

浅い粘弾性球形殻の動的挙動

熊井 規・砂川 恵

Dynamic Response of Viscoelastic Shallow Spherical Shells

By

Nori KUMAI and Megumi SUNAKAWA

Abstract: The axisymmetric dynamic response of viscoelastic clamped shallow spherical shells to transient pressure loading is analyzed analytically and experimentally. The nonlinear governing equations derived by the authors are solved numerically, and the critical load and the effects of viscoelasticity and loading speed on the dynamic behavior of the shell are discussed. The definition of the dynamic critical load is proposed. And, it is pointed out that the buckling phenomena have to be analyzed paying an attention to the connection with the time, because the dynamic, static and creep bucklings are related with one another as a function of time. In order to observe the response of viscoelastic spherical shells to the dynamic loading and to check the results of the numerical solution, some experiments have been carried out and a good agreement between the theoretical and experimental values is seen.

概 要

線型粘弾性特性を有する周縁固定の浅い球形殻の軸対称動的挙動が数値的に解析される。動的挫屈の定義が提案され、また、動的挫屈、静的挫屈およびクリープ挫屈の関係が、これら3者は時間の関数として連続的に捉えられるという事に注目して、明かにされる。更に、解析の妥当性を検証するために行われた若干の実験結果が述べられ、解析は満足すべき精度を持つことが示される。

1. ま え が き

航空機および高速飛翔体においては苛酷なまでに構造の軽量化が要求される。軽量化により自重の関与する荷重が低減する利点はあるが、構造法および使用材料が同一であると、軽量化はそのまま構造の強度および剛性の低下を意味する場合が多い。

そこで、構造の軽量化に際しては、環境条件（荷重）の正確な推定およびそれに対する構造の挙動の解明が、構造様式および材料の適切な選定、従って、構造の信頼性および安全性の確保において重要となる。

薄板および張殻構造は、自身の重量に比して高い耐荷能力を有するので、航空機および

高速飛翔体の主要構造要素として採用されている。しかしそれらは大変形を生じ易く、荷重がある限界値を越すといわゆる不安定現象を呈する。従って、殻体構造等の安定問題の研究は、学問的に興味深いばかりでなく、実用上の見地からも極めて重要である。特に、航空機および高速飛翔体が受ける種々の動的あるいは衝撃的荷重に対するその構造の挙動および安定問題に対する研究は、従来精力的に行われて来た静的挙動および安定問題についての研究に比して、かなり不十分な段階にあり、この問題の解明は早急になされることが望まれる。

本論文では、周縁固定の浅い粘弾性球形殻が一様な圧力荷重を時間的にステップ状および *graded* 状に受ける場合の軸対称の非線型動的挙動を解析的および実験的に研究する。すなわち、球形殻の動的挙動および挫屈荷重におよぼす粘弾性特性および負荷速度の影響、ならびに負荷荷重と大変形を起すまでに要する時間との関係等を明かにし、同時に動的挫屈の定義を提案してそれを明確にしようとするものである。粘弾性特性を記述するためには、クリープ引張試験の結果からみて、実際的な検討をする場合に満足すべき近似を与えると思われる 3 要素線型モデルが数値計算に際し用いられる。負荷速度と挫屈臨界荷重との関係を調べることによって、動的挫屈と静的挫屈との関連が調査され、更に、動的挫屈、クリープ挫屈および静的挫屈の関係が、これら 3 者は時間の函数として連続的に捉えられるという事に注目して、明かにされる。

なお、本研究に関連のある従来の研究については、既に文献 [1] および [2] において詳細に解説したので、ここではその記載を省略する。

記号

- a : 底円の半径
- f : 無次元応力函数, $f \equiv F[12(1-\nu^2)a^2]/(Eh^2)$
- h : 板厚
- m : 密度
- p : 無次元圧力, $p \equiv q/q_0$
- p_c : 無次元動的挫屈荷重
- p_{s1} : ヤング率 E_1 の弾性殻の静的挫屈荷重
- p_{s0} : 粘弾性殻およびヤング率 E_0 の弾性殻の静的挫屈荷重
- q : 単位面積あたりの外圧荷重
- q_0 : 古典挫屈値, $q_0 \equiv \{2E/[3(1-\nu^2)]^{1/2}\} (h/R)^2$
- t, τ : 時間および無次元時間, $\tau = (E/m)^{1/2}(t/R)$
- t^*, τ^* : 荷重が一定になるまでの時間および同じく無次元時間 (図 3)
- w : 無次元板厚方向変位, $w \equiv 2[3(1-\nu^2)]^{1/2}(W/h)$
- w_n : 周縁固定円板の固有振動モード
- Z_0 : 中立面までの底円からの高さ, $Z_0 \equiv H(1-\xi^2)$
- B : 粘弾性定数, $B \equiv (E/E_1)\tau_2(E/m)^{1/2}/R$
- E : 応力の次元を持つ定数
- E_0 : 静的ヤング率, $E_0 \equiv (1/E_1 + 1/E_2)^{-1}$

E_1, E_2 : 弾性係数 (図 2)

H : 中央の中立面までの底円からの高さ

I, J : 第 1 種変形ベッセル函数および第 1 種ベッセル函数

R : 曲率半径

U, W : 子午線方向および板厚方向変位

β, θ : 子午線方向および周方向角

β_0 : 半頂角

ε : 歪

η_2 : 粘性係数 (図 2)

λ : 形状パラメータ, $\lambda \equiv 2[3(1-\nu^2)]^{1/4}(H/h)^{1/2}$

ν : ポアソン比

ξ : 無次元位置座標, $\xi \equiv (R/a)\beta$

$$\rho: \text{平均撓み}, \rho = \left[\iint WR^2 \sin \beta d\beta d\theta \right] / \left[\iint Z_0 R^2 \sin \beta \cos \beta d\beta d\theta \right]$$

τ_2 : 遅延時間, $\tau_2 \equiv \eta_2/E_2$

φ_m, ψ_m : 粘弾性定数

Φ_0, Ψ : 式(2.12)で定義される演算子

添字 r, θ はそれぞれ子午線方向および周方向成分を表わす.

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial \xi}(\quad), \quad (\dot{\quad}) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\quad).$$

2. 解 析

一様な外圧 $q=q(t)$ を受ける周縁固定の浅い粘弾性球形殻 (図 1) を考える.

解析に際し以下の仮定を設ける.

- (1) 球形殻は浅い. すなわち, $\beta_0 \ll 1$ が成立する.
- (2) 球形殻は perfect である. すなわち, imperfection-free とする.
- (3) 温度等の諸環境条件は一定である.
- (4) 変形波形は対称である.
- (5) 慣性項は $\partial^2 W / \partial t^2$ だけを考える.
- (6) 粘弾性特性は線型モデルで表せる.

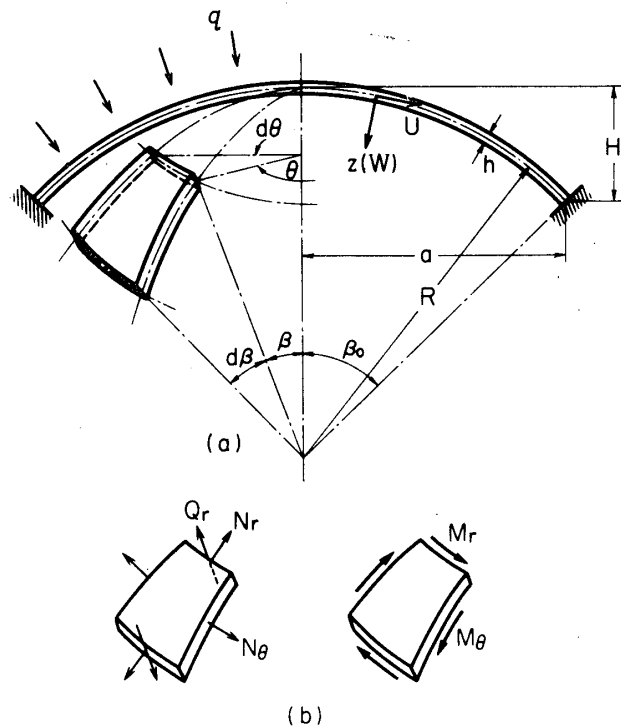


図 1 (a) 球形殻, (b) 単位幅あたりの力と曲げモーメント.

(7) ポアソン比 ν は時間に無関係に一定である。

数値計算にあたっては、粘弾性特性は図 2 (a) に示される線型 3 要素モデルで表し、外圧 $q(t)$ として図 3 に示されるステップ状および graded 状の両者を考える。

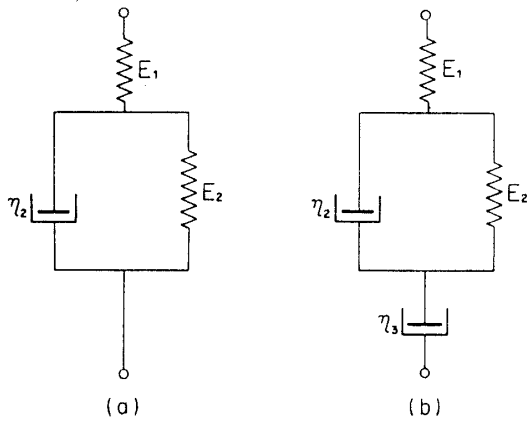


図 2 線型粘弾性モデル.

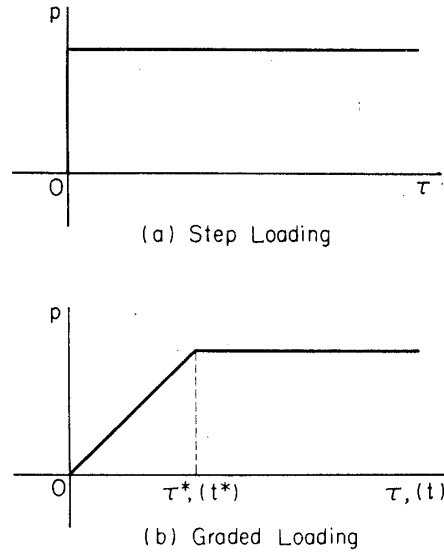


図 3 荷重様式.

2.1 基礎方程式、境界条件および初期条件

(1) 基礎方程式

上記の仮定の下で、本問題に対する基礎方程式は次式で与えられる [2].

板厚方向の運動方程式に相当する式:

$$\Psi \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) \right] \right\} - \Phi_0 [\lambda^2 (f\xi)' + (f w')' + \lambda^4 (4p - \dot{w})\xi] = 0, \quad (2.1)$$

適合条件式に相当する式:

$$\Phi_0 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi f) \right] + \Psi \left[\frac{1}{2} (w')^2 + \lambda^2 \xi w' \right] = 0, \quad (2.2)$$

ここで、 $\Phi_0 = \sum_{m=0}^N \varphi_m (\partial/\partial \tau)^m$, $\Psi = \sum_{m=0}^M \psi_m (\partial/\partial \tau)^m$ である。

(2) 境界条件

周縁固定の条件に対する境界条件は次式で与えられる。

$$\xi = 1 \text{ において, } w = w' = 0, \quad (2.3)$$

$$\xi = 1 \text{ において, } f' - \nu f = 0. \quad (2.4)$$

(3) 基礎方程式の変形

撓み形 w および応力函数 f はそれぞれ ξ の偶函数および奇函数であるので、Bessel 函数を用いて以下の様に展開できる。

$$w(\xi, \tau) = \sum_m a_m(\tau) w_m(\xi), \quad m=1, 2, 3, \dots, \quad (2.5)$$

$$f(\xi, \tau) = A_0 \xi + \sum_m b_m(\tau) J_1(\mu_m \xi), \quad m=1, 2, 3, \dots, \quad (2.6)$$

ここに,

$$w_m(\xi) = I_0(\alpha_m \xi) / I_0(\alpha_m) - J_0(\alpha_m \xi) / J_0(\alpha_m).$$

境界条件式 (2.3) および (2.4) を満足するために, それぞれ, 次の2式が成立しなければならない.

$$I_1(\alpha_m) / I_0(\alpha_m) + J_1(\alpha_m) / J_0(\alpha_m) = 0, \quad (2.7)$$

$$A_0(\tau) = (\nu - 1)^{-1} \sum_m b_m(\tau) \mu_m J_0(\mu_m), \quad (2.8)$$

ここに, μ_m は $J_1(x) = 0$ の m 番目の正根である.

基礎方程式 (2.1) および (2.2) に展開式 (2.5) および (2.6) を代入して, Galerkin 法を適用すると, 次の2式が得られる.

$$\begin{aligned} \lambda^4 (\Phi_0 \ddot{a}_n) + \alpha_m^4 (\Psi a_n) &= \lambda^2 \left\{ \sum_m \left[\frac{2N_n}{\nu-1} V_m - C_{mn} \right] (\Phi_0 b_m) \right\} \\ &\quad - \sum_k \sum_m \left[\frac{1}{\nu-1} V_k D_{mn} + E_{mkn} \right] [(\Phi_0 b_k) a_m + B b_k \dot{a}_m] \\ &\quad + 4\lambda^4 N_n (\Phi_0 p), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Phi_0 b_n(\tau) = \Psi \left[2\lambda^2 \sum_m a_m C_{nm} + \sum_s \sum_t E_{snt} a_s a_t \right], \quad (2.10)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} V_m &= \mu_m J_0(\mu_m), \quad N_n = \int_0^1 \xi \tau \omega_n d\xi, \\ B &= (E/E_1) \tau_2 (E/m)^{1/2} / R, \quad C_{mn} = \frac{\alpha_n^4 \mu_m J_0(\mu_m) N_n}{\mu_m^4 - \alpha_n^4}, \\ E_{mkn} &= \int_0^1 J_1(\mu_k \xi) \omega_m' \omega_n' d\xi, \\ D_{mn} &= -(\alpha_m \alpha_n)^2 \left\{ \frac{N_m - N_n}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} - \frac{N_m + N_n}{\alpha_m^2 + \alpha_n^2} \right\}, \quad (m \neq n) \\ &= (\alpha_n^2 N_n)^2 / 4, \quad (m = n) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

であり, 線型粘弾性特性として3要素線型モデルが採用されている. すなわち,

$$\Phi_0 / E = 1/E_0 + (\tau_2 / E_1) \partial / \partial t, \quad \Psi = 1 + \tau_2 \partial / \partial t, \quad (2.12)$$

ここに,

$$E_0 \equiv (1/E_1 + 1/E_2)^{-1}, \quad \tau_2 \equiv \eta_2 / E_2. \quad (2.13)$$

(4) 初期条件

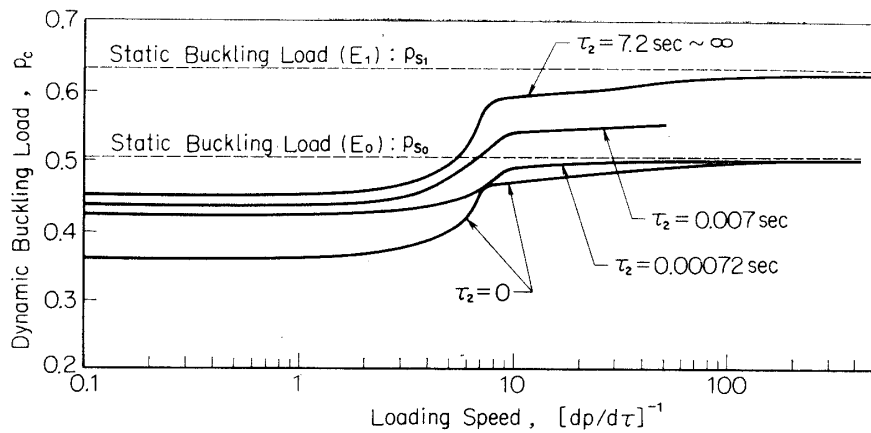
本問題 (3要素モデル) に対する初期条件は次の様に与えられる.

(a) ステップ状荷重の場合

$$w = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{w} = 0, \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} 4p - \dot{w} &= 0, \\ f &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

図 4 動的挫屈荷重, $\lambda=5.0$.

(b) graded 状荷重の場合,

$$w=0, \quad (2.17)$$

$$\dot{w}=0, \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{w}=0, \\ f=0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

なお, 式 (2.16) および式 (2.19) は付加条件である [2].

2.2 球形殻の動的挙動

前節で導かれた式 (2.9) および (2.10) を式 (2.14) ~ (2.16) あるいは式 (2.17) ~ (2.19) で与えられる初期条件の下で解くにあたって, a_m, b_m とともに 4 項または 8 項で近似し, Runge-Kutta-Gill 法によって数値解を求める. なお, 時間刻み $\Delta\tau$ は最悪の条件の場合でも 0.01 で十分であった.

数値解は以下の諸量に対して求められる. すなわち, $E_1=418 \text{ kg/mm}^2$, $E_2=1640 \text{ kg/mm}^2$, $E=E_1$, $\lambda=5$, $\nu=1/3$, $mg=1.19 \text{ g/cm}^3$, $R=1000 \text{ mm}$, $a=150 \text{ mm}$ なお, ここで $\nu=1/3$ は過去の研究結果との比較をするために採用されている.

2.2.1 動的応答におよぼす負荷速度および粘弾性の影響

図 4 には, 動的挫屈荷重 p_c と負荷速度 $dp/d\tau$ との関係が, 図 5 には, ステップ状荷重 ($p=0.60$) を受ける殻の平均撓み ρ の時間的变化が, とともに遅延時間 τ_2 をパラメタとして示されている.

図 5 の $l_n (n=1, 2, \dots)$ は $\rho(\tau)$ の各ピーク値と $\rho(\infty)$ との距離である. 減衰率 (l_{n+2}/l_n) の値は殆ど一定であるので, 図 6 には (l_3/l_1) の遅延時間 τ_2 による変化が示されている. 図 6 は挫屈後の運動の減衰特性に対する遅延時間の効果を見積るのに使用することができるであろう.

図 4 より, 負荷速度 ($dp/d\tau$) の p_c に対する影響が判る. すなわち, p_c は $2 < (dp/d\tau)^{-1} < 10$ の範囲で, $(dp/d\tau)^{-1}$ の変化に対して, $(dp/d\tau)^{-1}$ の他の領域に比して, 大きな変化を示し, $(dp/d\tau)^{-1}$ が約 10, すなわち, 本数値例において t^* (図 3 参照) が約 2.5 msec より大きい所では“動的”という意味が薄らぎ, こういう場合の現象は準静的とほぼ等しくなる.

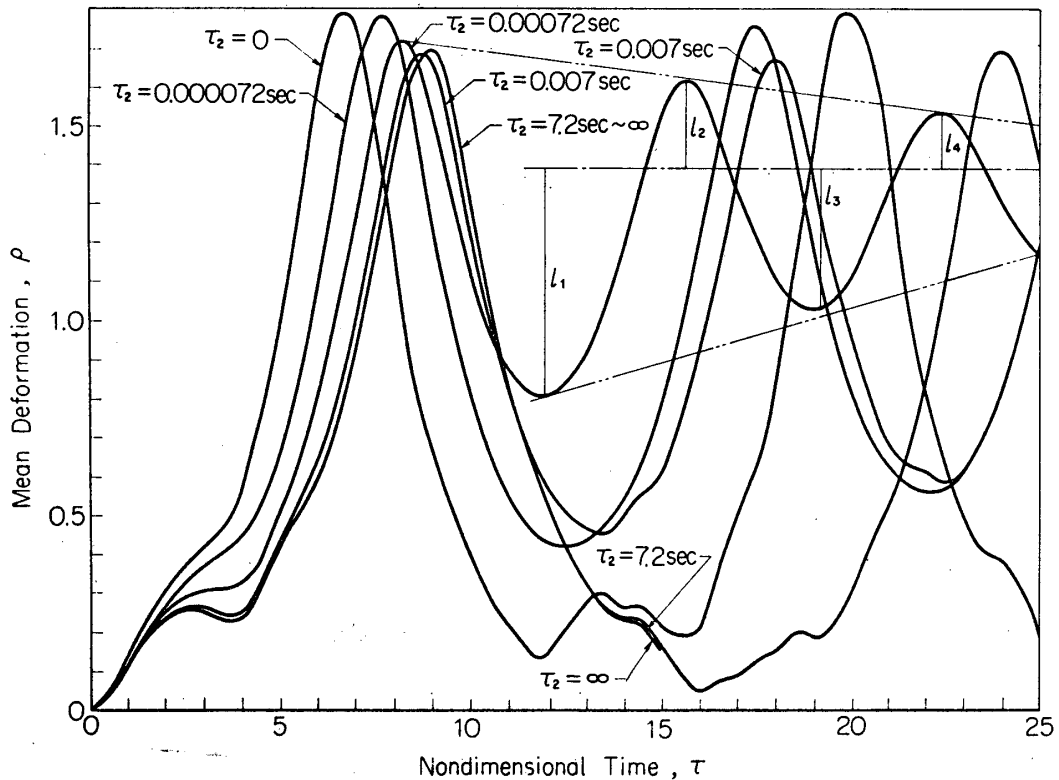


図5 平均撓みの時間的变化, $p=0.60$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

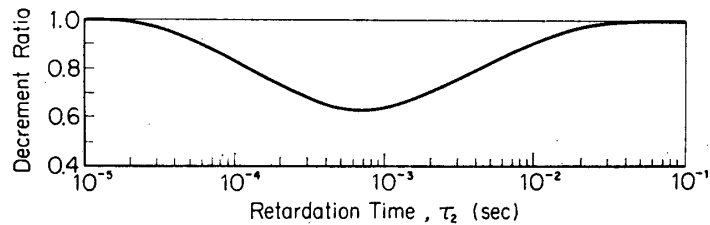


図6 撓屈後の減衰率, $p=0.60$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

粘弾性特性が p_c に対して持つ効果 (本論文では E_1, E_2 を変化させず, τ_2 のみを変化させているので, 粘弾性の効果は遅延時間 τ_2 の効果と同義である.) は $(dp/d\tau)^{-1}$ のそれとほぼ同様のものであり, 浅いアーチに対する Huang & Nachbar [9] の解析結果と同様, $\tau_2=0$ の近傍で p_c に著しい変化が現れる. しかし, 動的応答に関しての τ_2 の効果は $(dp/d\tau)^{-1}$ のそれと異なる. それは, 動的応答においては, 粘性減衰が次第に顕著な役割を演じるようになる, すなわち, 撓屈後の減衰挙動は $(dp/d\tau)^{-1}$ に関しては単調に変化するが, τ_2 に関しては極値をもつ様に変化するからである. (図5および図6参照)

図5から判る様に, τ_2 が小になるにつれて大変形応答は早く現れ, 撓屈前の ρ の値 (同図において, $\tau=3$ 近傍) は τ_2 の減少とともに単調増加する. しかし, 撓屈大変形時の ρ の第1回目のピーク値 ρ_{max} は, 本数値例においては, $\tau_2=7$ msec の近傍に極小値をもつ. また, 表1に示される数値例, すなわち, $p=0.7, dp/d\tau=1.0$ なる大荷重を受ける場合に

表 1 遅延時間 τ_2 の ρ_{\max} に及ぼす影響の一例,
 $dp/d\tau=1, \lambda=5.$

p	$\tau_2(\text{sec})$	ρ_{\max}	$\tau_{\rho=\rho_{\max}}$
$p=0.70$	7.2	1.767	7.5
	0.007	1.768	7.5
	0.00072	1.781	7.2
$p=0.65$	7.2	1.726	8.3
	0.007	1.720	8.2
	0.00072	1.759	7.8

は、 ρ_{\max} は τ_2 の減少とともに単調増加を示す。こうした現象は 3 要素モデルが示すクリープおよび減衰特性の両効果の兼合による。

図 4 に示す本数値例では、現存する hypolymer の τ_2 の領域、すなわち、 τ_2 が数 msec より大なる所において、 $(dp/d\tau)^{-1} < 4$ の範囲での動的挫屈荷重 p_c にのみ興味のある場合には、粘弾性体をそのヤング率が瞬間弾性率 E_1 である弾性体として取扱ってほぼ良い事が判る。しかしながら、幾分危険側に p_c を見積る可能性があるので、数%を問題にする場合には本方法によるのが良い。

高次モードの生長が粘弾性効果によっておさえられる様子は、各モード間の振幅の比較によって簡単に調べられる。本数値例では、 $\tau_2=720 \mu\text{sec}$ の場合、3 次モードおよび 4 次モードの振幅はともに $\tau_2=7.2 \text{sec}$ の場合に比して約 3 割小である。

数値解の結果から、負荷速度と遅延時間とは、それらの値のある限られた極く狭い領域において、動的挫屈荷重に重大な影響を持っていることが判る。

2.2.2 動的挫屈荷重の決定

本論文においては、ステップ状および graded 状荷重の両者が考えられており、従って、snap-through 現象の存在が挫屈臨界荷重を決定する要点になる。

しかし、臨界荷重を決定するにあたって、(a) 粘弾性殻および $\tau_2=0$ なる弾性殻に対す

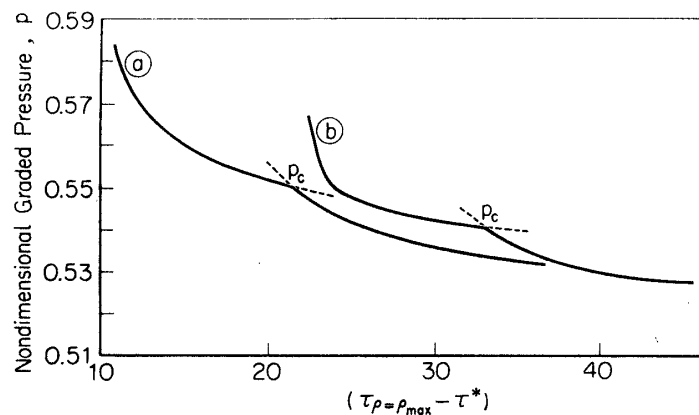


図 7 荷重による大撓み発生時間 $(\tau_{\rho=\rho_{\max}} - \tau^*)$ の変化, $\tau_2=7 \text{msec}$,
 $\lambda=5.0$, (a): $(dp/d\tau)^{-1}=10$, (b): $(dp/d\tau)^{-1}=50$.

る静的挫屈荷重 p_{s0} より動的挫屈荷重 p_c が大と思われる場合 (図4において負荷速度が小の領域), および, (b) 減衰の効果が小さい場合 の両者に対して若干の考察が必要である.

図7に τ^* (graded 状荷重が一定値になる時間) から $\tau_{\rho=\rho_{max}}$ (平均撓み ρ が第1回目の挫屈大変形ピーク値 ρ_{max} となる時間) までの時間 ($\tau_{\rho=\rho_{max}} - \tau^*$) の荷重による変化を示す.

前者 (a) の場合には, 図7に示されている様に, 曲線の尖点の縦座標が動的挫屈荷重と考えられる. 図7に尖点が存在することは, クリープ変形の影響が顕著である領域とそうでない領域とがあることを意味すると思われ, 事実, 尖点の左側の領域においては動的挫屈が起り, 右側ではクリープを伴っての挫屈が起ることが数値的に見積られ, PMMA で作成した試験片を使って実験した結果では (第3章参照), p_c で挫屈する時はほぼ数 msec 以内で, 一方 p_{s0} で挫屈するにはほぼ数十 sec かかることが認められている. 以上が上述の様に p_c が決定される理由である.

図8および図9は, 荷重による大撓み発生に要する時間変化を $\tau_2=720 \mu\text{sec}$ および $\tau_2=7 \text{ msec}$ の場合についてそれぞれ示している. 両図における L_n ($n=1, 2, \dots, 5$) および S_n ($n=1, 2, \dots, 5$) はそれぞれ大変形領域および小変形領域を示す.

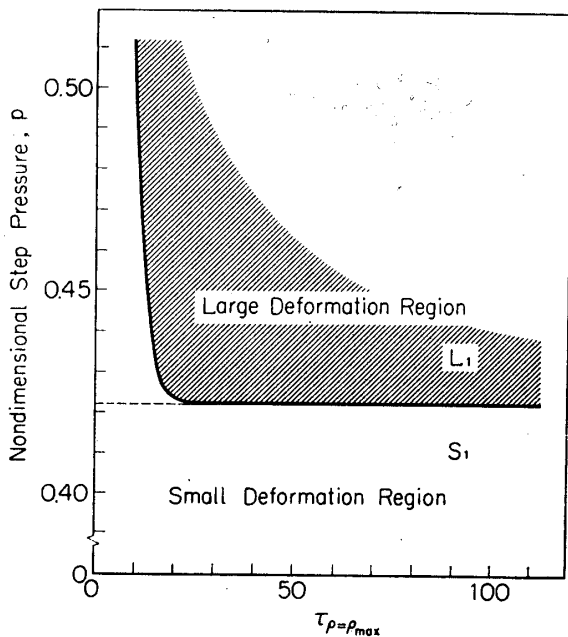


図8 大撓み発生の難易度, $\tau_2=720 \mu\text{sec}$, $\lambda=5.0$.

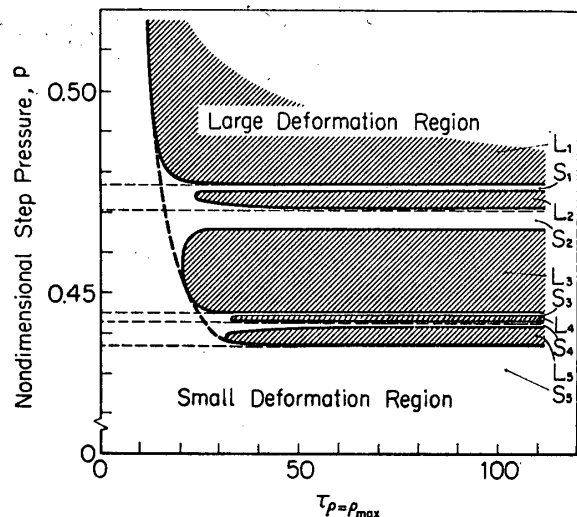


図9 大撓み発生の難易度, $\tau_2=7 \text{ msec}$, $\lambda=5.0$.

後者 (b) の場合には, 図9に示されている様に, 殻が大変形を起さない荷重領域の数は単一であるとは言えない. 同様な結果は, Huang の解法 [10] (差分解法) を使っても著者等によって導かれている (Huang はこのことに言及していない). そこで殻が snap-through する領域 (L_n) の最低の荷重を p_c と定義する.

臨界荷重の定義に対する上述の 2 つの考察から、本論文におけると同様な問題を取扱う場合には、時間の果す役割を十分に考慮することが重要であることがわかる。

図 4 に示されている臨界荷重は上述の考察をも含めた定義によって決定されたものである。

2.2.3 殻の振動

図 10 は、平均撓み ρ の時間的変化を遅延時間 τ_2 およびステップ状荷重 p をパラメタ

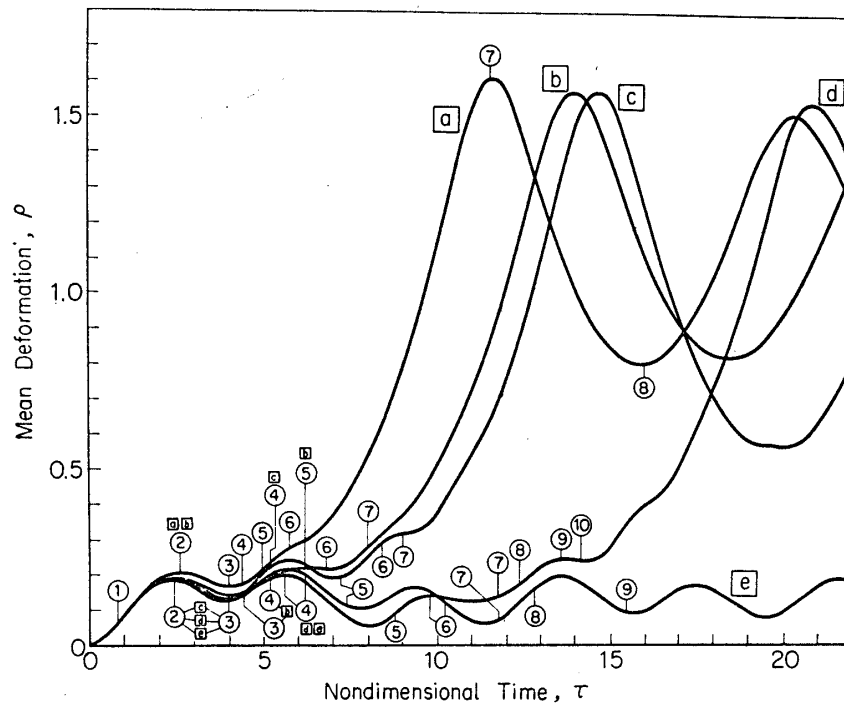


図 10 平均撓みの時間的変化, ステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

- [a]: $\tau_2=720 \mu\text{sec.}$, $p=0.470$, [b]: $\tau_2=720 \mu\text{sec.}$, $p=0.440$,
 [c]: $\tau_2=7 \text{ msec.}$, $p=0.485$, [d]: $\tau_2=7 \text{ msec.}$, $p=0.460$,
 [e]: $\tau_2=7 \text{ msec.}$, $p=0.470$.

として示している。同図において、[d] および [e] はそれぞれ $p=0.46$ および $p=0.47$ の場合であり、[d] は snap-through するのに [e] は安定である。このことは図 9 に示されている通りであり、この安定領域の非単一性に関しては文献 [2] において考察してあるのでここでは触れない。

図 11~図 14 に、上述の幾つかの領域に存在するステップ状荷重を受ける粘弾性殻の振動の様子が示されている。これらの図において、円で囲まれた数字は図 10 中に示されているものと対応している。図 11 および図 12 は、同じ領域 L_1 に属する粘弾性殻の振動を示し、図 13 および図 14 はそれぞれ L_1 および L_3 に属する粘弾性殻の振動を示す。図 11 と図 12 とに対する圧力差と図 13 と図 14 とに対する圧力差とはほぼ等しい。図 11 と図 12 との振動の様子は似ているが、しかし、図 13 と図 14 とのそれは似ていない。このことから、同じ領

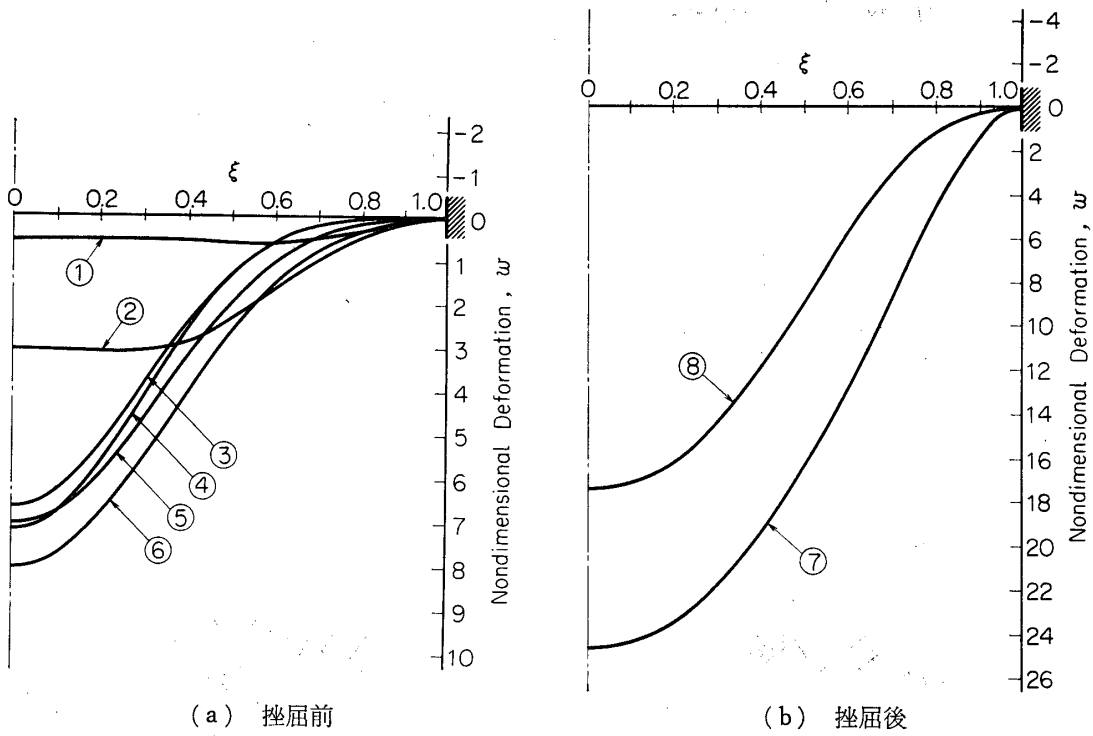


図 11 粘弾性殻の挙動, $\tau_2=720 \mu\text{sec}$, $p=0.470$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

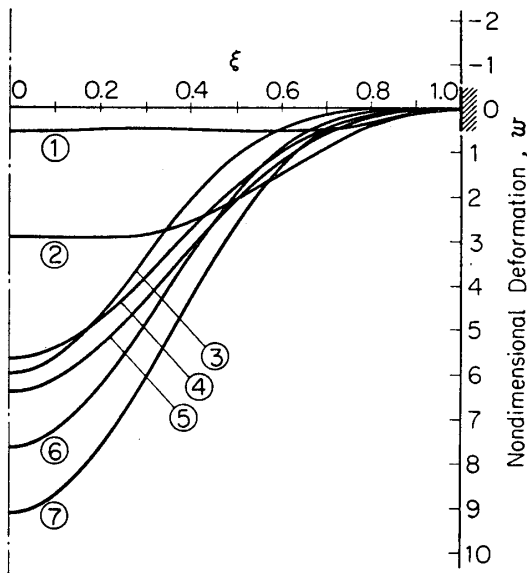


図 12 粘弾性殻の挙動, $\tau_2=720 \mu\text{sec}$, $p=0.440$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

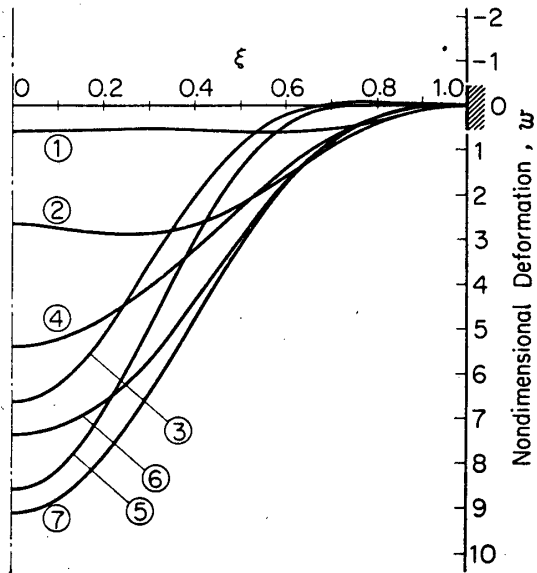


図 13 粘弾性殻の挙動, $\tau_2=7 \text{msec}$, $p=0.485$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

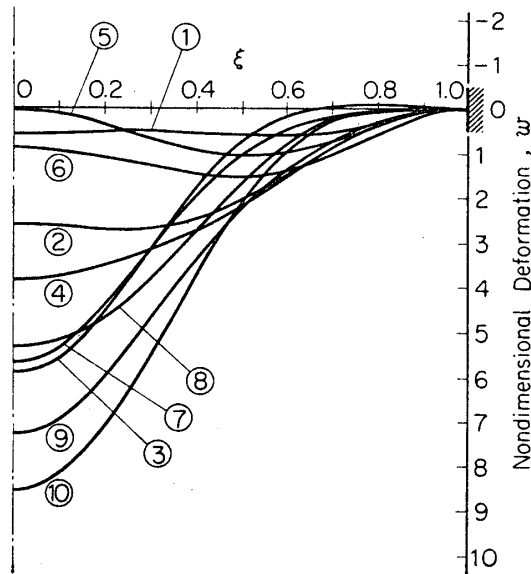


図 14 粘弾性殻の挙動, $\tau_2=7$ msec, $p=0.460$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

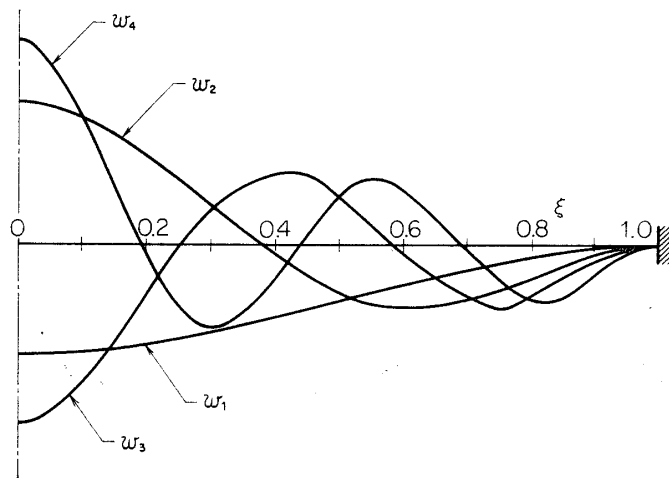


図 15 展開モードの略図 (各モードは正規化してある).

域に属する殻の振動の様子は本質的に同じであると結論される。

さらに, 図 11 (b) は挫屈モードを示しており, 同図から, $\lambda=5$ の近傍の殻の挫屈モードはほぼ 1 次モードのみで成立していることが判る (図 15 参照)。

3. 実 験

前章の解析の妥当性を検証するために二三の実験が行われた。すなわち, まず linear polymer (具体的には PMMA: メタアクリル酸メチル樹脂) を 4 要素モデル (図 2 参照)

として考えて通常の引張クリープ試験で物性値を求め、更にそれを成形して作った粘弾性球形殻について、変形波形の観察、動的挫屈とクリープ変形を伴っての挫屈との時間的関係の検討、挫屈荷重値の測定および応答振動の観察等が行われた。

3.1 装置および実験の概要

3.1.1 試験片および支持方法

試験片は、筆者等の研究室においてここ数年来行われている静的挫屈実験で非常に良好な結果を示している PMMA 板材を高温真空成形して作成されたものであって、図 16 に示される様に板厚 $h \sim 3$ mm, 曲率半径 $R = 1000$ mm, 底円の半径 $a = 150$ mm, すなわち、形状パラメタ $\lambda \sim 5$ である。

この試験片を図 16 の様にジュラルミン製の支持リングにエポキシ系樹脂によって接着

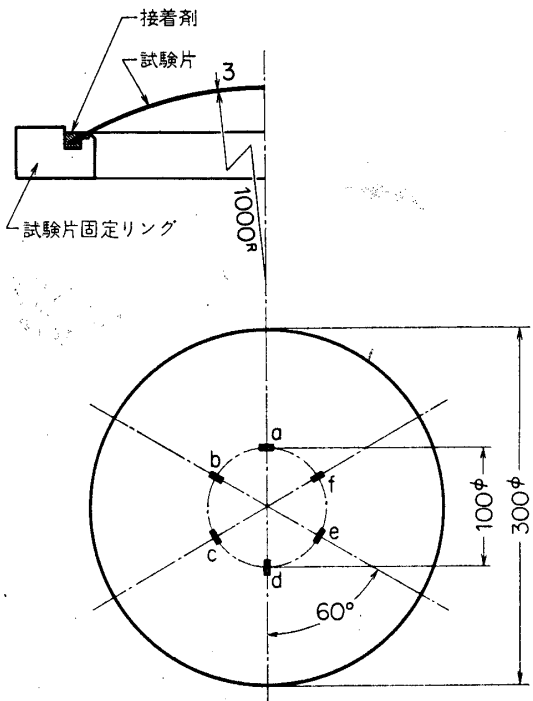


図 16 試験片およびゲージ貼布位置の略図.

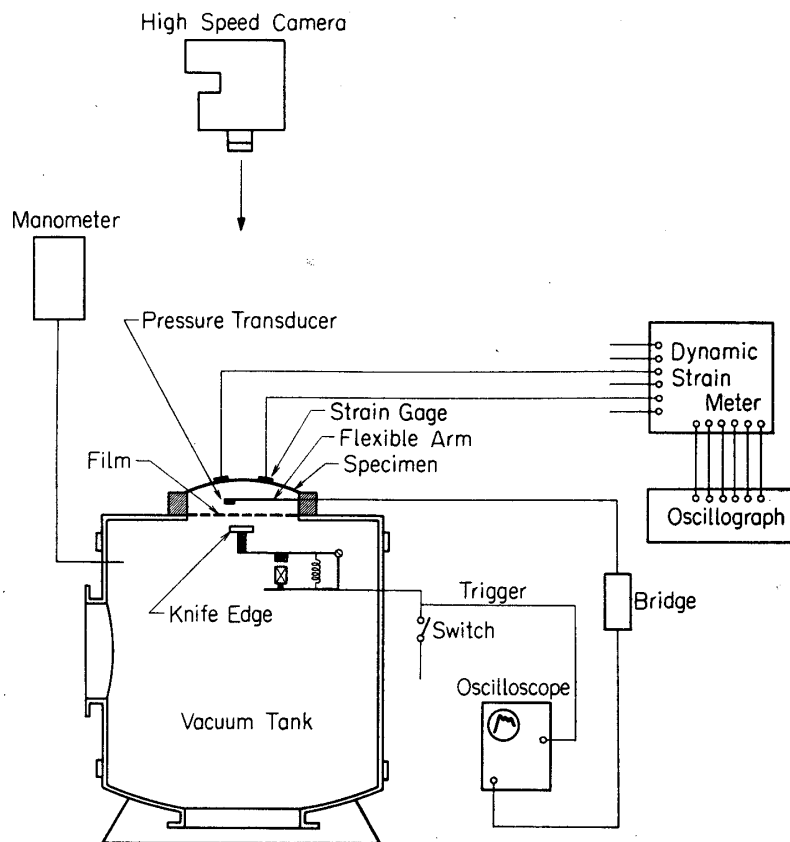


図 17 実験装置略図.

して周縁を固定する。

3.1.2 負荷装置および撃針装置 (図 17)

図 17 に示す様に、真空タンク (詳細は文献 [8] 参照) に、気密性および破裂性に優れた性質を持つ合成膜 [パーチメント紙 (薬包紙) + セロファン紙] をはさんで、支持リングに固定した球形殻試験片を取付ける。撃針装置のナイフエッジ部をスイッチを介して膜の後方に設定する。この状態で、真空タンク内を所定の圧力に減圧し、スイッチを切断して膜を破り、試験片内部に衝撃的に負圧をかける。負荷速度は合成膜の破裂面積を変化させることにより調節することができる。本装置で得られる負荷速度は $4 \leq (dp/d\tau)^{-1} \sim \infty$ の範囲である。

なお、本実験においてはおこなっていないが、本装置には除荷用孔も存在するので、擬似長方形荷重をかけることもできる。

3.1.3 圧力荷重および歪・振動測定

前述の様に負荷発生装置により、試験片に衝撃圧力 (擬似ステップ状荷重) が加かる。この圧力荷重を可撓棒で支持された半導体圧力変換素子で感受し、撃針装置のスイッチの切断信号で外部遅延掃引してブラウン管オシロスコープの管面に描く。この波形をポラロイド・カメラで撮影して圧力荷重の時間的変化を求める。

試験片上面に図 16 の様に中央点から 50 mm の軸対称位置に貼布された 6 枚 (子午線方向: 3 枚, 周方向: 3 枚) の抵抗線式歪ゲージの信号を動歪計で増幅し、これを電磁オシロ・グラフで記録し、動的応答と波形とを観察する。

試験片の前面に装備した高速度カメラをスイッチの切断信号でトリガーして作動させ、試験片の動的応答を撮影する。

3.2 実験結果および考察

3.2.1 クリープ引張試験結果

通常のクリープ引張試験を行って、PMMA の物性値を 4 要素モデルで近似して求めた結果は以下の様である。

$$E_1 = 400 \text{ kg/mm}^2, \quad E_2 = 1470 \text{ kg/mm}^2, \\ \eta_2 = 2.06 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{sec/mm}^2, \quad \eta_3 = 1.05 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{sec/mm}^2.$$

ただし、試験時の温度は $15^\circ\text{C} (+1^\circ\text{C})$ である。

この結果によると、 $\eta_3 \sim \eta_2 \times 10^3$ であるので、特に振動の場合には、 η_3 を剛性無限大のもので置きかえられる。すなわち、PMMA の粘弾性特性を 3 要素モデルで記述できる可能性がある。従って、以下の考察において数値計算と実験結果との比較をして良いと考えられる。

なお、クリープ引張応力は破壊応力の $1/4.5$ である。

3.2.2 動的挙動実験結果

表 2 に動的挫屈荷重、静的挫屈荷重およびクリープ変形を伴って挫屈するまでに要した時間が示されている。

表 3 に振動周期の測定結果を示す。上 7 段は挫屈を呈する場合の、下 2 段は呈さない場合のものである。

表2 動的挫屈荷重および静的挫屈荷重の実験値と理論値との比およびクリープ変形を伴って挫屈する迄に要した時間, $(dp/dc)^{-1} \sim 4$.

試験片番号	λ	負荷荷重 $q(\text{kg/cm}^2)$	動的挫屈荷重 $\bar{p}_c^a)$	静的挫屈荷重 $\bar{p}_o^b)$	$T_c^c)$ (sec)	実験時		
						温度 ($^{\circ}\text{C}$)	湿度 (%)	
AD 10-3001	4.79	0.211	0.995	0.900	60	10	49	
		0.222				10	49	
		0.217				10	49	
AD 10-3002	4.79	0.198	1.01	0.917		10.5	49	
		0.198		0.917		10.5	49	
		0.204		0.928		37	10.5	49
		0.200				11	51	
		0.204		74		11	51	
		0.205		68		11	51	
		0.206		27		11	51	
		0.209		11		51		
		0.205		0.950		11.5	57	
		0.208		92		11.5	57	
		0.211		76		11.5	57	
		0.207		0.959		11	50	
0.213	15	11	50					
AD 10-3003	4.75	0.213	0.960	0.887		10.5	56	
		0.213		0.887		10.5	56	
		0.207		0.861		10.5	48	
		0.218		10.5		48		
		0.202		0.840		8.7	48	
		0.206		0.857		9.7	48	
		0.212		45		9.7	48	
		0.216		0.955		9.7	48	
AD 10-3004	4.78	0.195	0.910	0.879		5.8	58	
		0.202		6.0		55		
		0.200		67		6.0	55	
		0.194		0.879		6.0	55	
AD 10-3007	4.88	0.211		0.946		22	90	
		0.216		40		22	90	
		0.217		35		22	90	
AD 10-3008	4.88	0.206		0.924		20	89	
		0.211		12		20	89	
		0.215		30		20	89	

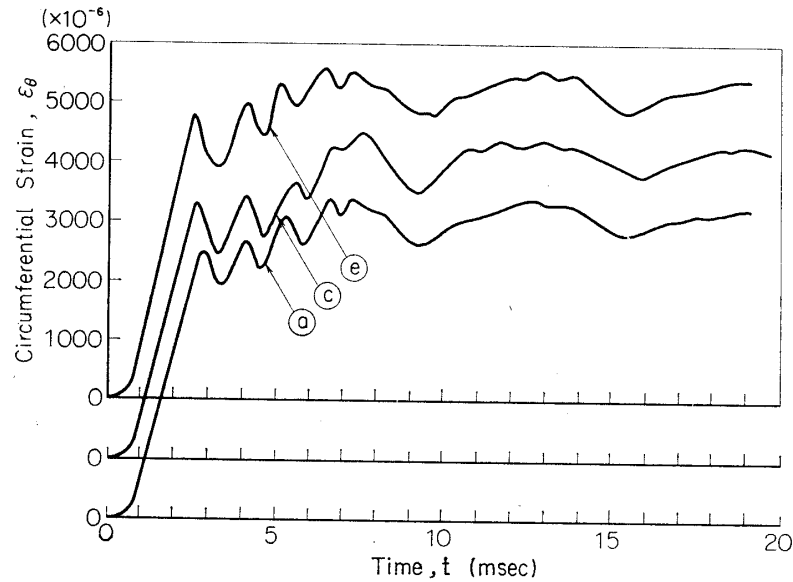
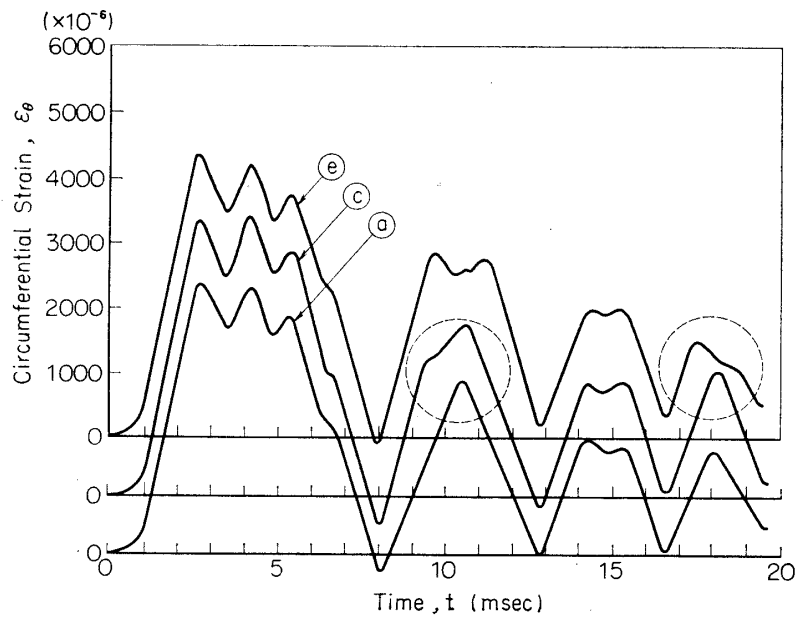
a) $\bar{p}_c \equiv (p_c)_{\text{exp}} / (p_c)_{\text{th}}$,

b) $\bar{p}_o \equiv (p_{so})_{\text{exp}} / (p_{so})_{\text{th}}$,

c) T_c : クリープ変形を伴って挫屈する迄に要した時間.

表 3 振動周期の測定例, $(dp/d\tau)^{-1} \sim 4$.

試験片番号	λ	振動周期 (msec)	\bar{p}^a	p	温度(°C)
AD 10-3003	4.75	5.40	1.190	0.487	9.7
		5.50	1.077	0.443	10.5
		6.00	1.052	0.433	10.5
		5.80	1.048	0.429	9.7
AD 10-3004	4.86	5.50	1.061	0.408	6.0
		6.50	1.052	0.405	6.0
		6.15	1.044	0.402	6.0
AD 10-3003	4.75	3.35	1.030	0.421	9.7
AD 10-3004	4.86	3.45	1.034	0.398	6.0

a) $\bar{p} \equiv p/(p_{s0})_{\text{exp}}$.図 18 周方向歪の時間的変化, $\tau_2=14.0 \text{ sec}$, $p=0.433$, $\lambda=4.75$, $(dp/d\tau)^{-1} \sim 4$.図 19 周方向歪の時間的変化 (動挫屈を起さない場合), $\tau_2=14.0 \text{ sec}$, $p=0.398$, $\lambda=4.78$, $(dp/d\tau)^{-1} \sim 4$.

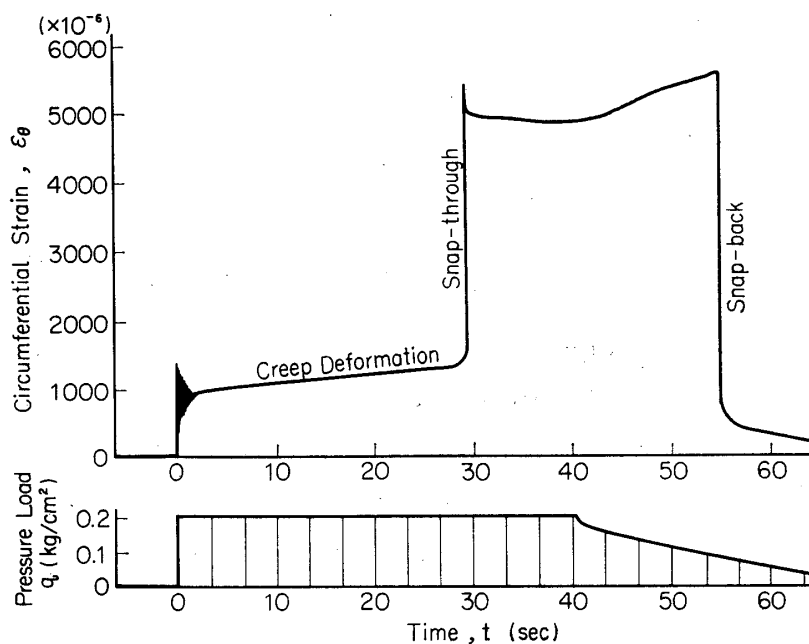


図 20 クリープ変形を伴って挫屈に到る場合の周方向歪の時間的变化, $\tau_2=14.0 \text{ sec}$, $q=0.217 \text{ kg/cm}^2$, $\lambda=4.88$, $(dp/d\tau)^{-1} \sim 4$.

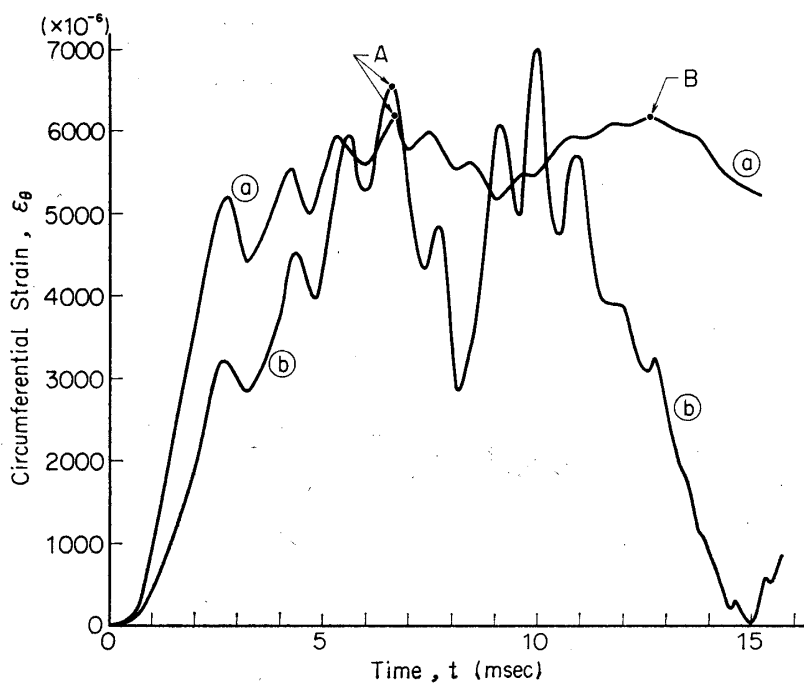


図 21 周方向歪の時間的变化, $\tau_2=14.0 \text{ sec}$, $p/p_c=1.023$, $\lambda=4.75$,
 ①: 実験値, $(dp/d\tau)^{-1} \sim 4$, ②: 理論値, $(dp/d\tau)^{-1} = 4$.

図 18 および図 19 は、それぞれ動的挫屈を呈する場合と呈さない場合との周方向歪の時間的変化の測定結果の一例である。

図 20 はクリープ変形を伴って挫屈に至る場合の周方向歪 ε_θ と時間との関係を示す。

図 21 は動的挫屈を呈する場合の周方向歪 ε_θ と時間との関係を示し、①は実験例②はそれに対する計算例である。ただし、計算例は $(dp/dt)^{-1}=4$ の graded 状荷重、 $\nu=0.4$ に対するものである。

図 22 は荷重様式の測定例である。同図より実験における荷重様式はほぼ $(dp/dt)^{-1}\sim 4$ ($t^*\sim 1$ msec に相当) の graded 状荷重と見做せることが判る。

3.2.3 考 察

(1) 再現性および温度の影響

表 2 にみられる様に (静的挫屈荷重の欄)、再現性は非常に良い。ただし、この結果は 1 時間の休息を試験片に与えて得られたものである。また、同欄より高分子材料を使用した他の実験と同様に温度に対しては敏感であることが判る。

(2) 動的挫屈荷重

表 2 にみられる様に理論値の 90% 以上の値が得られており、静的挫屈値の実験値と理論値との比より 3~10% 高い。これは動的挫屈実験が非常に良好な条件で行われたということの他に、以下の理由も考えられる。すなわち、図 10 あるいは図 21 等に見られる様に、挫屈大変形を起すまでに数回小振動をし、この小振動の回数は臨界点附近ではかなり多い。ところが、この小振動の間に実験においては、空気力および接着層での構造減衰によって、相当の減衰力が働く。従って、実験によって求められる動的挫屈荷重は高めのものとなる。

(3) クリープ変形を伴っての挫屈

表 2 および図 20 に見られる様に、この方式の挫屈では、大変形を起すまでに数十秒かかることが判る。これに対し図 18 に見られる様に動的挫屈を起す場合には数 msec で大変形を起す。このことから、クリープ変形を伴って挫屈する場合と動的挫屈する場合との境界あたりで挫屈するに要する時間は急激に変化することが認められ、図 7 の尖点の意味が明かになる。

(4) 殻の振動と振動波形

図 21 において、①および②を比較して、A 点までの様子は、波数、時間および A 点附近での ε_θ の値において、良好な一致が見られるが、A 点以後の様子は全く異っている。この原因としては、圧力の分布・荷重様式の相違とか記録素子の周波数特性の問題 (初期の目的としては、大波 AB を捉えることであったので、それに重畳される高い周波数を持つ波に対しては十分な測定が出来ていない。早急に周波数特性の優れた素子を用いて測定する予

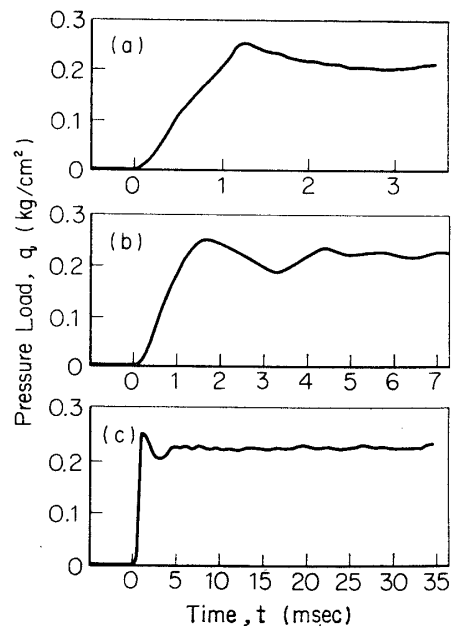


図 22 荷重様式の測定例。

- (a) $q=0.211$ kg/cm²,
- (b) $q=0.234$ kg/cm²,
- (c) $q=0.230$ kg/cm².

定である。)等が考えられるが、最大のものは、 $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ の方向での相違が顕著であることから、空気力の作用の有無であろう。従って、空気力の作用を大きく受ける振動周期については測定結果だけを示す(表3)。同表より大変形をする場合の周期の方が小振動の周期より大であることが分る。

図18および図19から変形波形はほぼ軸対称であることが観察され、第2章における仮定(4)は $\lambda \sim 5$ に対しては妥当であったことが判る。しかしながら、図19に示される様に挫屈前平衡位置に対応する歪($\sim 1000 \mu$)より若干大きな歪の所(破線の円で示す部分)ではかならずしも対称であるとは言えなかった。

今後、粘弾性特性のより合理的な測定、荷重速度の動的挙動に対する影響、振動波形のより正確な測定、形状パラメタの動的挙動に対する影響および温度の影響等の検討を早急に行う予定である。また、各種 imperfections を考慮に入れた実験も計画している。

4. あとがき

本論文においては、3要素線型モデルで表される粘弾性特性を有する周縁固定の浅い球形殻の軸対称動的挙動が解析され、また、PMMAの試験片を使って若干の実験が行われ、解析の妥当性が検証された。

まず、この問題に対する非線型基礎方程式が導かれ、次に、この基礎方程式を用いて、一様なステップ状および graded 状圧力荷重をうける粘弾性球形殻の挙動が数値的に解析された。すなわち、形状パラメタ $\lambda = 5$ の殻について、動的負荷とそれに対する応答との関係が調べられ、

- (1) 殻の動的挙動に対する粘弾性および負荷速度の効果が、特に時間の果す役割に注目して、検討され、
- (2) 臨界荷重に対して粘弾性および負荷速度はともにある狭い領域で顕著な効果を持つこと、および
- (3) 動的挫屈の定義が明かにされた。

また、実験によって、

- (1) $\lambda \sim 5$ の殻はほぼ軸対称変形をすることが確められ、
- (2) クリープ変形を伴って挫屈を呈する場合の荷重と挫屈時間との関係が定量的に観察され、これにより、解析で示された臨界荷重の定義の裏付けができ、
- (3) 空気力の影響の小的所では、解析の妥当性が満足できる程度に保証され、さらに、
- (4) 温度の影響はかなり大であることが明かにされた。

以上が本研究の成果であるが、今後、

- (1) 粘弾性特性をより合理的な形で表わすこと(本論文におけるポアソン比一定の3要素モデルは荷重速度が速く、比較的短い時間範囲を考慮する場合のみ合理的である)、
- (2) (1)と関連して特にポアソン比をより完全に取扱うこと、
- (3) 微小項(慣性力、剪断力等)の効きを十分に検討すること(特に臨界点附近)、
- (4) 諸々の imperfections を考慮に入れ(非対称変形の考慮)、出来れば応答を統計的に

取扱うこと、

- (5) 実験との比較を様々な形状パラメタに対して動的挙動一般(動的, クリープ, 準静的)について行い、

挫屈機構の解明をエネルギー論の見地から進めていき、殻体の動的および静的挙動一般に対する解明を行う予定である。

本解析法は、弾性殻に対しても、また、準静的条件により静的挫屈荷重を求めるのにも、応用されるので、この2点について、付録IおよびIIに述べておく。

数値計算は、本研究所の HITAC 5020F を用い、倍精度で行った。

昭和 47 年 1 月 31 日 航空力学部

参考文献

- [1] 砂川 恵, 熊井 規: 動的荷重を受ける構造要素の挙動, 日本航空宇宙学会誌, **18**(昭45), 154.
- [2] 熊井 規, 砂川 恵: 浅い粘弾性球形殻の動的挙動(第1報), 日本航空宇宙学会誌, **19**(昭46), 452.
- [3] 熊井 規: 粘弾性特性を持つ浅い球形殻の動的挙動に関する研究, 東京大学修士論文, (昭45).
- [4] 砂川 恵, 熊井 規: 動的荷重に対する粘弾性球形殻の挙動, 第12回構造強度に関する講演会, (昭45).
- [5] 砂川 恵, 熊井 規: 動的荷重を受ける粘弾性球形殻の挙動(第2報), 第20回応用力学連合講演会, (昭45).
- [6] 砂川 恵, 熊井 規: 浅い粘弾性球形殻の動的挙動(第3報), 日本機械学会第49期全国大会講演会, (昭46).
- [7] 熊井 規, 砂川 恵: 浅い粘弾性球形殻の動的挙動(第4報), 第21回応用力学連合講演会, (昭46).
- [8] 植村益次, 砂川 恵, 市田和夫, 井山向史: 分布荷重負荷装置について, 東京大学宇宙航空研究所報告, **5-3(B)**, (昭45), 778.
- [9] Huang, N-C & Nachbar, W.: Dynamic Snap-Through of Imperfect Viscoelastic Shallow Arches, *Jour. Appl. Mech.*, **35** (1968), 289.
- [10] Huang, N.-C.: Axisymmetric Dynamic Snap-Through of Elastic Clamped Shallow Spherical Shells, *AIAA J.*, **7** (1969), 215.
- [11] Budiansky, B. & Roth, R. S.: Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells, *NASA TN, D-1510*, (1962), 597.
- [12] Archer, R. R. & Lange, C. G.: Nonlinear Dynamic Behavior of Shallow Spherical Shells, *AIAA J.*, **3** (1965), 2313.
- [13] Thurston, G. A.: A Numerical Solution of the Nonlinear Equations for Axisymmetric Bending of Shallow Spherical Shells, *ibid*, **28** (1961), 557.
- [14] Lock, M.H., Okubo, S. & Whitter, J. S.: Experiments on the Snapping of a Shallow Dome Under a Step Pressure Load, *AIAA J.*, **6** (1968), 1320.

附 録 I

本解析方法の弾性殻への適用

本方法を弾性殻に適用して求めた平均撓み $\rho(\tau)$ 曲線 ($p=0.60$ のステップ状荷重) を従来得られている諸結果とともに図 23 に示す. 同図から分る様に, 計算途中で若干の誤りがあったと思われる Budiansky & Roth [11] の結果を除けば, 非常に良好な一致を示している.

図 24 に本方法の 4 項および 8 項の近似解と差分解法による解を示す. 同図から, 4 項近似解は十分な精度を持っていることが知られる.

附 録 II

本解析方法の静的挫屈への応用

図 5 および図 6 から, 本数値例では, $\tau_2=720 \mu\text{sec}$ の場合に最大の減衰が現れることが判る. 従って, $\tau_2=720 \mu\text{sec}$ の場合に準静的な条件 ($[dp/d\tau]^{-1}=200$) で求めた挫屈荷重 $p_{s0}=0.570$ に (E_1/E_0) を乗じて準静的挫屈荷重 p_{s1} が求まる. すなわち, $p_{s1}=p_{s0}(E_1/E_0)=0.628$ となり, この値は $\lambda=5$ に対する従来求められている静的挫屈荷重と殆ど差異がない. 例えば, Thurston [13] によって得られた解とは僅かに 0.16% しか違わない.

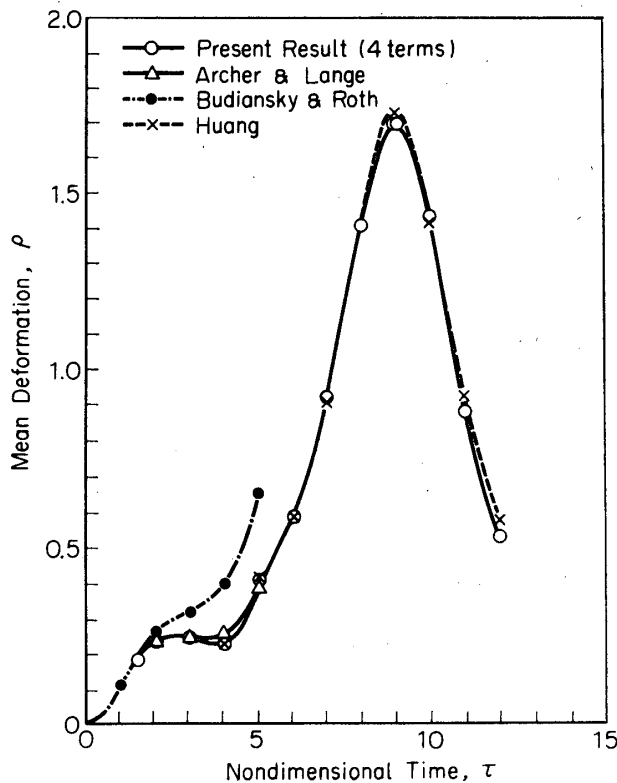


図 23 従来の解との $\rho(\tau)$ 曲線での比較, $\tau_2=\infty$, $p=0.60$ のステップ状荷重, $\lambda=5.0$.

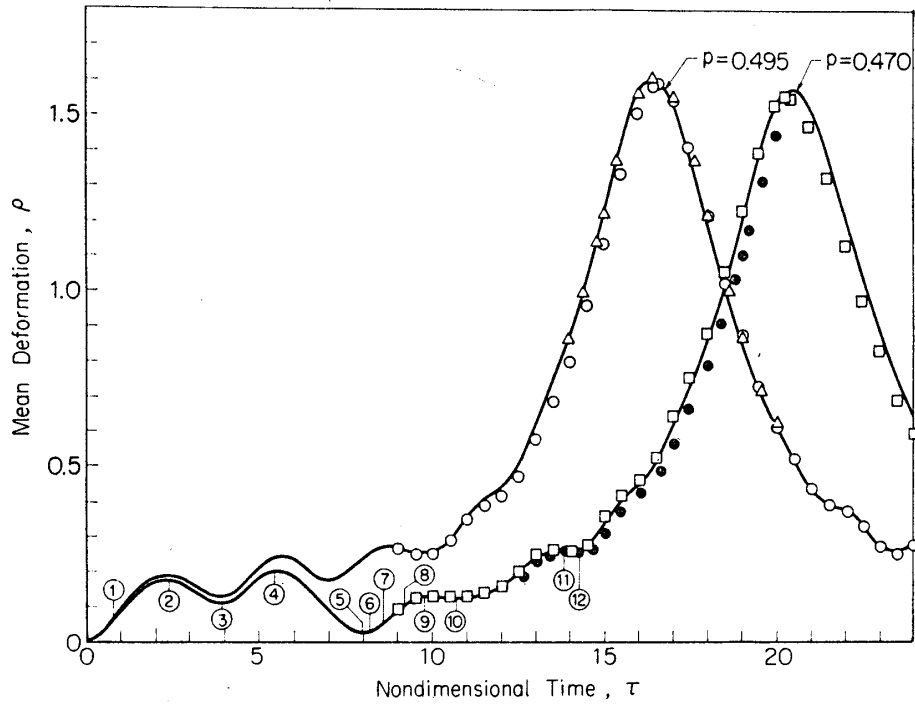


図 24 $\rho(\tau)$ 曲線での 3 つの解の比較, $\tau_2 = \infty$, ステップ状荷重, $\lambda = 5.0$,
 —: 本方法, 8 項近似解, \circ, \square : 本方法, 4 項近似解,
 \triangle, \bullet : 差分法 (ξ 方向に 20 分割).