

オンライン軌道推定における Kalman Filter の応用について

石 谷 久・玉 木 康 子

On Application of Kalman Filtering Technique to On-line
Orbit Estimation of a Launching Vehicle.

By

Hisashi ISHITANI and Yasuko TAMAKI.

Abstract: Kalman-Bucy filtering technique has widely been proved useful in trajectory determination of a satellite, launching rocket, since a precise trajectory information necessary for injection control to achieve a predetermined orbit is readily obtainable in real time by that filtering technique. In applying the filtering technique to an actual trajectory determination, however, several semi-empirical practices are often used in order to eliminate convergence difficulties primarily related with probable non-positive definite character of sequentially obtained variance-covariance matrices.

By applying a method of ~~primary~~^{principal} component analysis in this paper to investigate the reason and elimination of the difficulties, it is shown that the difficulties are associated rather with mathematical expression of the pursued trajectory than round-off error due to finite digit calculation, and the difficulties are, to some extent, eliminated by choosing a proper coordinate system. The real-time tracking programme presently used at Kagoshima Space Center for a satellite launching purpose is reviewed with respect to the results of this analysis, and it is shown that a practically optimum filter with no convergence difficulties even for 6~10 digits computation can be used in the real time program by improving a small part of the program.

概 要

人工衛星打上げロケットから衛星への軌道投入を行なうためには、前段ロケットの軌道に関する正確な情報を実時間で得る必要があるが、Kalman Filter を用いることによりこのような推定を容易に行なうことができ、軌道推定にはこの方法が有用であることは広く認められている。しかしながら、実際の軌道推定にこのフィルタを応用しようとする、共分散行列を逐次計算する際に非正定値性が現われる可能性があるため、おもにこの問題によって生じる計算の発散を避けるためには、ある程度経験的な手法が用いられる。

本文では、この問題の原因とその際の取扱いを検討するため、主成分分析の手法を応用

した結果、この問題点が、有限桁数の計算による丸め誤差で生じるというよりも、追跡すべき軌道の数学的構造の表わし方に起因していることが明らかにされた。これはさらに、適当な座標系を用いることによりある程度改善され得ることも確かめられた。この結果、鹿児島宇宙空間観測所において、衛星打上げに現在用いられているオンライン計算法も、わずかの改良により 6~10 けたの低精度計算でも発散の恐れがなく、ほとんど最適なフィルタとなり、実用上きわめて有効と期待できることが示された。

1. ま え が き

現在の科学衛星打上げにおける軌道達成に関しては、3 段目軌道が検知されるとその結果により最適な主ロケット打出し方法を求め発射コマンドを送信している。したがって地上からの制御ループは組まれていないが、最終段ロケット発射に関しては地上の観測結果がフィードバックされると考えてよい。この目的のためにはオンラインの軌道指定が必要で、S バンド、または C バンドレーダによる追跡データを用い最小二乗法に基づく計算機処理が行われている。

その場合当然、高精度、迅速な指定が望まれるが、この問題は最も一般的な推定問題であるため、可能ならば最適フィルタを適用することが望ましいのは明らかである。特に 3 段目弾道軌道は運動方程式が完全に記述でき一方ハードウェア上は計算機処理が可能であるから、この様な目的で開発された線形最適フィルタである Kalman Filter (カルマン・フィルタ) が最も適用しやすいものと考えられる。

Kalman Filter は周知の様にある種の仮定(上述の状況ではほとんど満足されている)の下では最尤推定を与え、理論的にも検討しつくされた最適フィルタである。したがってその適用の妥当性にはなんら問題はないが、実際の数値による適用においては、その計算手法により本質的にかなり危険の多いものとなり、実用上の問題点が少なくない。したがって対象の性質によって理論的には等価であっても、計算の手法によっては結果は著しく変化してしまう可能性があって、問題に適した計算法が必要であり、これは特にオンライン計算を目的とする際非常に重要な問題である。

本文においてはオンラインの弾道軌道推定精度を向上させる目的で Kalman Filter を実際の観測データに適用する際の可能性と限界について、特に実用化の立場から検討を行ない、具体的手法を適用した結果、適用上の問題点およびこれを実用化する実際的手法について一応の結果を得たので、これらの結果について報告する。

2. 軌道推定における最適フィルタの応用と問題点

線形最適フィルタである Kalman-Bucy Filter (Kalman Filter) を、オンラインの弾道軌道推定に用いる場合に考慮すべき問題点を以下に示す。

1. Kalman Filter は本来デジタル計算機を用いることを前提としているので、観測に対して離散値系を考えるのが適当である。レーダデータ自体も原則として、一定時間間隔のデータを供給するので、適用しやすい形式となる。
2. 楕円軌道を記述する運動方程式はニュートンの法則に基づくため、本質的に非線形で

ある。一方 Kalman Filter は線形な動特性で表わされる系に対して最適であるから、非線形系に対しては、よく用いられる様に適当な Nominal Value (基準軌道) のまわりの摂動方程式に対して適用可能となる。この場合、推定値が Nominal からずれてくると当然非線形性の影響が出てくる。

3. 摂動によって線形系に近似する際、その係数行列(観測行列または系行列)は Nominal Value により異なってくる。観測ロケットの様に無制御で飛しょうする場合、外乱のため飛しょう前の予定軌道と実際の軌道は大きくずれる可能性があり、Nominal Value としては、予定軌道を用いることは不可能である。したがって軌道に入った時点で観測に基づいて適当に求めた軌道を Nominal Value として、これを基に摂動方程式、Covariance Matrix (推定の共分散行列) 等を計算しなければならない。

本来 Kalman Filter の利点は(非線形系を摂動で線形系に近似した場合でも) Nominal Value が事前に解っていれば、観測値と無関係に Gain Matrix (利得行列) までは計算できて、推定は単に innovation sequence に Gain を乗じる行列の積算のみで求められ、オンライン計算が容易なことにある。

今の場合には、その利点が失われるので計算を少しでも簡単にして計算時間を短縮することが非常に重要な問題となってくる。特に理論上 0 に収束していくべき Covariance Matrix は計算誤差の影響で半正定値性がくずれて理論上無意味となる恐れがある。したがってオンラインで Covariance Matrix を求めながら計算する場合、これを防ぎ(またはチェックし)ながら計算するなど、十分注意しなければならないので精度の問題に特に注意する必要がある。

4. オンラインデータは原則として等間隔に得られるが、データの欠損も起り得る。またフィルタ構成上雑音が white (白色) でないとすると系の次数が高くなって計算は著しく困難となる。弾道軌道の推定においては、短い間隔のデータは、独立な雑音の場合に推定値の分散を減少させることには有用である。一般に系雑音の存在する場合、間隔の短いデータが必要となるが、弾道軌道は本来系雑音は存在しないので、なんらかの前処理により smoothing (平滑) された代表値を用いるとデータ数が減少し計算量が減る。短時間では適当な smoothing によって雑音の大きさをかなり減少できるので、その結果の少数のデータがフィルタにかけられても実質的な情報の損失は少ない。さらに代表値の間隔が広がると相関が少なくなつて white noise に近づくことから有効に計算を減少できる。

5. フィルタ適用のための仮定に対する妥当性については十分検討する必要があるが、系の動特性については弾道軌道は問題がなく系雑音は無視し得る。ただし短時間の推定のため、地球の扁平性による軌道の摂動に関しては第一段階としては考慮しない。より高い精度を要求されたとき、この影響を状態方程式に入れることは容易である。観測雑音については、計算の可能性のため平均 0 (オフセットなし) の独立な重畳雑音で分散既知の正規分布に従うという仮定を用いる。したがって分散やオフセット未知であれば、これらも同時に推定する適応フィタの形式が必要となるが、検出困難なことで計算量が著しく増加することを避けるため、オフセットを推定することは考えない。分散の推定については別に検討することとし、本文においてはすでに与えられたものとする。

6. まえがきにも述べた様に、フィルタの最終目的は、軌道を推定しその結果から最適なコマンドを求めることにあるから、推定結果からコマンドが容易に計算できる様な量を推定することが望ましい。これは結局、全体の計算量を減少することを目標とすることにほかならない。

7. 計算の精度については応用上非常に重要であるがハードウェアには限界があるので、その範囲内では有効な結果を得られる様な方式を求めなければならない。これは可能な限り(低精度で)計算しやすい方式を求めることにほかならない。

以上の点を考慮して、まずレーダデータ z から直接軌道 6 要素 p を推定するフィルタを検討する。

一般に用いられるフィルタは、観測値から慣性系(地球中心を原点とする)における直交系の位置、速度 x を推定するが、以上二つを前記の問題点ごとに比較検討すると次の様になる。

① 状態方程式、観測は、いずれも非線形であるから摂動は必要である。その際、観測に対する偏微分は $\partial z/\partial p$ よりも $\partial z/\partial x$ の方が容易である。すなわち x 推定の方が容易である。

② 一方、6 要素は free flight (自由飛しょう) に対して不変であるから系行列の方は $z \rightarrow p$ を用いると著しく簡単になる。(すべての時点で $\Delta \dot{p}=0$ または、 $p_{n+1}=p_n$ なお以下摂動量に Δ をつけて表わすことがある。)

これに対して $x(t)$ は Nominal Value も時間と共に非線形に変化し、Nominal Trajectory に対して係数行列を求めるためには、非線形の微分方程式を数値積分しなければならない。特に推定精度のよいときには、数値積分の精度をあげなければ無意味であり、free flight のときには精度のよい計算を要する。ただし $\dot{x}=v$ の部分は恒等的に線形方程式が成立する。

③ 一方、 $\Delta \dot{x}=v$ を数値積分していくことにより、Nominal Trajectory のずれは長時間後にはかなり大きくなり得る。(無定位の部分が存在する)そこで Nominal Value が不適当な場合(および数値積分が粗い場合)には Δx は大きくなる傾向があつて、途中で線形の摂動が成立困難となることがあるので、Nominal Value を修正することも必要となる。

これに対し、 $\Delta \dot{p}=0$ に対するパラメータ推定では、誤差 Δp は一定のままで修正は不要となる。

④ また、計算を減少するため、事前処理などでデータの間隔を広げた場合、 $z \rightarrow p$ では計算量はデータに比例して減少するが、 x の場合積分計算は行なわなければならない。(この場合も一度 p に変換して次の時刻の x を求めれば積分は不要である。)これはデータ欠損のある場合も同様である。

⑤ 地球の偏平による摂動は x の方が容易であるが、短時間では無視出来る。観測誤差分散行列は入力を z としていれば、いずれに対しても非線形であるから、いずれでも同じである。

⑥ コマンド計算は、投入目標が一般に達成軌道 6 要素で与えられるため、3 段目の軌道 6 要素より計算される。したがって p を直接推定すると以後の計算は楽になる。

以上のうち、②④に関する計算量減少は特に利点が大きいと思われるので、まず $z \rightarrow p$ の推定を行ない、その結果を KSC (鹿児島宇宙空間観測所) でオンライン計算した結果と

比較し、フィルタ適用の可能性や限界、さらにオンライン計算による応用上の問題点を検討する。

$z \rightarrow x$ については、free flight では考慮していないが、powered flight に対しては $z \rightarrow p$ の利点がまったくないので、 $z \rightarrow x$ の推定を予定している。

3. 基本式

3.1 Kalman Filter 基本式

推定すべき対象系は、time discrete な線形系と考えることができるとする。そして、その運動は、 n 次ベクトル x を状態変数、 $n \times n$ 行列 Φ を遷移行列、 $n \times p$ 行列 Γ を制御行列、 p 次ベクトル u を制御入力、 n 次ベクトル f を既知の外部入力とするとき、次の状態遷移方程式

$$x_k = \Phi_{k, k-1} x_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + f_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

で表わされるものとする。ここに添字 k は時刻 t_k における値を示すものとし、初期時刻 t_0 における状態量の初期値を x_0 とする。 w_k は系雑音を表わす n 次ベクトルを示し、その平均、分散は事前情報として与えられ、

$$\overline{w_k} = 0 \quad (2)$$

$$\overline{w_k \cdot w_k^t} = Q \delta_{ke} \quad (3)$$

と仮定できるものとする。ただし \bar{X} は一般に X の期待値を表わすものとする。

今、時刻 t_k において、 m 次元観測ベクトル z_k が存在し

$$z_k = H_k x_k + n_k \quad (4)$$

で表わされるものとする。ここに H_k は $m \times n$ 次の観測行列で、観測系により定められる既知行列である。 n_k は観測雑音を表わす既知の m 次ベクトルで

$$\overline{n_k} = 0 \quad (5)$$

$$\overline{n_k \cdot n_k^t} = R_k \delta_{ke} \quad (6)$$

と仮定できるものとし、 R_k は事前に与えられるものとする。当然 Q, R は semi-positive definite (半正定値) とする。

以上の数学的モデルに対して Kalman Filter は、よく知られている様に $[I]$, t_k までの観測 z_i ($i=1, 2, \dots, k$) を得たときに、状態推定量 \hat{x}_k の Covariance Matrix (推定共分散行列) を P_k として

$$P_k \triangleq \overline{(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^t} \Rightarrow \min$$

となる様な x_k の推定量 \hat{x}_k を求めるものであり、次の形で与えられる。

$$\hat{x}_k = \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} + f_{k-1} + K_k (z_k - H_k \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1}) \quad (7)$$

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0 \quad (8)$$

ここに K_k は Gain Matrix と呼ばれるもので

$$K_k = P_k' H_k' [H_k P_k' H_k' + R_k]^{-1} \quad (9)$$

で与えられる $n \times m$ 行列である。ただし P_k' は t_k における観測前の推定分散行列であり定義から

$$P_k' = \Phi_{k, k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1} \quad (10)$$

また, t_k における観測の後, P_k は修正されて次式で与えられる.

$$P_k = P_k' - K_k H_k P_k' \quad (11)$$

ただし

$$P_0 = (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^t$$

で求められる.

Covariance Matrix P_k と Gain Matrix K_k は次の様な別の形式で表わすこともできる.

(9) (11) より P_k の逆行列は

$$P_k^{-1} = (P_k')^{-1} + H_k^t R_k^{-1} H_k \quad (12)$$

となる. ここに

$$(P_k')^{-1} = [\Phi_{k, k-1} P_{k-1} \Phi_{k, k-1}^t + Q_{k-1}]^{-1} \quad (13)$$

(13) を用いて K_k を書き直すと

$$K_k = P_k H_k^t R_k^{-1}$$

となる.

したがって Kalman Filter として (4), (7), (10), (12), (13), (14) を用いることができる. この形のフィルタの利点は, 初期条件 P_0 について考慮しないで良い点にあって, 初期状態がまったく未知の場合には $P_0 = \infty E$ (E は単位行列を表わす) とおくことができる. $\text{rank } H_1 = n$ ならば時刻 t_1 での P_1 および K_1 は

$$P_1 = [H_1^t R_1^{-1} H_1]^{-1}$$

$$K_1 = P_1 H_1^t R_1^{-1}$$

であるが, $\text{rank } H_1 < n$ のときには $P_0^{-1} = 0$ とすると P_1 が求められないので, この場合には, 小さな数 ε を用いて $P_0 = \frac{1}{\varepsilon} E$ とすればよい.

なお, 線形モデルに対する Kalman Filter の統計的意味は, 推定分散最小な不偏推定であることのほか, 正規性誤差の場合に最尤推定となるなど, その最適性については十分検討されており文献 [2] に詳しいが, ここでは結果のみを示す. なお Filtering, Estimation に関しては詳細な文献調査が行なわれている [3].

一般には (1), (4) が必ずしも線形でない場合が多いが, 系雑音, 観測雑音が十分小さく, また推定の誤差が非線形性に比べて十分小さい場合には, \mathbf{x}, \mathbf{z} に対する Nominal Value (基準値) のまわりで線形展開した, いわゆる摂動方程式で表わされる線形近似系に対して Kalman Filter を適用することができる. ただし雑音のみは加法性とする.

今, 原モデルが非線形系で

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \quad (1)'$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{n}_k \quad (4)'$$

であるとき, \mathbf{x}_k およびこれに対する \mathbf{z}_k の Nominal Value をおのおの $\mathbf{x}_{0k}, \mathbf{z}_{0k}$ とおき

$$\mathbf{x}_{0k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{0k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (1)''$$

$$\mathbf{z}_{0k} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{0k}, t_k) \quad (4)''$$

を満足するものと考えて, Nominal Value との摂動部分を

$$\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{0k}, \quad \Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{0k}$$

とする. (1)', (2)' を $\mathbf{x}_{0k}, \mathbf{z}_{0k}$ のまわりで展開して $\Delta \mathbf{x}_k$ が十分小さい, すなわち $\Delta \mathbf{x}_k$

に関する二次以上の項が一次の項に比べて無視し得るとすれば, $\Delta \mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{z}_k$ に対する線形近似モデル

$$\Delta \mathbf{x}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0k}} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{z}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0k}} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \quad (16)$$

を得る.

ロケットの軌道推定において, 軌道 6 要素 \mathbf{p} は, free flight に対して不変なので, これを状態量にとると状態方程式は線形で, 系雑音も存在せず (1) は \mathbf{x} を \mathbf{p} と書き換えて

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} \quad i. e. \quad \Phi_{k, k-1} = E \quad (17)$$

という最も簡単な形となる.

しかし, 観測 \mathbf{z} ; Slant Range (S.R. 直距離), Azimuth 角 (Az. 方位角), Elevation 角 (El. 上下角) は 6 要素の非線形変換として

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{g}(\mathbf{p}, t_k) + \mathbf{n}_k \quad (18)$$

の形で与えられるため, Kalman Filter を適用するためには, 観測の方に摂動が必要となる.

今, 6 要素の Nominal Value を \mathbf{p}_0 , 実際の値を $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}$ としたとき, $\Delta \mathbf{p}$ が十分小さければ, \mathbf{z} は \mathbf{p}_0 を中心として線形近似することができ, Kalman Filter の基本式は以下のように与えられる.

$$\Delta \mathbf{p}_k = \Delta \mathbf{p}_{k-1} \quad (19)$$

\mathbf{p}_0 に対する観測の Nominal Value を \mathbf{z}_0 とし, $\Delta \mathbf{p}$ が十分小さいとき, (18) を \mathbf{p}_0 のまわりで線形近似すると

$$\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{0k} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_0, t_k} \Delta \mathbf{p}_k + \mathbf{n}_k \quad (20)$$

となる. ここに \mathbf{z}_0 は \mathbf{p}_0 に対する Nominal 観測値を表わすものとする. 観測雑音 \mathbf{n}_k は, 前述の条件を満たすものとする.

したがって (10) は (17) より

$$\mathbf{P}_k' \triangleq \mathbf{P}_{k-1} \quad (21)$$

となる.

ここで

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_0, t_k} \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_k = \overline{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k^t} \quad (23)$$

とおけば (9) がそのまま成立して

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k' \mathbf{H}_k^t [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k' \mathbf{H}_k^t + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (24)$$

となり, $\Delta \mathbf{p}_k$ の推定値 $\Delta \hat{\mathbf{p}}_k$ は

$$\Delta \hat{\mathbf{p}}_k = \Delta \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{0k} - \mathbf{H}_k \cdot \Delta \hat{\mathbf{p}}_{k-1}) \quad (25)$$

で与えられる.

このとき \mathbf{p}_k は

$$P_k = P_k' - K_k H_k P_k' \quad (26)$$

で与えられる.

3.2 初期値の計算

軌道パラメータの初期値としては, 事前の情報に基づいて p_0 , P_0 が与えられれば, これを用いることができるが, 実際にはこの値に対する十分な情報はなく, 観測値の初めの部分を用いなければならない. 軌道推定の場合も, 初めの 2 秒間のデータを smoothing した結果得られる慣性系位置 \mathbf{x} および $\dot{\mathbf{x}}$ のうち, Filtering 開始時点の $\mathbf{x}(t_0)$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ を用いて軌道を決し, その値 p_0 を Nominal Value および初期値とする. したがって Kalman Filter の初期値は

$$\Delta p_0 = 0 \quad (27)$$

となる.

このときの smoothing については次の 2 通りの方法が考えられる.

① \mathbf{Z} (S. R., Az., El.) の各成分ごとに時間に関する多項式として最小二乗法で近似し, その中央値で再現し, これを慣性座標系の \mathbf{x} に変換する.

② 最初に \mathbf{z} を \mathbf{x} に変換し, この各成分ごとに最小二乗法で多項式近似する.

free flight では働く力は重力のみである. 慣性系において, ごく短時間で位置の移動による重力方向の変化がないとみなせる間は, 物体の自由落下は時間の 2 次式で表わされる. したがって②の場合には, \mathbf{x} を時間の 2 次式として近似すればよい. すなわち, 近似に用いるデータの数を N 個として

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \mathbf{a}t_i^2 + \mathbf{b}t_i + \mathbf{c} + \Delta\mathbf{x}_i \quad i=1, 2, \dots, N \\ \overline{\Delta\mathbf{x}_i \cdot \Delta\mathbf{x}_j} &= R_x \delta_{ij} \end{aligned} \quad (28)$$

とおくとき, 次の重み付き二乗評価

$$J_x = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c})^t R_x^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c})$$

を最小とする $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を求めればよい. これを $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}$ とおけば $\mathbf{X}_i, \dot{\mathbf{X}}_i$ の重み付き最小二乗推定値 $\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\dot{\mathbf{x}}}_i$ は,

$$\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{a}}t_i^2 + \hat{\mathbf{b}}t_i + \hat{\mathbf{c}} \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = 2\hat{\mathbf{a}}t_i + \hat{\mathbf{b}} \quad (30)$$

で与えられる.

① の場合, S. R., Az., El. は慣性座標系の非線形変換

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$$

の形で与えられ, \mathbf{x} が変化するにつれてこれも時間と共に変化するが, 短時間でこの変化が十分小さい場合, \mathbf{x} に関する級数展開を考えると, 次の形となる.

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \Delta\mathbf{x}$$

したがって \mathbf{z} も \mathbf{x} と同様時間の多項式で表わすことができるので, ②と同様, 2 次式で近似するとすれば

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{a}' t_i^2 + \mathbf{b}' t_i + \mathbf{c}' + \Delta \mathbf{z}_i \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$\overline{\Delta \mathbf{z}_i \cdot \Delta \mathbf{z}_j} = R_Z \delta_{ij} \quad (31)$$

とにおいて

$$J_Z = \sum_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}' t_i^2 - \mathbf{b}' t_i - \mathbf{c}')^t R_Z^{-1} (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}' t_i^2 - \mathbf{b}' t_i - \mathbf{c}')$$

を最小にする $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ を求めればよい. したがってこれを $\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}', \hat{\mathbf{c}}'$ とおけば, \mathbf{z}_i の重み付き最小二乗推定値 $\hat{\mathbf{z}}_i$ は,

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \hat{\mathbf{a}}' t_i^2 + \hat{\mathbf{b}}' t_i + \hat{\mathbf{c}}' \quad (32)$$

与えられる.

この場合, \mathbf{z} の成分間に相関はないとみてよいので, z_1 を S. R, z_2 を Az, z_3 El. をとくと

$$R_Z = \overline{\Delta \mathbf{z}_i \cdot \Delta \mathbf{z}_j} = \begin{pmatrix} \overline{\Delta z_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Delta z_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\Delta z_3^2} \end{pmatrix} \quad (33)$$

の様に, R_Z は対角成分のみとなり, 計算は非常に単純化される.

ところが, ②の場合の R_X の計算は, 以下に示される様により複雑である.

今, 観測地の局地座標系を \mathbf{x}' とすると, \mathbf{x}' は \mathbf{z} の関数として表わされる. また, 局地座標系から慣性座標系への変換行列を T とすると, \mathbf{z} から \mathbf{x} への変換は

$$\mathbf{x} = T \cdot \mathbf{x}'(\mathbf{z})$$

で与えられるから, 十分小さい $\Delta \mathbf{z}$ に対して

$$\Delta \mathbf{x} = T \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta \mathbf{z} \quad (34)$$

と書くことができる.

したがって (28) の R_X は

$$R_X = T \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{z}} \cdot \overline{\Delta \mathbf{z} \cdot \Delta \mathbf{z}^t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{z}} \right)^t \cdot T^t = T \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{z}} R_Z \left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{z}} \right)^t \cdot T^t \quad (35)$$

となり対角以外の成分が含まれ計算が複雑になる.

計算上は以上の様な違いがあるが, 実際には①, ②どちらの方法も smoothing はほとんど正しいモデルに回帰させていると考えてよく, 近似的には, その結果の分散 (の推定値) は, 生データから直接パラメータの最尤推定値を求めた場合の推定分散と考えてよいことが示される.

今, 観測を $i=1, 2, \dots, N$ に対して

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) + \mathbf{n}_i$$

$$\overline{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j^t} = R \delta_{ij} \quad (36)$$

とし, 次の重み付き二乗評価を最小とする \mathbf{p} を推定する.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{ \mathbf{z}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) \}^t R^{-1} \{ \mathbf{z}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) \} \quad (37)$$

このとき, $\mathbf{n}(\ll \mathbf{f}(\mathbf{p}))$ による \mathbf{p} の分散は, 次の様にして求められる. \mathbf{z}_i が \mathbf{p}_0 のまわりで線形近似されたとすると

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{p}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_0} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \mathbf{n}_i \quad (38)$$

となる。(37) より \mathbf{p}_0 は

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t_{\mathbf{p}_0} R^{-1} \{ \mathbf{z}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{p}_0) \} = 0$$

を満たし、(38) より

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t_{\mathbf{p}_0} \cdot R^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \mathbf{n}_i \right\} = 0 \quad (39)$$

となる。すなわち

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = - \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t \cdot R^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t R^{-1} \mathbf{n}_i \right\} \quad (40)$$

であるから、 \mathbf{n}_i による \mathbf{p} の分散は (40) から

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^t} &= \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t \cdot R^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t R^{-1} \overline{\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j^t} R^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \mathbf{p}} \right\} \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t \cdot R^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t \cdot R^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

となり、これが最小二乗法によって求めた \mathbf{p}_0 の分散を表わす。(これは (38) の線形部分の Pseudo Inverse (擬似逆行列) にほかならない) したがって初期 Covariance P_0 は (41) を用いて求めることができるが、 $\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)^t \cdot R^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}}$ が特異に近い場合、かなり高精度の逆行列演算を必要とする。

実際には、 \mathbf{z} から $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ を求め、これから \mathbf{p} を求めているので、逆行列の計算が非常に困難であれば、 P_0 について次の計算で逆行列を避けることができる。

初期値における $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ の推定誤差を $\Delta \mathbf{x}, \Delta \dot{\mathbf{x}}$ として

$$R_0 \triangleq \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} (\Delta \mathbf{x}^t, \Delta \dot{\mathbf{x}}^t) \quad (42)$$

とする。 R_0 は付録に示される様に一点での分散行列 R_x を用いて計算される。 $\Delta \mathbf{x}, \Delta \dot{\mathbf{x}}$ は十分に小さいものとして

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

の線形近似式から \mathbf{p} の推定分散を求めると $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ の誤差による \mathbf{p} の誤差 $\Delta \mathbf{p}$ は

$$\Delta \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (43)$$

と表わされるので

$$S^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \quad (44)$$

とすると、Covariance Matrix の初期値は

$$P_0 = S^t R_0 S \quad (45)$$

で与えられ、行列の積によって求めることができる。ただし (44) の計算はかなり面倒であり、また (45) の行列の積においても、単位系を調節して対角要素の大きさがほぼそろった

にしておくことが望ましい。

4. 応用結果

3.1 で述べたフィルタ方式によるパラメータ推定をオフラインで L-4S-5 号機 (1970. 2. 11. 13: 25 Jst 打上げ), および M-4S-1 号機 (1970. 9. 25. 14: 00 Jst 打上げ) の実データに適用して, 3 段目軌道推定を行なった結果を以下に報告する。

① L-4S-5 号機の 3 段目に対する軌道推定

使用データ: 148.6 秒より 204.4 秒まで, 0.4 秒間隔に 140 点のレーダ・データ (Slant Range, Azimuth, Elevation)

初期値: 初め 10 点のデータから最小二乗法による Smoothing で \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ を求め, これから軌道パラメータを計算する. (3.2 の②の方法を用いる.)

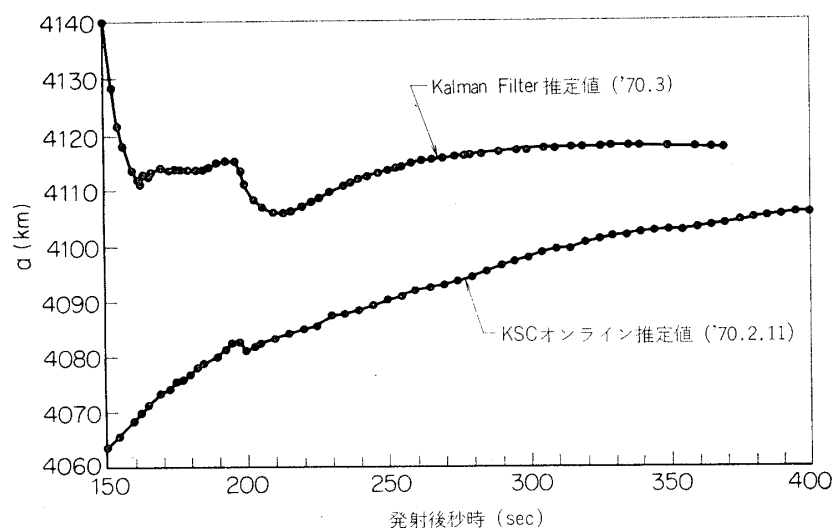
P_0 は $N=10$ として (41) により求める。

観測値の分散 R は次のとおりである。これはオフラインのデータ処理による推定値を用いた。

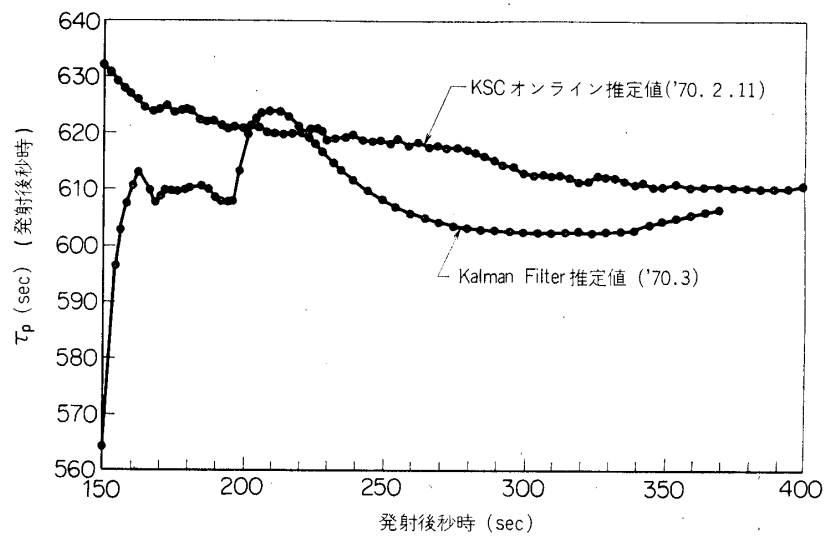
$$R = \begin{pmatrix} (0.013 \text{ km})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.017 \text{ deg})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.03 \text{ deg})^2 \end{pmatrix}$$

軌道 6 要素のうち, a (軌道長半径), τ_p (Epoch Time) について, $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{p}$ の Kalman Filter により推定した結果と, 実験の際, KSC においてオンラインで推定 [4, 5] した推定結果とを比較して図 3-1, 2 に示す。210 秒前後で計算値が大きくずれているのは, データが悪いためでオンライン推定の方で比較的ずれが小さいのは, 極端に悪いデータを取り除いて計算していることによる。

計算精度は, HITAC 5020 で double precision (倍精度, 64 ビット, 16.6 けた) を用い



3.1 図 L-4S-5 号機 B₃ に対する推定値 (a)

3.2 図 L-4S-5 号機 B₃ に対する推定値 (τ_P)

た。

② M-4S-1 号機の 3 段目に対する推定についてデータ，計算式等の異なるいくつかの例を示す。

(A) 使用データ：235.5 秒より 292.0 秒まで，0.5 秒間隔で 114 点のレーダデータ。

初期値：233.1~234.9 秒，0.2 秒間隔のデータ 10 点を用い，3.2 ②の方法で \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ を求め，これから軌道パラメータを計算する。

P_0 は $N=10$ として (41) から求める。

観測値分散：

$$R = \begin{pmatrix} (0.005 \text{ km})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.01 \text{ deg})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.02 \text{ deg})^2 \end{pmatrix}$$

とする。

計算精度：double precision で行なう。

(A) による a, e (離心率) の推定結果を図 3.3 に示す。

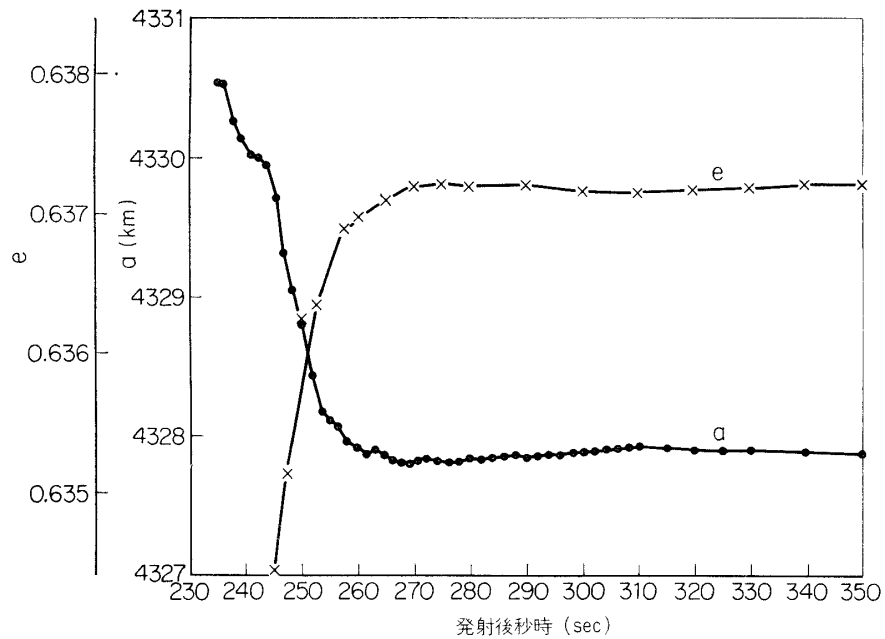
(B) 使用データ：235.1 秒から 349.0 秒までの 0.1 秒間隔のレーダ・データを 20 点ごとに 3.2 ②の方法でスムーズし，得られた \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ を再び \mathbf{z} に変換したものを観測値として用いる。

初期値 \mathbf{p}_0 と P_0 は (A) と同様にして求める。

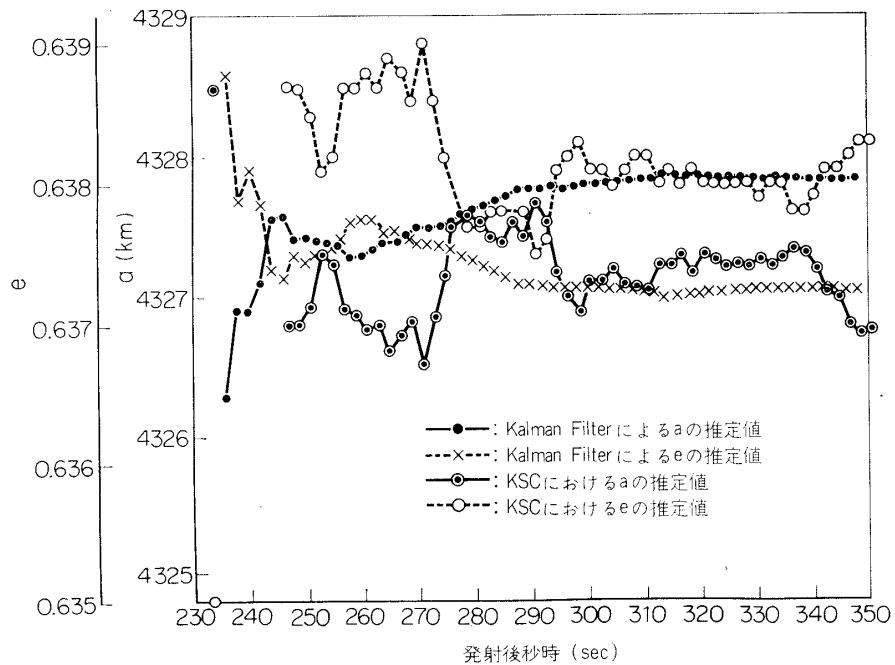
$$R = \begin{pmatrix} (0.005 \text{ km})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.01 \text{ deg})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.02 \text{ deg})^2 \end{pmatrix}$$

計算精度：double precision

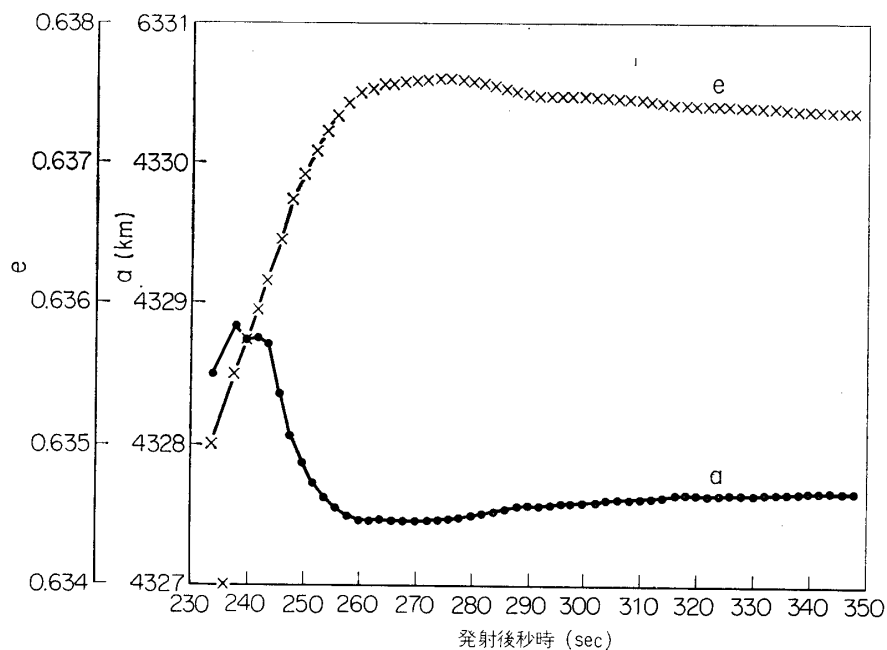
(B) による a, e の推定結果とオンラインで行なった推定結果を比較して図 3.4 に示す。



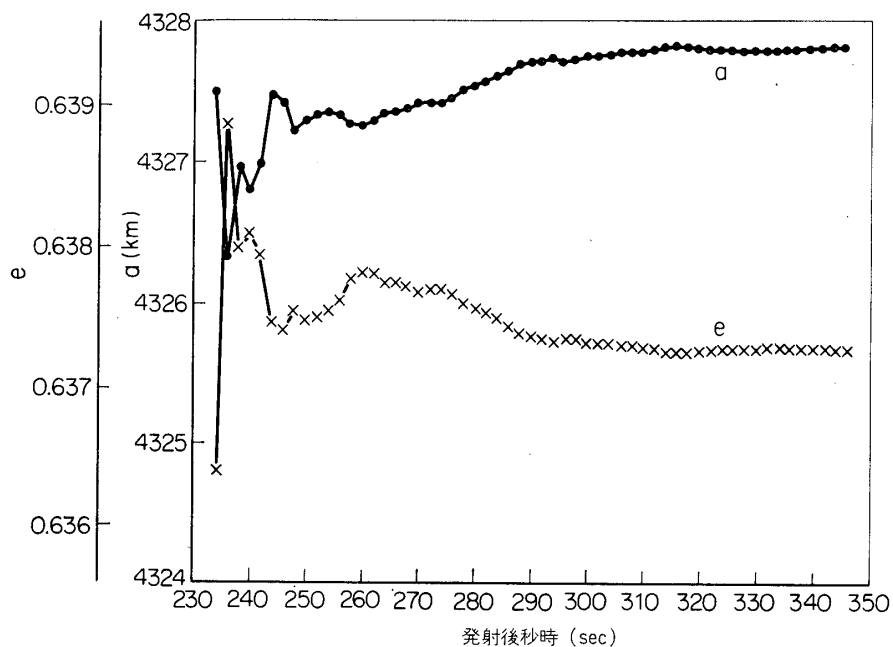
3.3 図 M4S-1 号機 Kalman Filter 推定結果 ('70.11)



3.4 図 Kalman Filter 推定値と KSC における推定値の比較



3.5 図 $P_0 = S'R_0$ による $z \rightarrow p$ の推定 (double precision)



3.6 図 3-4 図と同じ Kalman Filter 推定値 (NEAC 2200-400 による single precision)

KSC におけるオンライン軌道推定では、(B) と同様 2 秒間隔のスムーズされたデータを使用している。

(C) 使用データ、初期パラメータ、および R は (B) と同じものを用いるが、 P_0 を $N=10$ として (45) により計算する。結果は、図 3.5 に示される。

計算精度: double precision

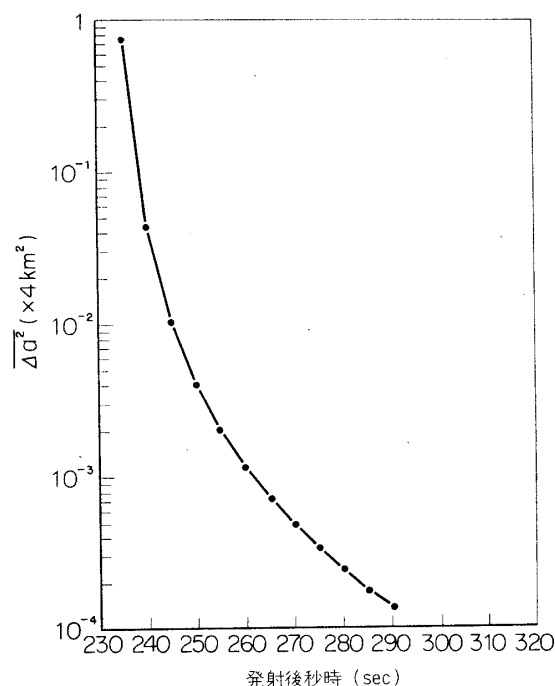
(D) (B) とまったく同様の計算を NEAC 2200-400 で行なったもので、結果は図 3-6 である。計算は 48 ビットで行なわれた。ただしこの場合、(41) における P_0 の逆行列演算が特異に近く困難であるため、 P_0 としては (B) において 64 ビットで計算された値をそのまま用いた。

HITAC 5020 の single precision (一倍精度, 32 ビット, 6.9 けた) での計算では、 P_0 として (B) で計算された値を用いても、計算誤差のため P の正定値性が満足されず、推定を行なうことができなかった。

これら図に示される通り、double precision の計算では、推定値の収束は約 50 秒位で行なわれ、48 ビットの計算機でも P_0 を除けばほとんど問題ないと思われる。

以上、 \hat{p} の収束値と \hat{p} の差が推定誤差であると考えての結果を Covariance P の変化 (図 3.7) と比較すると、ほぼ同様の变化とみなされ、 P の scale factor (単位系) の差 (これは、式から明らかに R の推定値として用いた値に比例する) を無視すればほとんど最適フィルタとなっていることが確かめられる。フィルタ方程式から明らか様な様に、 R として固定値を用いている限り (また、その仮定が正しければ) その大きさと無関係に Gain Matrix 従って \hat{p} が得られるから、 R の構造さえ真の値と相似 (真の値を R_0 として、スカラー k を用いて $R=kR_0$ と表わせる場合) であれば、その大きさは余り問題にならない。

ただし、計算精度は実用上大きな障害となり得て、特にオンライン計算機を用いることを考えると、この例では問題ないが、きわめて危険となる可能性が示され、この問題を解決する必要がある。



3.7 図 推定分散の変化 (σ_a^2)

5. Kalman Filter 適用における問題点

5.1 計算上の問題点

Kalman Filter は、適当な仮定のもとで最適フィルタであり、この軌道推定に用いると理

論的には良好な結果が得られることが前節で示される。(double precision) しかしながら single precision の計算では、誤差が極端に大きくなり、 P の正定値性が失われるなど、理論的にあり得ない結果となることが示され、計算精度として少なくとも 8 けた程度を必要とすることが明らかにされる。オンライン計算のために安全を見込むと、対象とする計算機 (NEAC 2200-400, single 48 ビット) では、これは double precision の計算を必要とし、ソフト・ウェアで double とするため、時間で 4 倍 (加減 2 倍)、memory 2 倍以上を要するので、実用上著しい障害となりこのまま用いることは困難である。

Kalman Filter においては、理論上正定値でありながら 0 に収束していく P の収束計算を誤差なく求めることが適用上 (計算上) の最大の問題点であることは、周知の事実であり、上の結果も結局この問題に帰着する。

しかも、一般のフィルタ適用においては、 P, K をオフラインで事前に求めておけるので、時間と memory に対する制約は多少ゆるくなるのに反し、本文において目的とする軌道推定は、Nominal Trajectory からの誤差の大きい場合であって、発射前に仮定した Nominal Value からの摂動を利用するのは困難となる。したがってオンラインで、この危険な P, K の計算を行なうことが不可避であり、精度、時間、memory に対する要求はいずれもきびしくなる。

P の正定値性を保つためには多くの計算法が試みられていて

1) P の逆行列は正定値で ∞ に発散していくので、誤差により負となる恐れはない。したがって P^{-1} に対する漸化式を求め、正定値性を保証し、最後に逆行列をとって P を得る。(逆行列演算で負になる恐れはある)

2) $P=SS'$ (Matrix Square Root) に分解して、 S に関する漸化式を求め、これより P を求める。ただし、 R が対角行列 (観測無相関) で逐次処理 (1 次元観測を独立に得たとして逐次フィルタリングする) 可能な場合に限られる。

等があるが、 $P \geq 0$ が保たれないのは、計算誤差の結果であって、上記の方法で $P \geq 0$ としても P としての必要な精度が得られなければ最適性は失われて目的を達することはできない。

特に single precision の結果において double precision の値と比較して誤差が著しく大きくなるのは、 HPH' の計算結果であり、ここで 1 けたの精度を出すために、 H, P は 8 けたの精度を要することが示される。したがって上述の方法をとったとしても、ある精度を得るため必要なけた数に大きな差はないと思われるので、まず P を正しく求めるためにはどの程度の計算精度を要するかを検討し、次にフィルタとして推定すべきモデルの計算誤差の影響の少ない構成についての検討を行なう。

5.2 推定に必要な計算精度

一般に、誤差のある観測値からある推定を行なう場合、誤差が十分小さければ真値のまわりで線形近似が可能であって前述の Kalman Filter 自体もこの線形近似に基いて定式化されている。Kalman Filter の評価関数は推定値の Covariance $P \rightarrow \min$ であるから、正規分布に従う観測誤差の場合には最尤推定となり、アルゴリズム自体は逐次近似であるが、事後的には、その時点までの最尤推定による smoothing の結果と等しいことが示される。特に前例の様に $Q=0$ の場合には、フィルタで推定すべき量は本質的には初期値 x_0 にほかならず、

次の様にして smoothing における推定量 $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ と等しいことが示される.

一般的な観測モデルとして

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (46)$$

を考える. H は与えられるものとし, 誤差 \mathbf{n} は

$$\bar{\mathbf{n}} = 0, \quad \overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^t} = R \quad (47)$$

を既知とする.

フィルタにおいて系雑音が存在しなければ

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_{k+1, k} \mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \end{aligned} \quad (48)$$

から \mathbf{x}_k を推定することは, $B\mathbf{u}_k$ を除いた系で $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1, k} \Phi_{k, k-1} \cdots \Phi_{1, 0} \mathbf{x}_0$ として \mathbf{x}_0 を推定することにはかならず

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= H_1 \Phi_{1, 0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}_1 \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \mathbf{y}_k &= H_k \Phi_{k, k-1} \Phi_{k-1, k-2} \cdots \Phi_{1, 0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}_k \\ \mathbf{z} &= [\mathbf{y}_1^t, \mathbf{y}_2^t, \cdots, \mathbf{y}_k^t] \end{aligned} \quad (48')$$

となるから,

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} H_1 \Phi_{1, 0} \\ H_2 \Phi_{2, 1} \Phi_{1, 0} \\ \cdots \cdots \cdots \\ H_k \Phi_{k, k-1} \Phi_{k-1, k-2} \cdots \Phi_{1, 0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{n} &= [\mathbf{n}_1^t, \mathbf{n}_2^t, \cdots, \mathbf{n}_k^t]^t \end{aligned}$$

とすれば (46) となり一般性は失わない. この場合, 最小二乗法による推定値は

$$J = (\mathbf{z} - H\mathbf{x})^t R^{-1} (\mathbf{z} - H\mathbf{x}) \Rightarrow \min$$

を与える \mathbf{X} であるから

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right)^t = -H^t R^{-1} (\mathbf{z} - H\mathbf{x}) = 0$$

を満足するものであり

$$\hat{\mathbf{x}} = (H^t R^{-1} H)^{-1} H^t R^{-1} (H\mathbf{x} + \mathbf{n}) \quad (49)$$

で与えられる. (46), (49) を用いて

$$\hat{\mathbf{x}} = (H^t R^{-1} H)^{-1} H^t R^{-1} (H\mathbf{x} + \mathbf{n}) = \mathbf{x} + (H^t R^{-1} H)^{-1} H^t R^{-1} \mathbf{n} \quad (50)$$

で (47) を用いれば

$$\frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^t} = (H^t R^{-1} H)^{-1} \quad \text{かつ} \quad (51)$$

を得ることはよく知られている. これは, $P_0 = \infty E$ とした逆行列タイプの 1 ステップ・フィルタと同じ結果である.

結局, フィルタ, スムーザいずれの場合も, その時点までのデータに基づいた推定値および推定分散は等しいのでフィルタの推定分散 P が計算困難 (または存在しない) ということ

は、フィルタに限らずスモータにおいても同様であると考えてよいということである。したがって前述の P の計算上の問題点は、フィルタ特有というより、推定問題固有の問題であって P の性質と考えられるので、特に $P = \overline{\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x}^t}$ の数値的な性質を検討すればよい。ただし、フィルタは P を逐次計算していくため、これが計算しにくい場合には実用上問題になり、スモータでは最終的に一回計算すればよいから、そのためのけた数、時間がそれほど実用上問題にならないものと思われる。

Kalman Filter においては $P = \overline{\Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \Delta^t}$ として、 $\text{rank } P = n$ のとき統計的意味を持って n 次元の推定が可能である。したがって計算機で有限けた数の計算を行なうことにより意味のある推定計算を行なうためには、そのけた数で $\text{rank } P = n$ とみなせるときはじめて実用上も推定可能ということができる。

以下、 rank の幾何学的意味を考える。

今、 n 個の大きさ 1 の n 次元ベクトル

$$\mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} n_i^{(1)} \\ \vdots \\ n_i^{(n)} \end{pmatrix}$$

を考える。

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{n}_n^t \end{pmatrix} (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n) \equiv (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

とすると

$$C_{ij} = \mathbf{n}_i^t \cdot \mathbf{n}_j = (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)$$

となり C_j は各ベクトルの \mathbf{n}_j への投影の大きさを表わすことになる。つまり C は各ベクトル \mathbf{n}_j が直交するとき単位行列となり、その他の場合には対角要素以外に 0 でない投影成分 $(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j) = \cos \theta_{ij}$ が現われる。(θ_{ij} は \mathbf{n}_i と \mathbf{n}_j の間の角度を表わす) したがって平行なベクトルがあるとき $(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j) = 1$ となり rank が 1 つ落ちる。この C の rank は結局 \mathbf{n}_j の一次独立なベクトルを表わすことがよく知られており、線形代数学で容易に証明されている。

したがって C が各ベクトルの内積を表わす Gramme 行列と考えれば、この階数は \mathbf{n}_i の一次独立なベクトルの数を表わし、これは直交した成分の数を表わすものと考えてよい。推定問題においては、有限けた数の計算で推定可能であるためには、そのけたの計算において C の rank が n 、すなわち n 個のベクトルが独立であることが見分けられなければならない。

したがって数値計算を行なうときには、直交する成分の大きさを比べ、有限けた数でこれが分離可能かどうかを検討する必要がある。各固有値の大きさにより計算のしやすさが定量化されることが予想される。そこで、統計上相互関連を定量的に求める主成分分析の概念を用いて、数値計算における行列の rank の検出の可能性、すなわち推定問題における計算の可能性を検討する。

今、 C がベクトルの内積を表わすとする、そのベクトルの各成分が集中している方向を軸とした新しい直交系を考えることが可能である。

今、

$$\mathbf{r}^t \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (52)$$

なるベクトルを考えて, \mathbf{n}_i の線形和を

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{n}_i \quad (53)'$$

で定義する. このとき (52) の条件のもとで, $|\mathbf{y}|^2 \rightarrow \max$ となる方向を求めると, この方向への \mathbf{n}_i の射影の和が最大となることが示される.

$$\mathbf{y}^2 = \sum_{i,j} \gamma_i \mathbf{n}_i^t \cdot \mathbf{n}_j \gamma_j = \mathbf{r}^t C \mathbf{r} \quad (53)$$

であるから, この解 \mathbf{r} は,

$$J = \mathbf{r}^t C \mathbf{r} - \lambda (\mathbf{r}^t \mathbf{r} - 1) \quad (54)$$

を \mathbf{r} で偏微分して

$$C \mathbf{r} - \lambda \mathbf{r} = 0 \quad (55)$$

の解として与えられる. (55) から明らかな様に \mathbf{r} は C の固有ベクトル, λ は固有値となる. このとき

$$J = \lambda \mathbf{r}^t \mathbf{r} - \lambda \mathbf{r}^t \mathbf{r} + \lambda = \lambda$$

が \mathbf{y}^2 の値であるから, 最大固有値がその大きさを与え, 幾何学的には \mathbf{n}_i が集中している方向およびその大きさとなる. この \mathbf{r} を \mathbf{r}_1 として, これと直交する方向の内 \mathbf{n}_i の線形和が最大となる方向 \mathbf{y} を求めると

$$\text{条件} \quad \mathbf{y}^t \cdot \mathbf{y}_1 = 0 = \mathbf{r}^t C \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^t \lambda_1 \mathbf{r}_1 \quad (56)$$

および (52), (53) の問題となるので (54) の代わりに

$$J = \mathbf{r}^t C \mathbf{r} - \lambda (\mathbf{r}^t \mathbf{r} - 1) - 2\beta \mathbf{r}^t C \mathbf{r}_1$$

を \mathbf{r} で偏微分して

$$C \mathbf{r} - \lambda \mathbf{r} - \beta C \mathbf{r}_1 = 0 \quad (57)$$

左から \mathbf{r}_1^t をかければ

$$\mathbf{r}_1^t C \mathbf{r} - \mathbf{r}_1^t \lambda \mathbf{r} - \beta \mathbf{r}_1^t C \mathbf{r}_1 = 0$$

となる. したがって (56) の条件より

$$-\beta \mathbf{r}_1^t C \mathbf{r}_1 = 0$$

となるが,

$$\beta \mathbf{r}_1^t C \mathbf{r} = \beta \mathbf{r}_1^t \mathbf{r}_1 \lambda_1 = -\beta \lambda_1$$

であるから

$$\beta = 0$$

が成立つ. ゆえに (57) は

$$C \mathbf{r} - \lambda \mathbf{r} = 0 \quad (58)$$

となり, \mathbf{r} は固有ベクトル, λ は固有値となる. さらに, $\mathbf{r} \perp \mathbf{r}_1$, かつ $|\mathbf{y}|^2 = \lambda$ であるから第 2 固有値が次の成分の大きさを示す. 以下同様に第 n 固有値が第 n 番目の直交成分の大きさを表わすことがいえる.

C は本来 Gramme 行列で (半) 正定値対称行列を考えるから, λ_i は正 (非負) である. したがって $|\mathbf{y}_i| = \lambda_i \geq 0$ で物理的意味も明確である. $\lambda_{m+1} = 0$ ($m < n$) となるとき, この

ベクトル空間は m 次元となり, $\text{rank } C = m$ である. $\lambda_i \neq 0$ の場合でも $\lambda_i \approx 0$ であれば, その成分はきわめてわずかしかなないので, これを求めるのは困難となることが予想される. 一般に k けたの計算を行なうと, λ_i は k けたまで信用できるとされている. そこで, 計算できるのは 10^{-k} までとすると, $|\lambda_i|$ ですべての固有値を正規化して $|\lambda_i/\lambda_1| \gg 10^{-k}$ であれば, $\lambda_i > 0$ が計算され, $\text{rank } C \geq i$ ということができる.

実際には, P がまず与えられる. $P = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x}^t$ の固有値は, もし \mathbf{x} の各成分が統計的に独立で, P の各行ベクトルが直交化されていれば, 独立におのおの変数の分散の大きさを表わすので, これがそのまま推定量の確からしさを表わすことになる. この大きさが 0 に近づくことは, 推定値がより確実になったことにほかならず, 特にある固有値が完全に 0 になれば, これは, その変数に関して確率 1 で推定できたことになる. しかしこれは実際の推定問題ではあり得ないことで, 単に十分小さくなったといえるだけである. P の固有値は scale factor のとり方によっても変化するものである. そこで標準偏差を対角成分とする対角行列

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

により P の対角を 1 に正規化し, これを C とすれば,

$$P = \Sigma C \Sigma$$

と書ける. したがって, scale factor の影響も含んだ推定分散の大きさは Σ として分離されて, floating 演算の場合には $P \rightarrow C$ の変換にけた落ちがない. このため scale factor の差によるけた数のずれは, 計算上 floating では問題とならない. 結局残った C が相関行列となって, 変数相互の統計的な独立性を示すことになるので, これが推定問題の構造による量となり, この rank が低下したときはじめて推定が数値的には無理となることが示される.

特に, ある初期値 P_0 (rank n) から推定を始め, $P \rightarrow 0$ につれて, 正規化した相関行列のベクトル間の直交性がくずれ rank が低下する場合には, 自由度を一つ下げて推定しなければならなくなる.

これに対して C が rank n のまま $P \rightarrow 0$ に近づく場合には, Σ の対角成分の絶対値のみが 0 に収束していくので, floating 演算である限り問題はない.

これは, 逆行列により P が表わされる場合でも, 相関行列を考えている限り計算上同じことであり, その rank のみが問題となる.

したがって相関行列 C の rank が $n-1$ (計算上は, $|\lambda_n/\lambda_1| < 10^{-k}$ ですでに不可能となる) となった場合には, n 次元の推定計算が不可能となるが, これはその固有値に対応した推定量の推定分散が計算の有効けた数に比べて十分小さくなったことを意味し, その推定量に関してはこれ以上確実な推定の計算は行なえない.

しかし rank $C = n-1$ であれば, 残りの $n-1$ 個の推定量についてはさらに推定を続けて, より確かな情報を得ることが可能であり, データを有効に用いるためにも, $n-1$ 個の推定を続けることが望ましい. そこで, $|\lambda_n/\lambda_1| < 10^{-k}$ となった場合には, ただちに λ_n に対応する条件を制限に加えて残りの $n-1$ 個の未知変数の推定に切り換える必要があり, オ

ソラインでは多少計算が繁雑になるが、その取扱いと意味は以下の様に示される。

C の固有ベクトル \boldsymbol{r}_i により \boldsymbol{n}_i は (53') の形で直交化される。したがって $P = \overline{\Delta \boldsymbol{x} \cdot \Delta \boldsymbol{x}^t}$ とすれば $C = \Sigma^{-1} P \Sigma^{-1}$ であるから

$$y_i = \boldsymbol{r}_i^t \Sigma^{-1} \Delta \boldsymbol{x}$$

と書ける。したがって最小固有値に対応する y_n は

$$y_n = \boldsymbol{r}_n^t \Sigma^{-1} \Delta \boldsymbol{x}$$

となり

$$\begin{aligned} \overline{y_n^2} &= \overline{\boldsymbol{r}_n^t \Sigma^{-1} \Delta \boldsymbol{x} \cdot \Delta \boldsymbol{x}^t \Sigma^{-1} \boldsymbol{r}_n} \\ &= \overline{\boldsymbol{r}_n^t C \boldsymbol{r}_n} \end{aligned}$$

ところが、 $C \boldsymbol{r}_n = \lambda_n \boldsymbol{r}_n = 0$ であるから

$$\overline{y_n^2} \rightarrow 0$$

となり、確率的に（または、計算上）は十分、 $y_n = 0$ となる。

$$\therefore \boldsymbol{r}_n^t \Sigma^{-1} \Delta \boldsymbol{x} = 0 \quad (59)$$

したがって、本来は $\Delta \boldsymbol{x}$ の 1 次結合の制約条件を入れて残りの自由度 $n-1$ の未知量の推定を続けるべきであるが、これは変数変換（すなわち固有ベクトルによる直交化）を伴い計算が複雑であるから、便宜的には (59) を条件として \boldsymbol{r}_n の絶対値最大の成分に対応する $\Delta \boldsymbol{x}$ の成分を消去したうえで、残りの $n-1$ 個の未知変数について同様な計算を行なえばよい。省略した 1 変数は制限条件 (59) から残りの変数の 1 次結合として求められる。

前章で、計算例としてあげた M-4S-1 号機 3 段目に対する推定で計算された P_0 について、対角成分を 1 に正規化した相関行列 C_0 の rank は次の様にして示される。 C_0 の固有値は

$$\lambda_1 = 3.213$$

$$\lambda_2 = 2.765$$

$$\lambda_3 = 2.179 \times 10^{-2}$$

$$\lambda_4 = 3.154 \times 10^{-6}$$

$$\lambda_5 = 1.203 \times 10^{-6}$$

$$\lambda_6 = 8.135 \times 10^{-10}$$

となるから、 λ_1 で正規化すると $\lambda_6/\lambda_1 \approx 10^{-9}$ である。したがって、約 9 けたの計算精度であれば rank $C_0 = 6$ がいえ、6 個のパラメータの推定計算が可能であるといえる。このために 6.9 けたの single precision の演算では、この推定計算が行なえなかったわけである。

結局、パラメータの選び方として、なるべく P を直交化できるようなものを選ぶことが望ましい。このとき、 $P_{ij} = \sigma_i^2 \delta_{ij}$ の形式になるため、誤差の現われやすい HPH^t の計算においても

$$[HPH^t]_{ij} = \sum_k H_{ik} \sigma_k^2 H_{jk}$$

となり、特にその対角要素は

$$[HPH^t]_{ii} = \sum_k \sigma_k^2 H_{ik}^2$$

となって各項正であるから、減算によるけた落ちを避けることができる。また、 P は σ_i^2 を

対角要素とするほぼ対角行列と考えられるので $P \rightarrow 0$ による正定値性の乱れも容易にチェックでき、負になった場合 0 で置換することも可能であり、以下そのパラメータとして推定から除くことができる。

6. Kalman Filter の $z \rightarrow z$ への適用

6.1 適用上の問題点

5.5 で述べた様に、計算精度が低い場合にも、誤差を少なくできる様な推定アルゴリズムを得るため、 P がなるべく直交化する様な推定量として観測そのものを用いる Kalman Filter について考える。ただし、 z としては、状態変数でなければならないから、運動の自由度に対応した 6 個の量を必要とするので、 SR, Az, El のほか $\dot{SR}, \dot{Az}, \dot{El}$ も含む六次元ベクトルを考える。

状態変数 z_n' が

$$z_n' = f(z_{n-1}') + w_k \quad (60)$$

で表わされるとすれば、観測 z_k は (4) で $H_k = E$ とした

$$z_k = z_k' + n_k \quad (61)$$

で与えられる。

以上を Kalman Filter の計算式 (7)~(11) にあてはめると、 z_k の推定量 \hat{z}_k は次式で与えられる。

$$\hat{z}_k = \bar{z}_k + K_k(z_k - \bar{z}_k) \quad (62)$$

$$\bar{z}_k = f(\hat{z}_{k-1}) \quad (63)$$

$$K_k = P_k' [P_k' + R]^{-1} \quad (64)$$

$$P_k' = \Phi_{k, k-1} P_{k-1} \Phi_{k, k-1}^t + Q_k \quad (65)$$

$$P_k = P_k' - K_k P_k' \quad (66)$$

ただし、

$$R = \overline{n \cdot n^t}$$

$$P_k = \overline{(z_k' - \hat{z}_k)(z_k' - \hat{z}_k)^t}$$

で

$$P_0 = R$$

とする。 $\Phi_{k, k-1}$ は z_k' の Nominal Value z_{0k} との差 Δz_k に対する遷移行列で

$$\Delta z_k = \Phi_{k, k-1} \Delta z_{k-1}$$

を与えるものである。本来これは

$$\Phi_{k, k-1} = \frac{\partial f_k}{\partial z_{k-1}}$$

として求めなければならないが、計算が複雑になるため、 $\Delta z_k = \begin{pmatrix} \Delta z_k \\ \Delta \dot{z}_k \end{pmatrix}$ としたとき、十分短い時間 τ の間の遷移が近似的に

$$\Delta z_k \doteq \Delta z_{k-1} + \Delta \dot{z}_{k-1} \cdot \tau$$

$$\Delta \dot{\mathbf{z}}_k \doteq \Delta \dot{\mathbf{z}}_{k-1} \quad \tau = t_k - t_{k-1}$$

と表わせるとすれば

$$\Phi_{k, k-1} = \begin{bmatrix} E & \tau E \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

で近似することができる.

また, (66) は (12) の逆行列形式を用いて

$$P_k^{-1} = (P_k')^{-1} + R^{-1} \quad (67)$$

としても求めることができる. ここに

$$(P_k')^{-1} = [\Phi_{k, k-1} P_{k-1} \Phi_{k, k-1}^t + Q_{k-1}]^{-1} \quad (68)$$

である.

このとき, Gain Matrix は (14) より

$$K_k = P_k R^{-1} \quad (69)$$

と書ける.

$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}'$ の推定においては, 観測の機構上, SR, Az, El のそれぞれに相関がないと考えてよいので, その推定分散 P も上式より分離して, 計算は 2 次元ずつのベクトル $\begin{pmatrix} \text{SR} \\ \text{SR} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \text{Az} \\ \text{Az} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \text{El} \\ \text{El} \end{pmatrix}$ の 3 組に分けて行なうことができる. これにより逆行列演算等は非常に簡単になる.

また, \mathbf{z} を推定量にとることにより, P の基底ベクトルは直交に近い形になる.

たとえば後節で計算結果を示す M-4S-1 号機 3 段目に対する $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}'$ の推定において, 推定中のある時刻 (初期時刻では完全に直交しその後特異に近づく. 推定後約 150 秒) での SR と SR の Covariance Matrix $P(2 \times 2)$ では, 相関行列の固有値が

$$\lambda_1 = 1.557$$

$$\lambda_2 = 0.443$$

となっている. したがってこの推定計算に必要な計算精度は $\lambda_2/\lambda_1 \approx 10^{-1}$ より約 1 けたということになり, 安全に, しかもかなり精度の高い計算を行なうことができると思われる.

一方, 観測行列を $H=E$ とするために, \mathbf{z} として実際にはデータとして得られない SR, Az, El が必要であるという問題が生じる. 計算上は, \mathbf{z} として $t=t_k$ 中心に 2 秒間 20 点のデータを用い, 最小二乗法で 2 次式にあてはめたときの $t=t_k$ での近似値を用いて \mathbf{z} , \mathbf{z} としている. しかし, \mathbf{z} は慣性系位置と異なり本質的に時間の 2 次式で表わされるものではないため, その分の誤差が現われることになる. これは, 2 秒間の間にロケットが移動するため重力が一定でないことによる誤差であって, きわめてわずかであるため (現在の状態で 1/50 m/sec 程度以下) 無視するが, 摂動法等により補正することも容易である.

6.2 具体的計算

1) R について 観測として最小二乗法によりリスムーズされた値を用いる場合の観測値の推定分散行列 $R = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z} \cdot \Delta \mathbf{z}^t & 0 \\ 0 & \Delta \dot{\mathbf{z}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{z}}^t \end{pmatrix}$ は, 1 点での観測値の分散行列 $R = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z}_0 \cdot \Delta \mathbf{z}_0^t & 0 \\ 0 & \Delta \dot{\mathbf{z}}_0 \cdot \Delta \dot{\mathbf{z}}_0^t \end{pmatrix}$ を用いて次の様に表わされる.

(付録参照)

$$\overline{\Delta \mathbf{z} \cdot \Delta \mathbf{z}^t} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i^4}{N \sum_{i=1}^N t_i^4 - \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right)^2} \cdot \overline{\Delta \mathbf{z}_0 \cdot \Delta \mathbf{z}_0^t}$$

$$\overline{\Delta \dot{\mathbf{z}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{z}}^t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N t_i^2} \cdot \overline{\Delta \dot{\mathbf{z}}_0 \cdot \Delta \dot{\mathbf{z}}_0^t}$$

ただし、 N は smoothing に用いたデータの個数、 t_i は t_1, t_2, \dots, t_n で、中央で 0 となるようにとる。

2) 初期値の設定 $\hat{\mathbf{z}}$ の初期値は、 $\hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_0$ として、 $t = t_0$ での最小二乗法による近似代表値を用いればよい。

P の初期値 P_0 は $P_0 = R$ としてよい。

3) (63) の非線形変換 $\mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{z}}_{k-1})$ について

まず、 $t = t_{k-1}$ での推定値 $\hat{\mathbf{z}}_{k-1}$ を慣性座標系 \mathbf{x}_{k-1} に変換する。次のその値を初期値として慣性系での運動方程式を解けば、 $t = t_k$ での \mathbf{x}_k が求まる。これを再びもとにもどして $\bar{\mathbf{z}}_k$ とすればよい。

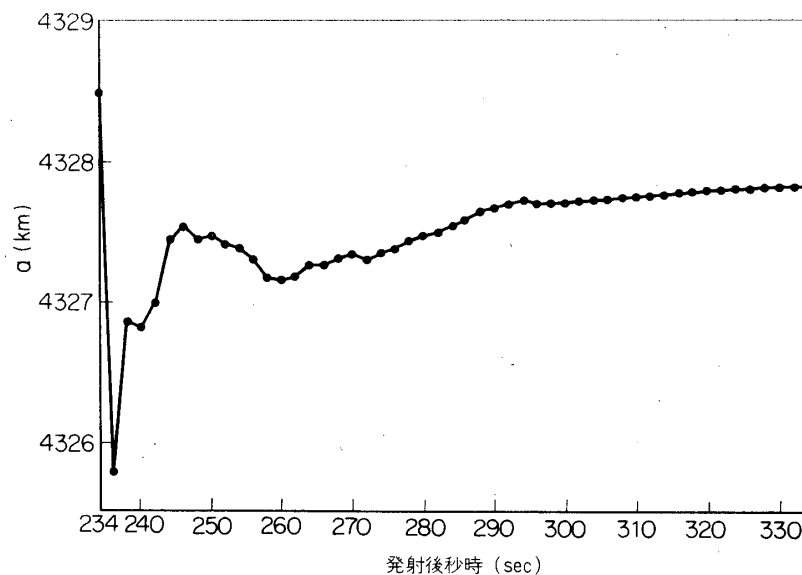
なお前節でふれた様に、フィルタとしての計算はすべて二次元で行なうため、(64) の逆行列演算についても問題が少ない。

6.3 計算結果

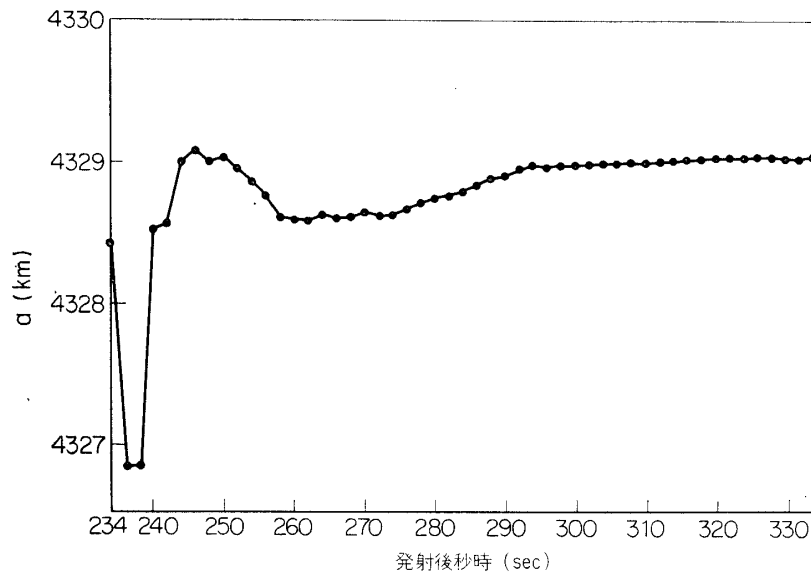
M-4S-1 号機 3 段目に対する推定

計算式: (62)~(66) で $Q=0$ としたときのもの。

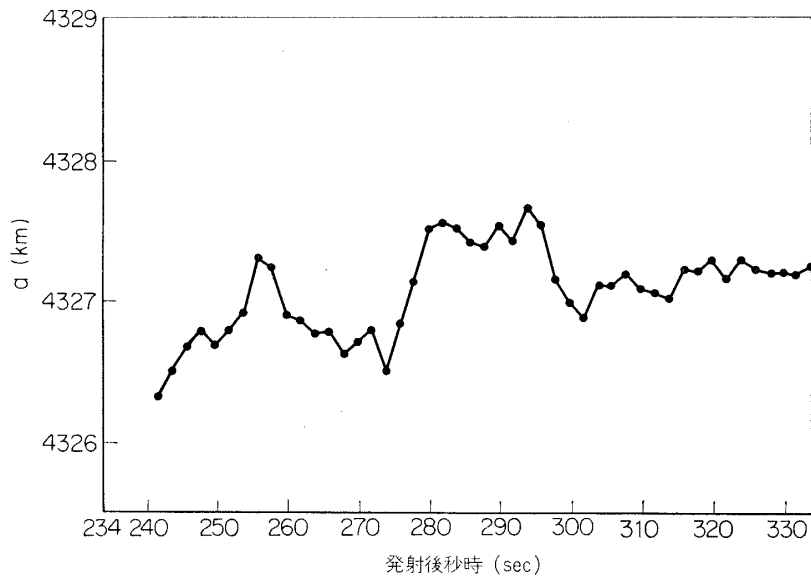
使用データ: 235.1 秒から 347.0 まで、0.1 秒間隔の精測レーダ・データを 20 点ごとにスムーズして中点での代表値を観測値とする。



6.1 図 Kalman Filter による $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}$ の推定による a の変化 (double precision)



6.2 図 Kalman Filter による $z \rightarrow z'$ の推定による a の変化 (single precision)



6.3 図 KSC における M4S-1 号機推定結果 ('70.9.25) (長半径 a の変化)

初期値: 233.1 秒から 234.9 秒までの 0.2 秒間隔のデータ 10 点を二次近似したときの 234.0 秒での近似値

$$R = \begin{pmatrix} (0.005 \text{ km})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.01 \text{ deg})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.015 \text{ deg})^2 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = R$$

以上を用いて推定した \hat{z} による軌道長半径 a を図 6.1, 2 に示す. 計算は double prec-

ision および single precision で行なっているが、いずれの場合も収束状況などほとんど変わらない。図 6・3 は現在 KSC で行なわれているオンライン軌道推定による結果であり、データは精測レーダによるものを用いている。(図 6・1, 2 の収束値が異なるのは、single の場合、を計算する際の丸め誤差によるもので、 P に関しては問題ない。)

6.4 KSC オンライン軌道推定との比較

前節の例により示されるように、 $z \rightarrow z'$ の Kalman Filter による推定値は、KSC の結果よりもスムーズに一定値へ収束している。本節においては、オンライン軌道推定の際行なわれる z の推定法と、Kalman Filter による方法との類似点、相異点などについて検討する。

現在、KSC においてオンラインで行なわれている z' の推定方法は次の様なものである [4][5]。

$t=t_k$ における \hat{z}_k' の推定値 z_k は、 $t=t_{k-1}$ での推定値 \hat{z}_{k-1} の非線形変換 $f_k(\hat{z}_{k-1})$ により得られる \bar{z}_k と $t=t_k$ の観測値 $z_k(t=t_k)$ を中心とした 2 秒間の測定データを 2 次式にあてはめた smoothing による推定値) の重み付き平均値として定められる。このとき z' と \dot{z}' に相関はないものとして、計算式は各項目ごとに 1 次元で考えられている。たとえば、速度 \dot{z}' の推定値は

$$\hat{\dot{z}}_k = \frac{\frac{1}{\sigma_k^2} \cdot \dot{z}_k + \frac{1}{\hat{\sigma}_k^2} \cdot \frac{1}{C_k} \cdot \bar{\dot{z}}_k}{\frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_k^2} \cdot \frac{1}{C_k}} \quad (70)$$

σ_k^2 : 観測値の分散
 $\hat{\sigma}_k^2$: 推定値の分散

で表わされる。ここに C_k は $C_k \geq 1$ で経験的に決められる定数である。式から明らかなように、この方法では、位置の速度へのフィードバックが無視されている。また、 \hat{z} の計算式では、速度の位置に対するフィードバックの項が無視されている。これは Kalman Filter において Gain Matrix K_k を対角行列としたときに対応すると考えられる。実際 z, \dot{z} を無相関とすれば $\begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ の二次元ベクトルで考えたとき P_k は対角行列で、 $\Phi_{k, k-1} = E$ となる。(68) の系雑音 Q の代わりに $C_k \geq 1$ を用いて

$$(P_k') = \frac{1}{C_k} \cdot P_{k-1}^{-1}$$

とすれば、(69) にこれを代入して

$$K_k = \left[\frac{1}{C_k} P_{k-1}^{-1} + R^{-1} \right]^{-1} \cdot R^{-1}$$

となる。 P_k を対角行列と仮定すれば、 K_k も (2×2) の対角行列となり、これを (62) に代入して得られる \hat{z}_k は (70) と同形であることがわかる。

しかし本質的に z, \dot{z} の無相関は成立せず、 K_k は対角行列とはならないはずである。したがって \hat{z}_k の式に \bar{z}_k, z_k の項が、 \hat{z}_k の式に $\bar{\dot{z}}_k, \dot{z}_k$ の項が含まれることになり、特に速度に対する位置のフィードバックは、 \dot{z} の積分が z となるため、長時間の z の観測によ

り \hat{z} の推定精度が改善されることから、かなり重要であり、無視してしまうことはできない。

前節に示したオンライン推定結果にばらつきが多いということも、これを省略したためと考えられる。特に測定データの精度が悪い場合に、ばらつきは著しく、一定値に収束しないという結果も出ている。

しかし、観測値 z_k のとり方や、 \bar{z}_k の求め方は、Kalman, Filter, オンライン推定、どちらの場合も同じなので、オンライン軌道推定に $z \rightarrow z'$ の Kalman Filter を導入することは比較的容易であると考えられる。

7. あとがき

以上の取扱いにより、適当な座標系を用いればオンライン計算機によるロケットの軌道推定に Kalman Filter がそのまま適用でき、実用上、特に計算精度のうえからも大きな問題はなく応用できる可能性が示された。前述の様に、このフィルタが理論上問題ないというのは当然であるが、有限けた数の計算（特にオンラインでフィルタ方程式を全て解く必要があるとき）が、推定結果にいかに関与するか、問題があるとすればその原因がどのような点にあるか、またこの場合どう取扱うかという具体的手法については余り検討されていない様である。従来、推定分散を非負にするというアルゴリズムは与えられているが、最適推定、すなわち結果の精度を保証するという観点からは本質的な解決にはなっていないので、これを推定論、特に主成分分析の概念によって問題点を明らかにし、少しでも実現の容易な推定構造を検討した。また、KSC で現在使用中のアルゴリズムもかなり最適に近いことが確かめられたが、なお一部に改良の余地があることも明らかにされ、この改善を行なうことにより、一層現実的かつ最適に近いオンライン推定が可能であるという結果が導かれた。

この結果を実際に応用することにより、将来の実データ処理が一段と改善されることが期待される。フィルタの前提条件、特に分散等が未知な場合の推定を含む適応フィルタの概念を取り入れた実用的処理法については、別の機会に検討の結果を示したいと考えている。

本文は、電波誘導方式および軌道推定に関するデータ処理の研究の一部をまとめたものであって、この研究を進めるに当り平素よりいろいろと御指導いただいている当研究所の斎藤教授、野村教授、浜崎教授には、このフィルタ実用化の種々の問題に対しても多くの有益な御助言をいただき、深く感謝する次第である。また、電波誘導方式検討会関係の方々、特に KSC 設置の計算機の精度検討およびオンライン計算のプログラミングに関して御協力いただいた日本電気 KK の高田、加藤両氏はじめ日電の関係の方々に感謝する次第である。

1972 年 3 月 2 日 新設部 (工学)

付録 Smoothing による推定分散

最小二乗法により、 N 個のデータ z_i ($i=1, 2, \dots, N$) を時間の 2 次式に近似した場合中央における推定値の共分散行列 \hat{R} は次の様にして与えられる。

最小二乗法では

$$z_i = at_i^2 + bt_i + c + n_i$$

付一 1

ただし

$$\overline{\mathbf{n}_i} = 0 \quad \overline{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j^t} = R \delta_{ij}$$

とおいて

$$J = \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c})^t R^{-1} (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c}) \Rightarrow \min \quad \text{付-2}$$

となる $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を求める. したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} &= 2 \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c})^t R^{-1} (-t_i^2) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} &= 2 \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c})^t R^{-1} (-t_i) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}} &= 2 \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}t_i^2 - \mathbf{b}t_i - \mathbf{c})^t R^{-1} (-1) = 0 \end{aligned} \quad \text{付-3}$$

より次式が成立する.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \sum t_i^4 + \mathbf{b} \sum t_i^3 + \mathbf{c} \sum t_i^2 &= R^{-1} \sum t_i^2 \mathbf{z}_i = \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \sum t_i^3 + \mathbf{b} \sum t_i^2 + \mathbf{c} \sum t_i &= R^{-1} \sum t_i \mathbf{z}_i = \mathbf{\beta} \\ \mathbf{a} \sum t_i^2 + \mathbf{b} \sum t_i + \mathbf{c} N &= R^{-1} \sum \mathbf{z}_i = \mathbf{\gamma} \end{aligned} \quad \text{付-4}$$

今, t_i が等間隔であると $\frac{1}{N} \sum t_i = 0$ とすれば

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{b} \quad \text{付-5}$$

とおくことができる.

また, $\sum t_i = \sum t_i^3 = 0$ であるから付-4 より

$$\mathbf{b} = \mathbf{\beta} \cdot \frac{1}{\sum t_i^2} \quad \text{付-6}$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{\gamma} \sum t_i^4 - \mathbf{a} \sum t_i^2}{N \sum t_i^4 - (\sum t_i^2)^2} \quad \text{付-7}$$

となり,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b} &= \Delta \mathbf{\beta} \frac{1}{\sum t_i^2} \\ \Delta \mathbf{c} &= \frac{\Delta \mathbf{\gamma} \sum t_i^4 - \Delta \mathbf{a} \sum t_i^2}{N \sum t_i^4 - (\sum t_i^2)^2} \end{aligned}$$

より, 推定分散 \hat{R} は

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{b}^t} &= \frac{NR}{\sum t_i} \\ \overline{\Delta \mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{c}^t} &= \frac{\sum t_i^4}{\{\sum t_i^4 \cdot N - (\sum t_i^2)^2\}} R^{-1} \\ \overline{\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{c}^t} &= \overline{\Delta \mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{b}^t} = 0 \end{aligned} \quad \text{付-8}$$

で与えられる.

参 考 文 献

- [1] H. W. Sorenson, Advances in Control Systems, Vol. 3, pp. 219~292, Academic Press, 1966
- [2] A. H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Mathematics in Science and Engineering Vol. 64, pp. 194~331, Academic Press, 1970
- [3] J. M. Mendel et al. Bibliography on the Linear-Quadratic-Gaussian Problem IEEE Trans. on AC-16, # 6, pp. 847~868 Dec. 1971
- [4] 浜崎襄二, 分散を考慮した近似多項式次数選定の一方法, 生産研究, 20 巻 3 号 pp. 103~107, 1968. 3
- [5] 浜崎襄二, 実時間処理におけるデータ平滑の一方式, 生産研究, 21 巻 1 号 pp. 16~24, 1969. 1