, $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$) の場合、変動揚力に及ぼす影響を図 8 に、また翼弦に直角方向に並進振動する 20% 翼厚の楕円翼 ($Re=40$, 迎え角 $\alpha=0^\circ$,

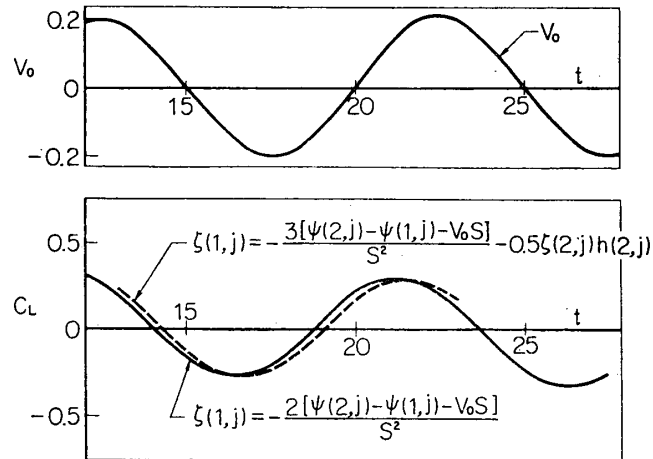


図 8 表面上渦度の式による影響 (角振動する円柱の場合 $Re=40$, $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$)

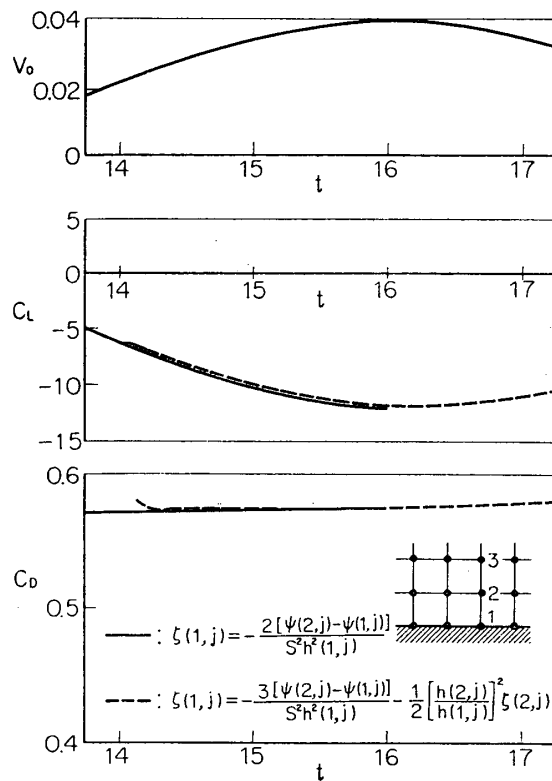


図 9 表面上渦度の式による影響 (並進振動する楕円翼の場合 $Re=40$, $\alpha=0^\circ$, $k=1.0$)

無次元振動数 $k=2\pi fC/U=1.0$; C 翼弦長) の場合を図 9 に示す. いずれの場合でも, 変動揚力 C_L や変動法線力 C_N における (3-6) 式と (3-7) 式による相違はわずかであり, この場合いずれの式を用いてもよく, この場合, より式の簡単な (3-6) 式を用いる.

b) 無限遠における境界条件; 次に物体から十分遠く離れた領域 ($r=r_\infty$) における ψ と ζ の値 ($\psi_\infty, \zeta_\infty$) について吟味する. $\psi_\infty, \zeta_\infty$ の値として, Oseen の近似式から求めた漸近解を用いる方法は, 定常流れの場合に限って, すでに川口 [2] や Keller と高見 [6] によって行なわれている. しかしこの方法では, 境界条件の式 (2-11) が, すでに求むべき定常揚力係数 \bar{C}_L および定常抵抗係数 \bar{C}_D を含んでいるので, 実際の計算に当っては, \bar{C}_D, \bar{C}_L に対する繰返し計算を行なうこととなり, 特に非定常流れの場合には, 計算が一層煩雑となる.

そこで, もしこれら \bar{C}_L と \bar{C}_D の値を定数 (たとえば $\bar{C}_L=0, \bar{C}_D=0$ にする) と仮定しても, 計算結果に及ぼす影響が小さいならば, この繰返し計算を省略することができるので, 計算は非常に簡単化される. このようなことや r_∞ の値をどの程度大きくとるべきかなどを吟味すべくまず静止円柱まわりの流れ ($Re=40$) について, (2-11) 式中の $\bar{C}_D=0$ として, r_∞ を変化させた場合や $\bar{C}_D=1.8$ として, $r_\infty=23a$ とした場合に計算された抵抗係数 \bar{C}_D の値がさきの表 1 に比較してある. 表によるとそれぞれ多少の相違はあるけれども, Apelt [5], 川口 [2], や Son & Hanratty [10], の計算値をも参考にして, 結局, 実際の計算に当っては, r_∞ の値を大きくして $\bar{C}_D=0$ とする方が有効のようである.

また (2-11) 式中 \bar{C}_L についても, 同様に定常回転をしている円柱 ($Re=40, \Delta V=0.2$, 標準分割 $N=30, r_\infty=535a$) を例として調べる.

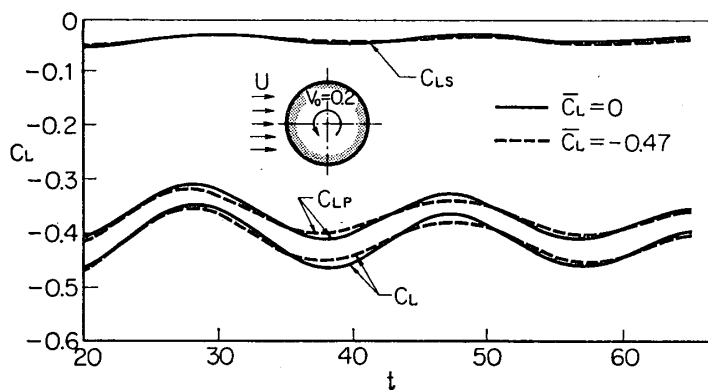


図 10 無限遠の境界条件の影響 (定常回転する円柱の場合, $Re=40, V_0=0.2$)

図 10 には, (2-11) 式中の $\bar{C}_D=0$ として, $\bar{C}_L=0$ と -0.47 の二つの場合につき, それぞれ計算した揚力 C_L が比較してある. 回転円柱の後流にはカルマン渦列が生じているため, 揚力 C_L はその定常分 \bar{C}_L と, それを中心としてストロハル数 $St_k=0.105$ で変動する変動分 \tilde{C}_L とから成っている. 図によると $\bar{C}_L=0$ と, $\bar{C}_L=-0.47$ と仮定したことによる相違はきわめて小さく, 特に定常分 \bar{C}_L に対してはほとんど影響のないことがわかる. そこで次に (2-11) 式中 $\bar{C}_L=0, \bar{C}_D=0$ と仮定して, 無限遠を $r_\infty=111a$ と $r_\infty=535a$ とした二つ

の場合につき、角振動する円柱 ($Re=40$, $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$, 標準分割 $N=30$) に働く揚力 C_L と抵抗 C_D の計算結果を図 11 に示す. C_L および C_D の振幅と位相はいずれもよく一致している. ただし, この計算ではまだ時間 $t \sim 25$ で, 渦が十分下流まで流れておらず, 無限遠における境界条件の影響はあまり現われていないことも考えられるけれど, r_∞ に関しては, できるだけ大きくとり, 少なくとも $r_\infty > 100a$ に選ぶと良いようである.

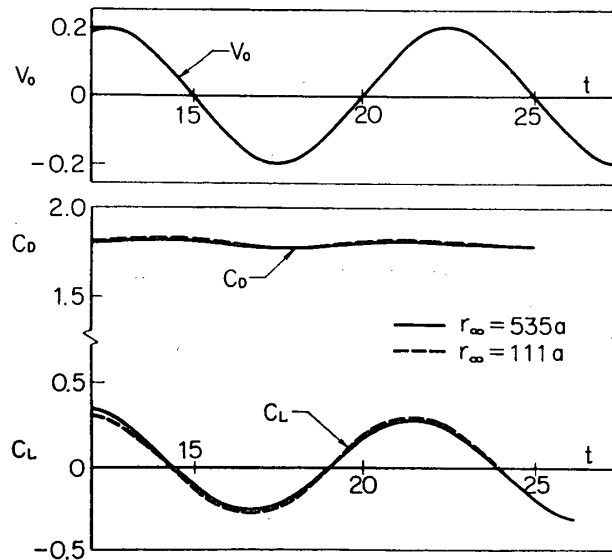


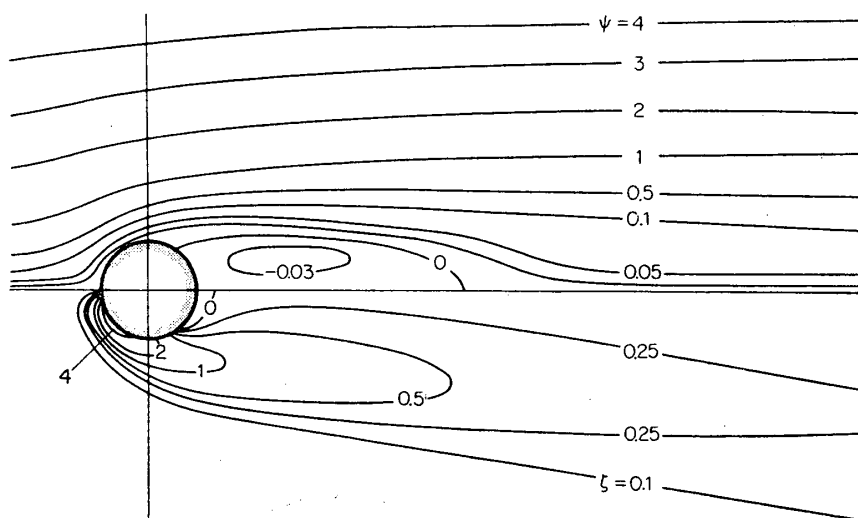
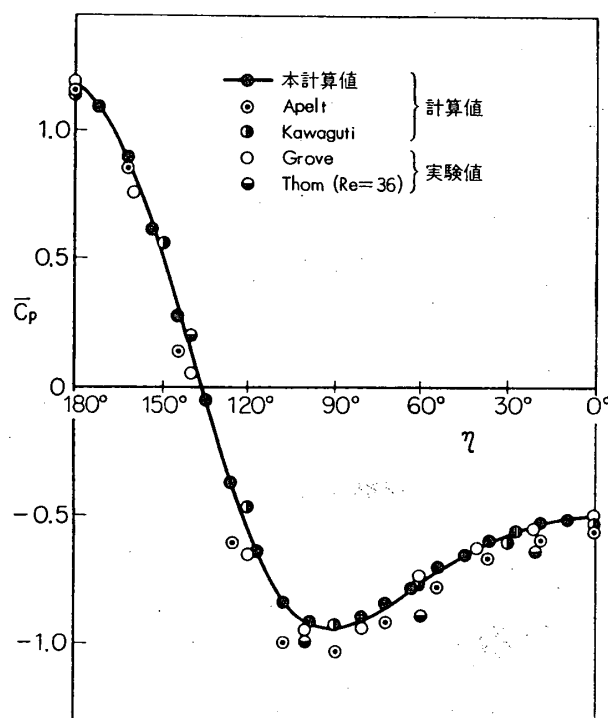
図 11 無限遠の距離 r_∞ の影響 (角振動する円柱の場合 $Re=40$, $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$)

2.5 計算結果とその考案

数値解法によって求められた静止および角振動する円柱まわりの流れに対する計算結果について考察を加える.

2.5.1 静止円柱まわりの流れ 一様流中におかれた静止円柱まわりの流れを $Re=20$, 40 , および 80 の場合について求めた. 計算はいずれも円柱まわりのポテンシャル流れを初期値として与えた. また $Re=80$ の場合に, $Re=40$ につき得られた解を初期値として与えても, ポテンシャル流れを初期値とする解とよく一致した.

ここでは, そのうち, $Re=40$ の場合の計算結果を図 12~15 に示す. まず図 12 には, 静止円柱まわりの流線 ψ と渦度分布 ζ とが流れ方向に上下対称であるので, 上, 下それぞれ半分ずつ示してある. この場合, 円柱後方に双子渦が付着しており, これらは Apelt [5] や川口 [2] らの計算結果ともよく合致している. また円柱表面上の静圧分布 $\bar{C}_p(\eta)$ は図 13 に示すように, 他の計算値や Grove [15] の実測値とも良く合っていることがわかる. さらに, 円柱表面上の粘性によるせん断力分布 $\bar{C}_\tau(\eta)$ は図 14 に示すように Re 数が異なっているので直接比較できないが, Son & Hanratty [10] ($Re=115$) の実測値と定性的にはよく一致している. 図 15 は円柱に働く抵抗 \bar{C}_D の計算値を他の計算値や実測値と比較したものである. 本計算値には格子の分割法や分割数によって若干相違が見られるが, $Re=20 \sim 40$ の

図 12 静止円柱まわりの流れ ($Re=40$)図 13 静止円柱の表面上圧力分布 ($Re=40$)

範囲ではほぼ実測値や Thom [1], 川口 [2] そして Apelt [5] の計算値とも合っており, $Re=80$ の場合はややちらばっているが, 実験ではすでに円柱後流にカルマン渦列が生じているにもかかわらず, 本計算では双子渦であることを勘案すると, $Re=80$ の計算値は後述する本実験による実測値や Tritton [16] の実測値とも大体一致していると見做することができる.

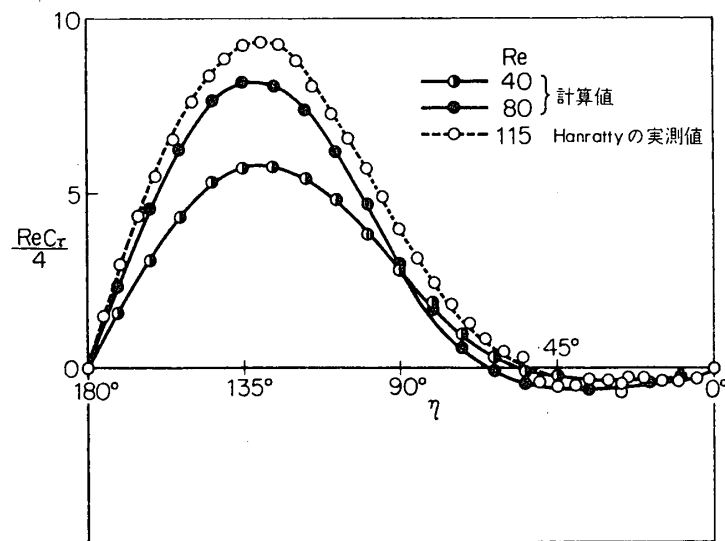
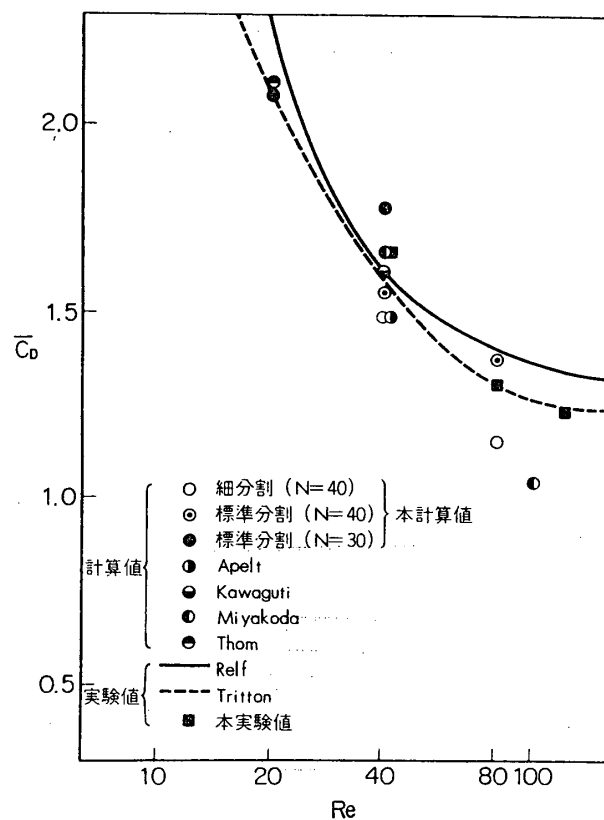
図 14 静止円柱の表面上粘性せん断力分布 ($Re=40$ & 80)

図 15 静止円柱の抵抗

以上の比較検討によると、ここで用いた数値解法が精度の観点から十分満足すべきものであることが立証される。

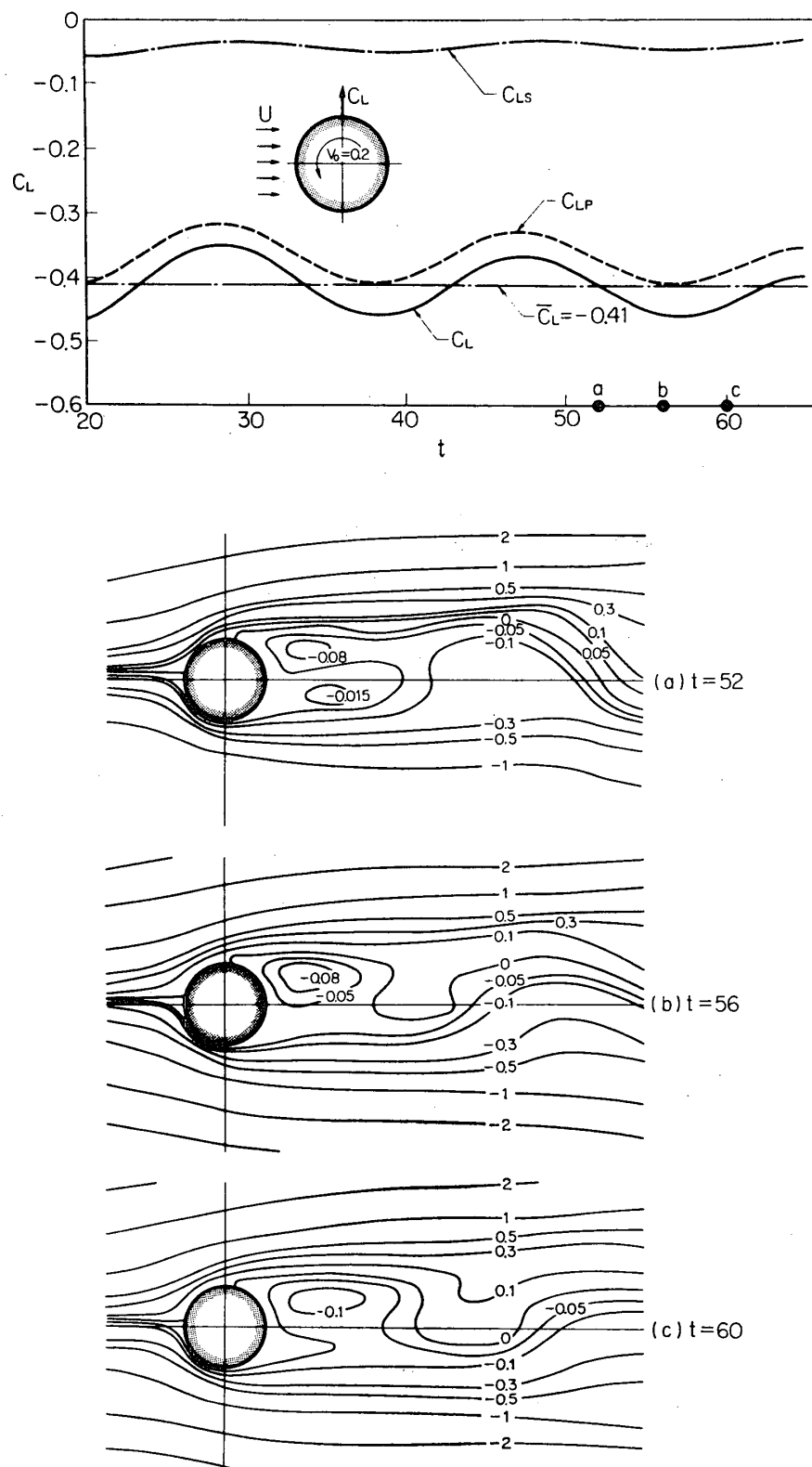


図 16 定常回転する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=40$, $Stc=0$, $\Delta V=0.2$)

2.5.2 角振動する円柱まわりの流れ 一様流中におかれた円柱を無次元振動数 $St_c (\equiv f_c d/U; f_c$ は強制振動数) $= 0 \sim 0.2^*$ でその中心軸まわりに強制的に角振動させた場合、円柱まわりの流れの時間的変化を、さきに求めた静止円柱まわりの流れを初期値として計算す

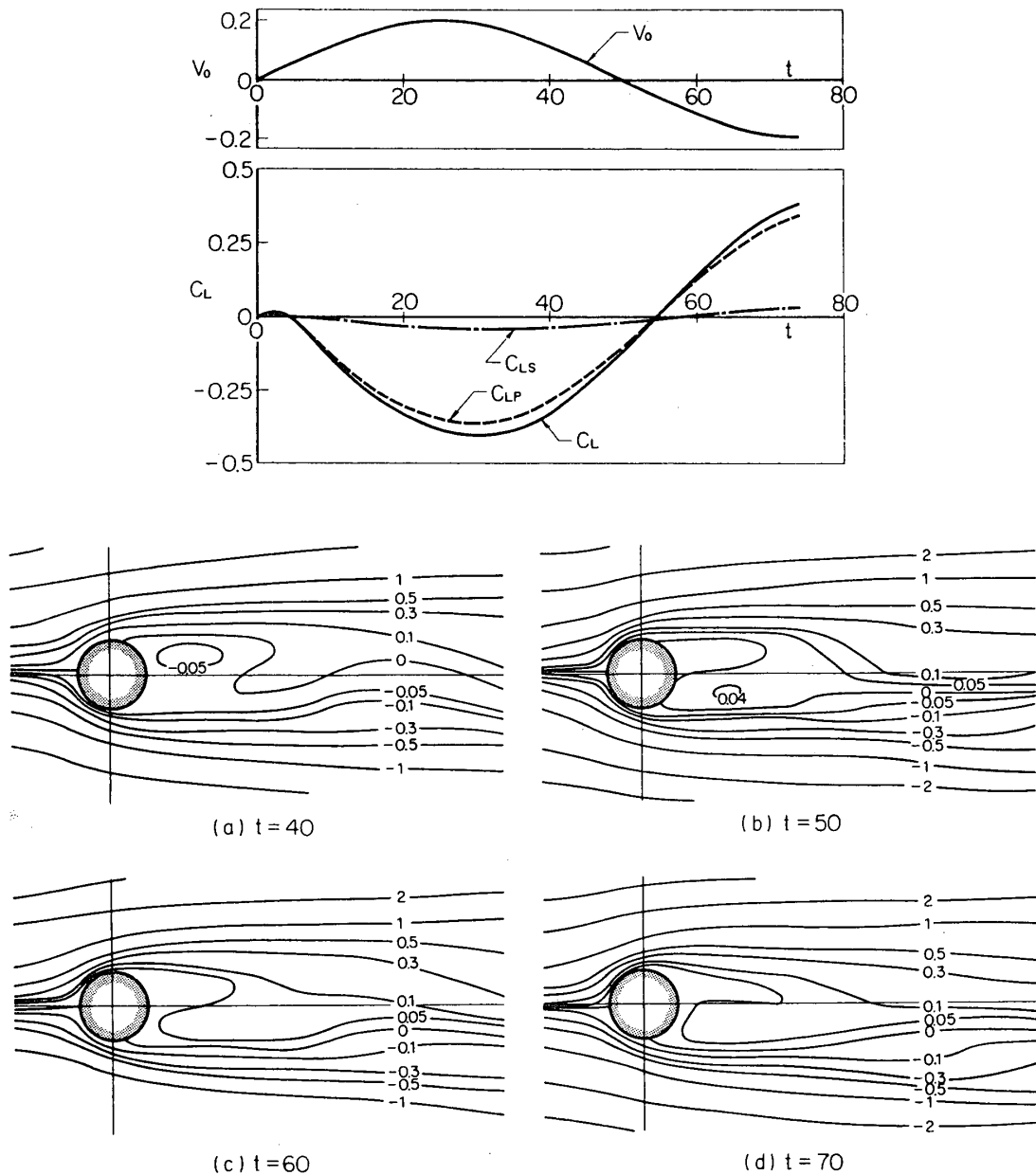


図 17 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=40, St_c=0.02, \Delta V=0.2$)

* 本計算における円柱の強制振動数 St_c の範囲は実機におけるフラッタの振動数が reduced frequency $k (\equiv 2\pi f C/U; C$ 翼弦長) として高々 1 程度であり、またカルマン渦列のストロハル数は $St_k (\equiv f_k d/U; f_k$ はカルマン渦列の周波数) $= 0.1 \sim 0.2$ であることを考慮して、 St_c を変化させる範囲は $St_c=0 \sim 0.2$ とする。

る。すなわち、一様粘性流れの中におかれた円柱が、時刻 $t=0$ から急に正弦関数的に角振動を始めたことに相当する。その変動周速の振幅 ΔV を、一様速 U の 20%~100% に変化させながら、角振動させても、 $Stc=0\sim 0.2$ の範囲では、計算された変動揚力の振幅は、周速振幅 ΔV にほぼ比例して増加し、位相は全く同じであった。それゆえ、以下主として $\Delta V=0.2$ の場合について計算する。

a) $Re=40$ の場合。まず $Re=40$, $\Delta V=0.2$ そして $Stc=0^*$ すなわち左廻りに定常回転

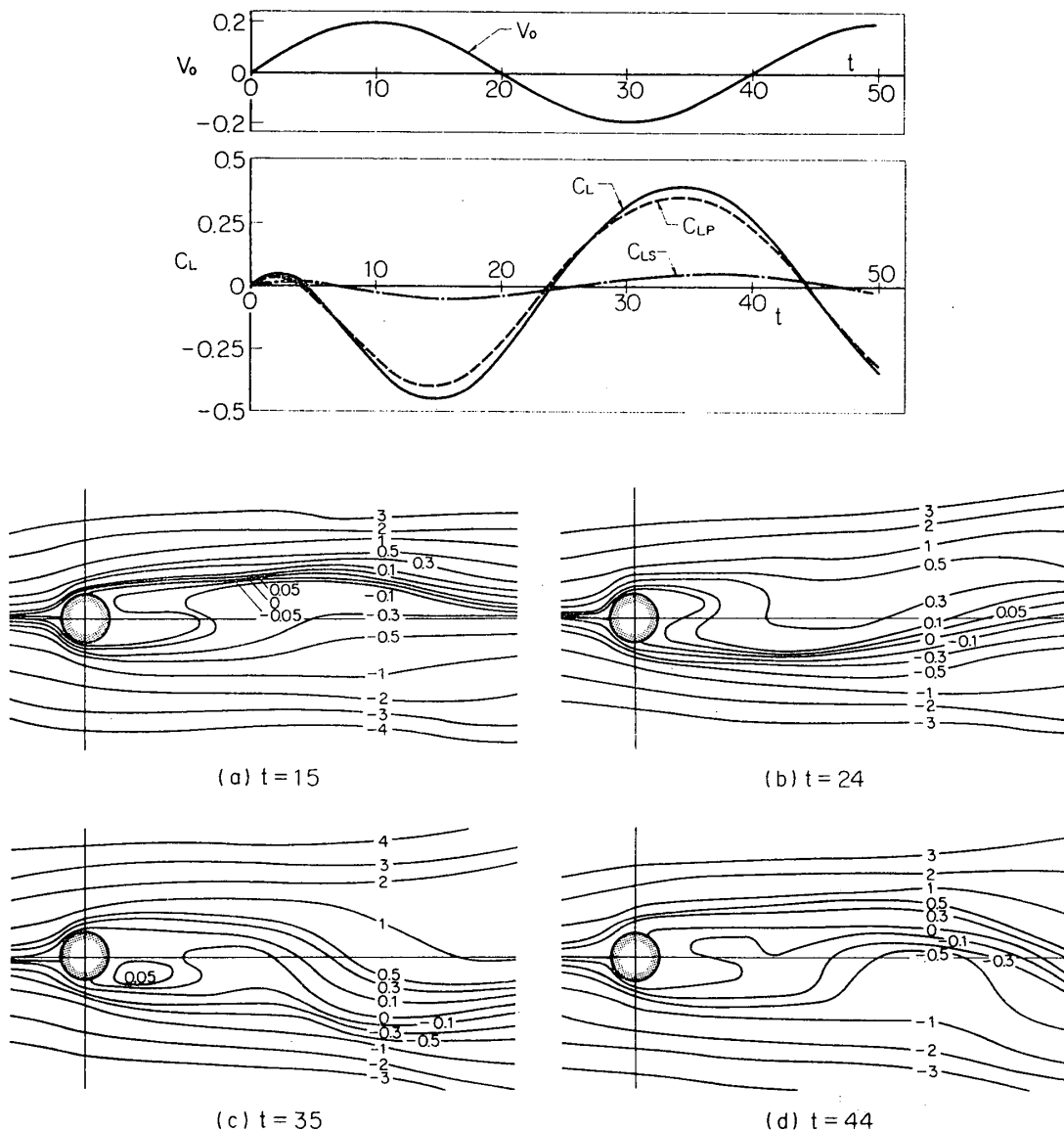


図 18 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=40$, $Stc=0.05$, $\Delta V=0.2$)

* 本計算では $\Delta V = \pi \Delta \theta Stc = (\text{一定})$ となるように $\Delta \theta$ と Stc を変化させるので、 $Stc=0$ では振動角幅 $\Delta \theta \rightarrow \infty$ となることに相当し、いわゆる一方向に定常回転することを示している。

する場合、円柱に働く揚力および円柱まわりの流線の計算結果を図 16 に示す。図によると円柱後流には一定の周期 (ストロハル数 $St_K=0.105$) を持つカルマン渦列が生じており、円柱に働く揚力 C_L は図 16 に示すように、定常分 $\bar{C}_L=-0.41$ (上向きを正とする) とカルマン渦列によって誘起される変動分 (振幅 $|\tilde{C}_L|\approx 0.04$, ストロハル数 $St_K=0.105$) から成っている。一般に静止円柱では $Re=40$ のような低 Re 数の場合、後流にカルマン渦列は生じないはずであるが、この場合には、円柱を回転すると流れの非対称性によってカルマン渦列が図 16 のように生じたものと推定される。

次に円柱が $Re=40$ の一様流中で $\Delta V=0.2$ で角振動する場合を考える。いま強制振動数が $St_c=0.02$ および 0.05 ときわめて小さい時の流れの様子と揚力変化の計算結果をそれぞれ図 17, 18 に示す。両図において円柱後流にはカルマン渦列は生じておらず、ただ、渦が強制振動数 St_c で後流へ放出されており、このため揚力も St_c の振動数ではほぼ準定常に近い (位相差 $\phi_L^*\approx -20^\circ$) 状態で正弦関数的に変動していることがわかる。また $Re=40$ のように低い Re 数の場合でも、粘性せん断による揚力成分は図 18(b) に示すように非常にわずかで 15% 以下であり、圧力による揚力成分がほとんどであることがわかる。

次に、 $St_c=0.1$ の場合 ($Re=40$, $\Delta V=0.2$) の計算例を図 19 に示す。渦は、 $St_c=0.1$ の周波数で円柱から後流に放出され、かなり明瞭な渦列が形成されている。この場合揚力は、振幅 $|C_L|\approx 0.55^{**}$ と大きくなり、強制振動数 $St_c=0.1$ と同じ振動数で変動し、位相差は約 80° の位相遅れ ($\phi_L=-80^\circ$) を示している。さらに角振動の振動数を早くして、たとえば $St_c=0.2$ とすると、図 20 に示すように、渦列は $St_c=0.2$ で円柱より放出されており、後流渦列の様相はかなり明瞭となっている。しかし、揚力の変動振幅は $|C_L|\approx 0.22$ とかなり小さくなっており、位相は準定常の揚力変化に対して $\phi_L=-125^\circ$ と大きく遅れている。

なお Re 数のさらに低い場合の例として $Re=20$ で $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$ の場合の計算結果を図 21 に示す。この場合たとえ円柱を角振動させても渦列は全く生じておらず、円柱近傍の流れのみ角振動に引きづられているにすぎない。

b) $Re=80$ の場合。 まず、 $Re=80$ で一定回転させた場合を ($St_c=0$, $\Delta V=0.2$) を図 22 に示す。 $Re=40$ の場合と同様、後流には、カルマン渦列が生じ、しかもその渦列はより一層発達しているのが明瞭に観察される。渦列のストロハル数 St_K は約 $St_K\approx 0.12$ で、渦列によって誘起される変動揚力もかなり大きく、 $|C_{LK}|=0.1$ 程度に達している。次に、振動数 $St_c=0.02$ とゆっくり円柱を角振動させると、図 23 に示すように円柱の後流には、円柱の強制振動 St_c とは無関係な周波数 St_K をもったカルマン渦列が生じている。図の揚力 C_L は強制振動による比較的ゆっくりした周期 ($T=100$) で変化する揚力波形のうえに、カルマン渦列によって誘起される短い周期 ($T\approx 16$) の変動揚力 $|C_{LK}|$ が重畳しており、このような現象は後述の本実験においても観察される。

* 位相差 ϕ_L は、準定常的に考えたとき、円柱に働く揚力の変化を基準にとる。したがって、この場合、周速とちょうど反位相にある状態が位相差 0 となる。

** 揚力振幅 $|C_L|$ の計算値は、たとえば図 25 を見てもわかるように、一定にならないので、ここでは一応平均値をとった。

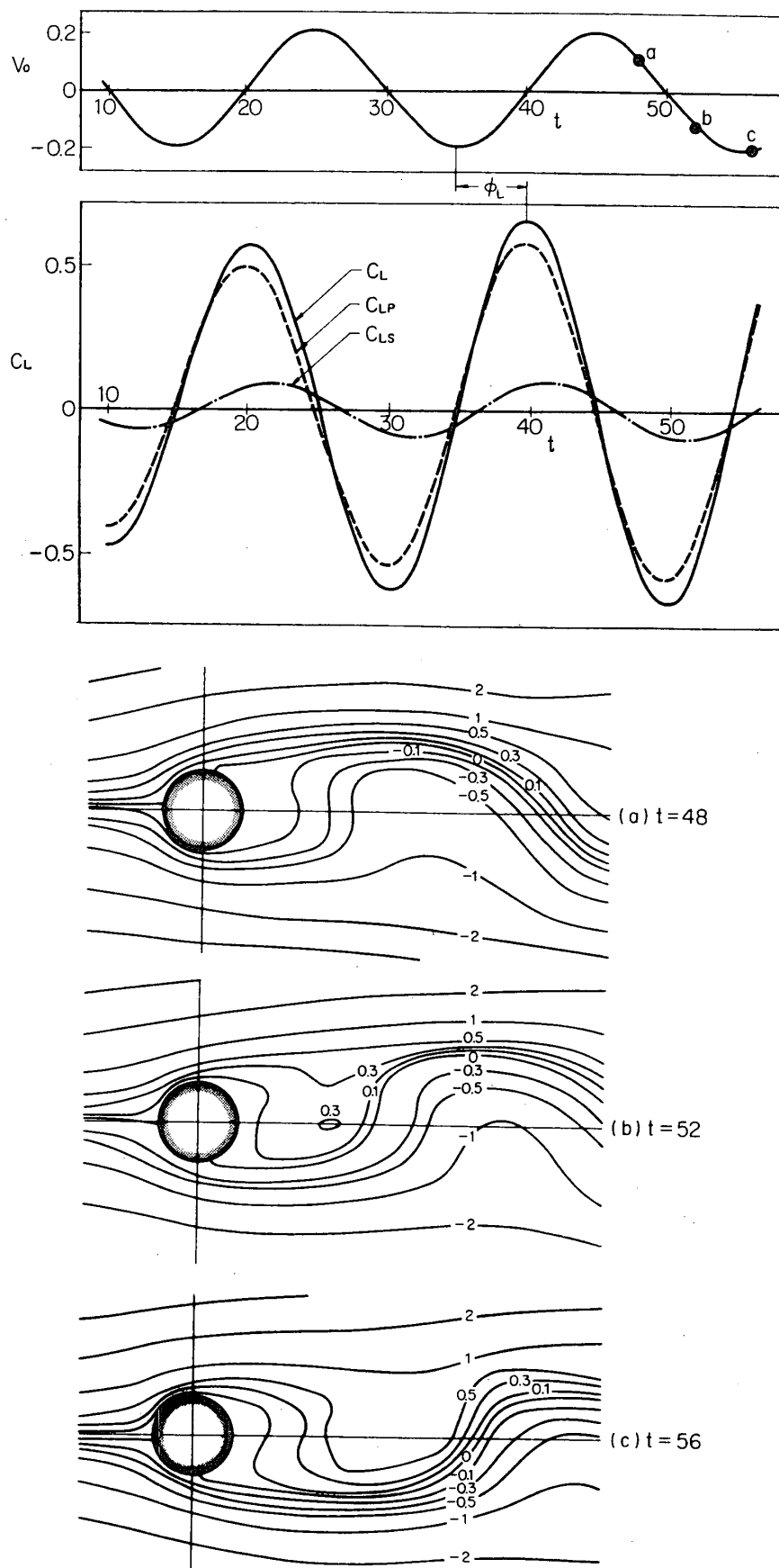


図 19 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=40$, $St_c=0.1$, $\Delta V=0.2$)

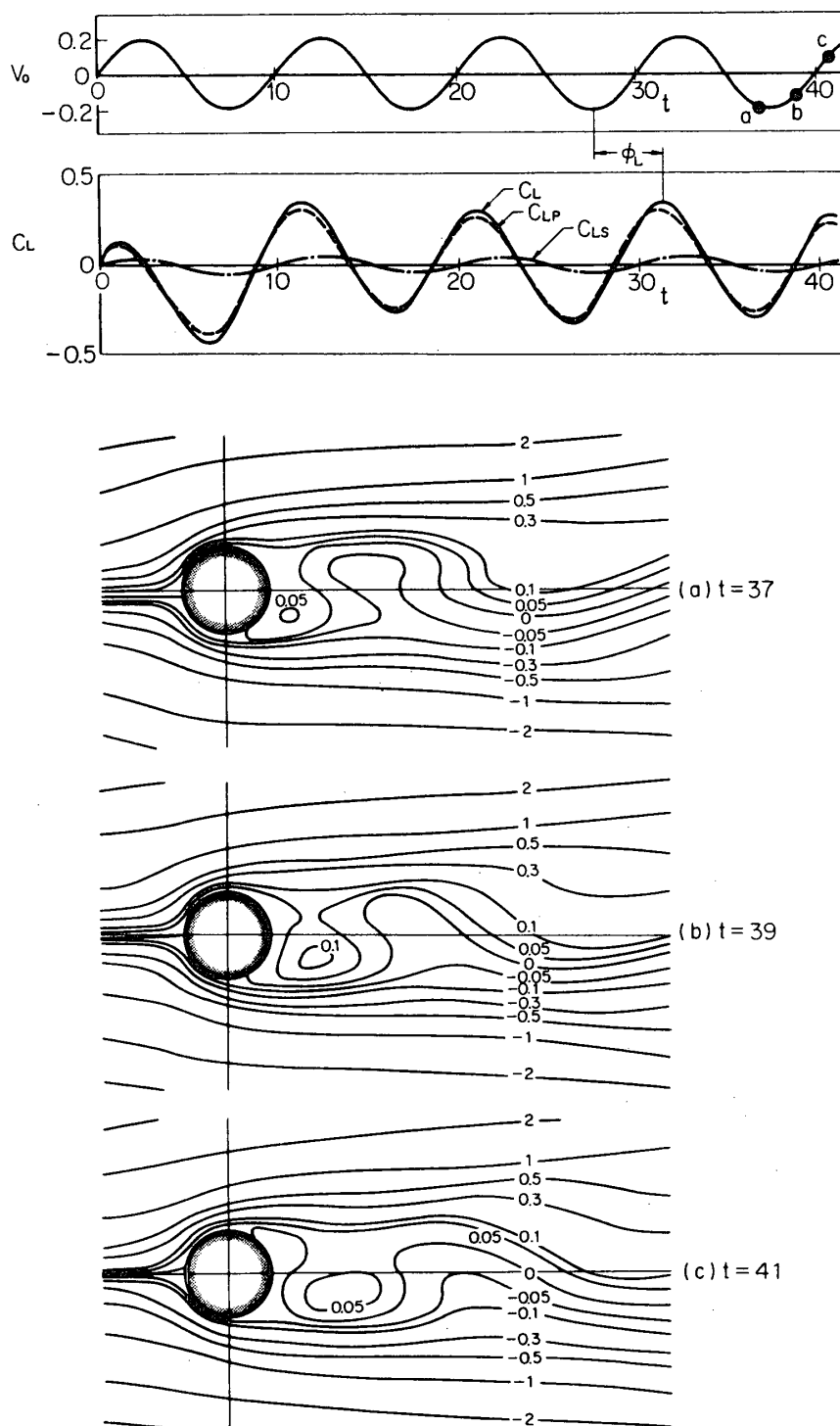


図 20 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=40$, $Stc=0.2$, $\Delta V=0.2$)

同じ強制振動数 $Stc=0.02$ でもさきに述べたように (図 17 参照) $Re=40$ ではカルマン渦列は全く発生しないが, $Stc=0$ の定常回転では $Re=40, 80$ いずれの場合にもカルマン

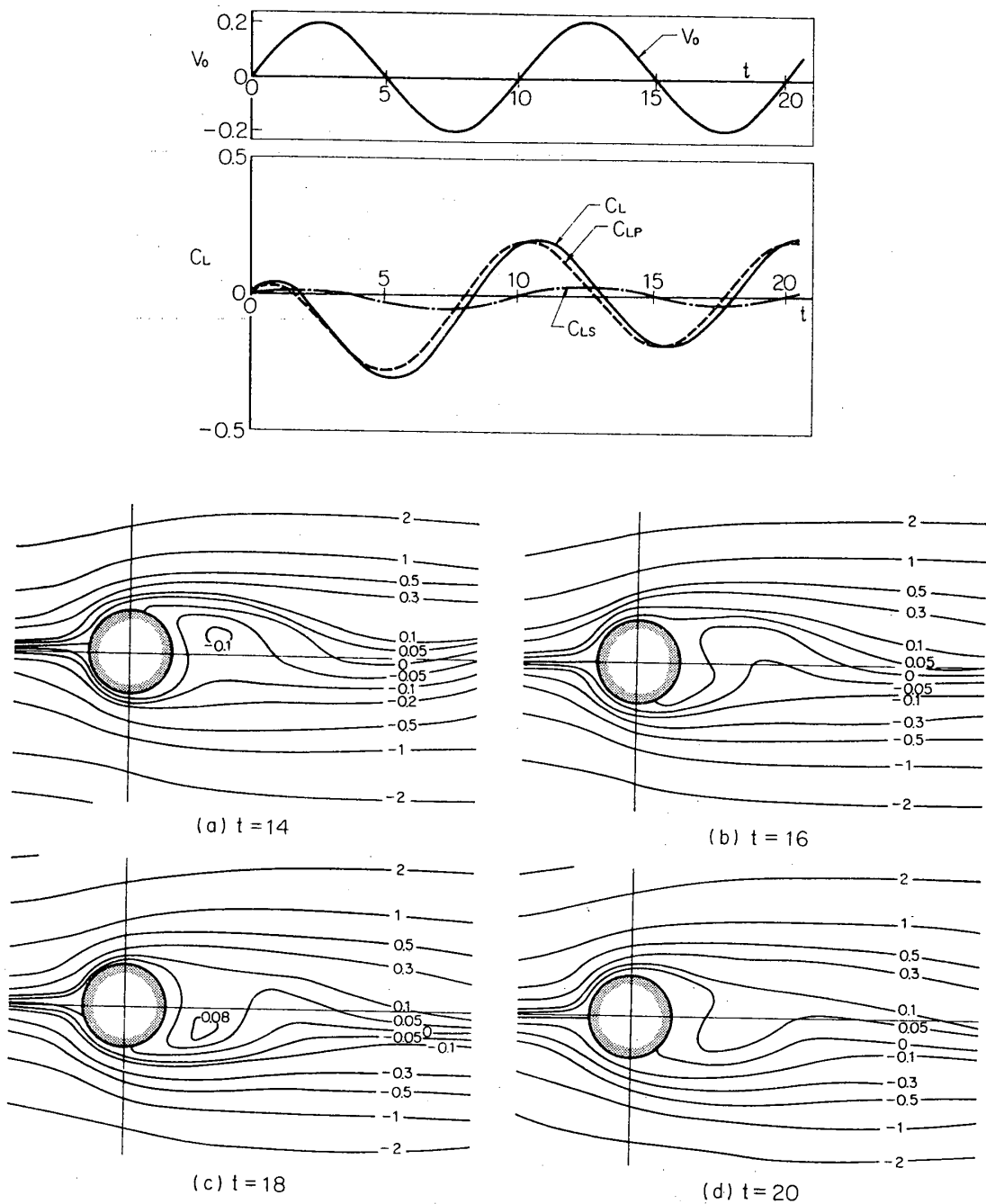


図 21 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=20$, $Stc=0.2$, $\Delta V=0.2$)

渦列が生じている。これらのことから、カルマン渦列発生に必要な攪乱（この場合、円柱を角振動もしくは、回転させること）の大きさは Re 数によって相違することがわかる。

さらに、 $Stc=0.1$, 0.15 と円柱を早く振動させると、それぞれ図 24, 25 に示すようにもはや円柱後流の渦列の周波数は、強制振動のそれと一致し、いわゆる *synchronization* を起している。揚力変化の振幅は $|C_L| \approx 0.5$ と大きく、その位相差は Stc が大きくなると

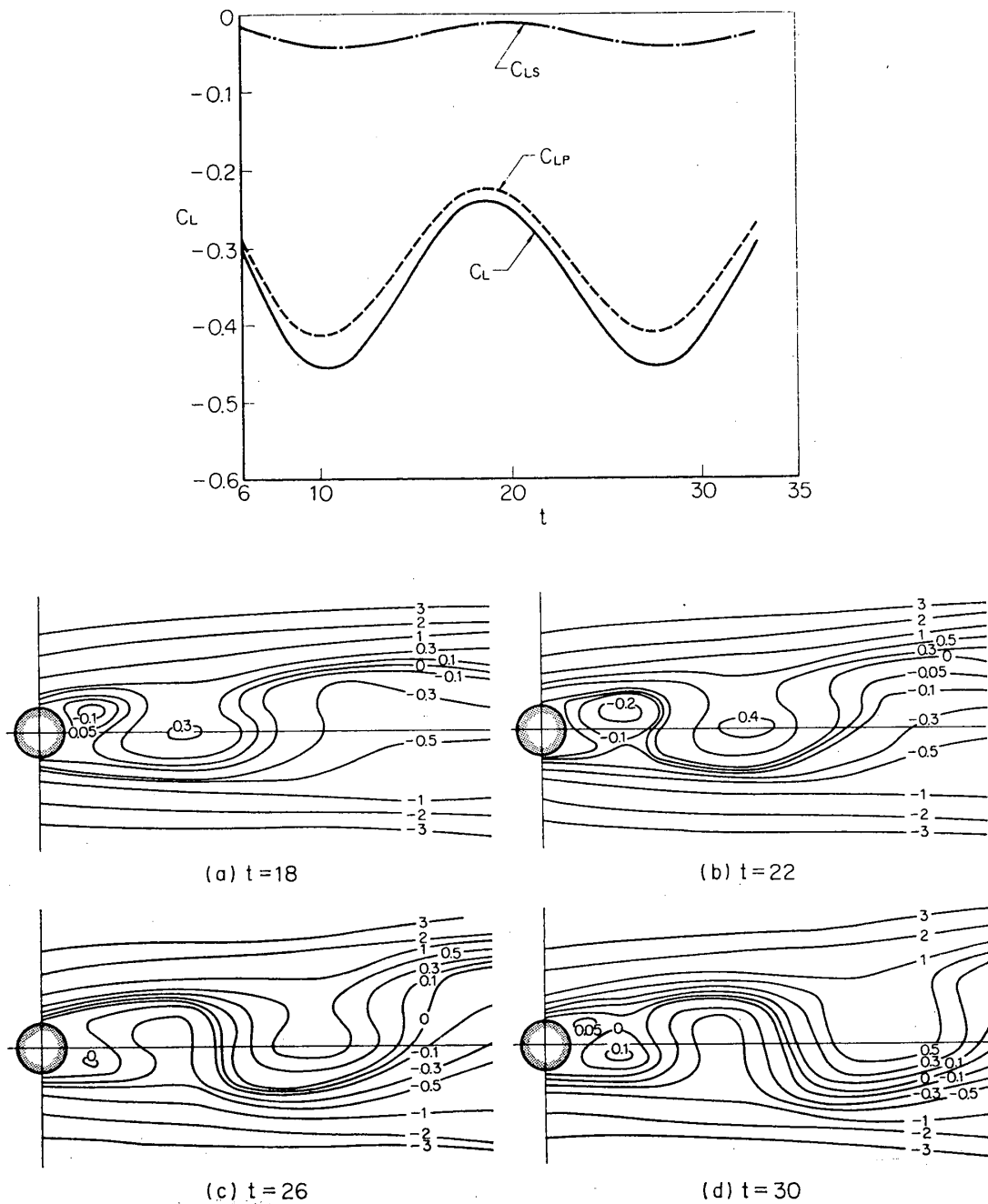


図 22 定常回転する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=80$, $St_c=0$, $\Delta V=0.2$)

$\phi_L \approx -60^\circ \sim -100^\circ$ と次第に遅れている。また $St_c=0.2$ では、図 26 に示すようにやはり強制振動数に等しい周波数で渦は吐き出され、明瞭な渦列が形成されている。しかし円柱に働く揚力は $|C_L| \approx 0.3$ と比較的小さいが、位相は一層大幅に遅れて $\phi_L \approx -160^\circ$ である。

以上、円柱を角振動させた場合、円柱まわりの流れの様相 (ψ) の時間的变化と円柱に働く揚力 C_L の時間的变化の計算結果を比較検討した。その結果、揚力 C_L はほぼ正弦関数的に

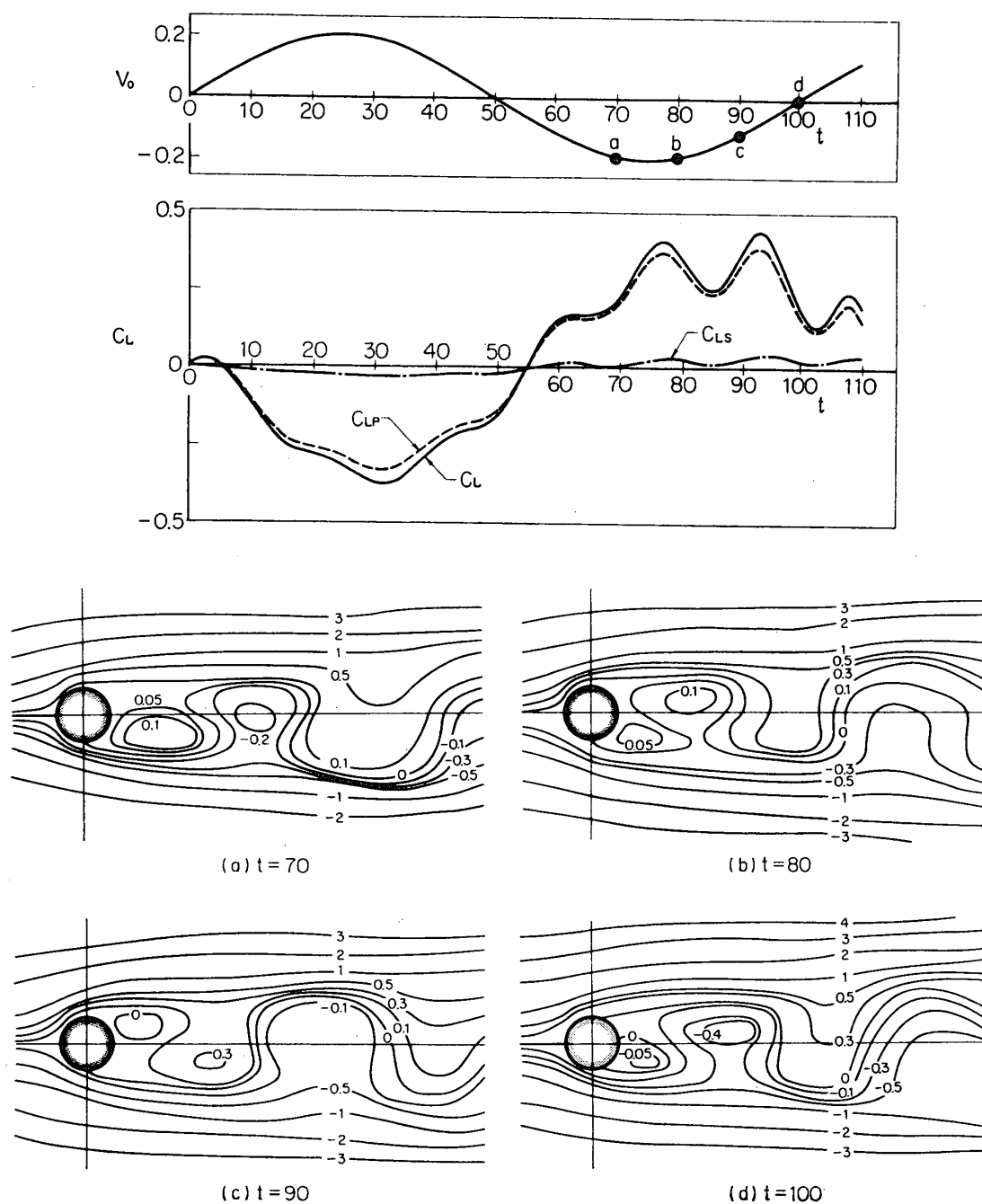


図 23 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=80$, $Stc=0.02$, $\Delta V=0.2$)

変化するけれども、図 25 に見るように角振動を開始してからかなり時間を経ても、その振幅は必ずしも一定にならない。

これに関しては、数値解法にその原因があるのか、円柱から渦が放出される際、その強さが一定でないことなど流れの現象なのか今のところよくわからないが、一応、揚力の振幅 $|C_L|$ および位相差 ϕ_L の平均値を求め、強制振動数 Stc に対してプロットしたものが図 27

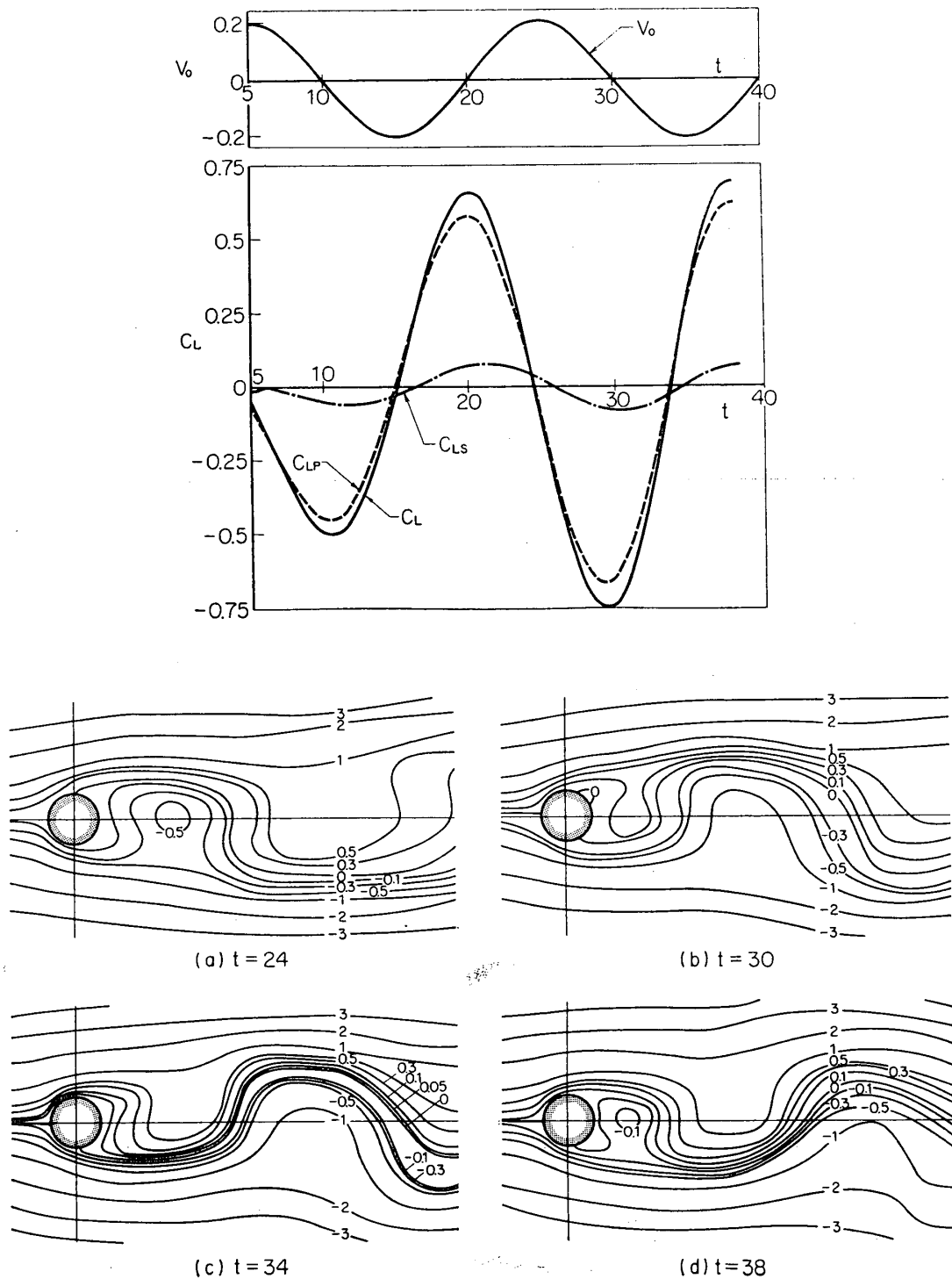


図 24 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=80$, $St_c=0.1$, $\Delta V=0.2$)

である。円柱の強制振動数 St_c とカルマン渦列のストロハル数 St_K との関係が、 $St_c \ll St_K$ ならば、たとえば図 23 に見るように、強制振動による変動揚力のうえに、カルマン渦列に

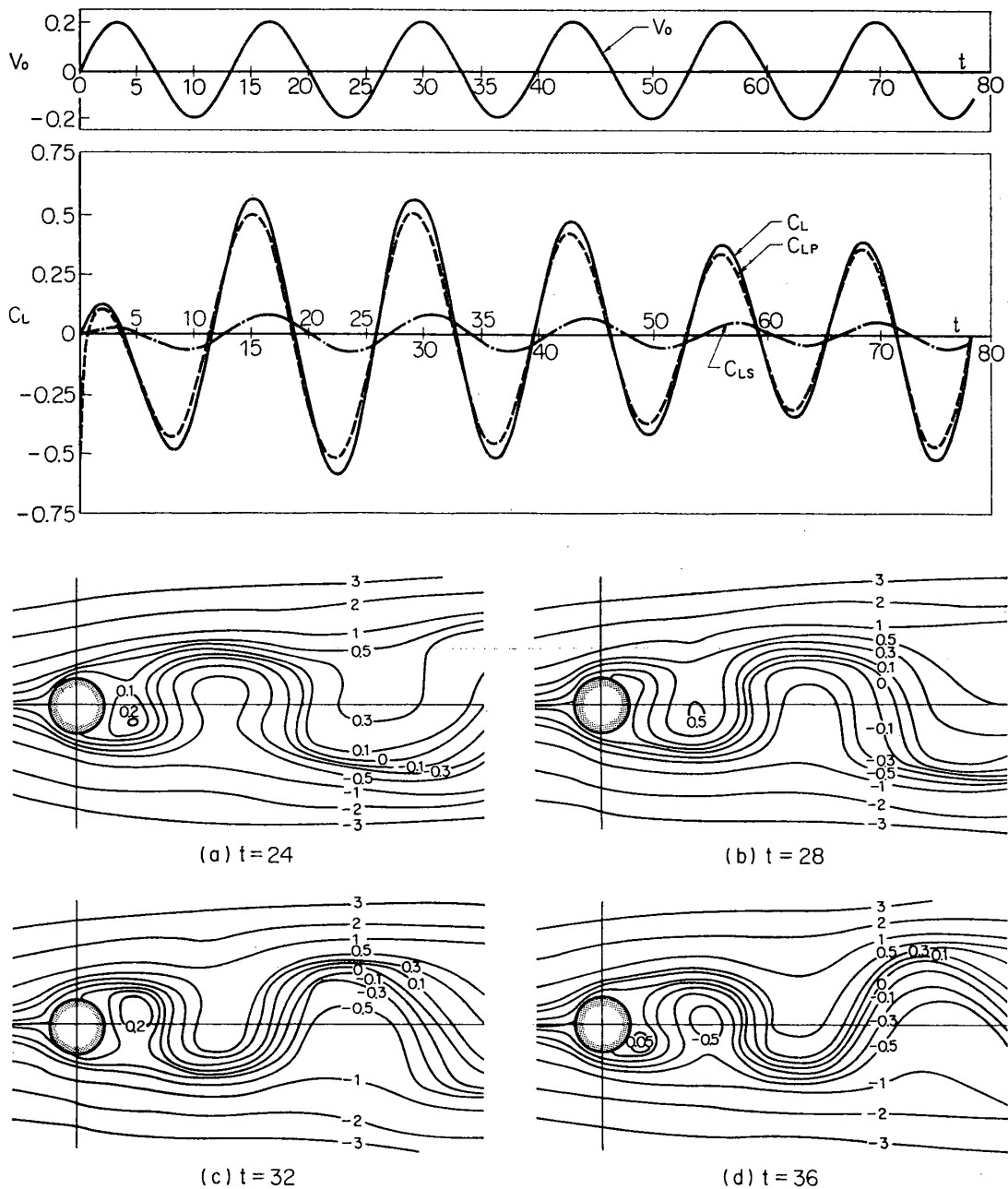


図 25 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=80$, $St_c=0.15$, $\Delta V=0.2$)

よる変動揚力が重畳しており、後者の変動揚力の振幅は、前者の約 30% にも達し、図 27 には後者の振幅が矢印で示してある。 $St_c \approx St_k$ で、いわゆる synchronization を起している場合は、とくに変動揚力の振幅は大きくなり、位相差も大幅に遅れてくる。しかし $St_c > St_k$ になると、変動揚力の振幅は逆に急激に小さくなっている。

次に、円柱に働く揚力変化 C_L と振動円柱まわりの流れの挙動との関連性に注目して考察を加えて見よう。

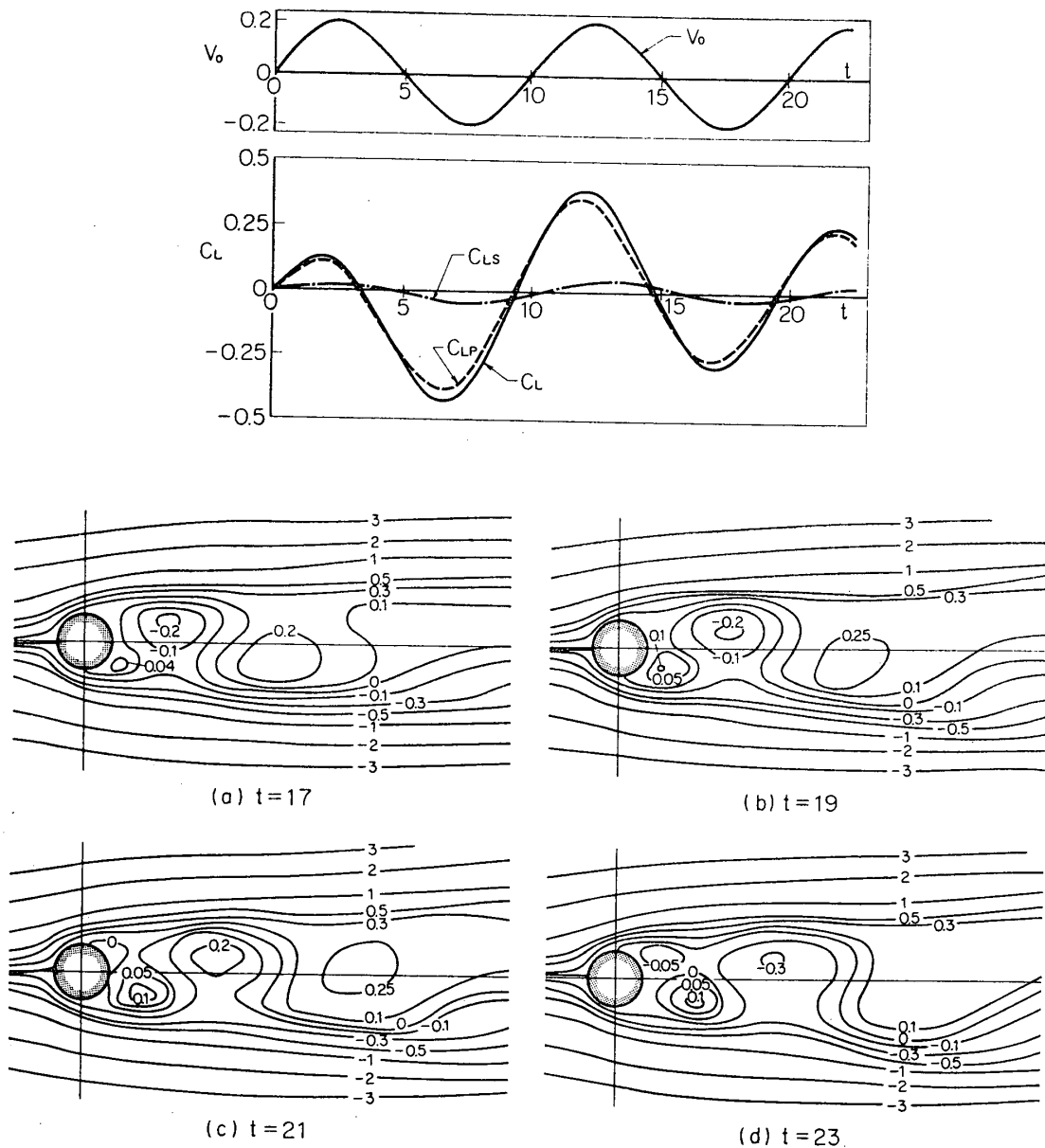


図 26 角振動する円柱まわりの流れと揚力変化 ($Re=80$, $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$)

円柱表面上で特に流体力学的に特異な点としては、たとえば次のような点がある。

1) 円柱の上面側および下面側のはく離点 (図 28, 29, 30 で S_3 および S_3')。非定常流れにおけるはく離点の定義は種々な問題があり [17], 必ずしも明確ではないが, ここでは一応表面上の粘性せん断力が 0 となる点と定義する。

2) 円柱の上流側および下流側の境界層の起点 [18] (図 28, 29, 30 で S_1 および S_2)。角振動する円柱の表面上で速度こう配 ($\partial q_\eta / \partial \xi$) が 0 となる点を境界層の起点とする。

円柱表面上におけるこれらの点の時間的な移動の様子を数値計算によって求めた。図 28 ($Re=40$, $St_c=0.2$), 29 ($Re=80$, $St_c=0.15$) および 30 ($Re=80$, $St_c=0.2$) において, 上

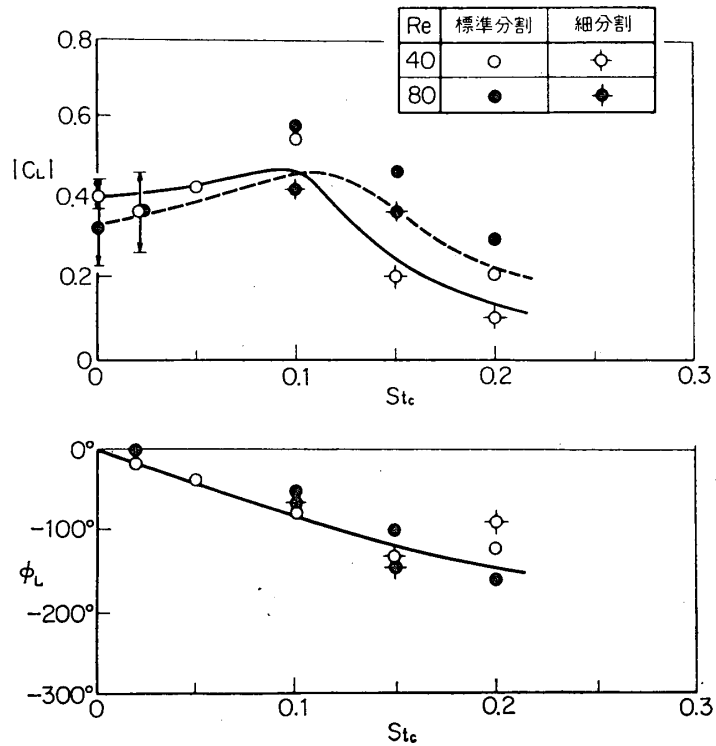
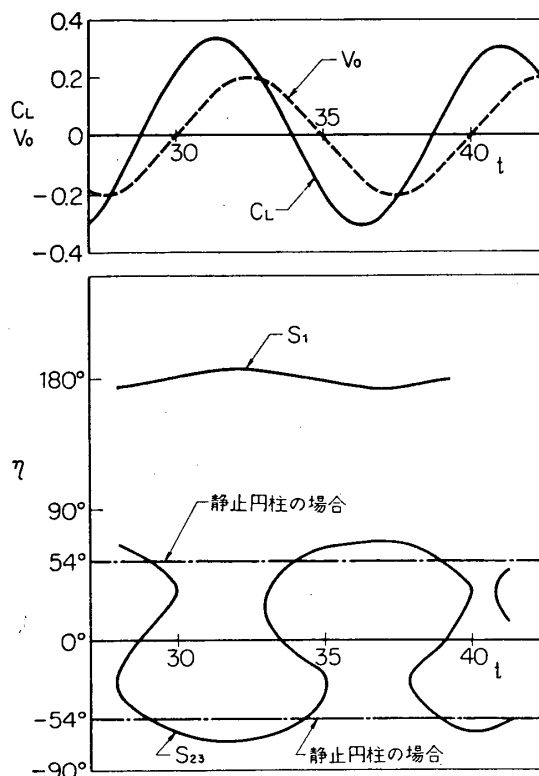
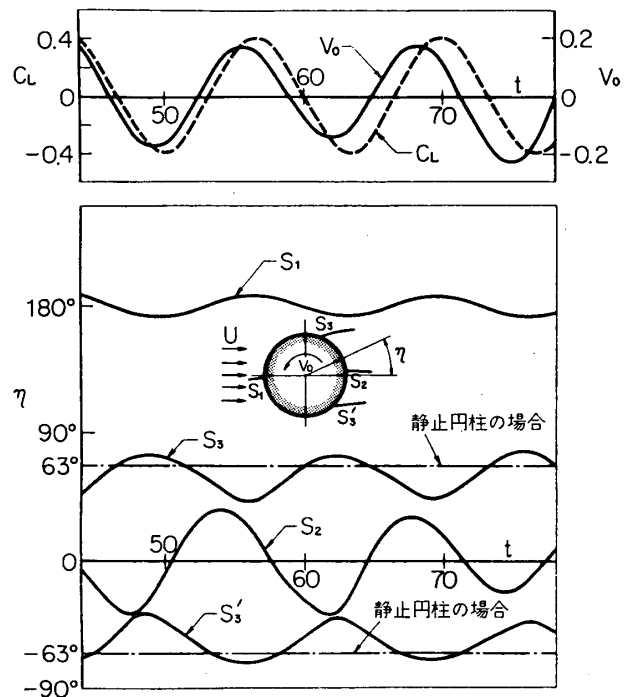


図 27 角振動する円柱に働く変動揚力

図 28 角振動する円柱におけるはく離点などの移動 ($Re=40$, $St_c=0.2$, $\Delta V=0.2$)図 29 角振動する円柱におけるはく離点などの移動 ($Re=80$, $St_c=0.15$, $\Delta V=0.2$)

流側の境界層の起点 S_1 の移動は、いずれも片振幅はば 6° と比較的小さい。この値は非粘性ポテンシャル流において、表面速度が一様流速の 20% で定常回転する円柱のよどみ点の移動幅にほぼ等しい。また、振動速度に対しほとんど位相遅れがなくほぼ同位相で移動している。一方円柱の下流側にあるはく離点 S_3, S_3' およびよどみ点 S_2 の移動振幅は境界層起点 S_1 に比較してかなり大きく、特に図 28($Re=40, St_c=0.2$) や 30($Re=80, St_c=0.2$) に示すように S_2 と S_3, S_3' が移動する場合に互につながって、たとえば図 28 に示すように、上流側よどみ点のほかに $t=30\sim33$ では下流側にはく離点 S_3' だけであるが、 $t=33\sim35$ では、はく離点 S_3, S_3' および下流側よどみ点 S_2 の三つの点があり、円柱後側に渦が付着している。そして、それらの移動は一本の曲線 S_{23} で表わされ、その移動は円柱に働く揚力 C_L の変化と位相がよく一致していることがわかる。

一方 $Re=80, St_c=0.15$ では図 29 に

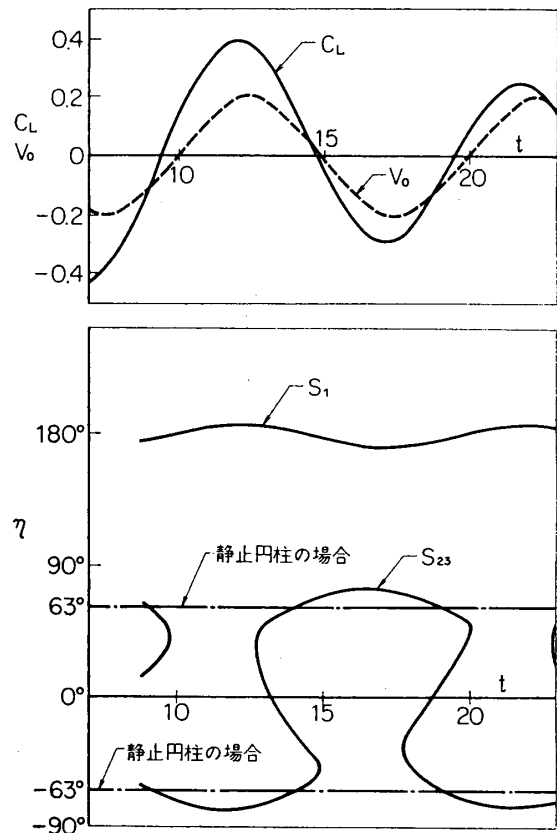


図 30 角振動する円柱におけるはく離点などの移動 ($Re=80, St_c=0.2, \Delta V=0.2$)

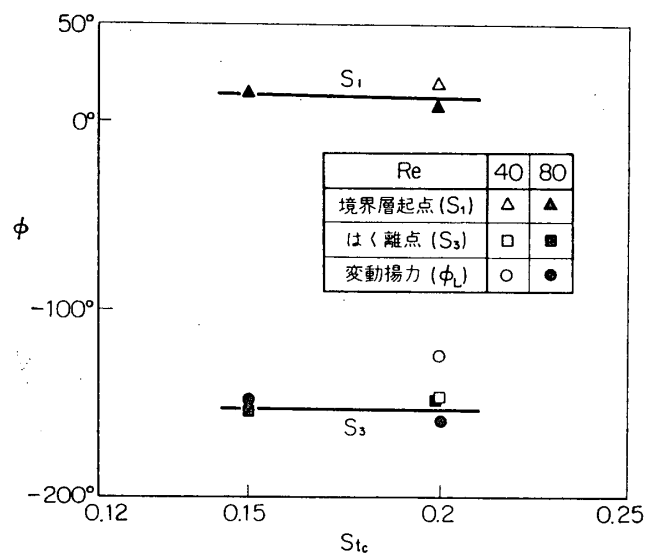


図 31 角振動する円柱における境界層起点、はく離点の移動の位相

示すように, S_2, S_3, S_3' はそれぞれわかれて移動しているが, はく離点 S_3 と S_3' は互に同位相で移動し, 一点鎖線で示す静上円柱におけるはく離の位置から上流側へは約 10° 下流側へは約 20° 移動し, 当然のことながら下流側へより移動しやすいことを示している.

しかしそれら, はく離点の移動は周期的で, 円柱の角振動の周速 V_0 (図中点線) に対して, ある位相差をもっている. その位相差を Re 数や強制振動数 Stc に対してまとめたものを図 31 に示す. 図には, さきに求めた振動する円柱に働く変動揚力 C_L の位相差 ϕ_L をも同時に示してあるが, 上流側よどみ点 S_1 は, Re 数や振動数に無関係に, 円柱の角振動の周速とほとんど同位相で移動していることがわかる. これに対しはく離点 S_3 の位相差は変動揚力の位相差とほぼ一致し, 角振動する円柱における変動揚力は, はく離点の移動と密接に関連していることがわかる.

3. 実 験

3.1 ま え が き

一様流の中で静止または角振動する円柱まわりの非定常流れを, 数値解法によって解いたが, その計算結果の妥当性を確認するためには是非とも実験的な検証が必要である. また数値計算は, 現在のところ, 計算機の容量や速度の関係上, $Re \leq 80$ に制限されており, さきに述べた本論文の目的から言っても, 実機のような高い Re 数範囲における非定常流れの解析をすすめるためには, 広い Re 数範囲にわたる一連の実験を行なわねばならない.

さて, 一様粘性流中に置かれた静止円柱に関する実験的研究は, 古くは Strouhal や Rayleigh 以来, 非常に多くの人々によって行なわれている. たとえば静止円柱に働く定常抵抗や後流に生ずるカルマン渦列の周波数 (ストロハル数) については Relf & Simmons [19], Tritton [16], Kovasznay [20] を始めとして Roshko [21], Finn [22], Delany & Sorensen [23], Keefe [24], 種子田 [25] などの研究により, 一応, Re 数の広い範囲にわたって系統的な資料がそろっており, またこれらの実験的研究については, すでにすぐれた解説 [26] [27] も発表されている. またカルマン渦列によって静止円柱に誘起される変動揚力に関しては, 比較的高い Re 数範囲において, McGregor [28] ($Re = 4.5 \times 10^4 \sim 1.3 \times 10^5$), Gerrard [29] ($Re = 4 \times 10^3 \sim 2 \times 10^5$) および Drescher [30] ($Re = 10^4 \sim 1.13 \times 10^5$) らが, 測定した円柱表面上の変動圧力から変動揚力および変動抵抗を求めている. また Fung [31] ($Re = 2 \times 10^5 \sim 1.4 \times 10^6$), Humphreys [32] ($Re = 4 \times 10^4 \sim 6 \times 10^5$) および Keefe [24] ($Re = 5 \times 10^3 \sim 10^5$) らは, 円柱に内臓させたひずみゲージを用いて, 静止円柱に働く変動揚力および変動抵抗を直接測定している. しかし, これらの実測例は, たとえ同じ Re 数であっても, 実験者によってかなり相違している. このような不一致の主な原因として, 供試円柱の両端の影響や流れの三次元性などが考えられている.

他方, Re 数の低い範囲における, カルマン渦列により静止円柱に誘起される変動流体力の実測例はほとんどなく, わずかに Phillips [33] が $Re = 40 \sim 160$ の範囲であるが, Kovasznay [20] の実測した静止円柱まわりの速度分布から, 理論的に, 円柱に働く変動揚力係数が $|C_L| = 0.75$, 変動抵抗が $|\tilde{C}_D| = 0.076$ となることを求めているにすぎない.

次に振動する円柱に働く変動揚力の測定のような非定常の場合についての実験的研究は少

なく、わずかに Schwabe [34] (1935 年) が、静水中を円柱が急激に動き始め、一定速度に達するまでの間、写真撮影によって円柱まわりの速度分布、圧力分布を求め、円柱に働く抵抗の時間的变化を求めている ($Re=580$)。また Bishop & Hassan [35], [36] は一様流中で流れに直角に並進振動する円柱 ($Re=3\times 10^3\sim 10^4$) に働く変動揚力や変動抵抗を、ひずみゲージを使用して実測している。その結果、強制振動数が、静止円柱におけるカルマン渦列のストロハル数に近い場合は、synchronization 現象を起して、円柱に働く変動揚力は最大となり、円柱の振動速度と変動揚力の変化との間の位相差は、ステップ状に急変して 180° 前後になることを示している。さらに Koopman [37] は、並進振動する円柱 ($Re=200$) が上述のような synchronization 現象を起した際の後流渦列を煙風洞で可視化して、その幾可学的配列を明らかにしている。

よって、本実験においては、まず実験設備並びに実験方法の妥当性を確認する目的で、静止円柱の定常抵抗や揚力そしてカルマン渦列のストロハル数などを測定して、数値計算の結果や従来発表されている実測値と比較する。

次に、円柱を角振動させた場合についても、まず数値解法による計算結果と実測値の比較検討を行ない、次いで実機のような高い Re 数までの広い範囲 ($Re=40\sim 6\times 10^3$) における実験を行なった。

3.2 実験装置

実験装置は、供試物体として円柱のみならず、このあと引きつづき行なう予定の楕円翼の場合にもそのまま使用できるように試作したものである。

2.2.1 曳行式液槽 実験は、広い Re 数範囲にわたって振動する二次元物体（たとえば円柱や楕円翼）に働く非定常流体力を精度よく測定することを目的とし、そのために必須な条件をまず考えて見よう。

(1) 一様流れの二次元性が十分確保され、乱れが少ないこと。

(2) 流体力の測定の際に、供試物体自身の慣性力がそれに働く流体力に比較して十分小さいこと。

(3) 数値解析による計算結果 ($Re=20\sim 80$) との比較検討が可能な低い Re 数から、実機に近い、比較的高い Re 数までの広い Re 数範囲にわたる実験が可能なこと。

これらの条件を満足する実験装置について、種々検討した結果、図 32 に示すような曳行式流体力測定試験機を試作することにした。すなわち、液槽に満たされた静止液体中を供試物体（円柱）が曳行されるため、円柱の端部近傍を除いては、軸方向にわ

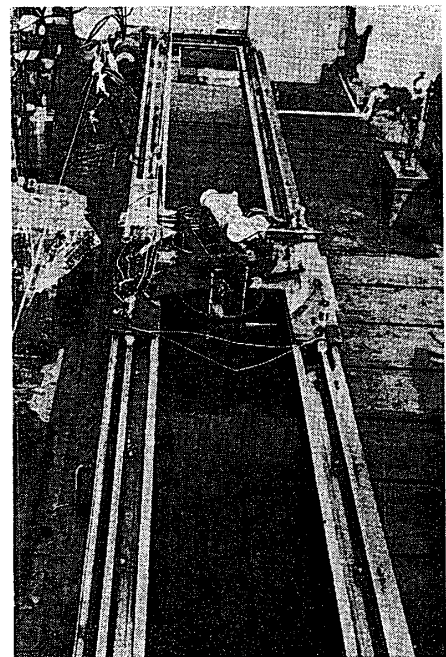


図 32 実験装置

たって速度分布の一様性は非常に良い。なお円柱の先端部の影響の処理については 3.2.2 供試円柱のところで詳述する。

(2) の条件を満たすため、気体に比べ密度の大きい液体を用い、また後述のように供試円柱の測定部をできるだけ軽量化することによって物体に働く変動流体力を必要な感度で測定することが可能である。

また (3) の条件を満足するために、供試液体として油および水をそれぞれ低 Re 数用、および高 Re 数用として使用し、同時に、供試円柱の曳行速度 U を $U=5\sim 40\text{ cm/sec}$ の間に変化させて、所要の Re 数範囲の実験を行なうことができる。

供試物体を取付けて、曳行式液槽上を走行する移動測定台が図 33 に示してある。図中①は幅 $0.7\text{ m}\times$ 深さ $0.4\text{ m}\times$ 長さ約 10 m の液槽でこの中に油または水を満たす。液槽の長さは約 10 m あり、曳行速度が最大の $U=40\text{ cm/sec}$ のときでも測定時間は少なくとも 20 sec 以上あるので測定には十分である。移動測定台③が滑走するレール②は、全長 10 m にわたり、表面は継ぎ目のない平滑仕上げ面で、レールの断面は水平面と垂直面を持っているが、もう一つのレール断面は 15° 傾斜面をもっているため、移動測定台はその自重により常に強制的にレールの水平面のみならず垂直面にも押しつけられた状態で走行するようになっている。

またレールとの滑走面は、潤滑をよくするためにテフロン板を装着し、潤滑油としては二硫化モリブデン含有トナオイルを使用する。移動測定台③は、レールに沿った 2 本の鋼製ロ

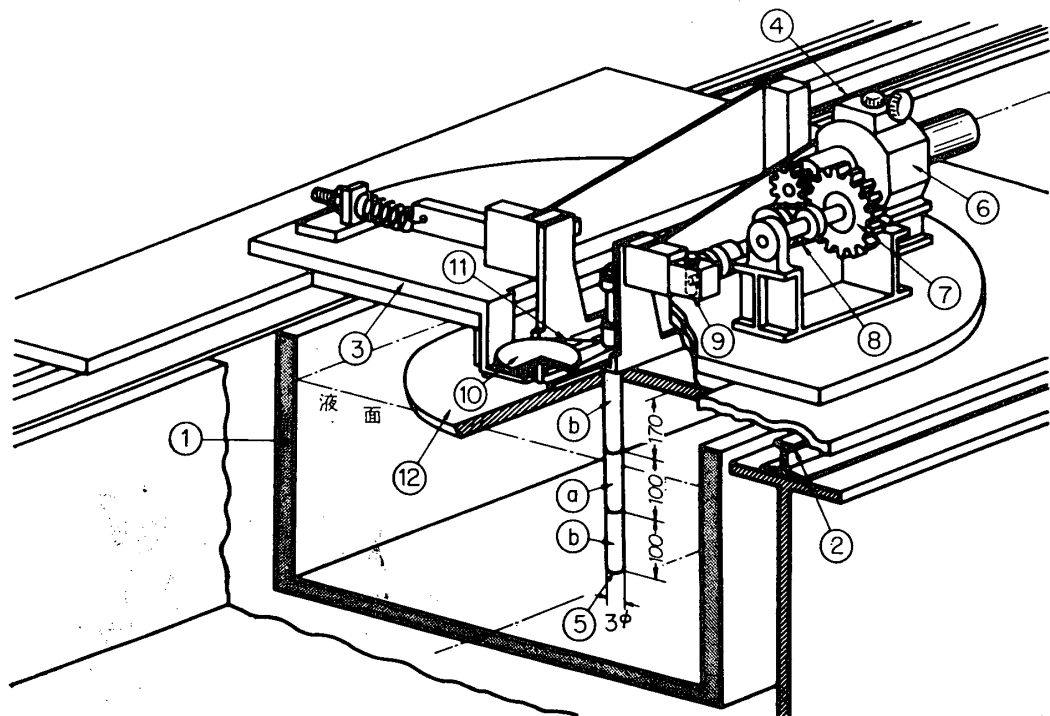


図 33 移動測定台詳細

ープ (8mm ϕ) ④を可変速モータ (変速範囲 1:20) により巻取ドラムに巻取ることによって曳行される。可変速モータと巻取ドラムの間には減速機, Vベルトおよびクラッチを設けて操作を容易にし, これらはいずれも液槽やレールとは別の土台にあるので, 振動はVベルトによってシャ断されている。

移動測定台③には, 供試円柱⑤を角振動させるための振動機構が設置してある。すなわち可変速駆動モータ⑥ (0 \sim \pm 240 r. p. m) は, 歯車⑦を回転させる。なお駆動モータや歯車などの振動が, 直接供試円柱の測定部に伝わるのを防ぐために, 歯車はデルリン樹脂製とし, モータおよび歯車はすべて防振ゴム板上に乗せ, またシンクロベルト⑧を使用して極力振動をシャ断するようにしてある。⑨は, 偏心カムとそれにより往復運動するピストンとから構成されるスコッチヨーク機構であり, これにより板バネによって支えられた供試物体取付け台は往復運動し, その往復運動は可変プーリー⑩の角振動に変換され, ⑪のプーリーベルトによって供試円柱を所定の振動振幅と振動数で角振動させることができる。

⑫は供試円柱が液中を曳行される際, 液体自由表面に生ずる表面波の影響を軽減するために, 液面に接するように取り付けられたアクリル樹脂製の円盤 (直径 500mm ϕ) である。

円柱を角振動させる際の振動数 f_c は, 可変速駆動モータの回転数を, また角振動の振幅 $\Delta\theta_c$ は可変プーリー⑩の直径をそれぞれ変えることによって, 容易に所定の値に設定することができる。

3.2.2 流体力測定用供試円柱 直径 30mm の供試円柱は図 34 に示すように三つの部分から構成されている。すなわちスパン長さ 100mm の測定部⑭は, 上部円柱 (170mm) ⑮および下部円柱 (100mm) ⑯の二つのダミー円柱にはさまれており, 流体の自由表面波の影響や, 円柱下端部における二次流れの影響をさけるように配慮されている。すなわち, 図 34 に示すように, 測定部円柱は, 上部ダミー円柱に固定された二枚の平行バネ板 (厚さ 40 μ m) ⑰でつられており, バネ板に貼付された四枚の半導体ひずみゲージ⑱でブリッジを構成して, 測定部円柱に働く流体力 (揚力または抵抗) を測定することができる。また測定用円柱は, それ自体の慣性力を極力軽減するために, 材質をアクリル樹脂製とし, しかも内部をできるだけ空洞にしてある。上・下二つのダミー円柱は, 中央にある測定用円柱に触れないように, 貫通した 2本の鋼棒 (3mm ϕ) ⑲によって互に連結されている。

3.2.3 実験条件 実験における主な条件は, 表 2 にまとめて示してある。なお供試円柱の直径 (30mm ϕ) と液槽の幅 (700mm) との比は, 1:23.3 であり, Grove [15] は, この比が 1:20 以上であれば側壁の影響は非常に少ないと報告している。また, 供試円柱に働く流体力が, 測定可能な範囲として, 一様流速は $U > 5$ cm/sec でなければならず, その上限は, 供試円柱を曳行する際, 表面波の影響が著しくならない程度として $U < 40$ cm/sec とした。なお本実験では, 角振動する円柱の周速と一様流速の比 ΔV を常に

$$\Delta V (\equiv \pi S t_c \cdot \Delta\theta) = 0.2 \quad (\text{一様流速の } 20\%)$$

に保つように, 振動数 $S t_c$ の変化に応じて, 角振幅 $\Delta\theta$ を順次変えるようにする。

3.2.4 実験方法 実験に当り, 低 Re 数範囲 ($Re = 40 \sim 240$) に対しては油, 高 Re 数範囲 ($Re = 10^3 \sim 1.4 \times 10^4$) に対しては水を使用した。油の動粘性係数 ν は, 液温によってかなり変化するので, 液槽中における液温のむらは極力避けねばならない。また流体力測定

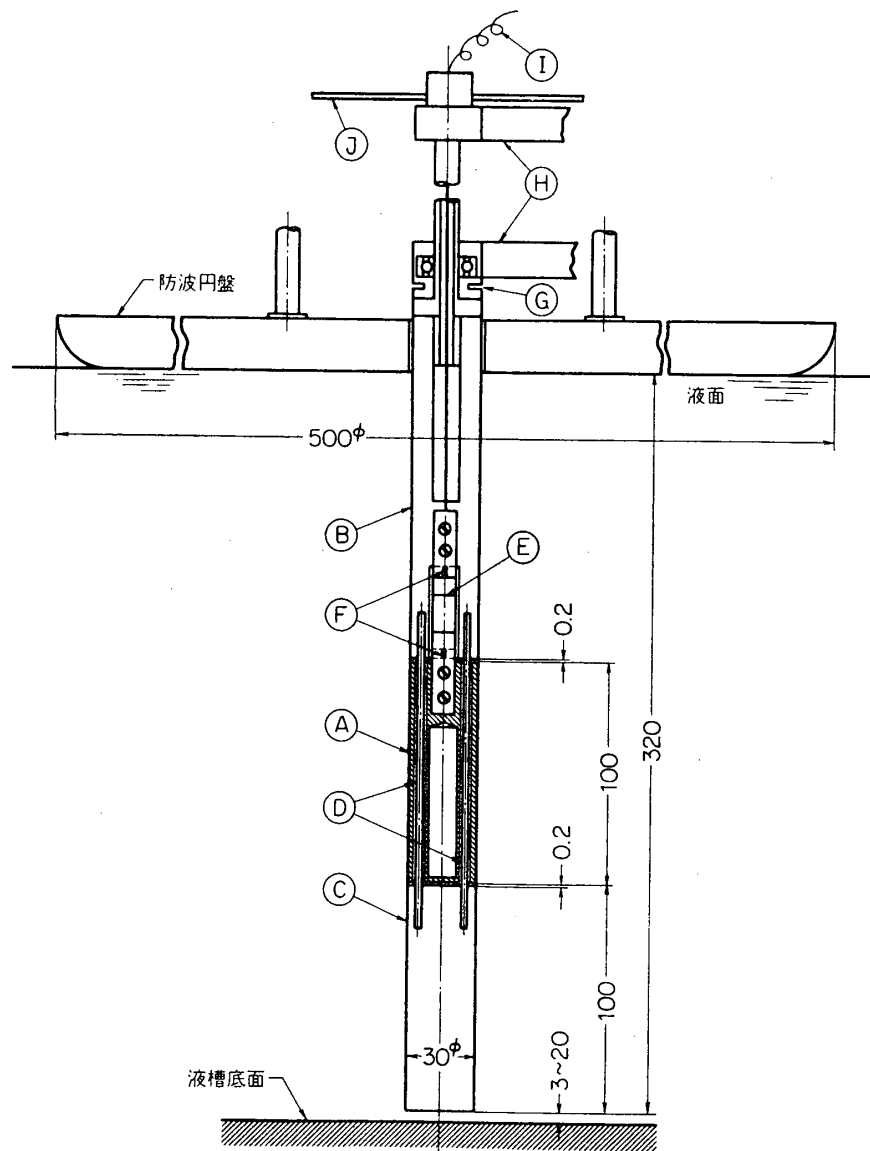


図 34 供試円柱

用の半導体ゲージも、周辺の液温に敏感なため、液槽内における液温は常に一樣なことが望ましい。そこで動粘性係数が比較的溫度に鈍感である粘度指数の大きい油として、ハイランドオイル 70 (粘度指数 106) を採用し、さらに液槽の底面および側面を発泡スチロールの断熱材 (厚さ 40 mm) で被覆してある。

参考のため、液槽中の水温分布を、熱電対で測定した。その結果、液槽の幅方向および長さ方向における水温の分布はほぼ一樣であったが、深さ方向には図 35 に示すような温度こう配があった。しかし図によると特に温度こう配の激しいのは表面から 2cm 以内の範囲で、それより深い供試円柱の測定部の水温はほぼ一定と見なしてよいことがわかる。次に供試円柱の曳行速度 U は、曳行用巻取ドラムを駆動する可変速モータの回転数を光電管式回

表 2 実験条件

Circular cylinder diameter	d	30 mm	
Fluid		Oil	Water
Kinematic viscosity	ν	0.56 St (20°C), 0.25 St (37.8°C)	0.01 (20°C)
*Stationary circular cylinder			
Velocity	U	3~50 cm/sec	
Reynolds number	Re	40~240	$1 \times 10^3 \sim 1.5 \times 10^4$
*Rotationally oscillating circular cylinder			
Velocity	U	8~30 cm/sec	
Reynolds number	Re	40~160	$3 \times 10^3 \sim 6 \times 10^3$
Frequency of rotationally oscillation	f_c	0.14~3 Hz	
Non dimensional frequency	St_c	0.05~0.3	

転計で検出すると同時に、走行レールと平行に設置された光電管式速度計によっても測定し、両者の測定値は常によく一致していた。よって実験に当っては簡便な前者を使用した。

なお、走行時の加速度の変動は、流体力の測定に敏感に影響するので加速度計を用いて同時記録し参考とした。

供試円柱を角振動させる振動数 f_c は、振動用駆動モーターの回転数を光電管式回転計によって検出して求めた。また、供試円柱を支持する板ばねに貼付したひずみゲージから得られる振動の変位を、流体力などの測定における基準波形とし、揚力または抵抗は供試

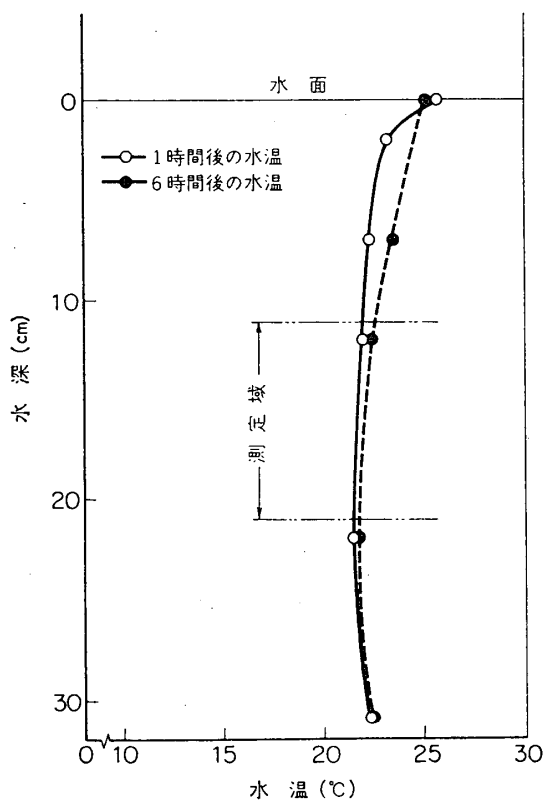


図 35 液(水)槽中の温度分布

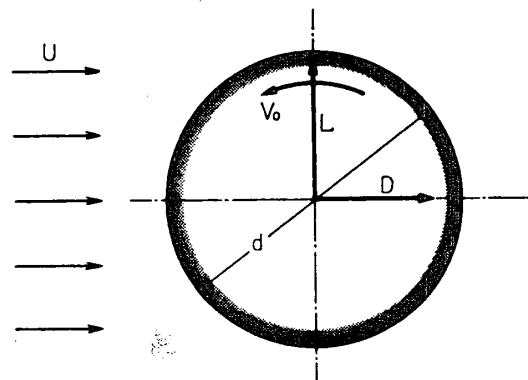


図 36 一様流中で角振動する円柱

円柱に内臓する板ばね（ひずみゲージ貼付）を流れと平行または垂直において交互に測定した。

3.3 実験結果とその考察

一様流速 U の中におかれた静止または角振動する円柱（直径 d ）に働く揚力 L および抵抗 D （いずれも単位スパン長さ当り）を測定し（図 36），それらの測定値は数値解析におけると同様に $(1/2)\rho U^2 d$ で無次元化してそれぞれ揚力係数 C_L および抵抗係数 C_D とする。また円柱の強制振動数 f_c やカルマン渦列の周波数 f_K はそれぞれ $St_c = f_c d / U$, $St_K = f_K d / U$ の無次元振動数の形で示すことにする。

3.3.1 静止円柱の場合 カルマン渦列によって静止円柱に誘起される変動揚力の代表的な測定例を図 37 に示す。Re=41 では，変動揚力はほとんど認められないので，円柱後流には全くカルマン渦列は生じていないものと推定することができる。しかるに Re=81 になると，図に見るように変動揚力は振幅のそろった規則正しい正弦波形を示し，明らかにカルマン渦列（ストロハル数 $St_K = 0.155$ ）の生じていることがわかる。さらに Re 数の大きい Re=240，および 4560 においては，変動揚力が，かなり長い周期で振幅の変化するビート状の波形を示すようになる。この原因については，今のところ明らかではないが，すでにまえがきでも述べたように，実験者によって揚力係数 C_L の値が大きく相違する理由の一つと考えられる。一応ここではそれらの平均値をとり，また最大値と最小値との差を変動の幅として，抵抗係数 \bar{C}_D ，変動揚力係数 C_L およびカルマン渦列のストロハル数 St_K が図 38 に示してある。図（a）には数値解析から求められた \bar{C}_D の計算値（Re=20, 40, 80）と実測値とが比較してあるが，Re=20~80 の範囲では，計算値と実測値とは定性的にはもちろん定量的にもよく一致しており，さらに Relf [19], Tritton [16] の実測値ともかなりよく

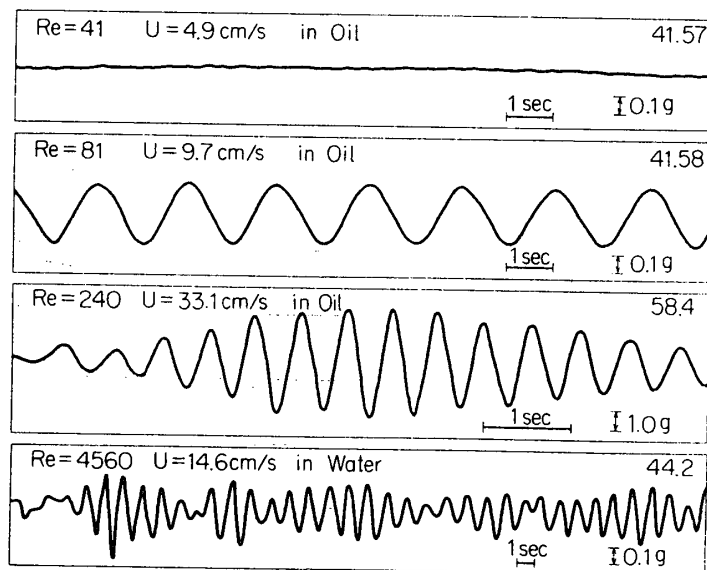


図 37 静止円柱に働く変動揚力の実測例 (Re=41, 81, 240, 4560)

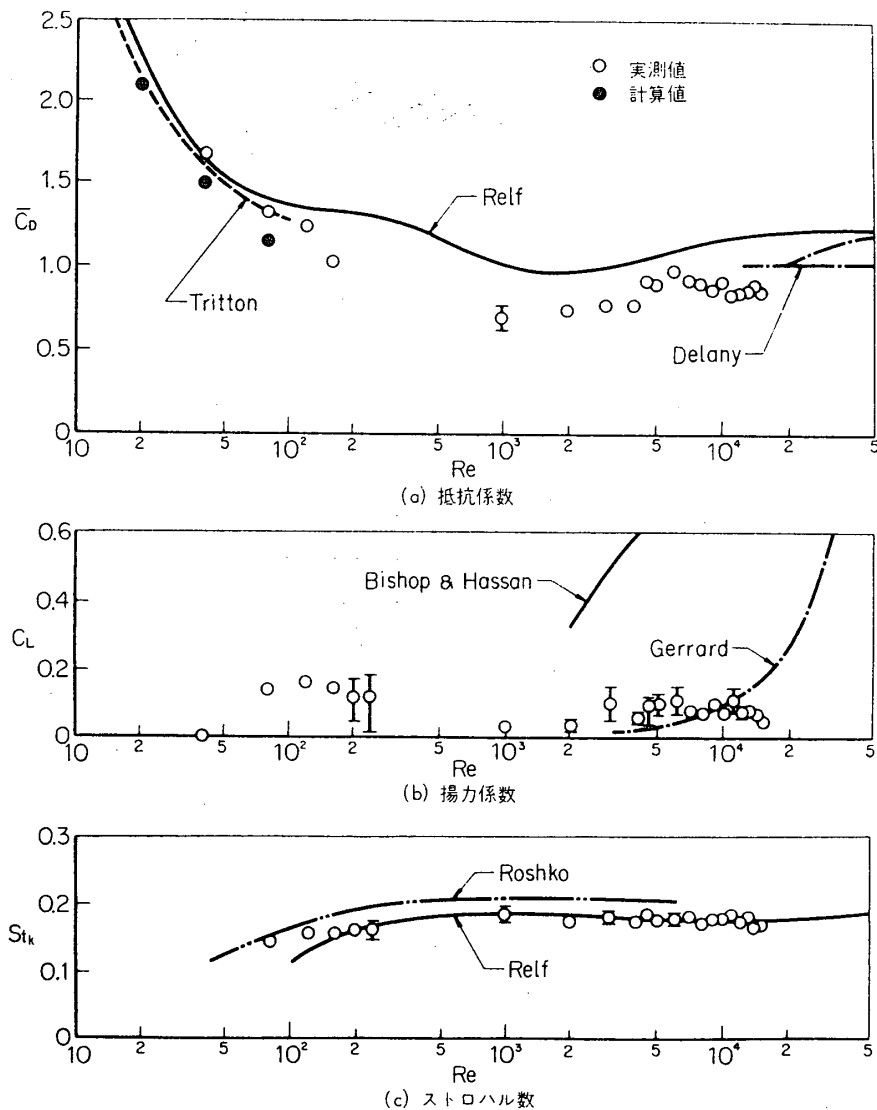


図 38 静止円柱に働く抵抗、揚力そしてストロハル数

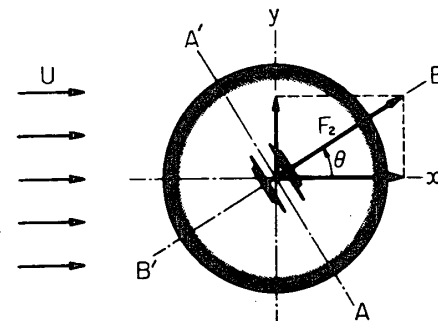
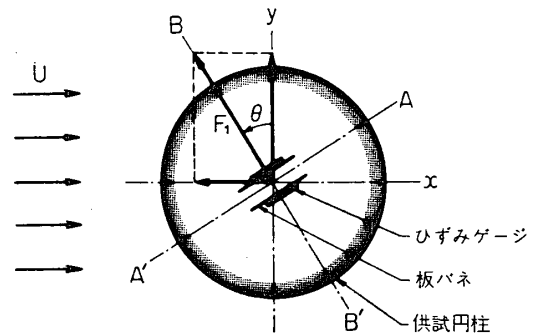
一致している。なお静止円柱に働く抵抗の変動分 \tilde{C}_D は非常に小さく、その定常分 \bar{C}_D の 1% 以下であった。 $Re=10^3 \sim 1.4 \times 10^4$ の範囲の実測値は、Relf ら [19] や Delany ら [23] の実測値に比べやや小さいが、定性的な傾向はよくそろっている。また図 (b) には、カルマン渦列により円柱に誘起される変動揚力の振幅 C_L が比較してある。実測した全 Re 数範囲 ($Re=40 \sim 1.4 \times 10^4$) では、 Re 数にほぼ無関係に実測値は $C_L=0.1$ であるが、Bishop & Hassan [35] や Gerrard [29] の実測値は $C_L=0.6$ 以上にもなり、大きさはもちろんその Re 数に対する傾向もかなり異なっている。しかし \bar{C}_D や St_k などが比較的其他の実測値とよく一致しており、 $C_L=0.1$ という値やその Re 数に対する傾向は、一応より妥当ではないかと考えられる。図 (c) によると、変動揚力から求めたストロハル数 St_k の実測値が、 $Re=10^2 \sim 10^4$ の広い範囲にわたって、Relf ら [19] の実測値と非常によく一致していることが

わかる。

以上のように、 \bar{C}_D の計算値と測定値とがよく一致するばかりでなく、 $Re=40\sim 1.4\times 10^4$ という比較的広い Re 数範囲にわたって、 \bar{C}_D や St_K の値が他の研究者の実測値とも定量的によい一致を示しているの、本研究に用いた数値解法はもちろんのこと、実験方法も十分妥当なことが立証されたものと考えてよいだろう。

3.3.2 角振動する円柱の場合

一様流れの中に垂直におかれた供試円柱が、その軸まわりに周速 $V_0(=4V\sin 2\pi fct)$ で角振動する場合、円柱の構造上揚力または抵抗を直接求めることができない。そこでまず図 39 に示すような F_1 および F_2 の二つの非定常流体力を測定し、振動角変位 θ を媒介として、これら二つの力をベクトルの的に合成して、揚力 L と抵抗 D を算出した。図 40 には $Re=80$ および 6100 の場合について、そのもととなる F_1 と F_2 を角変位 θ に対して示してある。



$$L = F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta$$

$$D = -F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta$$

図 39 角振動する円柱の揚力と抵抗の測定

角振動する円柱の強制振動数 St_c と静止円柱のカルマン渦列のストロハル数 St_K との関係が、 $St_c < St_K$ の範囲 ($St_c \approx 0.1$) では図 40 (a), (b) に見るように F_1 は規則正しい正弦波をしており、 F_2 は 2 倍の強制振動数 ($2fc$) で振動している。これは次のように説明される。円柱の上・下から交互に渦が放出されるごとに、流れに垂直方向には符号反対の変動力を受けるが、流れに平行な方向には常に同方向の変動流体力を受ける。したがって揚力は渦の周期と同じく変化し、抵抗はその 2 倍で変動することになる。 $St_c \approx St_K$ ($Re=80$ の場合 $St_c=0.15$, $Re=6100$ の場合 $St_c=0.19$) では、 F_1 の振幅は急に増大し、位相の遅れも大きくなっている。さらに、 $St_c > St_K$ ($Re=80$ の場合 $St_c=0.21$, $Re=6100$ の場合 $St_c=0.27$) では、 F_1 の振幅は減少し、波形も乱れる。

以上の推移をさらに明らかにするために、角変位の振幅 $\Delta\theta$ を $\Delta\theta=0.318\text{rad}$ と一定にし、振動数を広い範囲 ($St_c=0.01\sim 0.23$) に変えた場合 ($Re=80$) の F_1^* および F_2 の実測例を図 41 に示す。 $Re=80$ の場合、静止円柱のカルマン渦列のストロハル数は $St_K=0.155$ であるから、図 (a) ($St_c=0.01$) と図 (b) ($St_c=0.02$) では $St_c \ll St_K$ であり、振動数 St_c で変動する F_1 (～揚力) の波形の上には、 St_K で変動するカルマン渦列による

* この場合振動角振幅 $\Delta\theta$ が比較的小さいので、近似的に F_1 は揚力、 F_2 は抵抗を表わすものと考えることができる。

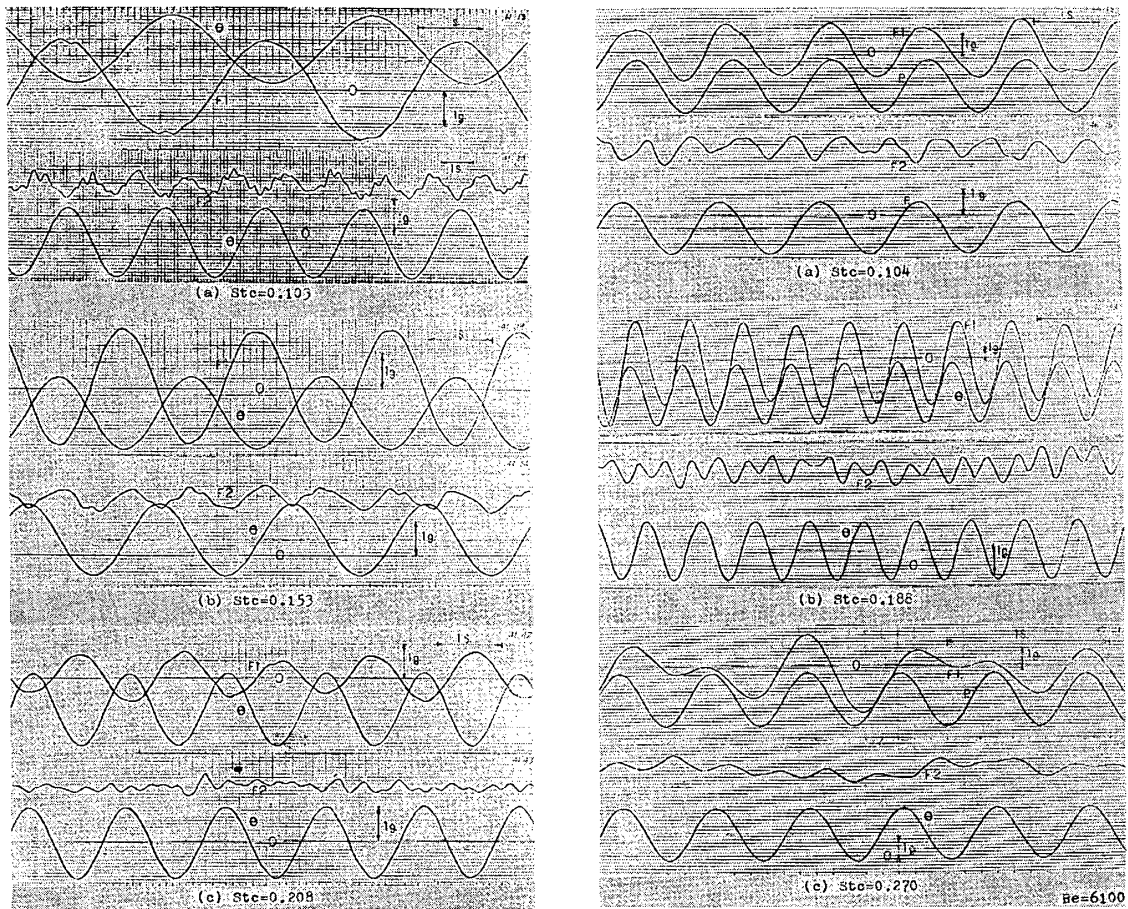


図 40 角振動する円柱に働く流体力の実測例 ($Re=80, 6100, \Delta V=0.2$)

変動分が重畳しているのがよく観察され、特に図 (b) ($St_c=0.02$) の実測値は数値解析によって求めた計算結果 (図 23 参照) の場合に対応し、両者互によく一致していることがわかる。また図 (c) ($St_c=0.076$) と図 (d) ($St_c=0.10$) では $St_c < St_K$ であり、カルマン渦列による変動揚力成分は消滅し、強制振動数 St_c で変動する揚力成分のみとなっている。さらに図 (c) ($St_c=0.15$) では $St_c \approx St_K$ で、いわゆる synchronization のため、 F_1 (～揚力) の変動振幅は最大となり、また F_2 (～抵抗) も $2f_c$ の振動数で変動し、その振幅もかなり大きい。しかし図 (d) ($St_c=0.23$) は $St_c > St_K$ となるので、 F_1 (～揚力) および F_2 (～抵抗) の振幅はともに減少し、しかもかなり波形は不規則となることがわかる。

$Re=40$ および 80 の場合、無次元振動数 St_c に対する変動揚力の振幅 $|C_L|$ とその位相差 ϕ_L の実測値が前章で求めた計算値と図 42 に比較してある。両者の値は定性的にも、また定量的にも良く一致している。ただし $St_c=0.0 \sim 0.02$ における実測値は、カルマン渦列によって誘起される変動分のため、図の矢印幅のような振幅を示している。なお詳細に見ると、図 (a) ($Re=40$) では $St_c \approx 0.1$ 、図 (b) ($Re=80$) では $St_c \approx 0.15$ 近傍で、揚力の振幅は最大を示し、これより St_c が大きくなると、振幅は急激に小さくなっている。これ

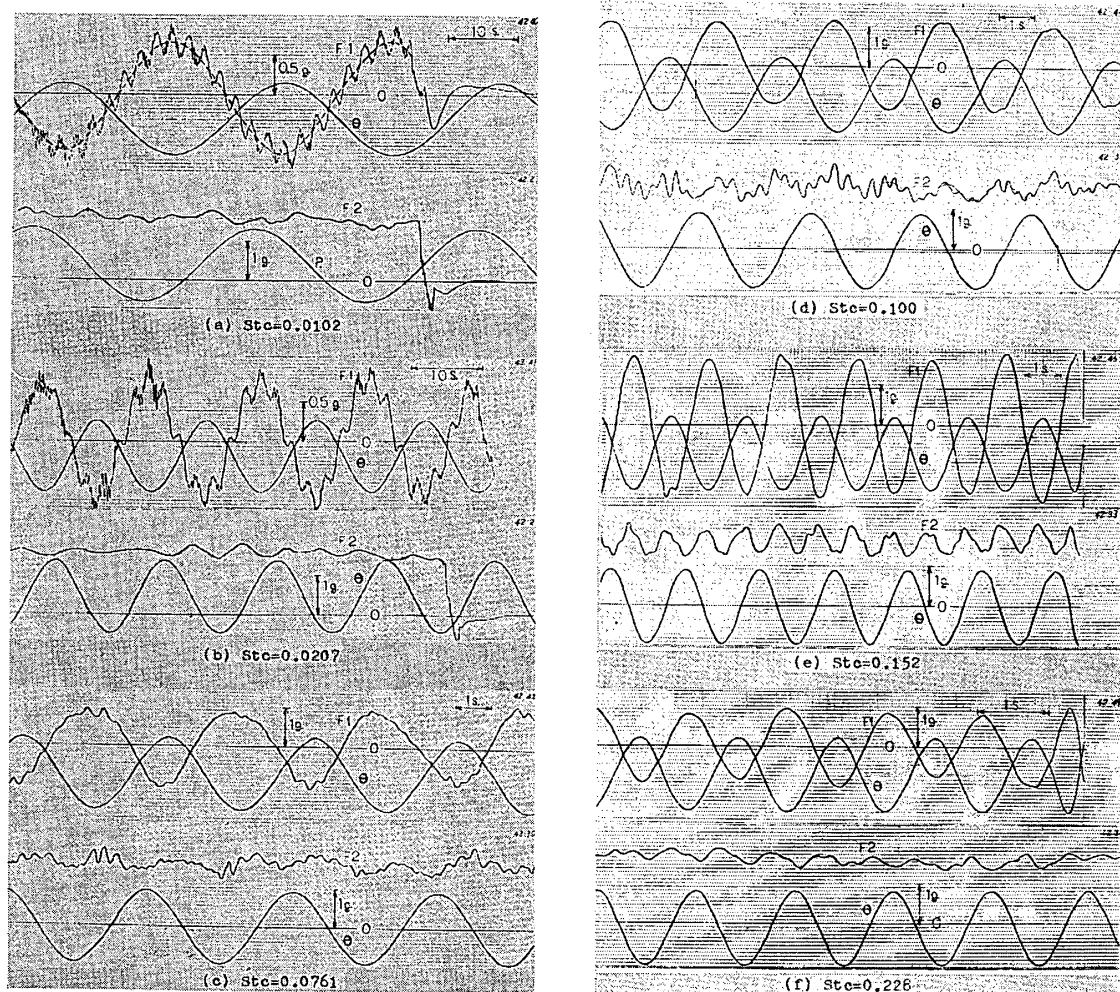


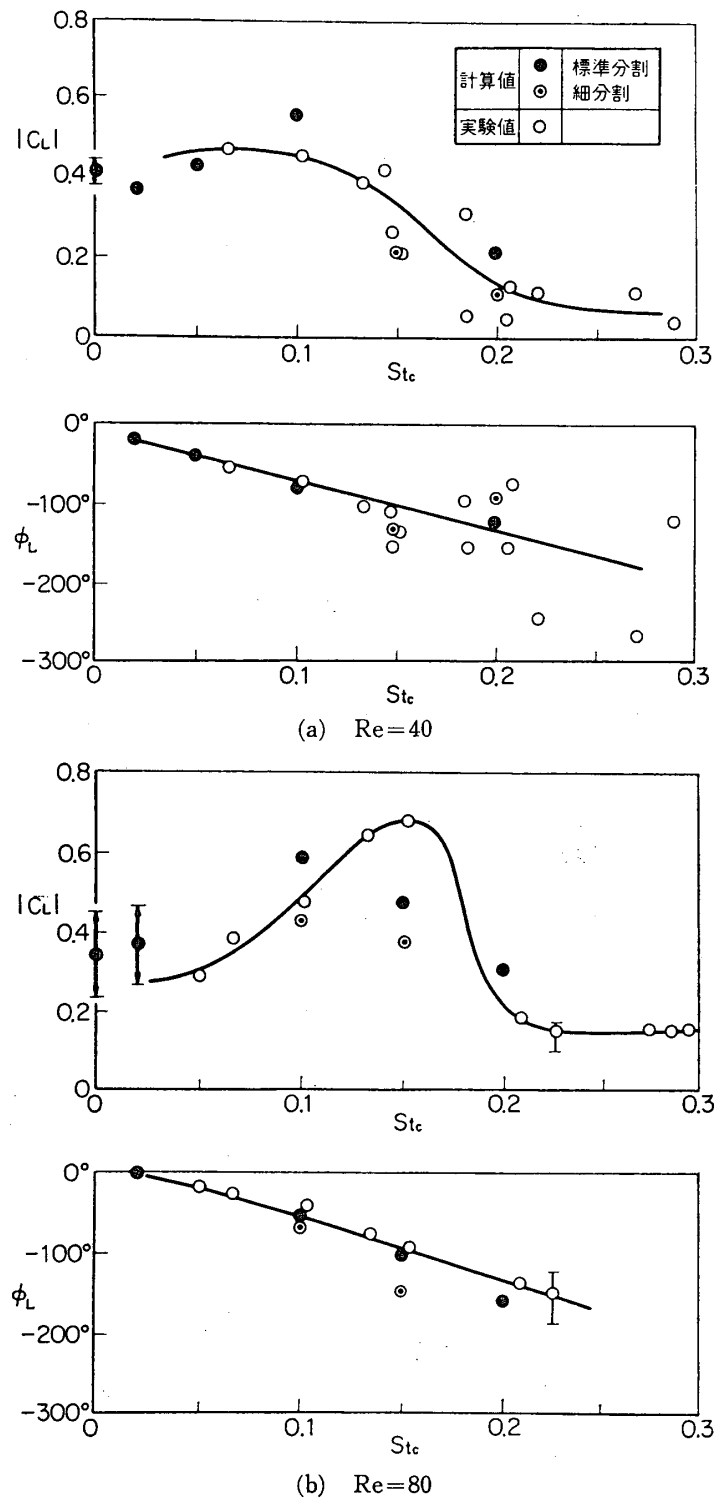
図 41 角振動する円柱に働く流体力の実測例 ($Re=80$, $\Delta\theta=0.318$ rad.)

に対し位相差 ϕ_L は, 図 (a), (b) に見るように, St_c の増加に伴ってほぼ直線的な遅れを示している.

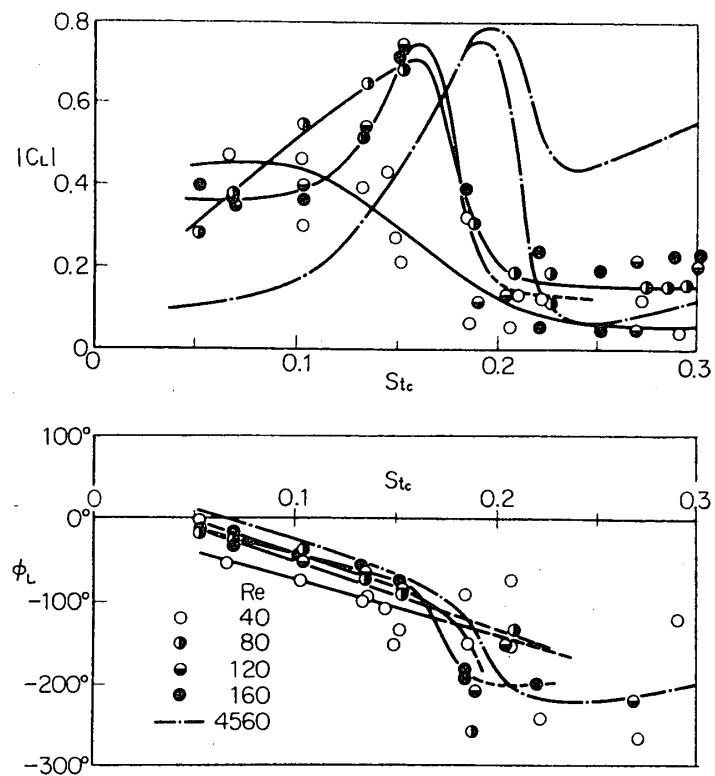
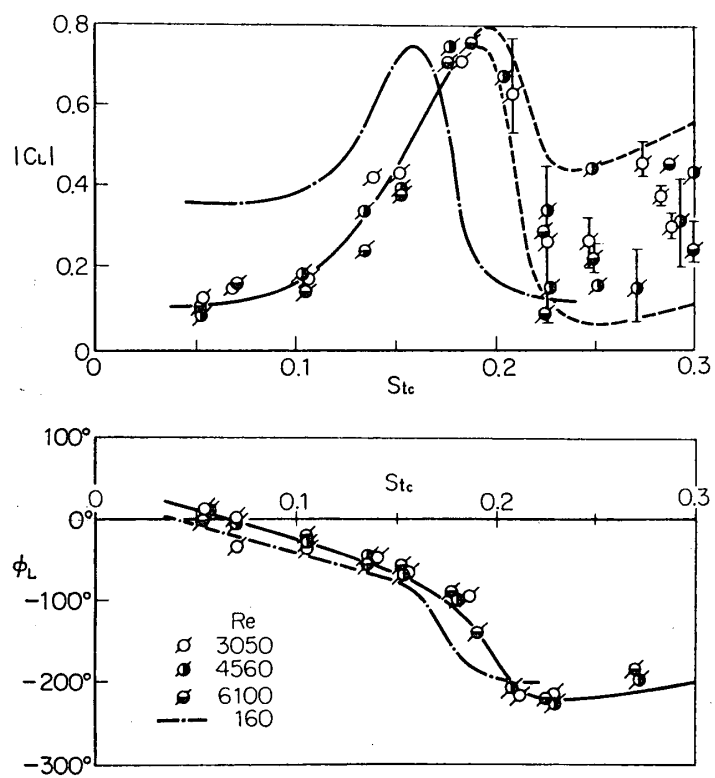
さらに Re 数が大きくなると, 図 43 (a) ($Re=120$ および 160) に示すように, synchronization の領域における揚力振幅は $|C_L|_{\max} \approx 0.7 \sim 0.8$ と一層大きくなり, 位相差 ϕ_L はこの近傍で約 100° 近くもステップ状に遅れている.

以上の実測値はいずれも油を用いた比較的低い Re 数範囲の実験によるものであるが, 次に水を用いた高い Re 数範囲 ($Re=3050$, 4650 および 6500) の実験結果を図 43 (b) に示す.

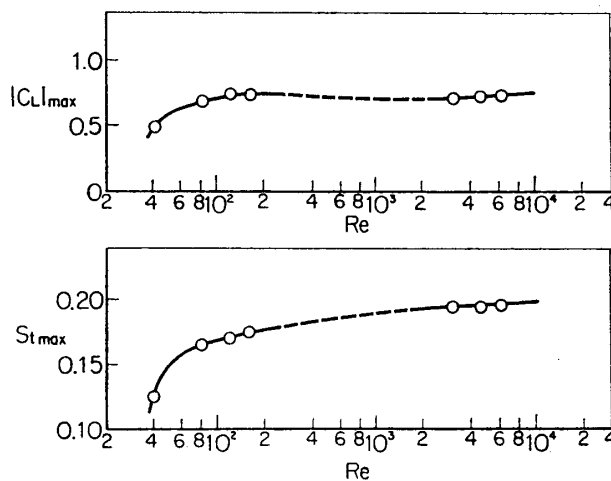
強制振動数が $St_c=0.05 \sim 0.19$ の範囲では, Re 数に無関係に $|C_L|$ はそれぞれ一本の曲線上によく乗って, $St_c \approx 0.19$ で $|C_L|$ は最大となり, $St_c > 0.19$ になるともはや揚力波形の振幅は不規則にばらつき, 図 (b) にはそのばらつき幅が示してある. これに対し, 位相差 ϕ_L については次のようなことがわかる. まず St_c の小さい範囲では, 変動揚力 $|C_L|$ は, 円柱の角振動に対してほとんど遅れを示さず ($\phi_L \sim 0^\circ$), ほぼ準定常的に働いている. しか

図 42 角振動する円柱の変動揚力の実測値と計算値の比較 ($Re=40, 80$)

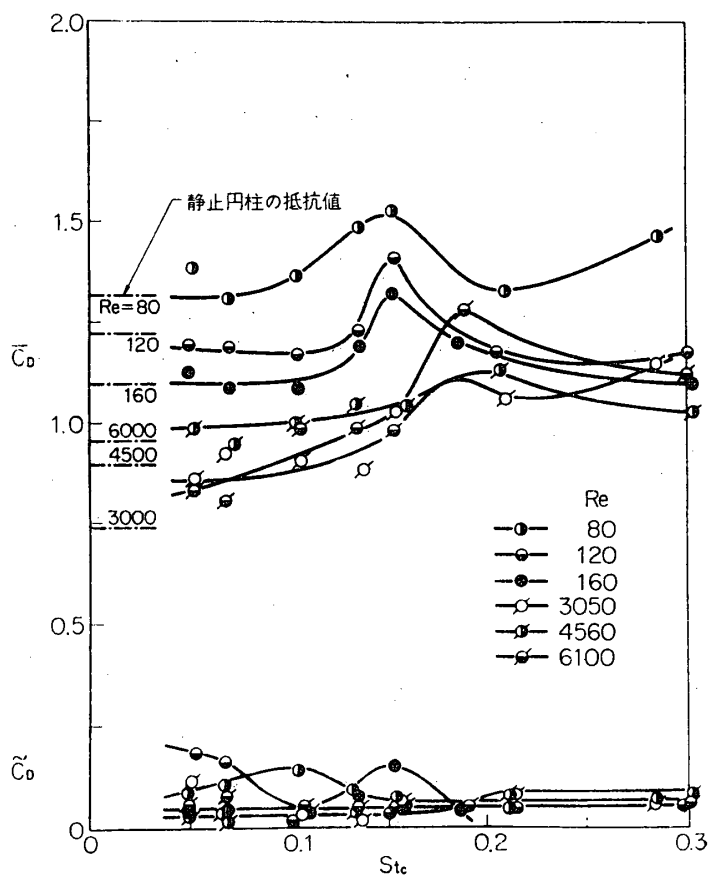
し St_c の増加に伴い、直線的に遅れが大きくなり、 $|C_L|$ が最大となる synchronization の St_c では、位相遅れは -50° から -200° へと急激な増大を示している。さらに St_c が大

(a) $Re = 40 \sim 160$ (b) $Re = 3050 \sim 6100$ 図 43 角振動する円柱の変動揚力の振幅と位相差 ($Re = 40 \sim 6100$)

きくなっても、位相差 ϕ_L はほとんど変わらず、ほぼ一定値を保っている。この $|C_L|$ の最大値 $|C_L|_{\max}$ とそのときの St_c の値 St_{\max} を Re 数に対してプロットすると、図 44 のようになり、これはさきに静止円柱におけるカルマン渦列のストロハル数 St_K の Re 数に対する変化 (図 38) とよく対応しているが、変動揚力の最大値 $|C_L|_{\max}$ は静止円柱の変動揚力振幅に比べかなり大きく、 $|C_L| \approx 0.75$ であるが、この場合も $Re=10^2 \sim 10^4$ の範囲ではほとんど一定であることがわかる。

図 44 $|C_L|_{\max}$, St_{\max} と Re 数の関係

次に、抵抗 C_D の定常分 \bar{C}_D および変動分 \tilde{C}_D と振動数 St_c との関係が図 45 に示してある。定常分 \bar{C}_D は揚力 $|C_L|$ が最大値を示す St_c の付近でやはり最大となっている。こ

図 45 角振動する円柱の抵抗 ($Re=80 \sim 6100$)

れに対し、強制振動数 f_c の 2 倍で変動する変動分 \tilde{C}_D は元来振幅が小さく、定常分の 1/10 程度であり、測定精度から考えてその振幅変化が、振動数 St_c と関連性をもっているとはほとんど認められない。

4. 結 論

一様粘性流れの中におかれた静止円柱および角振動する円柱まわりの非定常粘性流れを数値解法によって解き、これからその円柱に働く非定常流体力を求めた。他方、低い Re 数から実機に近い高い Re 数までの比較的広い Re 数範囲にわたり実験を行ない、静止円柱および角振動する円柱に働く非定常流体力を測定して、計算値と比較し検討した。その結果をまとめると次のとおりである。

一様粘性流れの中におかれた静止円柱の場合；

1) 低 Re 数範囲 ($Re=20\sim80$) における数値解析で求めた計算値は、実測値と定性的にはもちろん定量的にもよく一致し、また今まで求められた計算値や実測値ともかなりよい一致を示した。

2) それゆえ、本報告で示した数値解法ならびに境界条件の与え方などが十分な精度を保証するものであり、また実験も一応妥当なことが確認された。

3) 広い Re 数範囲 ($Re=40\sim1.5\times10^4$) にわたる定常抵抗やカルマン渦列のストロハル数の実測値は、従来の実測値とよく一致している。しかし、カルマン渦列により誘起される変動揚力の実測値は、従来の実測値と傾向をことにし、 $Re=10^2\sim1.5\times10^4$ の範囲で、 Re 数に無関係にほぼ $|C_L|\approx0.1$ である。

一様粘性流れの中で中心軸まわりに角振動する円柱の場合：

1) 低 Re 数範囲 ($Re=40\sim80$) で強制振動数を $St_c=0\sim0.2$ の範囲に変えるとき、変動揚力の振幅と位相差に対する計算値は、実測値と定性的にも定量的にもよい一致を示し、非定常流れの場合の本数値解法ならびに実験の妥当性を立証した。

2) 数値解析の結果によると、角振動する円柱上・下面のはく離点 (S_3, S_3') は互に同位相で移動し、しかも円柱に働く変動揚力の変化とも同位相である。したがって揚力の変動は、境界層のはく離と密接な関連性のあることがわかる。

3) 広い Re 数範囲 ($Re=40\sim10^4$) にわたり、強制振動数 St_c と静止円柱のカルマン渦列の周波数 St_K との関係から、次の三つの領域がある。 $St_c\ll St_K$ では、円柱後流にカルマン渦列が発生し、強制振動による揚力波形の上にカルマン渦列による変動揚力が重畳している。 $St_c\sim St_K$ では、いわゆる synchronization 現象が生じ、後流の渦列と変動揚力ともに St_c で振動し、その揚力振幅は最大値を示し、位相は大幅に遅れる。 $St_c> St_K$ では、揚力波形はみだれ、振幅も一定せず、急激に減少する。位相も大きくステップ状におくれ、以後一定値を示す。

4) とくに $Re>1000$ の範囲では、 Re 数とは無関係に揚力振幅は $St_c< St_K$ で完全に一本の曲線上にそろい、位相も St_c の増加に伴い、少しずつ遅れ、ほぼ一本の直線上にのる。しかし $St_c> St_K$ になると、振幅は減少するが、ばらつきが多くなる。

5) $Re=40\sim1.5\times10^4$ の範囲で、円柱に働く抵抗の定常成分 \bar{C}_D が $St_c\approx St_K$ で最大値

を示し、また抵抗の変動成分 \tilde{C}_D は定常成分の約 1/10 以下であり、Re 数や Stc 数によりほとんど変化が認められなかった。

本研究における数値解法や実験方法は一樣流中で並進振動する楕円翼の場合にそのまま適用することができ、その方向への研究成果は近く報告する。

また本研究では、一樣流中におかれた角振動する円柱に働く流体力や円柱まわりの流れの様相などに注目したが、今後、さらに物体の渦列などの非定常流れの中におかれた振動円柱についての問題などへの発展を考えている。

最後に、いろいろ有益な討論を頂いた谷田好通助教授に深く感謝の意を表わします。

また本研究の実験に関してご尽力を頂いた小保方富夫技官を始め、いろいろお世話になった研究室の諸氏に厚くお礼申し上げます。なお計算は主として宇航研計算センターの大型電子計算機 HITAC 5020 F を使いました。

1971 年 3 月 20 日 原動機部

参 考 文 献

- [1] Thom, A. (1933) Proc. Roy. Soc. A, 141, 651~669.
- [2] Kawaguti, M. (1953) J. Phy. Soc. Japan. 8, 6, 747~757.
- [3] Imai, I. (1951) Proc. Roy. Soc. A, 208, 487~516.
- [4] Allen, D. N. de G. and Southwell, R. V. (1955) Quart. J. Mech. and Applied Math. 8, 129~145.
- [5] Apelt, C. J. (1961) A. R. C. R & M No. 3175.
- [6] Keller, H. B. and Takami, H. (1966) Numerical sol. of nonlinear differential eq. John Wiley & Sons Inc.
- [7] Hamielec, A. E. and Raal, J. D. (1969) Phys. Fluids, 12, 1, 11~16.
- [8] Payne, R. B. (1958) J. Fluid Mech. 4, 81~86.
- [9] Kawaguti, M. (1966) J. Phys. Soc. Japan, 21, 10, 2055~2062.
- [10] Son, J. S. and Hanratty, T. J. (1969) J. Fluid Mech. 35, 2, 369~386.
- [11] Fromm, J. E. and Harlow, H. F. (1963) Phys. Fluids, 6, 975~981.
Fromm, J. E. (1963) Los Alamos Sci. Lab. Report LA-2910.
- [12] Pearson, C. E. (1965) J. Fluid Mech. 21, 4, 611~622.
- [13] Todd, J. (1962) Survey of numerical analysis, McGraw Hill Co. Inc.
- [14] Ralston, A. & Wilf, H. S. (1960) Mathematical method for digital computers, John Wiley & Sons Inc.
- [15] Grove, A. S., Shair, F. H., Petersen, E. E., and Acrivos, A. (1960) J. Fluid Mech., 19, 60~80.
- [16] Tritton, D. J. (1959) J. Fluid Mech, 6, 547~567.
- [17] Moore, F. K. (1957) IUTAM symposium "Boundary layer research".

- [18] Swanson, W. M. (1961) Trans. ASME, Series D, 83, 461~470.
- [19] Relf, E. F. and Simmons, L. F. G. (1924) A. R. C. R & M No. 917.
- [20] Kovasznay, L. S. G. (1949) Proc. Roy. Soc. A, 198, 174~190.
- [21] Roshko, A. (1953) NACA TN 2913.
- [22] Finn, R. K. (1953) J. Appl. Phys., 24, 771.
- [23] Delany, N. K. and Sorensen, N. E. (1953) NACA TN 3038.
- [24] Keefe, R. T. (1961) University of Toronto, UTIA Technical Report No. 76.
- [25] Taneda, S. (1956) J. Phys. Soc. Japan 11, 302~307.
- [26] Marris, A. W. (1964) Trans. ASME, Ser. D. 86-2, 185~196.
- [27] Morkovin, M. V. (1964) Proc. Symposium on fully separated flows, ASME 102~118.
- [28] McGregor, D. M. (1957) UTIA Technical Report No. 14.
- [29] Gerrard, J. H. (1961) J. Fluid Mech. 11, 244~256.
- [30] Drescher, H. (1956) Z. f. Flugwiss., 4, 17~21.
- [31] Fung, Y. C. (1960) J. A. S. 27, 801~814.
- [32] Humphreys, J. S. (1960) J. Fluid Mech. 9, 603~612.
- [33] Phillips, O. M. (1956) J. Fluid Mech. 1, 607~624.
- [34] Schwabe, M. (1935) Ingenieur-Archiv, 6, 34~50.
- [35] Bishop, R. E. D. and Hassan, A. Y. (1964) Proc. Roy. Soc. A, 277, 32~50.
- [36] Bishop, R. E. D. and Hassan, A. Y. (1964) Proc. Roy. Soc. A, 277, 51~75.
- [37] Koopman, G. H. (1967) J. Fluid Mech. 28, 3, 501~512.