

2種気体 FLIC 法による衝撃波管内の流れの数値計算

廣 瀬 直 喜

Numerical Calculation of Shock Tube Flow by Two-material Fluid-in-Cell Method

By

Naoki HIROSE

Abstract: This paper presents a modification for Fluid-in-Cell method for unsteady inviscid compressible fluid flow with discontinuities such as shock wave and contact surface. The spreading of contact surface inherent to Eulerian difference method is excluded by a special treatment of contact surface cell. The method is applied to one-dimensional shock tube flow problems including combination of gases with different specific heats ratio, i. e. Helium/Air. The position and jump of contact surface obtained by the calculation agree with the simple theory. The flow field of interaction with reflected shock wave is calculated with remarkably improved accuracy.

概 要

衝撃波等の不連続面を含む非粘性圧縮性流体の流れの問題を数値的に解く人工粘性法の一つ、Fluid-in-Cell 法について簡単に紹介したのち、同法における接触面の取扱いの一改良案、2種気体 FLIC 法、について記す。同法を用いて一次元衝撃波管内の流れを求めた結果、比熱比の異なる気体の組合せの計算が可能となり、接触面の位置、とび、衝撃波反射後の流れ場が従来の方法にくらべ、よい精度で得られた。

記 号

AK	陽的人工粘性項を作用させるパラメータ	K	式 (35) 参照
B	Landshoff 型人工粘性項係数	M_s	衝撃波 Mach 数
c	音速	m	気体分子量
E	単位質量当たりの全エネルギー	n	計算周期数
F	u または E	p	圧力
f	JC cell (3章参照) での各気体の占める体積比	q	陽的人工粘性項
I	単位質量当たりの内部エネルギー	R	気体のガス定数
i	x 方向 cell 番号	R	cell 体積当たり質量
		STEP	式 (39) 参照
		T_1, T_2	cell境界における流れの方向により、

0 または 1 の値をとる変数	α 気体区別の番号, 1 または 2
t 時間	1, 2 気体 1 または 2 に関する値
u 速度	~ Phase I 終了時における値
x 空間座標	- Phase I の最初と終了時における値 の平均
γ 比熱比	
δM cell 境界を横切って移動する質量流 量	添字 (右下) i cell 番号 i における値
δt 時間方向刻み幅	J_C JC cell における値
δX_{JC} 接触面の δt 時間での移動量	1 低圧室気体の初期値
δx x 方向 cell 刻み幅	2 衝撃波直後の値
ϵ_x x 方向陰的人工粘性係数	3 接触面直後の値
ρ 密度	4 高圧室気体の初期値
添字 (肩)	5 反射衝撃波直後の値
n 時刻 $t = n\delta t$ における値	

1. 緒 言

圧縮性流体の流れにおいては、実在気体効果、粘性、熱伝導性の影響を無視した非粘性理想気体を仮定しても、衝撃波や接触面などの不連続面が一般に形成され、それらの位置、形状、強さは既知ではなく、流れ場を解いて初めて決定されるものであるから、この種の流れの問題は内部未定境界値問題となり、解析的に解けるものは限られている。そこで、流体運動に対する基礎方程式を適当な差分近似で置換えたり、流体要素に対する適当な粒子模型化を行なうことによって、衝撃波などの不連続面に関する何らの仮定をも設定することなく、それらを含む非粘性圧縮性流体の非定常な流れ場を数値的に求める計算機実験の手法が幾つか提案されている。差分法において不連続面を扱うには困難を伴うが、それを避けるため、von Neumann と Richtmyer [1] は、粘性流体で衝撃波が流れの物理量の急激な変化を伴う有限幅の連続的な層となることに着目し、真の粘性項より簡単な形をした、しかも大きな値を持つ人為的な粘性相当項（以下「人工粘性項」と呼ぶ）を、非定常非粘性圧縮性流れの基礎方程式に付加し、その適当な差分近似により、初期値境界値問題の解として、衝撃波が連続的な層となり、その前後では Rankine-Hugoniot (R-H) 関係が成立するような流れ場が数値的に求められることを示した。一方、Lax [2] は流体力学方程式が質量、運動量、エネルギーなどの物理量の保存を表わしている事実に基づき、非線形双曲型偏微分方程式を保存則 (Conservation Laws) と呼ばれる形で書き、その形に対するひとつの差分法を提案し、不連続面を含む解が求められることを示した。彼の差分法、Lax 法、では差分法の打ち切り誤差項の形で人工粘性項が導入される。保存則の基礎方程式を差分近似する形式の方法には、Lax 法のほかに、Rusanov 法、Godunov 法、Lax-Wendroff 法などが一般に知られている。

これらの諸法に対し、Particle-in-Cell (PIC) 法 [3]、Fluid-in-Cell (FLIC) 法 [4] と呼ばれる、流体要素の模型化による流体運動の模倣を行なう手法がある。PIC 法では、流体の運動する空間領域を、観測者に対して固定した Euler 格子の網目の構成する cell に分割し、各

cell に対して速度, 全エネルギー, 全質量を割当てる. 一方, 流体自体は Euler 格子の間を移動する Lagrange 的粒子 (particle) で表現し, その運動により流体運動が表現される. FLIC 法は流体粒子の代わりに連続流体が cell 間を移動すると考え, 輸送過程の計算の簡略化と電子計算機の記憶容量の減少化を計ったものである. 保存則を直接適用してはいないが, これらの手法も基礎方程式の一種の差分近似であり, 人工粘性項を陽的または陰的に含むことにより不連続面を取扱うことができる.

PIC 法を除くほかの人工粘性法では, 接触面を境に異なる比熱比を持つ気体の存在する多種気体問題を扱うことは困難である. また同一気体の場合には, 衝撃波面が数格子幅程度の広がりしか持たないのに対して, 接触面は衝撃波面幅の 10 倍近くに達し, 正確な接触面位置, 密度不連続のとびは求めがたい. そこで, 本論文では, 同程度の空間的分解能を得るのに要する計算時間が他法より短かく, 計算の安定性も強いと考えられる FLIC 法において, 接触面を含む cell を模型的に, 特別に取扱うことによって上述の困難性を除く試み, 2種気体 FLIC 法を行ない, 一次元衝撃波管内の流れの問題に適用した結果を報告する.

2. FLIC 差分法

2.1 基礎方程式

粘性, 熱伝導性を無視し, 流れが一次元的であるとすると, Euler の運動方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial I}{\partial t} + \rho u \frac{\partial I}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho I. \quad (4)$$

ここで, ρ, u, I, p はそれぞれ気体の密度, 速度, 内部エネルギー, 圧力であり, γ は気体の比熱比である.

2.2 差分法

FLIC 法では流体の運動する空間領域 (ここでは一次元問題を考え, x 座標のみ) を刻み幅 δx の格子で分割し, 格子の網目で囲まれた領域を cell と呼ぶ. 各 cell は添字 i で区別される. 時刻 $t = n\delta t$, ($n=0, 1, 2, \dots$ は計算周期数) における各 cell のもつ密度 ρ_i^n , 速度 u_i^n , 内部エネルギー I_i^n から, 時間方向刻み幅 δt 後の値を求めるための, 基礎方程式に対する差分近似を二段階 (Phase I, II) に分けて行なう.

a. Phase I

ここでは, (2), (3) 式の輸送項を落し, 圧力こう配の効果のみを考慮した式を次のように差分近似して, 中間的な速度 \bar{u}_i^n , と内部エネルギー \bar{I}_i^n を計算する. 簡略化のため, 右辺の値の添字 n を略すと,

$$p_i^n = (\gamma - 1) \rho_i I_i, \quad (5)$$

$$\bar{u}_i^n = u_i - \frac{\delta t}{\rho_i \delta x} \{ (p+q)_{i+1/2} - (p+q)_{i-1/2} \}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_i^n = I_i - \frac{\delta t}{\rho_i \delta x} \{ & \bar{u}_{i+1/2} (p_i + q_{i+1/2}) - \bar{u}_{i-1/2} (p_i + q_{i-1/2}) \\ & - \bar{u}_i (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) \}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{E}_i^n = \bar{I}_i^n + \frac{1}{2} (\bar{u}_i^n)^2. \quad (8)$$

ただし, E は単位質量当たり全エネルギーを表わし, 添字の半整数, $-$ はそれぞれ,

$$p_{i+1/2} = \frac{1}{2} (p_i + p_{i+1}),$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2} (u_i + \bar{u}_i),$$

などを意味する. q は陽的に導入した Landshoff 型人工粘性項で, 局所音速とくらべ, 流速の小さい領域での差分法の不安定化を防ぐ作用をする. FLIC 法では, 高速領域や膨脹域では陰的な人工粘性項である打切り誤差項の働きのみで差分法の安定化が可能であり, そこでは q は作用しないように, 次の形で与えている.

$$\left. \begin{aligned} u_{i+1}^n - u_i^n < 0, \quad \text{かつ} \quad AK \cdot (u_{i+1/2}^n)^2 < (c_{i+1/2}^n)^2 \quad \text{の場合,} \\ q_{i+1/2}^n = -B \cdot c_{i+1/2}^n \rho_{i+1/2}^n (u_{i+1}^n - u_i^n), \\ \text{その他の場合,} \\ q_{i+1/2}^n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで, AK は q を作用させる最大局所 Mach 数を決めるパラメータ, B は q の大きさを定めるパラメータである.

b. Phase II

第2段階では, 中間的速度を用いて, 時間 δt に cell 境界を横切って移動する質量流量 δM を計算し, その総計から新しい密度 ρ_i^{n+1} が決まる. 運動量, エネルギーの流れは, 質量流量が流出側 cell の中間的速度, 全エネルギーを伴って移動すると考えて, cell の各境界での流出入総計から新しい速度 u_i^{n+1} , 内部エネルギー I_i^{n+1} が求められる. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \delta M_{i+1/2}^n &= \rho_i^n \bar{u}_{i+1/2}^n \delta t, \quad \text{ただし} \quad \bar{u}_{i+1/2}^n > 0, \\ &= \rho_{i+1}^n \bar{u}_{i+1/2}^n \delta t, \quad \text{ただし} \quad \bar{u}_{i+1/2}^n < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{1}{\delta x} \{ \delta M_{i-1/2}^n - \delta M_{i+1/2}^n \}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_i^{n+1} = \frac{1}{\rho_i^{n+1} \delta x} \{ & T_1 \bar{F}_{i-1}^n \delta M_{i-1/2}^n - T_2 \bar{F}_{i+1}^n \delta M_{i+1/2}^n \\ & + \bar{F}_i^n [\rho_i^n \delta x + (1 - T_1) \delta M_{i-1/2}^n - (1 - T_2) \delta M_{i+1/2}^n] \}, \end{aligned} \quad (12)$$

ただし,

$$F_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ E_i \end{Bmatrix},$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}_{i-1/2}^n > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \text{に対して, } \left. \begin{array}{l} T_1 = 1 \\ = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}_{i+1/2}^n > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \text{に対して, } \left. \begin{array}{l} T_2 = 0 \\ = 1 \end{array} \right\}.$$

$$I_i^{n+1} = E_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_i^{n+1})^2. \quad (13)$$

計算の一周期はこれで完了し、希望する時刻までこれらの操作を繰返すことにより、各時刻における流れ場が計算される。

2.3 近似微分方程式と安定条件

cell 中心と境界で、2.2 節で与えた差分法の解と等しい値を持つ滑らかな連続関数を考えると、それは cell 中心と時間 $n\delta t$ のまわりに Taylor 展開可能であるから、差分法の中に現われる諸量をそれで置換えて、展開すると次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + O(\delta t), \quad (14)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \varepsilon_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + O(\delta t), \quad (15)$$

$$\rho \frac{\partial I}{\partial t} + \rho u \frac{\partial I}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} = -q \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \varepsilon_x \frac{\partial I}{\partial x} \right) + \varepsilon_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial I}{\partial x} + \rho \varepsilon_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + O(\delta t), \quad (16)$$

ただし、

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} |u| \delta x.$$

これらは FLIC 差分法を近似する微分方程式であり、左辺は基礎方程式 (1)~(3) と一致する。右辺は $\delta x, \delta t$ の一次の打切り誤差項と陽的人工粘性項 q であり、FLIC 法が正確度 1 の差分法であることを示している。これらの項は Navier-Stokes 方程式の粘性拡散、熱伝導項に類似しているが、係数 ε_x が格子の大きさ、局所速度に依存することからわかるように、差分法の形によって異なり、直接 N-S 方程式とは対比できない。しかし、これらの項の存在により、衝撃波面を不連続面ではなく、ある幅を持つ層として計算することが可能となる。

ε_x を含む打切り誤差項は差分法の Phase II で現われ、その散逸作用は差分法の安定性を増すから、Phase I での安定性を、局所線形化して求めると

$$\frac{c\delta t}{\delta x} \leq \min \left[\frac{1}{B}, \frac{\gamma B}{\gamma - 1} \right], \quad (17)$$

を得る。ここで B は陽的人工粘性項の係数であり、 $B=0$ では不安定であることを示しているが、実際の計算では、Phase II の打切り誤差項による不安定抑制があるため、安定な場合も多い。実用的には、よく知られた Courant-Friedrichs-Lewy の安定条件、

$$\frac{c\delta t}{\delta x} \leq 1, \quad (18)$$

差分法が隣合う cell 間の関係しか記述していないことから、流体が時間 δt に δx 以上移動

するのを禁止する,

$$\frac{u_{\max} \delta t}{\delta x} \leq 1, \quad (19)$$

の二つの条件を満たす範囲で, 経験的に決めざるを得ない.

3. 接触面の取扱い (2種気体 FLIC 法)

計算領域内に cell の網目と異なる, 時間とともに移動する接触面を境に, 異なる種類の気体が存在する流れの問題の扱いは困難である. PIC 法では, 流体を表現する粒子に異なる比熱比, ガス定数を割当てることにより, そのような問題を扱うことが可能で, それが同法の特長のひとつでもあった. 一方, FLIC 法では同法を連続体化して扱いの簡略化を行なったため, 上記の特長を失い, Euler 的扱いによる数値計算法の欠点である接触面の不明確化を伴うことになった. Euler 的扱いでは, 空間に固定したひとつの cell 内では, 物理量は一定の値を取るとされ, 打ち切り誤差項による拡散が起こるから, この欠点は避けられない. 実際, 計算の結果によると, 衝撃波面が $2 \sim 3\delta x$ 幅であるのに対し, 接触面の広がり, その数倍から 10 倍になっている.

そこで, 接触面を, その面を通して気体が入り出しない, そして流体とともに移動する質量零の不透過とみなし, それを含む cell に対して以下のような特別な取扱いを行なう. この方法を 2 種気体 FLIC 法と呼ぶことにする. 問題としては, 一次元衝撃波管内の流れを考えるが, それは初期値分布に不連続が存在し, 流れ場に衝撃波の形成, 伝播, 反射, 接触面, 膨脹波など, 圧縮性流体の特徴的現象を含み, かつ単純理論解があるため, 手法の評価に適している. もちろん, 以下の扱いはほかの一般の問題に対しても等しく適用できるものである.

第 1 図に問題の概念図と cell の取り方を示す. 接触面をその領域内に含む cell を JC cell と呼び, そこでは, 接触面を境に, 両側に異なる気体 1 と気体 2 が存在する. 接触面を通して気体の質量流束はなく, 拡散もないとする. したがって, 一次元問題では, 気体 1 は常に接触面より左側, 気体 2 は右側の領域にのみ存在する.

JC cell 以外での計算は, 各気体の持つ比熱比 γ^1, γ^2 , ガス定数 R^1, R^2 を用いて, 2.2 節の差分法を適用すればよい.

JC cell では, 接触面の性質から, 圧力 p_{JC} , 速度 u_{JC} はひとつの値を持つが, 密度, 内部エネルギー, cell 体積当たり質量は気体ごとに異なる値, $\rho_{JC}^1, I_{JC}^1, R_{JC}^1, \rho_{JC}^2, I_{JC}^2, R_{JC}^2$ を持ち, JC cell 内でそれぞれが占める体積比を f^1, f^2 とする. ここで添字 $_{JC}$ は JC cell の値, 肩の添字 1, 2 は気体の区別を表わす. 密度と質量との間には,

$$\rho_{JC}^1 f^1 = R_{JC}^1, \quad \rho_{JC}^2 f^2 = R_{JC}^2, \quad (20)$$

の関係があり, 定義から,

$$f^1 + f^2 = 1, \quad (21)$$

である.

両気体より与えられる cell 圧力 p_{JC} は等しくなければならないから,

$$p_{JC} = (\gamma^1 - 1) \rho_{JC}^1 I_{JC}^1 = (\gamma^2 - 1) \rho_{JC}^2 I_{JC}^2, \quad (22)$$

とすると, (20)~(22) の関係から逆に体積比が次のように与えられる.

$$f^\alpha = \frac{(\gamma^\alpha - 1)R_{JC}^\alpha I_{JC}^\alpha}{(\gamma^1 - 1)R_{JC}^1 I_{JC}^1 + (\gamma^2 - 1)R_{JC}^2 I_{JC}^2}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (23)$$

この関係は、Phase II の終りに新しい接触面位置、密度をきめる際、用いられる。

a. Phase I

圧力 p_{JC} は (22) を書きかえて、

$$p_{JC} = \frac{1}{2} \{(\gamma^1 - 1)\rho_{JC}^1 I_{JC}^1 + (\gamma^2 - 1)\rho_{JC}^2 I_{JC}^2\}, \quad (24)$$

を用いる。速度 \bar{u}_{JC}^n は (6) の ρ_i を JC cell の密度、 $(\rho_{JC}^1 \cdot f^1 + \rho_{JC}^2 \cdot f^2) = R_{JC}^1 + R_{JC}^2$ で置換えて、

$$\bar{u}_{JC}^n = u_{JC} - \frac{\delta t}{(R_{JC}^1 + R_{JC}^2)\delta x} \{(p+q)_{JC+1/2} - (p+q)_{JC-1/2}\}, \quad (25)$$

とする。(7) に対応する JC cell のエネルギー式は、

$$\begin{aligned} & \rho_{JC}^1 f^1 (\bar{I}_{JC}^{1n} - I_{JC}^{1n}) + \rho_{JC}^2 f^2 (\bar{I}_{JC}^{2n} - I_{JC}^{2n}) \\ &= -\frac{\delta t}{\delta x} \{ \bar{u}_{JC+1/2} (p_{JC} + q_{JC+1/2}) - \bar{u}_{JC-1/2} (p_{JC} + q_{JC-1/2}) - \bar{u}_{JC} (q_{JC+1/2} - q_{JC-1/2}) \}, \end{aligned} \quad (26)$$

であるが、各気体に対するエネルギー式は一義的には定まらない。差分法では、ひとつの cell の中では諸量は一定と考えるのが一般的である。そこで、上式右辺のエネルギー流束は JC cell 内に一様に作用すると考えると、各気体のエネルギー増加は cell 内にそれぞれが占める体積比 f^α に比例すると仮定してよいであろう。すると、(26) は各気体 $\alpha=1, 2$ に対して分離でき、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{I}_{JC}^{\alpha n} &= I_{JC}^\alpha - \frac{\delta t}{\rho_{JC}^\alpha \delta x} \{ \bar{u}_{JC+1/2} (p_{JC} + q_{JC+1/2}) - \bar{u}_{JC-1/2} (p_{JC} + q_{JC-1/2}) \\ &\quad - \bar{u}_{JC} (q_{JC+1/2} - q_{JC-1/2}) \}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{E}_{JC}^{\alpha n} = \bar{I}_{JC}^{\alpha n} + \frac{1}{2} (\bar{u}_{JC}^n)^2. \quad (28)$$

b. Phase II

境界 $JC+1/2$ を通る質量流量は気体 2 のみであり、他方、境界 $JC-1/2$ を通る気体は 1 のみである。したがって、質量流量を与える式は、境界 $JC+1/2$ では、

$$\left. \begin{aligned} \delta M_{JC+1/2}^{1n} &= 0 \\ \delta M_{JC+1/2}^{2n} &= \rho_{JC}^{2n} \bar{u}_{JC+1/2}^n \delta t, \quad \text{ただし } \bar{u}_{JC+1/2}^n > 0, \\ &= \rho_{JC+1}^n \bar{u}_{JC+1/2}^n \delta t, \quad \text{ただし } \bar{u}_{JC+1/2}^n < 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

で与えられ、残る境界でも同様に与えられる。ここで ρ_{JC+1}^n の肩の添字 2 を除いたのは、JC cell より右側はすべて気体 2 のみであるからである。各気体の新しい質量 $R_{JC}^{\alpha n+1}$ は、

$$R_{JC}^{\alpha n+1} = R_{JC}^{\alpha n} + \frac{1}{\delta x} \{ \delta M_{JC-1/2}^{\alpha n} - \delta M_{JC+1/2}^{\alpha n} \}. \quad (30)$$

速度 u_{JC}^{n+1} は両気体で共通の値を持ち、次のように与える。

$$u_{JC}^{n+1} = \frac{1}{\delta x \sum_{\alpha} R_{JC}^{\alpha n+1}} \{ T_{1JC} \bar{u}_{JC-1}^n \sum_{\alpha} \delta M_{JC-1/2}^{\alpha n} - T_{2JC} \bar{u}_{JC+1}^n \sum_{\alpha} \delta M_{JC+1/2}^{\alpha n} \}$$

$$+\bar{u}_{JC}^n[\delta x \sum_{\alpha} R_{JC}^{\alpha n} + (1 - T_{1JC}) \sum_{\alpha} \delta M_{JC-1/2}^{\alpha n} - (1 - T_{2JC}) \sum_{\alpha} \delta M_{JC+1/2}^{\alpha n}]. \quad (31)$$

全エネルギー $E_{JC}^{\alpha n+1}$ は、各気体に対して次式で与える。

$$E_{JC}^{\alpha n+1} = \frac{1}{\delta x R_{JC}^{\alpha n+1}} \{ T_{1JC} \tilde{E}_{JC-1}^n \delta M_{JC-1/2}^{\alpha n} - T_{2JC} \tilde{E}_{JC+1}^n \delta M_{JC+1/2}^{\alpha n} \\ + \tilde{E}_{JC}^{\alpha n} [\delta x \cdot R_{JC}^{\alpha n} + (1 - T_{1JC}) \delta M_{JC-1/2}^{\alpha n} - (1 - T_{2JC}) \delta M_{JC+1/2}^{\alpha n}] \}. \quad (32)$$

$$I_{JC}^{\alpha n+1} = E_{JC}^{\alpha n+1} - \frac{1}{2} (u_{JC}^{\alpha n+1})^2. \quad (33)$$

最後に、 $t = (n+1)\delta t$ での体積比 $f^{\alpha n+1}$ を (23)、密度 $\rho_{JC}^{\alpha n+1}$ を (20) より求める。接触面の移動量 δX_{JC} は、

$$\delta X_{JC} = (f^{1n+1} - f^{1n}) \delta x, \quad (34)$$

である。

接触面が cell 境界に近い場合には、(29) で与えられる質量流量が、本来、JC cell にあった質量よりも大きくなってしまふことが考えられる。このときは、1 計算周期内で接触面が cell 境界を越えては移動しないように、質量流量を、JC cell に存在する質量と等しくおさえる。すなわち、

$$\delta x \cdot R_{JC}^{2n} < \delta M_{JC+1/2}^{2n} \text{ のとき,}$$

$$\delta M_{JC+1/2}^{2n} \leftarrow K \cdot \delta M_{JC+1/2}^{2n}, \quad \text{ただし } K = \frac{\delta x R_{JC}^{2n}}{\delta M_{JC+1/2}^{2n}} \quad (35)$$

とにおいて計算する。そして、Phase II の最後で、右隣の cell を新しい JC cell として、JC の値をひとつ増す。新しい JC cell では、 $f^1=0$ 、 $f^2=1$ である。気体 1 が左方へ流出してしまうときも同様に考える。本論文では、接触面を cell 境界を越えて移動させる方法は扱いが複雑化するので採用せず、すべて (35) によった。 δt での移動量 δX_{JC} を小さくするように、 $\delta t/\delta x$ を十分小さくとれば、この現象の発生するひん度は全計算周期数にくらべて少なく、誤差は無視できる。

流れが二次元的な場合には、JC cell 内の接触面を直線で表現しても、cell 境界と接触面との交点の位置により、さまざまな幾何学的形状があり、それぞれの場合に対して、質量流量、体積比を与える式を導く必要がある。したがって、その取扱いは非常に複雑なものになると考えられるが、基本的には、ここでの取扱いを拡張すればよいであろう。

4. 衝撃波管内の流れ

4.1 問題設定と計算結果

一次元衝撃波管内の流れの問題として、第1図において初期条件を次のように与えた。隔膜より左側を高圧室、右側を低圧室とし、気体は等温、静止している。初期圧力比 $p_{41} (= p_4/p_1)$ より決まる密度比 ρ_{41} 、内部エネルギー比 I_{41} :

$$\rho_{41} = \frac{\rho_4}{\rho_1} = \frac{m_4 \cdot p_4}{m_1 \cdot p_1}, \quad I_{41} = \frac{I_4}{I_1} = \frac{m_4 \cdot \gamma_4 - 1}{m_1 \cdot \gamma_1 - 1} \quad (36)$$

を各室を構成する cell に与える。ただし、 m は気体分子量である。その際、低圧室の圧力、音速を 1 として正規化している。接触面を含む JC cell は、時刻 $t=0$ では隔膜の右側に接

する低圧室内 cell に割当てる。両気体の体積比, 質量は,

$$f^1 = R_{JC}^1 = 0, \quad f^2 = 1, \quad R_{JC}^2 = \rho_1 \quad (37)$$

とした。JC cell 圧力 p_{JC} は, 高圧室, 低圧室両初期圧力の平均値を与えた場合と, 低圧室と等しく与えた場合とでは, 計算結果に顕著な差は認められなかったので, すべての計算は, 初期値として後者を用いた。

管端における境界条件は次のように与えた。管端の cell ($i=N$) に接して仮想的な境界 cell ($i=N+1$) を考え, そこでの値を,

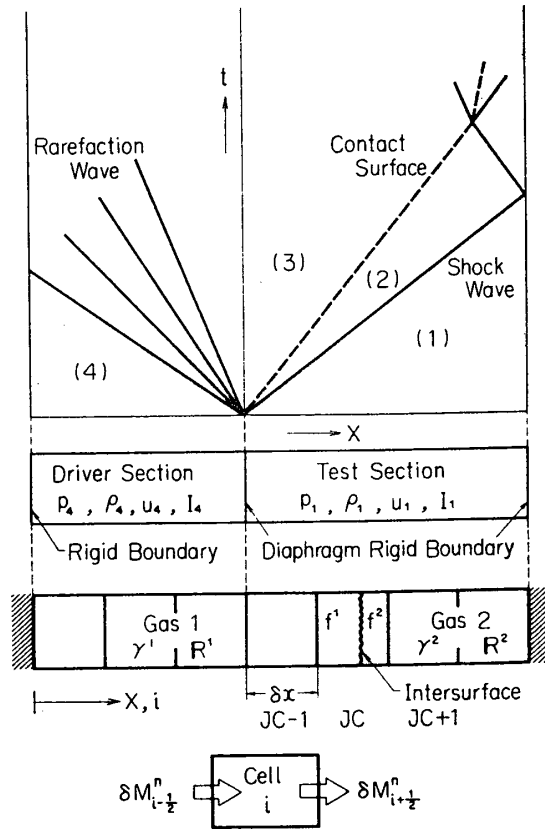
$$\left. \begin{aligned} \rho_{N+1}^n &= \rho_N^n, & u_{N+1}^n &= -u_N^n, \\ I_{N+1}^n &= I_N^n \\ \tilde{u}_{N+1}^n &= -\tilde{u}_N^n, & \tilde{I}_{N+1}^n &= \tilde{I}_N^n \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

で与える反射境界条件を用いた。

予備計算として, 陽的人工粘性項を含まない場合 ($B=0$) を次の条件で行なった。

高圧室長 $20\delta x$, 低圧室長 $80\delta x$, cell 幅 $\delta x = 1.0$, 時間刻み幅 $\delta t = 0.1$, として, 空

気/空気の組合せで初期圧力比 $p_{41} = 10^2$ 。得られた密度分布をいくつかの時刻について取ったものを第 2 図に示す。同図上, 鎖線は単純理論* による接触面, 衝撃波, 反射衝撃波の位



第 1 図 衝撃波管問題概念図と格子配列

* 単純理論による衝撃波強さ $p_{21}(=p_2/p_1)$ は,

$$p_{41} = p_{21} \left\{ 1 - \frac{(\gamma_4 - 1) \frac{c_1}{c_4} (p_{21} - 1)}{\sqrt{2\gamma_1} \sqrt{2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(p_{21} - 1)}} \right\}^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

で与えられ, 衝撃波 Mach 数 M_s は,

$$M_s = \left\{ \frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1} + \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} p_{21} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

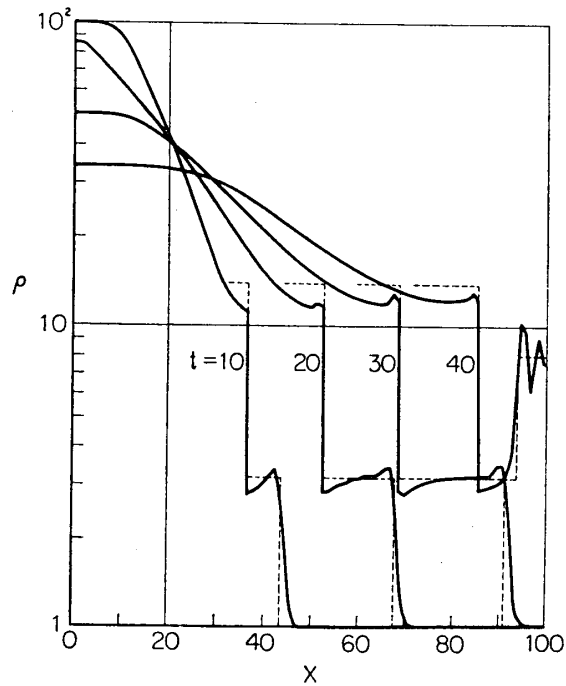
である。他の量は R-H 関係で定まる。接触面直後の値は, 圧力連続, 膨脹波の等エントロピ関係から次式で与えられる。

$$\rho_{31} = \frac{\rho_3}{\rho_1} = \rho_{41} \left(\frac{p_{21}}{p_{41}} \right)^{1/\gamma_4}$$

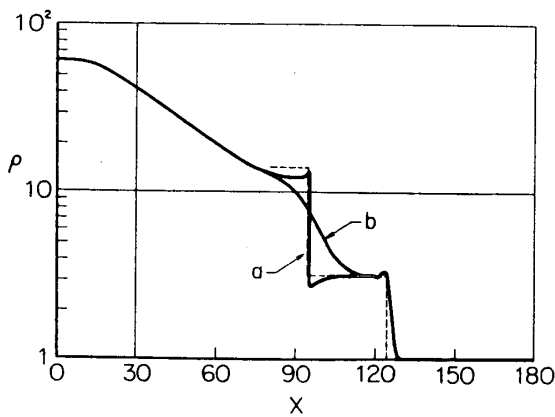
反射衝撃波による圧力上昇 p_{s1} は,

$$p_{s1} = \frac{p_s}{p_1} = p_{21} \frac{\frac{3\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - 1} p_{21} - 1}{p_{21} + \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}}$$

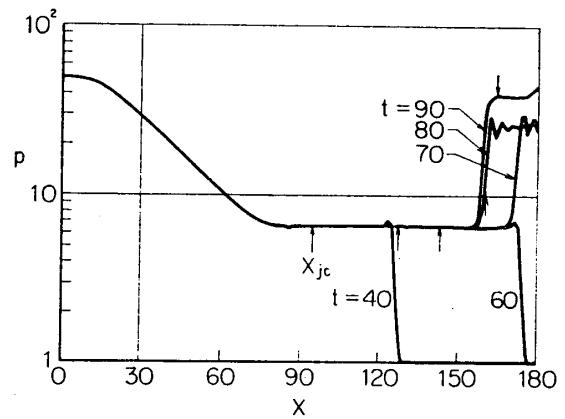
となる。



第2図 各時刻における密度分布; Air/Air, $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x=0.1$, $B=0$, FLIC 12 S



第3図 接触面近傍の密度分布の比較; Air/Air, $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x=0.1$, $B=0.3$, $AK=1.5$, $t=40$, a. FLIC 12 S, b. FLIC 1 ST



第4図 式(40)を用いた場合の圧力分布; Air/Air, $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x=0.1$, $B=0.3$, $AK=1.5$, FLIC 12 S

置ととびの値を表わす。計算結果は衝撃波が管端に達するまでは、比較的よい一致を示し、不連続面も安定であるが、反射衝撃波が形成されると、その後方では解の不安定振動が発生し、解が破壊した。この不安定現象は従来の、接触面を特に区別しない FLIC 法におけるものと同じであり、激点領域での差分法の不安定化によるものである。陽的人工粘性項を加え、 $B=0.3$, $AK=1.5$ とした計算では衝撃波反射後も安定な解が得られ、接触面でも不安定現象は認められなかった。以下の計算ではすべて、 $B=0.3$, $AK=1.5$ とした。

第1表 初期条件と計算結果 (FLIC 12S の場合)

気体組合せ 比熱比 γ	圧力比 p_{41}	STEP	衝撃波 Mach 数 M_s		接触面速度 u_{JC}	
			単純理論	計算値	単純理論	計算値
空気/空気 $\gamma_4 = \gamma_1 = 1.4$	10	0.1	1.6075	1.61	0.8212	0.82
	10^2	0.1	2.3711	2.40	1.6244	1.63
	10^3	0.05	3.1505	(3.16)	2.3609	(2.44)
水素/空気 $\gamma_4 = \gamma_1 = 1.4$	10	0.1	2.2319	2.24	1.4866	1.45
	10^2	0.1	4.4897	4.47	3.5558	3.54
	10^3	0.05	7.4812	(7.48)	6.1229	(6.14)
ヘリウム/空気 $\gamma_4 = 1.666667$ $\gamma_1 = 1.4$	10	0.1	2.0193	2.02	1.2700	1.28
	10^2	0.25	3.6102	3.63	2.7777	2.76
	10^3	0.05	5.3890	5.55	4.3362	4.46

注. () は接触面近傍の解が不良のもの

第2表 初期条件と計算結果 (FLIC 1ST の場合)

気体組合せ 比熱比 γ	圧力比 p_{41}	STEP	衝撃波 Mach 数 M_s	
			単純理論	計算値
空気/空気 $\gamma = 1.4$	10	0.1	1.6075	1.61
	10^2	0.1	2.3711	2.40
	10^3	0.05	3.1505	3.34
水素/空気 $\gamma = 1.4$	10^2	0.1	4.4897	4.47

計算を行なったケースおよびその結果の一部を第1表に示す。ここで、管長比はすべて、 $30\delta x/150\delta x$, cell 幅 $\delta x = 1.0$, とし、時間刻み幅 δt は、

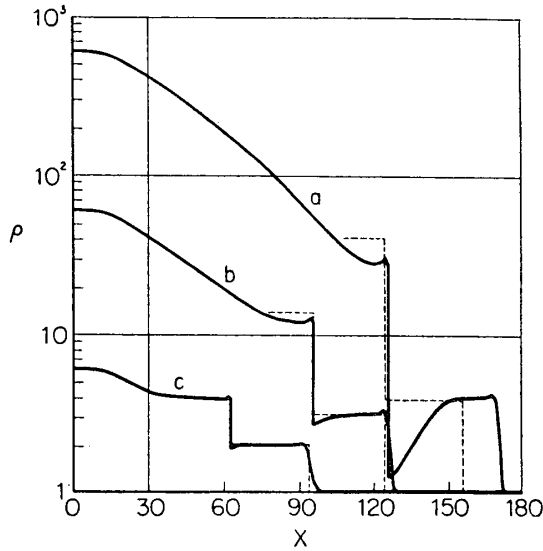
$$\text{STEP} = \frac{\delta t}{\delta x} \cdot \max(c_4, c_1), \quad (39)$$

の値で与えている。この計算プログラム「FLIC 12S」と比較のため、従来の FLIC 法プログラム「FLIC 1ST」でもいくつかの計算を第2表に示す条件で行なった。

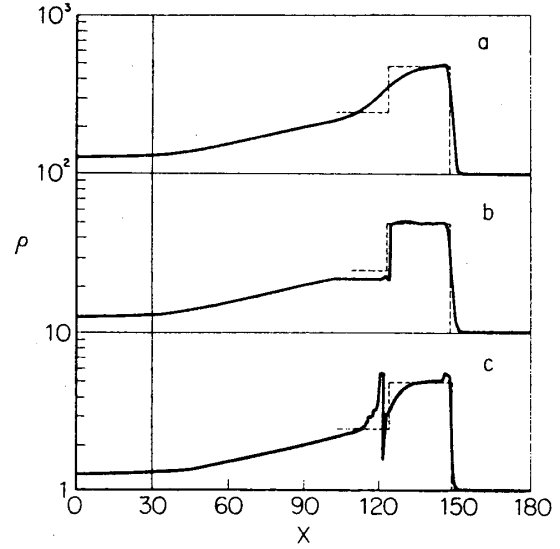
接触面近傍の密度分布の比較を第3図に示す。第4図は JC cell の圧力を、(24) の代わりに、JC cell に接する cell の圧力平均、

$$p_{JC} = \frac{1}{2}(p_{JC-1} + p_{JC+1}) \quad (40)$$

で与え、平滑化した場合の圧力分布を各時刻について図示したもので、第7図(b)と比較される。接触面位置は矢印 X_{JC} で示してある。空気/空気で、初期圧力比を変えた場合の、時刻 $t = 40$ での密度分布の比較を第5図で行なった。第6図は水素/空気、初期圧力比 $p_{41} = 10^2$, において、時間刻み幅比 $\delta t/\delta x$ を 0.02638 (STEP=0.1) と 0.13191 (STEP=0.5)



第 5 図 初期圧力比を変えた場合の密度分布の比較; Air/Air, $B=0.3$, $AK=1.5$, $t=40$, FLIC 12 S, a. $p_{41}=10^3$, $\delta t/\delta x=0.05$, b. $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x=0.1$, c. $p_{41}=10$, $\delta t/\delta x=0.1$



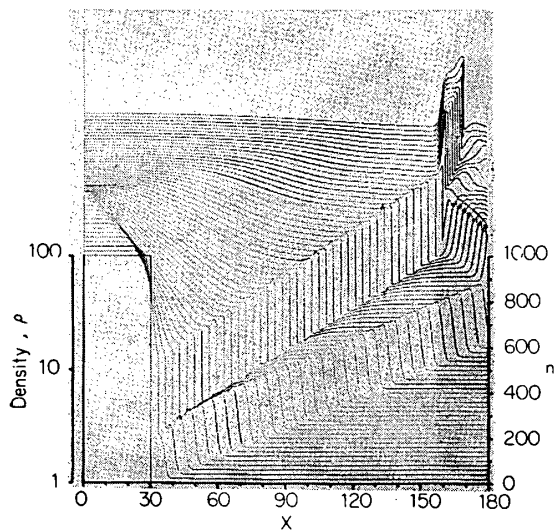
第 6 図 $\delta t/\delta x$ を変えた場合の密度分布の比較; H_2/Air , $p_{41}=10^2$, $B=0.3$, $AK=1.5$, $t=26.38$, a. FLIC 1 ST, $\delta t/\delta x=0.02638$, b. FLIC 12 S, $\delta t/\delta x=0.02638$, c. FLIC 12 S, $\delta t/\delta x=0.13191$

にとった場合の接触面近傍の密度分布の差を表わす。FLIC1ST による結果も比較のため載せてある。第 7~9 図はいくつかのケースについて、横軸に x 、縦軸に物理量を取り、縦または斜め方向には時間をとって、計算結果を直接、X-Y プロッタに描かせたものである。接触面と衝撃波反射後の分布の比較のため、第 7 図と同一条件の FLIC1ST による結果を第 10 図に示す。これらの計算から得られた衝撃波 Mach 数 M_s と初期圧力比 p_{41} との関係を示す。白丸が本計算、実線は単純理論である。

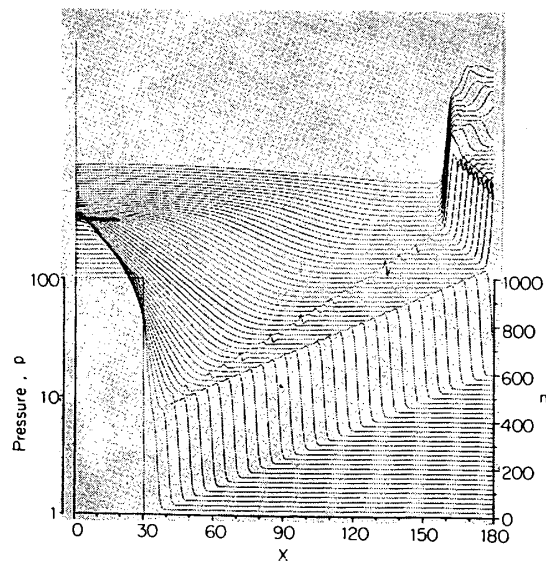
4.2 結果の検討

接触面：従来の FLIC 法では、第 3, 7(a), 10(a) 図の比較で明らかなように、衝撃波面が $3\delta x$ 程の幅であるのに対し、接触面は $20\sim 30\delta x$ の広がりを持ち、不明確である。これは 2.3 節で示した打ち切り誤差項による拡散効果のためで、大圧力比の場合は、衝撃波面と接触面の間隔が小さく、衝撃波後方の密度一定の領域はなきに等しい。一方、今回の計算法 (FLIC12S) では、接触面を通しての流体移動は存在せず、したがって Phase II で現われる打ち切り誤差項による拡散効果も接触面では起こらない。そのため、密度、内部エネルギーの値は接触面を含む JC cell だけで明確に求められた。圧力、速度は、JC cell でもひとつの値として計算され、その前後で連続的である。気体組合せと、初期圧力比の値によっては、接触面での密度変化が下降する場合もあるが、そのような場合にも、計算は正しく行なわれている (第 6 図)。

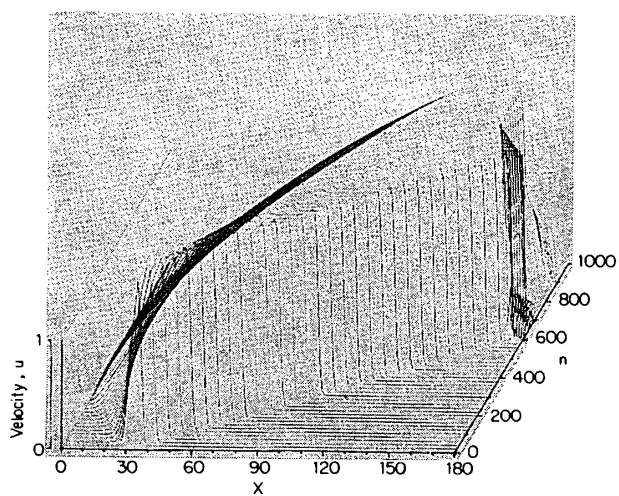
衝撃波後方と接触面後方の計算値 (数 cell の平均値) を単純理論と比較すると、第 3 表に



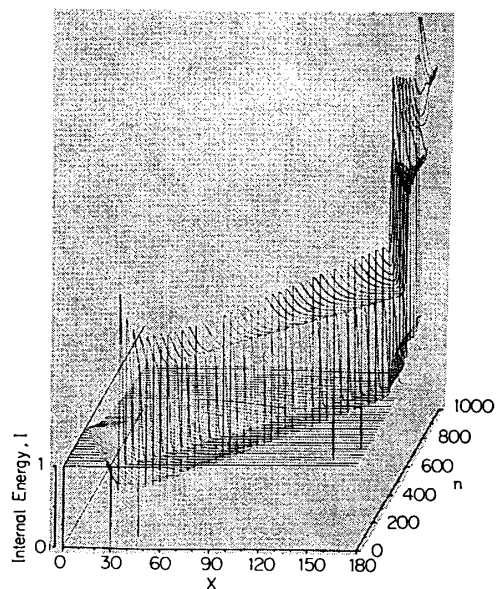
第 7 図 各時刻における衝撃波管内の流れ分布 ;
Air/Air, $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x=0.1$, $B=0.3$,
 $AK=1.5$, FLIC 12 S, (a) 密度分布



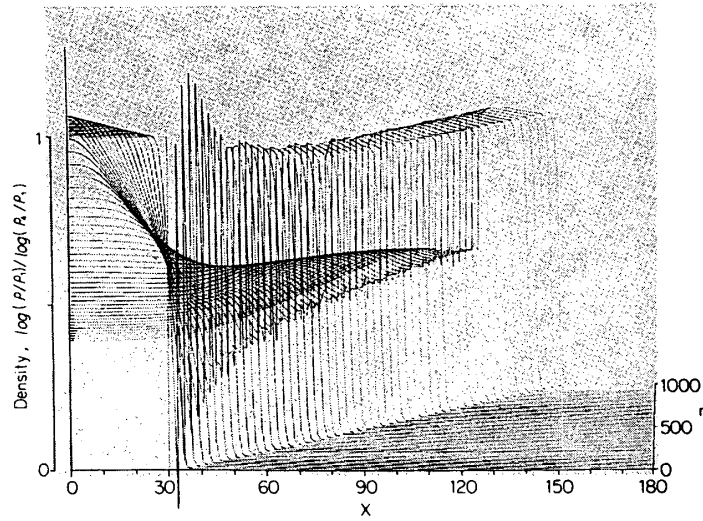
第 7 図(続) (b) 圧力分布



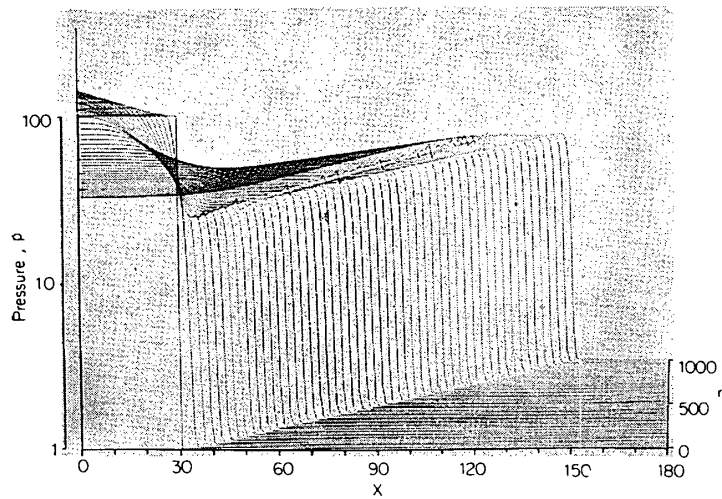
第 7 図(続) (c) 速度分布



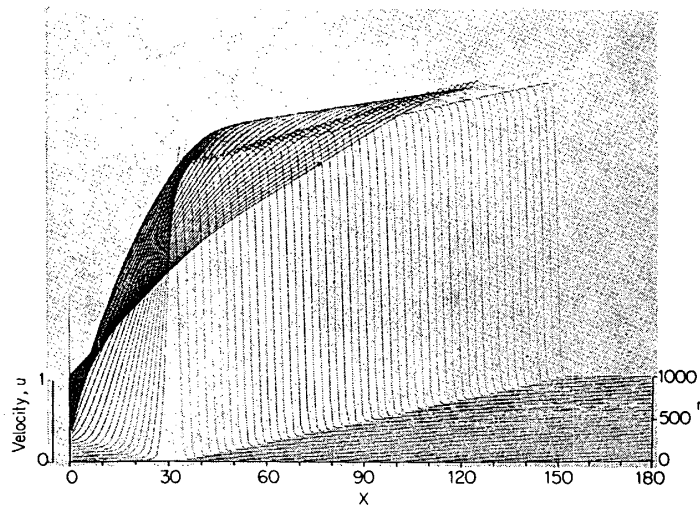
第 7 図(続) (d) 内部エネルギー分布



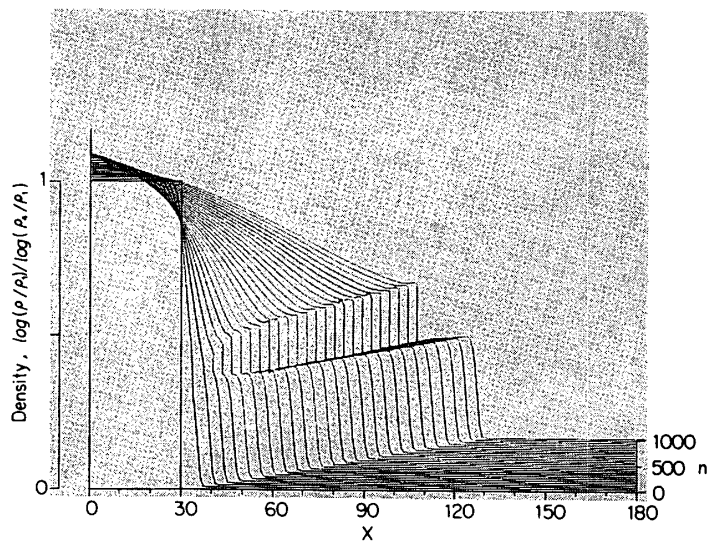
第 8 図 各時刻における衝撃波管内の流れ分布; H_2/Air , $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x = 0.0263825$, $B=0.3$, $AK=1.5$, FLIC 12 S, (a)密度分布



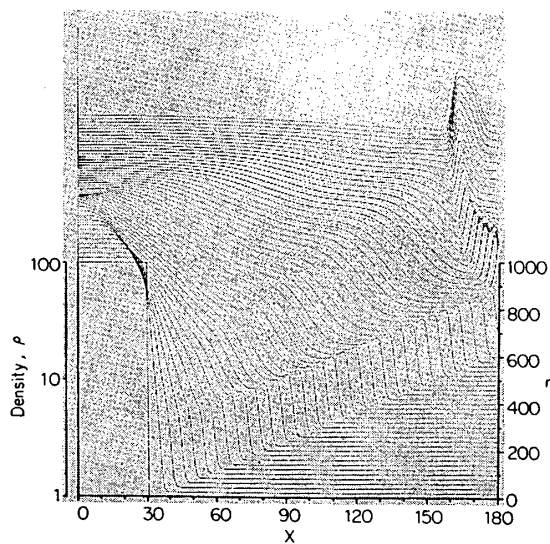
第 8 図(続) (b)圧力分布



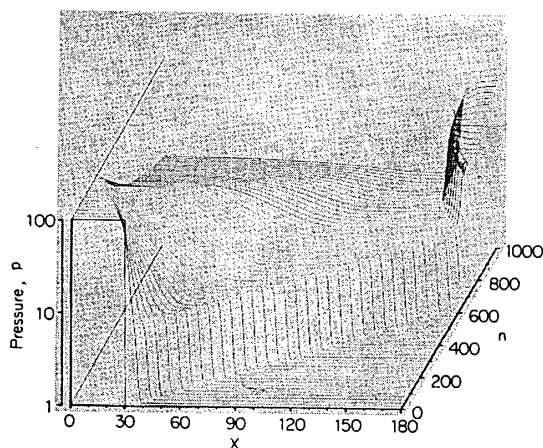
第 8 図(続) (c)速度分布



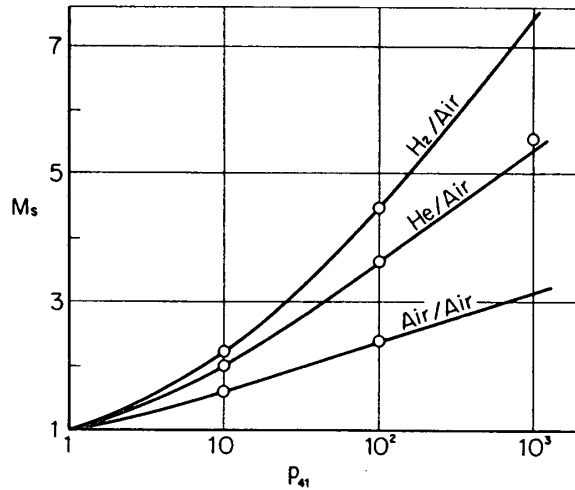
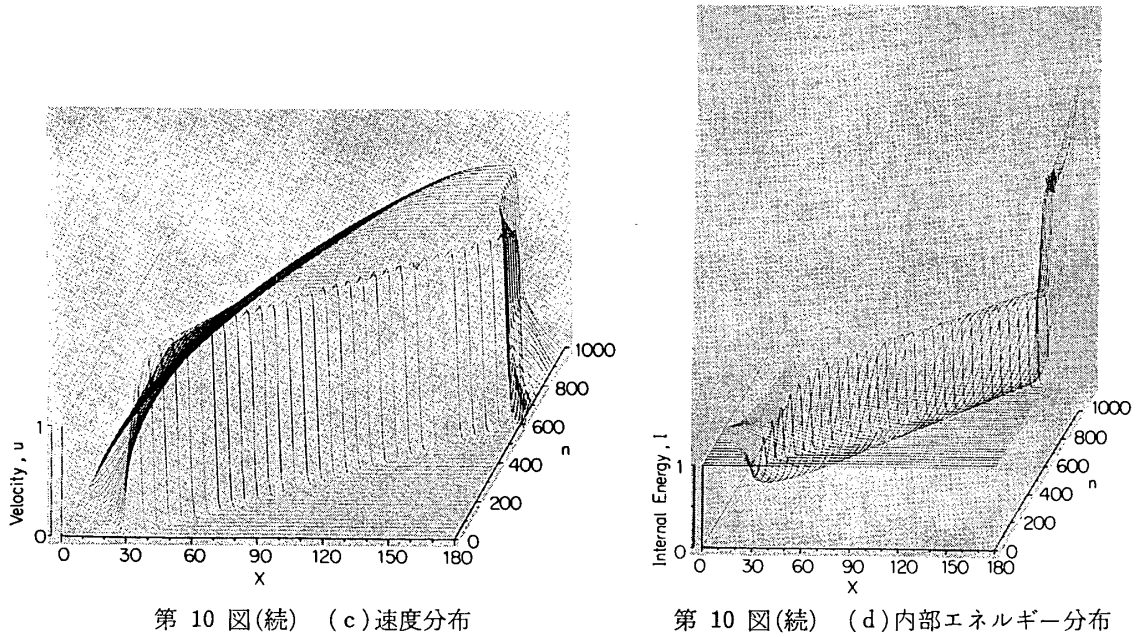
第9図 各時刻における衝撃波管内の流れ分布; He/Air, $p_{41}=10^3$, $\delta t/\delta x=0.017032$, $B=0.3$, $AK=1.5$, FLIC 12 S, 密度分布



第10図 各時刻における衝撃波管内の流れ分布, Air/Air, $p_{41}=10^2$, $\delta t/\delta x=0.1$, $B=0.3$, $AK=1.5$, FLIC 1 ST, (a) 密度分布



第10図(続) (b) 圧力分布



第 11 図 衝撃波 Mach 数と初期圧力比との関係；
白丸，本計算，細線，単純理論

第 3 表 衝撃波後方，接触面後方の計算値
空気/空気，初期圧力比 $p_{41}=10^2$ ， $t=40$

	衝撃波後方			接触面後方		
	単純理論	計算値	相対誤差	単純理論	計算値	相対誤差
密度 ρ	3.1756	3.18	+0.2%	14.0247	12.13	-13.5%
圧力 p	6.3922	6.47	+1.3	6.3922	6.43	+0.6
速度 u	1.6244	1.64	+0.9	1.6244	1.63	+0.5
内部エネルギー I	2.0129	2.03	+1.1	0.4558	0.53	+16.5

示すように、接触面後方の値は、圧力、速度が衝撃波面後方と同程度の誤差であるのに対し、密度は誤差が大きい。これは、前者では、接触面での操作が陽的に加わらないためである。圧力、速度の接触面近傍での小振動は、接触面が cell 境界を横切るとき、発生する数値計算上の振動である。(40) を用いると第4図のように、衝撃波面と接触面の干渉が起こる $t=80$ 以後を含めて、振動は発生せず、空間分解能は多少よくなるが、接触面直前の密度減少は、ほとんど改善されなかった。

接触面後方の密度の値は、FLIC1ST とくらべ、理論値に近く、膨脹波が到達するまでは一様な分布を示している。一方、前方では、密度の減少が認められ、その傾向は初期圧力比、時間刻み幅比が大きいほど著しい。これは、JC cell の低圧側気体の流出量 $\delta M^2_{JC+1/2}$ が大きくなり、1計算周期、 δt 時間に接触面の移動する距離 δX_{JC} が cell 幅 δx と同程度になってしまい、接触面が cell 境界を越えて移動しないという仮定では、接触面前方では流体が流出しすぎ、後方では流入しすぎて、せき止められてしまうことが原因と考えられる。JC cell での安定条件から考えても、 δt 時間の接触面移動量 $u_{JC}\delta t$ は、cell 幅 δx より十分小さくとられるべきである。第6図の b. と c. では、いずれも安定条件を満す $\delta t/\delta x$ であるが、b. のほうが良い解が得られることを示している。内部エネルギーは密度とは逆に、接触面前方で上昇し、その上昇分は、圧力が一定になるように、密度の減少分を補っている。接触面速度は第1表に示した通り、単純理論とは1%以下の誤差で一致している。

衝撃波 Mach 数：衝撃波 Mach 数は単純理論にきわめて近い値を与えた。比熱比の等しい空気/空気、水素/空気の場合、FLIC1ST の結果とも一致した。一定時刻における衝撃波位置は、初期圧力比が大きいほど、単純理論より前方に位置し、FLIC1ST の結果はその中間にくるが、衝撃波と接触面が十分分離した状態では、衝撃波速度は一致する。これは、接触面での打ち切り誤差による拡散効果が初期加速時を除いては、最終的な衝撃波の強さ、速度には影響しないことを示している。里深は衝撃波管内での衝撃波形成過程を二次元 FLIC 法で求めたが[5]、彼の得た最終到達衝撃波 Mach 数は一次元計算の結果と一致している。これらの点から、十分時間が経過し、定常状態になった衝撃波の強さは、いずれの方法によっても FLIC 法に固有の一定値に一致するように推測される。

衝撃波の反射と接触面との干渉：反射衝撃波による圧力上昇 p_{51} は、第7図にあげた、空気/空気、初期圧力比 10^2 の場合、単純理論値 25.862 に対して、25.7、密度上昇 ρ_{51} は 7.990 に対して、7.8 が得られ、誤差は FLIC1ST の場合と同程度である。しかし、反射衝撃波が接触面まで達し、そこで両者の干渉により衝撃波の通過と反射の起こる現象は、FLIC1ST では、接触面の広がりのため、第10図に示すようになってしまい、細部構造が見分けられないのに対し、FLIC12S では、第7図に示されるように、細部構造まで顕著に現われており、接触面の扱いを改良することにより空間分解能の著しい向上が可能となることを示している。

5. 結 語

衝撃波や接触面などの不連続面を含む非粘性圧縮性流体の流れを、それらに関する何らの仮定も設けることなく同一の計算算法で数値的に解く人工粘性法の一つ、FLIC 法において、

接触面を含む cell の取扱いの改良を行なった。一次元衝撃波管内の流れの問題へ適用の結果、従来の FLIC 法では扱えなかった比熱比の異なる気体の組合せの計算が可能となり、また、接触面の位置、とび、衝撃波反射後の流れ場が従来の方法によるものにくらべ、著しく良い精度で求められた。最終到達衝撃波 Mach 数は従来の FLIC 法によるものと一致し、単純理論に近い値であった。ここに示したような接触面の取扱いを、反応性流れや二次元流れの問題へ拡張することにより、人工粘性法の応用範囲を広げることが今後期待される。

終りに終始ご指導いただいた河村龍馬教授に感謝の意を表わします。

1971年2月25日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] von Neumann, J., and Richtmyer, R. D., "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks," J. Applied Physics, **21**, pp. 232~237 (1950)
- [2] Lax, P. D., "Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation," Comm. Pure Appl. Math., **7**, pp. 159~193 (1954)
- [3] Amsden, A. A., "The Particle-in-Cell Method for the Calculation of the Dynamics of Compressible Fluids," LA-3466, Los Alamos Scientific Laboratory, (1966)
- [4] Gentry, R. A., Martin, R. E., and Daly, B. J., "An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems," J. Computational Physics, **1**, pp. 87~118 (1966)
- [5] Satofuka, N., "A Numerical Study of Shock Formation in Cylindrical and Two-Dimensional Shock Tubes," ISAS Report No. 451, Inst. Space Aero. Sci., University of Tokyo, (1970)