

弾— ϵ^n 硬化材有限長棒の高速引張りについて

河田 幸三・栗山 慎鋒

摘 要

航空機のうける衝撃負荷速度が速くなると弾塑性波による応力やひずみの局在が問題になってくる。本論文では、この分野の問題のうち、最も基本的でしかもまだ解かれていなかった問題として、弾— ϵ^n 硬化材有限長棒の高速引張りを取扱う。ひずみ速度不依存型の塑性波理論により特性曲線法を用いて解かれた。その結果は、破断伸び—引張り速度関係について述べれば、剛—直線的加工硬化材または弾—直線的加工硬化材有限長棒の場合と周期性が同じの鋸歯状挙動を示すが、鋸歯の先端が丸くなっている点が異なることを示す。すなわち、ひずみ速度不依存の構成方程式の場合には、いずれにしても静的より脆く挙動することになる。

1. ま え が き

衝撃荷重の負荷速度がきわめて速くなると、弾性波、さらには弾塑性波による応力やひずみの局在が問題となる。このような場合は現在の航空機強度規格に考慮されていないが、BOAC 機の富士山事故 (1965) のようにきわめて速い突風負荷を受ける場合などには、この種高速変形力学的効果は無視できなくなる可能性がある。本報ではこの分野の問題の中、最も基本的でしかもまだ解かれていなかった問題として、弾— ϵ^n 硬化材有限長棒の高速引張りを取扱う。

近年高速変形の問題が漸く重視され、高速引張りの実測が行なわれるようになったが、この比較対象となるべき理論解析の結果はほとんどなかったといつてよい。たとえば、負荷速度が準静的より逐次増大するとき、材料の破断伸びが増すのか減るのかは興味ある高速変形力学上の基本的問題の一つであるが、これについて何ら理論的結論は得られていなかったのである。棒の高速引張り時の挙動を扱う上で、これまで Kármán の塑性波理論がよく知られているが、彼らは無限長棒の場合を扱っているので、有限長棒の場合に初めて知られる破断伸びについてはなんら語るところがなかったのである。この観点から、河田らはすでに、剛—直線的加工硬化材および弾—直線的加工硬化材について、その弾塑性挙動、特に破断伸びの引張り速度による変化などを求めたが、今回さらに弾— ϵ^n 硬化材の場合につき解析を進めたので報告する。

2. 理 論

2-1 ひずみ速度に依存しない塑性波理論

以下の解析に必要な理論を要約して述べる。弾性および塑性ひずみの伝播を解析するひずみ速度に依存しない塑性波理論である。これを有限長棒の高速引張りの場合に適用する。

今, $x=L$ で固定された有限長棒を考え, その一端 $x=0$ に, 引張り応力 $\sigma_1 > \sigma_Y$ に対応する定引張り速度 V_1 が突然加えられ以後継続されるものとする (Fig. 1)。

材料の応力-ひずみ関係は Fig. 2 のように上に凸の形をとるものとし, (1) 式で表わす。

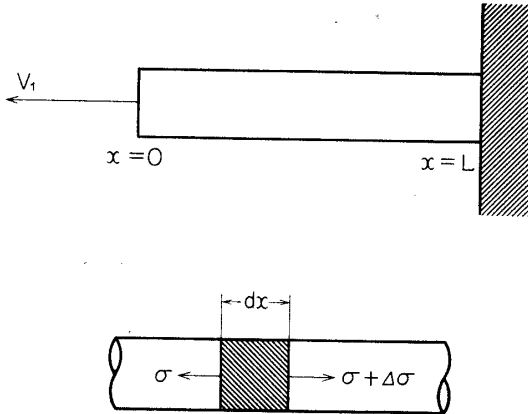


Fig. 1 High velocity tension of a bar of finite length.

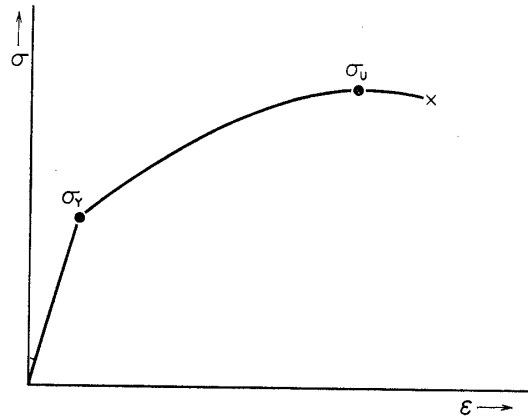


Fig. 2 Typical static tensile stress-strain curve for work-hardening material.

$$\sigma = f(\epsilon) \quad (1)$$

ここで, σ : 工学的応力, ϵ : ひずみとし, 静的応力-ひずみ関係をとる。

Larange 座標で棒の要素 dx の運動方程式は

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

または,
$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = f'(\epsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

ここで, $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = f'(\epsilon)$: 工学的応力-ひずみ線図での傾斜,

ρ : 密度

u : 位置 x の断面の縦方向変位

t : 時間

(2) 式は次の波動方程式に書直される:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

ここで,
$$c = \left\{ f'(\epsilon) / \rho \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

この準線形双曲線形微分方程式は特性曲線法により数値的に積分され得る。Larange 面での特性曲線は次の二曲線群で示される:

$$\begin{aligned} \rho c dv - d\sigma &= 0 & dx - c dt &= 0 & \text{上} \\ \rho c dv + d\sigma &= 0 & dx + c dt &= 0 & \text{上} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, v : 粒子速度 (物質速度)。

Fig. 1 に対応する境界条件は,

$$\begin{aligned} x=0 \quad t > 0 \quad v &= -V_1 \\ x=L \quad t \geq 0 \quad v &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

特性面での応力, ひずみ, 物質速度の決定のため, 特性値 θ を (7) 式により導入するのが便利である:

$$\theta = \frac{1}{\rho} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{c} \quad (7)$$

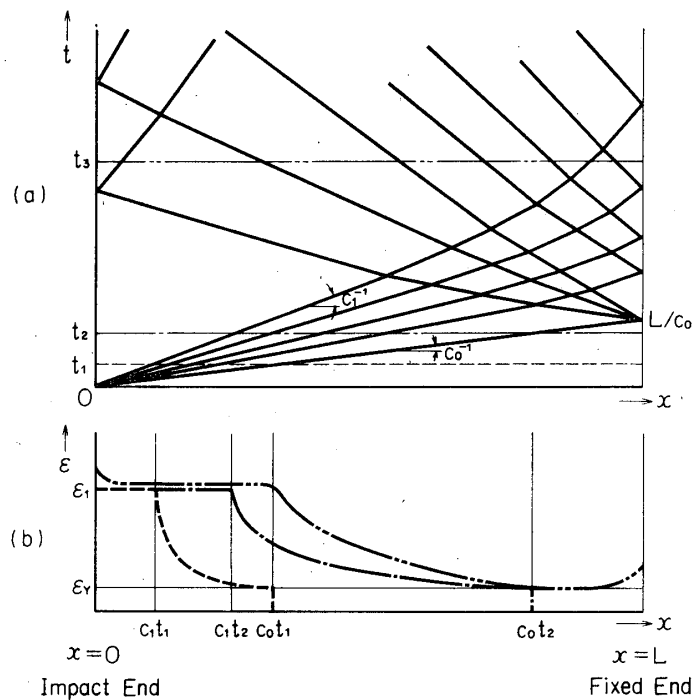


Fig. 3 (a) The construction of a Lagrange diagram for the tensile impact of a bar of finite length.

(b) The strain distributions at time $t=t_1, t_2,$ and $t_3.$

(5), (6)式を満たす Lagrange 線図を Fig. 3-(a) に, Fig. 2 の型の応力ひずみ線図に対する任意時間でのひずみ分布を Fig. 3-(b) に示す. 着点 $x=0$ は点 0 で示され, 一群の塑性波放射の源である. 弾性波は速度 c_0 および降伏応力 σ_y に対応する振幅 ϵ_y で伝播する. 塑性波頭は速度 $c_1 = \left\{ f'(\epsilon_1) / \rho \right\}^{\frac{1}{2}}$ で伝播し, そのあとに一定ひずみ ϵ_1 を残す. 弾性および塑性波頭の間では, 任意ひずみ増分の伝播速度は局部的傾斜 $f'(\epsilon)$ に依存する. 弾性波が固定端 $x=L$ に到達する (時刻 $t=L/c_0$) と, 反射された塑性波を生ずる. 入射および反射波束の干渉により連続する波の新しい伝播速度を生じ, これは $x-t$ 面での直線の傾斜の変化によって示される.

Kármán は静的引張り強さ σ_m に等しい応力 σ_1 を生ずる限界衝撃速度 V_{cr} の存在を考えている. V_{cr} より大きい V_1 の値は着点端での瞬間的破断を生ずることになる. この限界速

度は次式で決定される：

$$V_{cr} = \frac{1}{\rho} \int_0^{\sigma_m} \frac{\sigma_m d\sigma}{c} \quad (8)$$

2-2 破断の条件および破断後の除荷波

応力は反射および干渉により増大する。ここで、破断は応力値が静的引張り強さ以上になるとき生ずるものとする。破断後除荷波は破断点から弾性波速度で伝播する。この除荷波は負荷波と繰返し干渉し、その応力値を 0 まで減少させる。除荷波の干渉を精確に考慮に入れる事はかなり困難で、除荷波の速度は無限大、すなわち、破断と同時に負荷波の伝播が止まり、棒中の応力は 0 となると仮定する。

棒中に残留するひずみは、動的変形の場合一様ではない。棒の要素 l_i 中の残留ひずみを ε_{pi} とするとき、棒の長さ L は

$$L = \sum l_i \quad (9)$$

で、残留ひずみの平均値 ε_p は

$$\varepsilon_p = \sum l_i \varepsilon_{pi} / \sum l_i = \sum l_i \varepsilon_{pi} / L \quad (10)$$

3. 弾- ε^n 硬化材有限長棒の高速引張りの解析

無次元化された応力、ひずみ、および特性値を用いる。これにより特性曲線図が容易に描かれる。

3-1 ε^n 硬化材

ε^n 硬化材の応力-ひずみ線図は次式で示される：

$$\sigma = H\varepsilon^n \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_m, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \quad (11)$$

ここで、添字 m は静的破断の状態に対応する。無次元化応力 σ^* およびひずみ ε^* は次式で定義される：

$$\varepsilon^* \equiv \varepsilon / \varepsilon_m, \quad \sigma^* \equiv \sigma / \sigma_m \quad (12)$$

ゆえに、無次元化された応力-ひずみ線図は

$$\sigma^* = (\varepsilon^*)^n \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon^* \leq 1 \quad (13)$$

となる。特性曲線の傾斜 α は

$$\alpha = \frac{1}{c} \quad (14)$$

ここで、 c ：応力波の速度。

(11) 式を (4) 式に代入して、傾斜は

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho}{nH^n}} \frac{1}{\sigma_m^{\frac{1-n}{2n}}} \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_m \quad (15)$$

$\sigma = \sigma_m$ のとき、傾斜は

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\rho}{nH^n}} \frac{1}{\sigma_m^{\frac{1-n}{2n}}} \quad (16)$$

無次元化された傾斜は

$$\alpha^* \equiv \alpha / \alpha_m \tag{17}$$

式(15), (16)および(12)から, 無次元化された傾斜-応力関係は,

$$\alpha^* = (\sigma^*)^{\frac{1-n}{2n}} \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1 \tag{18}$$

式(15)を(7)に代入して, 特性値 Θ は,

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{\rho^n H^n}} \frac{2n}{n+1} \sigma^{\frac{n+1}{2n}} \tag{19}$$

$\sigma = \sigma_m$ のとき,

$$\Theta_m = \frac{1}{\sqrt{\rho^n H^n}} \frac{2n}{n+1} \sigma_m^{\frac{n+1}{2n}} \tag{20}$$

無次元化された特性値 Θ^* は,

$$\Theta \equiv \Theta / \Theta_m \tag{21}$$

ゆえに, 無次元化された特性値-応力関係は,

$$\Theta^* = (\sigma^*)^{\frac{n+1}{2n}} \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1 \tag{22}$$

式(13), (18)および(22)を Fig. 4-(a), 4-(b), 4-(c) に示す. これらの関係を用いて $x-t$ 面の特性曲線網が構成され, 残留ひずみの平均値が計算される.

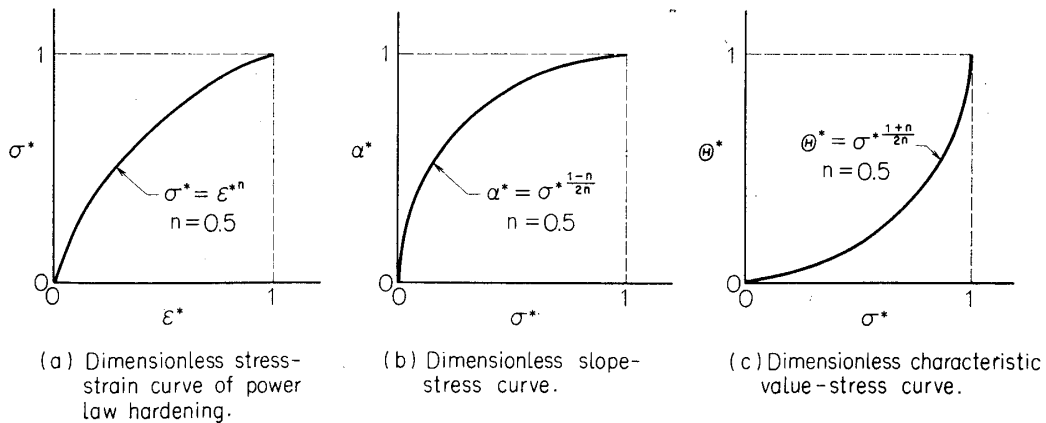


Fig. 4 Auxiliary diagrams for the construction of a characteristic network when $n=0.5$

3-2 弾- ϵ^n 硬化材

弾- ϵ^n 硬化材の応力-ひずみ関係は, 弾性域では

$$\sigma = E\epsilon \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_Y, \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_Y \tag{23}$$

塑性域では

$$\sigma = H\epsilon^n \quad \sigma_Y \leq \sigma \leq \sigma_m, \quad \epsilon_Y \leq \epsilon \leq \epsilon_m \tag{24}$$

ここで、 Y および m は降伏および静的破断に対応する。

無次元化された応力 σ^* 、ひずみ ε^* は、

$$\sigma^* \equiv \sigma / \sigma_Y, \quad \varepsilon^* \equiv \varepsilon / \varepsilon_Y \quad (25)$$

ゆえに、無次元化された破断応力 σ_m^* および、ひずみ ε_m^* は、

$$\sigma_m^* \equiv \sigma_m / \sigma_Y, \quad \varepsilon_m^* \equiv \varepsilon_m / \varepsilon_Y \quad (26)$$

無次元化された応力 - ひずみ線図は、弾性域では、

$$\sigma^* = \varepsilon^* \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon^* \leq 1 \quad (27)$$

塑性域では、

$$\sigma^* = (\varepsilon^*)^n \quad 1 \leq \sigma^* \leq \sigma_m^*, \quad 1 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_m^* \quad (28)$$

特性曲線の傾斜は、弾性域では、

$$\alpha_E = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_Y \quad (29)$$

塑性域では、

$$\alpha_p = \sqrt{\frac{\rho}{nH^n} \frac{1}{\sigma^{1-n}}} \quad \sigma_Y \leq \sigma \leq \sigma_m \quad (30)$$

ここで、添字は夫々弾性および塑性域の状態に対応する。 $\sigma = \sigma_Y$ のとき、傾斜 α_{pY} は、

$$\alpha_{pY} = \sqrt{\frac{\rho}{nH^n} \frac{1}{\sigma_Y^{1-n}}} \quad (31)$$

無次元化された傾斜 α^* は

$$\alpha^* \equiv \alpha / \alpha_{pY} \quad (32)$$

無次元化された傾斜 - 応力関係は、弾性域では、

$$\alpha^* = \sqrt{n} \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1 \quad (33)$$

塑性域では、

$$\alpha^* = (\sigma^*)^{\frac{1-n}{2n}} \quad 1 \leq \sigma^* \leq \sigma_m^* \quad (34)$$

特性値は、弾性域では、

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{\rho E}} \sigma \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_Y \quad (35)$$

塑性域では、

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{\rho E}} \sigma_Y + \frac{1}{\sqrt{\rho^n H^n} \frac{1}{n+1}} \frac{2}{n+1} \left(\sigma^{\frac{n+1}{2n}} - \sigma_Y^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad \sigma_Y \leq \sigma \leq \sigma_m \quad (36)$$

$\sigma = \sigma_Y$ のとき、特性値は、

$$\Theta_Y = \frac{1}{\sqrt{\rho E}} \sigma_Y \quad (37)$$

無次元化された特性値 Θ^* は、

$$\Theta^* \equiv \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2^n} \frac{\Theta}{\Theta_Y} \quad (38)$$

ゆえに、無次元化された特性値—応力関係は、弾性域では、

$$\Theta^* = \frac{n(n+1)}{2^n} \sigma^* \quad 0 \leq \sigma^* \leq 1 \quad (39)$$

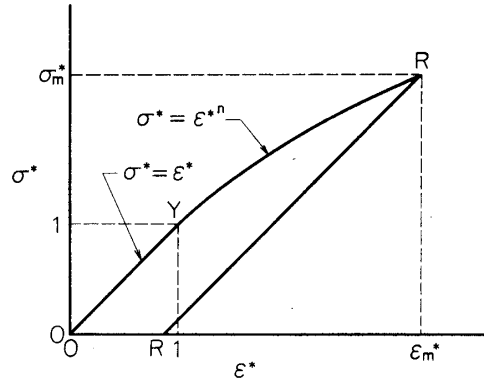
塑性域では、

$$\Theta^* = \left(\sigma^* \right)^{\frac{n+1}{2n}} + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2^n} - 1 \quad 1 \leq \sigma^* \leq \sigma_m^* \quad (40)$$

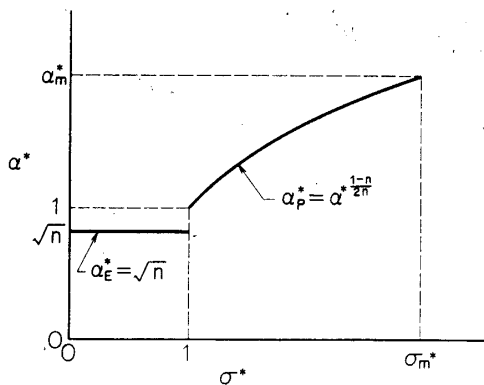
式 (27), (28), (33), (34), (39) および (40) を Fig. 5-(a), 5-(b) および 5-(c) に示す. Fig. 5-(a) の無次元化ひずみ OR は残留ひずみで、

$$\varepsilon^* = \left(\sigma^* \right)^{\frac{1}{n}} - \sigma^* \quad (41)$$

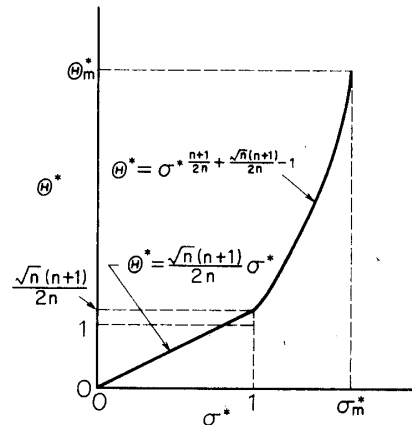
で与えられる.



(a) Dimensionless stress-strain curve of elastic-power law hardening.



(b) Dimensionless slope-stress curve.



(c) Dimensionless characteristic value-stress curve.

Fig. 5 Auxiliary diagrams for the construction of a characteristic network when $n=0.5$

4. 結 果

引張り速度と破断伸びの関係が n 乗硬化型および弾— n 乗硬化型の応力—ひずみ関係の場合につき、特性曲線法を用いて解かれた。計算は東大の電子計算機を HITAC 5020 を用いて行なわれた。

解析の結果を Fig. 6, 7, および 8 に示す。横軸は無次元化された引張り速度、すなわち、引張り速度 V_1 の限界衝撃速度 V_{cr} に対する比である。縦軸は無次元化された残留破断伸び

で、破断伸び ϵ_b の静的破断残留伸び ϵ_m に対する比である。実線が求められた ϵ_b/ϵ_m を示す。

V_{cr} より大きい速度では、破断は残留ひずみ 0 で起ることになる。一点鎖線は比較のためすでに求められている剛-直線的加工硬化型の場合の解を併記したものである。 $V_1/V_{cr} \leq 1$ の領域でのその他の実線は、 ϵ^n 硬化および弾- ϵ^n 硬化型応力-ひずみ関係の場合の ϵ_b/ϵ_m を示す。加工硬化の指数は大部分の金属において、 $0 < n < 0.5$ である。

4-1 ϵ^n 硬化型材料

無次元化された応力-ひずみ関係を Fig. 6-(a) に示す。無次元化破断伸び対無次元化引張り速度の関係を Fig. 6-(b) に示す。ここで、 ϵ^n 硬化の指数 n は 0.1, 0.2, 0.3 および 0.5 について示されている。

剛-直線的硬化型と ϵ^n 硬化型とでは、この $\epsilon_b/\epsilon_m \sim V_1/V_{cr}$ 関係は両方の場合につき、同じ周期性の鋸歯状挙動を示す。しかし、鋸歯の先端は、前者が尖っているのと異なり、後者は丸くなっている。

Fig. 6-(a) に示されているように、応力-ひずみ関係の原点 0 での立上りは、指数 n の減少とともに鋭くなる。しかし、 $\epsilon_b/\epsilon_m \sim V_1/V_{cr}$ の関係においては、 n の減少とともに鋸歯先端の丸味が強く、かつ最大値が下る傾向を示す。

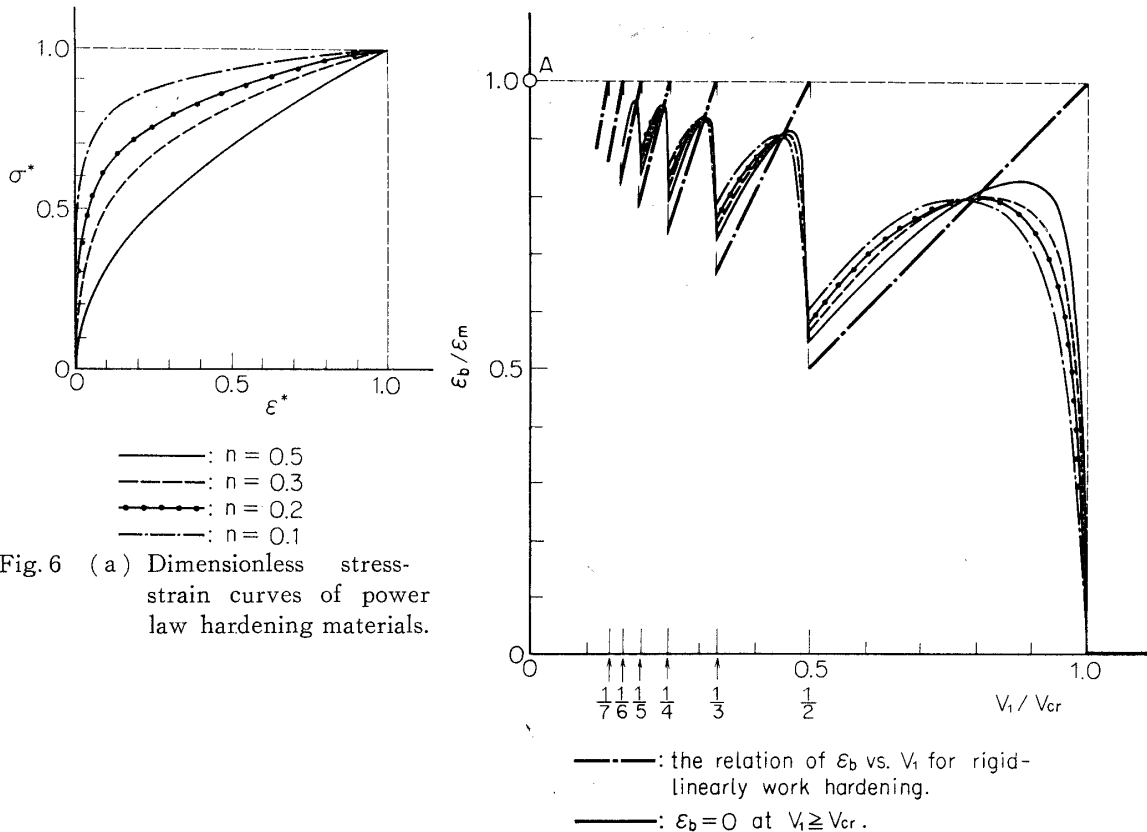


Fig. 6 (a) Dimensionless stress-strain curves of power law hardening materials.

Fig. 6 (b) The relations of breaking elongation ϵ_b vs. tensile velocity V_1 for power law hardening materials shown in (a).

Fig. 6 The results of analysis for power law hardening materials.

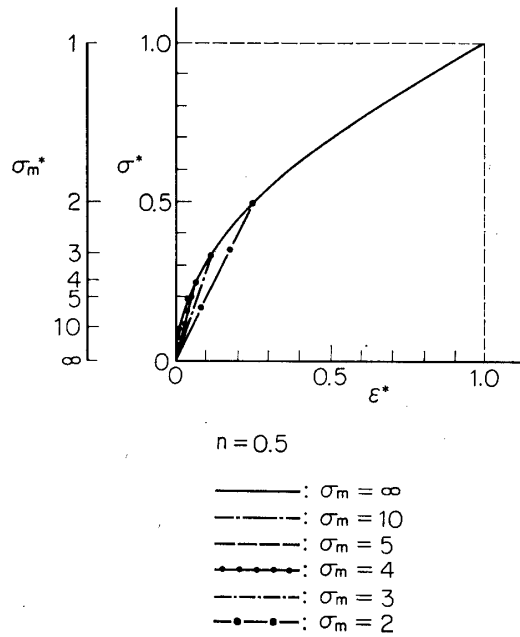


Fig. 7 (a) Dimensionless stress-strain curves of elastic-power law hardening materials ($n=0.5$)

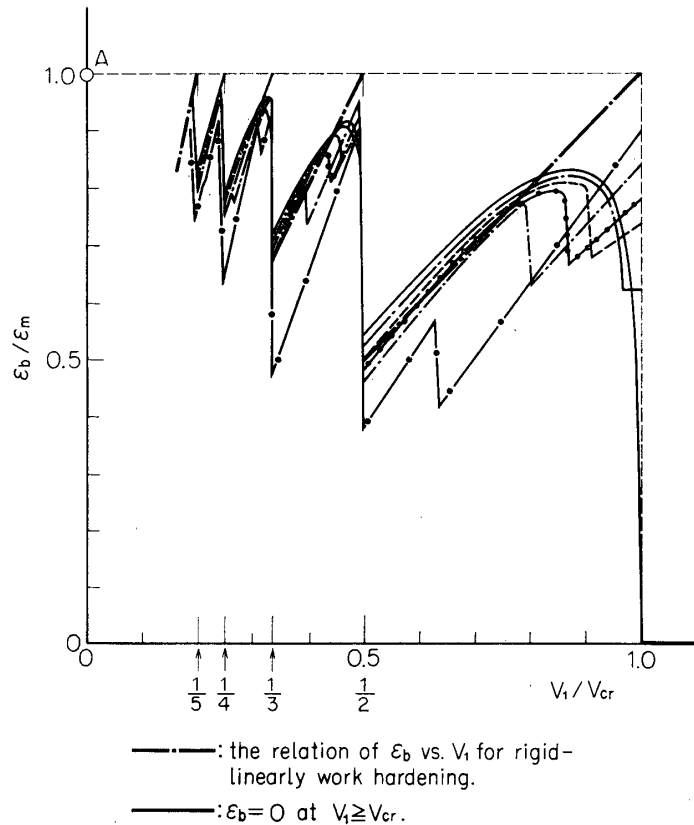


Fig. 7 (b) The relations of breaking elongation ϵ_b vs tensile velocity V_1 for elastic-power law hardening materials shown in (a).

Fig. 7 The results of analysis for elastic-power law hardening materials.

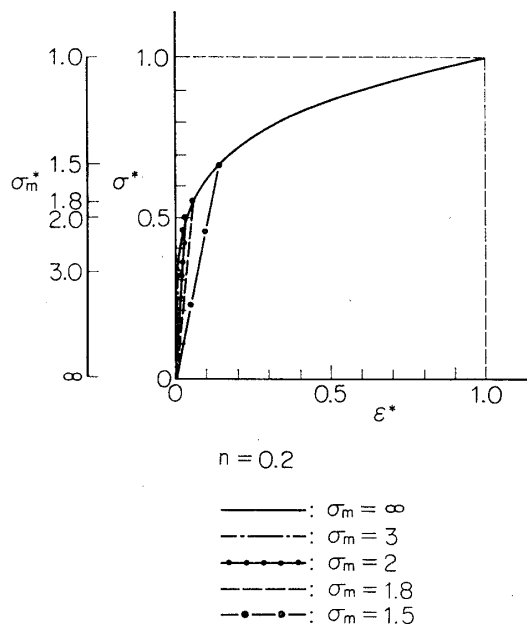


Fig. 8 (a) Dimensionless stress-strain curves of elastic-power law hardening materials ($n=0.2$)

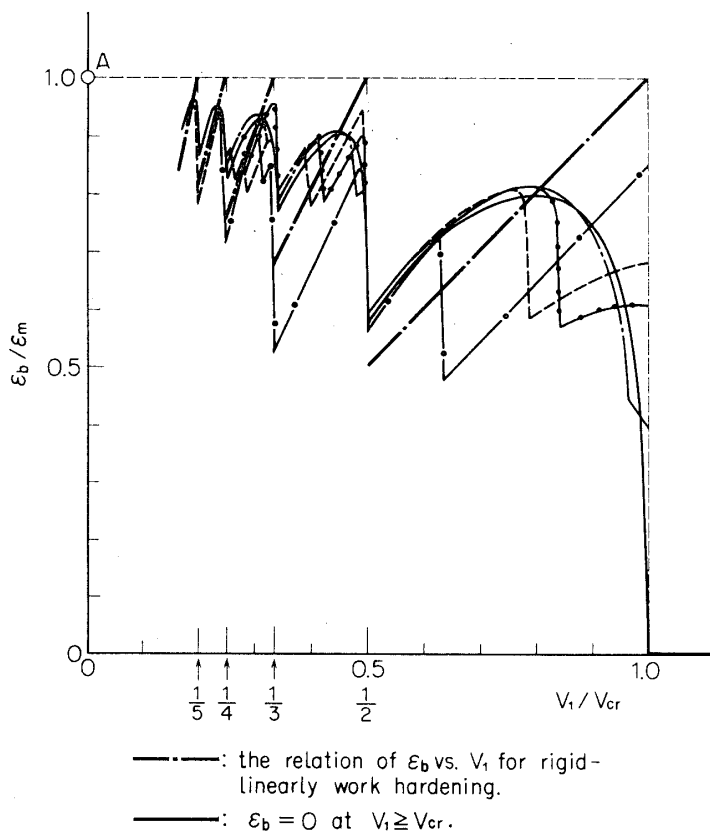


Fig. 8 (b) The relations of breaking elongation ϵ_b vs. tensile velocity V_1 for elastic-power law hardening materials shown in (a).

Fig. 8 The results of analysis for elastic-power law hardening materials ($n=0.2$)

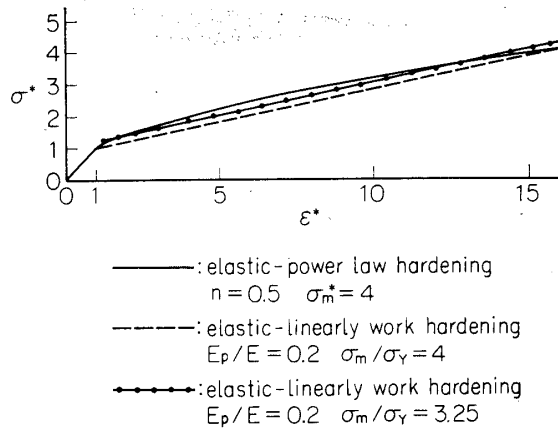


Fig. 9 (a) Dimensionless stress-strain curves of elastic-power law hardening and elastic-linearly work hardening materials.

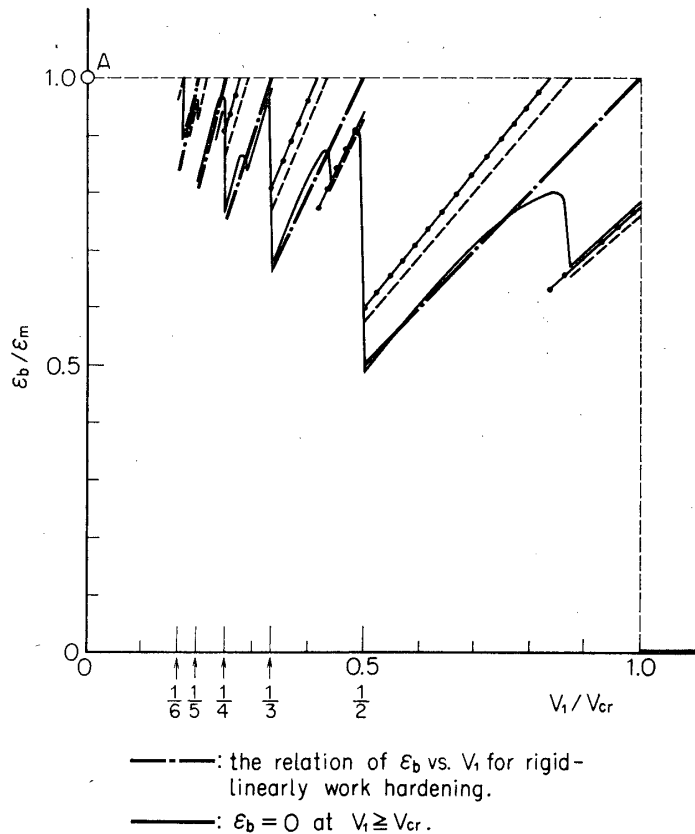


Fig. 9 (b) The relations of breaking elongation ϵ_b vs. tensile velocity V_1 for elastic-power law hardening and elastic-linearly work hardening materials shown in(a).

Fig. 9 The results of analysis for elastic-power law hardening and elastic-linearly work hardening materials.

4-2 弾- ϵ^n 硬化型材料

無次元化された応力-ひずみ関係および無次元化破断伸び対無次元化引張り速度の関係を Fig. 7, 8 に示す. Fig. 7-(a) および 8-(a) の応力ひずみ関係で 2 種の縦座標が用いられている. 無次元化応力-ひずみ関係を表わす一つの座標系は σ^*_m と ϵ^*_m で表わされており, 降伏応力, ひずみを無次元化応力, ひずみの単位にとっている. もう一つの座標系は ϵ^* と σ^* で表わされている. これは破断応力, ひずみを単位と考えて得られている. 破断伸び対引張り速度の関係は, 指数 $n=0.5$ および無次元化破断応力=2, 3, 4, 5, 10 および ∞ の場合について Fig. 7-(b) に, 指数 $n=0.2$ および無次元化破断応力=1.5, 1.8, 2, 3 および ∞ の場合について Fig. 8-(b) に示す. ここで, 無次元化破断応力が ∞ であるのは, ϵ^n 硬化の応力-ひずみ曲線に対応する.

応力-ひずみ関係に弾性域の存在することにより, 破断伸び対引張り速度の関係が直線的に変化する部分が図中に現れてくる. この直線的变化の部分は無次元化破断応力が ∞ から減少するにつれ, 幅広くなる. しかし, 弾- ϵ^n 硬化の場合の関係の周期性は, 剛-直線的加工硬化型の場合の周期性に丁度対応する.

4-3 弾-直線的加工硬化型材料との比較

Fig. 9 で弾-直線的加工硬化型と弾- ϵ^n 硬化型についての破断伸び対引張り速度関係の比較が示されている.

Fig. 9-(a) の曲線は $n=0.5$, $\sigma^*_m=4$ の場合の無次元化応力-ひずみ曲線を示す. 他の 2 本は直線的加工硬化の場合 2 種を示す. 弾- ϵ^n 型と弾-直線硬化型との差はたとえば, Fig. 9-(b) の $V_1/V_{cr}=0.85$, 0.43 の近傍で特に顕著に見られる.

5. 結 論

破断伸び対引張り速度の関係は, 有限長棒の高速引張りの議論において重要である. ひずみ速度不依存の塑性波理論によれば, 半無限長棒についての研究は, 限界衝撃速度を与えはするが, V_{cr} と 0 との間の引張り速度領域について, なんら上述の関係を与えない. 本論文では, 既報の剛-直線的加工硬化型および弾-直線的加工硬化材料についての有限長棒での破断伸び-引張り速度関係に続き, ϵ^n 硬化型および弾- ϵ^n 硬化型材料の場合につき, その高速変形挙動, 特に破断伸び-引張り速度関係が求められ, 前二者の場合と同じ周期性をもつ鋸歯状関係となるが, 前二者と異なりその鋸歯の先端が丸味を帯びてくることが明かにされた.

本解析にはひずみ速度不依存型の塑性波理論が用いられているが, ひずみ速度効果を取入れた理論による解析へと将来進められることが望ましい.

最後に本論文作製に助力された河田, 小林両研究室員諸氏のご協力に感謝する.

1972年4月15日 材料部

参 考 文 献

- [1] T. v. Kármán, and P. E. Duwez : J. Appl. Phys., 21 (1950), 987.
- [2] K. Kawata, S. Fukui, J. Seino, and N. Takada : Behaviour of Dense Media under High Dynamic Pressures, edited by Symposium HDP, IUTAM, Paris, Sept. 1967 (Dunod, Paris, 1968), 313.
- [3] W. Goldsmith : Impact, Edward Arnold Ltd. (1960)
- [4] L. E. Malvern : J. Appl. Mech., 18 (1951), 203.
- [5] K. Kawata, S. Fukui, and J. Seino : Aeronautical Research Institute, Univ. of Tokyo, Report No. 389 (1964), 167.
- [6] K. Kawata, S. Fukui, and J. Seino : Bull. of the Inst. of Space and Aeronautical Science, Univ. of Tokyo, 1, No. 4(A) (1965), 390 (in Japanese).
- [7] K. Kawata and S. Kuriyama : Proc. of 9th International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1971, 233.