

# 電波誘導方式(I)

石谷 久・前田行雄・玉木康子

## RADIO GUIDANCE CONCEPT. PART I.

By

Hisashi ISHITANI, Yukio MAEDA and Yasuko TAMAKI

**Abstract:** At the present launch of the satellite, only the attitude of the final stage motor is controlled to the predetermined direction, and attained orbit of the satellite may differ from the nominal value because of the disturbances suffered before. Since these disturbances can be known by a real time tracking radar, there are some possibilities to improve the accuracy of the orbit by controlling the final motor according to that information.

At present, the final motor is injected to the local horizontal direction at the apogee point of the preceding suborbit and there are considerably a lot of time for the vehicle to reach the apogee. Therefore, it is possible to estimate the suborbital parameters, solve the optimum control law for the final motor and command these results to the vehicle before the injection, and the radio guidance system is realized with relatively simple software and hardware.

In this paper, the basic concepts and criterion of the guidance system are discussed from a practical viewpoint, and the algorithm are obtained to get the optimum direction and ignition time for the motor that optimize the orbit of the satellite on the condition that the preceding suborbit is estimated with sufficient accuracy. The adaptability of the algorithm for practical experiments is assured by the numerical examples applied to some typical flight test data previously obtained.

### 概 要

人工衛星の打上げにおいて、現在は最終段ロケットの打出し姿勢角のみがあらかじめ設定された方向へ制御されているが、それまでに受ける外乱が大きいため、達成軌道は予定値からずれる可能性がある。この外乱は追跡レーダにより実時間で算定されるので、この情報をもとに最終段ロケットを制御することにより軌道精度をあげる可能性がある。

現在の打上げ方式は、前段の弾道軌道頂点で、局地水平方向に最終段ロケットを打出すため、頂点に達するまでかなりの時間がある。したがって、打出しまえに、弾道軌道を推定し、最終段ロケットの最適制御則を求め、これらの結果を飛しょう体へ指令することが可能であり、電波誘導方式は比較的簡単な装置およびプログラムで実現される。

本文においては、誘導方式の基本的概念と評価について、実用的見地から検討し、弾道軌道が十分な精度で推定されてから、衛星軌道を最適とする様なロケットの打出し方向および時刻を与えるアルゴリズムが求められている。このアルゴリズムの実際の打上げ実験に対する適用可能性は、代表的な実験データに応用した数値例によって確認されている。

## 1. ま え が き

現在東京大学宇宙航空研究所によって行なわれている科学衛星の打上げにおいては、最終段主ロケットの姿勢制御が行なわれており[1]その際3段目軌道を実時間で推定し、この結果によって最終段衛星投入ロケットの点火時刻を変更し、軌道の近地点高度を可能な限り上昇させている[2]。このような方式によって軌道精度を改善することには限界があり、また一方で下段ロケットに将来 TVC 制御装置を装備する計画も進められているので、その際必要な姿勢基準修正指令装置を用いたロケットの誘導制御方式の検討が可能となる。本研究は、このような姿勢基準方向を、地上からの飛しょう状況推定情報をもとにして修正指令することにより衛星の軌道精度を改善するための電波誘導制御方式を決定することを目的としている。そのために地上からの追跡結果から実時間で軌道推定を行なう方式を含めて、特にソフトウェアに重点をおいて、1970年夏以来「Radio guidance 方式打合せ会議」を中心として、総合的に検討を進めてきたが、一応の結果を得られたので、ここにその一部をまとめて報告する。

検討項目は、大別して三つに分けられ

1. 実時間軌道推定プログラムの改良
2. 最終段主ロケットの打出し方式の決定
3. TVC 装備のロケットに対する実時間の修正

に及ぶが、第1項は状態の推定問題と考えられ、第2,3は一種の最適問題であり、しかも第2,3項は段階の異なる制御則を求めるものであるから、分離定理、最適性の原理をもち出すまでもなく、各項目は他と独立に検討可能であることが明らかである。また実際の飛しょう実験への応用も、各項目ごとにハードウェアの実用化とともに随時適用可能である。第1項に対しては、近似的な最適フィルタ (Kalman Filter) の実用化の可能性を検証し、その方式についても一応の結果を得た[3]ので、実プログラムへのコーディングを進めているが、第2項についても基本的な方式およびその実用可能性の検討が一応終了し、実用上ほぼ問題のないと思われる方式案を得た。第3項についてはなお基本的方式の概念を検討中であるので、本文においては、第2項について、方式の概念および実際に用いる計算式、数値例への応用結果につき、その結果を報告する。

なお第2項については、本方式のほかに、目標軌道からのずれを修正する摂動法に基づく方式が、日本電気株式会社より提案されており、この方式の概念、数値例による実用性の検討結果については、作業結果報告書に詳細が示される。本方式は直接最適解を求解する方式であり、これは前段軌道が目標値から大きくずれる可能性のある現打上げ方式においては、摂動法に比べより安全であり、また計算時間に余裕があれば最も適当な方法と考えられる。

## 記 号

添字 3 の付いたものは前段軌道に関するもの，添字 4 の付いたものは推移後の軌道に関するもの，添字  $N$  の付いたものは目標軌道に関するもの，添字  $H$  の付いたものは前段遠地点で，前方に (Hohmann) 移行したときの軌道に関するものを示す．また添字  $ap$  は遠地点を，添字  $pe$  は近地点を示す．

$a$	軌道半径
$e$	離心率
$i$	軌道傾斜角
$\Omega$	昇交点経度
$\omega$	近地点引数
$\tau_p$	近地点通過時刻
$v$	ロケットの速度
$r$	地心からの高度
$h$	軌道の角運動量
$C$	軌道エネルギー
$v_m$	最終段速度インパルスの大きさ
$\Delta v$	目標軌道への推移に必要な速度インパルスの大きさ
$E$	離心近点離角 (Eccentric Anomaly)
$E_{ig}$	最終段打出点の前段軌道 $E$
$E_{peN3}$	前段軌道高度が $r_{peN}$ となる位置の前段軌道 $E$
$E_{apN3}$	前段軌道高度が $r_{apN}$ となる位置の前段軌道 $E$
$T_{ig}$	発射よりの最終段点火までの時間
$\theta_D$	最終段打出しの方向の局地水平よりの角
$\varphi$	最終段打出しの方向の前段軌道面よりの角
$\beta$	最終段打出し点における前段飛しょう経路角 (局地垂直より)
$\mu$	重力定数
$v_{\min}$	目標軌道への推移に必要な最小速度増分
$v_{\max}$	目標軌道への推移に必要な最大速度増分
$v_0$	$r_{peN}$ で目標軌道に移行するために必要な速度増分
$v_{mc}$	発射地点で円軌道に投入するための速度増分
$i_{4S}$	前段にたいし $\varphi$ だけ南にふって打ったときできる軌道傾斜角
$i_{4N}$	前段にたいし $\varphi$ だけ北にふって打ったときできる軌道傾斜角
$\Delta h$	前段と最終段軌道の角運動量差
$\Delta C$	前段と最終段軌道のエネルギー差

## 2. 制御方式の概念

## 2.1 目的と基本概念

科学観測衛星打上げにおいては，通常ブースタで弾道軌道にのせ，その頂点で最終段ロケ

ットを水平 (局地) に発射することにより、目標の最終軌道に投入する方式がとられている。この際

1 ブースタ段階に受ける外乱のため弾道軌道が予定値からずれる可能性がある。

2 弾道軌道は、ブースタの効率をあげるため推力飛行 (Powered Flight) は比較的低高度で終了し、頂点にあがるまでにかなり時間がある。他方レーダによる地上観測で弾道軌道は短時間に比較的精度よく推定可能である。

ことから、レーダ観測の結果により最終段ロケットの打出し時刻、方向などを修正すれば、前段までに受けた外乱を (可能な限り補償し) 最終軌道精度をあげることが可能となる。

特に、レーダによる観測精度が高い場合には、弾道軌道推定 (すなわちロケット軌道を記述する状態量推定) は、短時間で精度よく推定され、その後に制御可能な操作変数 (固体ロケットの場合は点火時刻、投入方向の 2 軸) を推定結果をもとに適切な評価のもとで最適化を行なうことが可能である。これは状態をフィードバックして、それ以後制御終了までの操作量 (この場合には 1 時点の制御になる) を最適化することにはかならず、最適化の原理により当然これ以前の制御と無関係に、最適化を行なうべきものであって、この意味からも前章 3 項と全く独立に方式を考えてよい。

具体的なフィードバック制御を行なうためには、地上の観測から状態を求めるのに計算を要するので、ついでに操作量の最適値までを計算し、この結果を飛ばす体まで伝送するのが实际的であり、このための地上装置 (Command Console)、搭載装置 (Recorder) は設置または試作完了している。

本文で扱うのは状態 (すなわち軌道) 推定後の最適化問題の定式化、求解 (すなわち評価関数、および求解アルゴリズム) の検討と適用結果の検証である。

なお上記の方式を誘導計算機+慣性システムと比較すると、コスト上非常に有利であり、弾道軌道推定と指令信号 (Command) 伝送が可能なら工学上の問題点はほとんどない。

## 2.2 方式の概念、前提条件

最終段ロケットは固体ロケットで、燃焼中の姿勢制御機能はないため安定化のためのスピニングがかけられている。したがってこのロケットに関する可能な制御項目は次の 4 点にすぎない。

1. 点火時刻
2. 打出し方向 (2 軸)
3. 総推力 (実際には加速度計による情報をもとにエンジンカット・オフが必要)

このうちここで考えるのは、1.2 項の 3 変数の 1 時点における制御である。前段の弾道軌道が与えられた状態から、最終軌道を目標値に一致させるためには、少なくとも軌道の自由度の 6 個に対応する制御の自由度がなければならない。しかしながら、上記の 3 項目のうち 3 項は装置 (hardware) に大きな負担がかかるので一応除外すると、制御の自由度は 3 となる。したがって軌道パラメータ 6 個の内積極的に制御できるのは、最大 3 個以内であり、これも場合によっては不可能となる。

軌道 6 要素は軌道面を表わす  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  および軌道形状を示す  $a$ ,  $e$  および軌道上の時刻

と位置を関係づける  $\tau_p$  (または基準時 (Epoch) 平均近点離角 (Mean Anomaly)) により表わされるが発射時刻が不確定であり、最終軌道上で特定時刻における位置が指定されない科学衛星においては、 $\tau_p$  はほとんど自由であると考えてよい。また長寿命の衛星では摂動 (Perturbation) により  $\Omega$ ,  $\omega$  は変化するので、この精度に対する要求もきびしいものではない。したがってこの制御目標もあくまでも軌道形状  $a$ ,  $e$  と傾斜角  $i$  に限られる。なお最終段ロケットも衛星と同様落下することはないので保安 (Range Safety) 上の問題も存在しない。

さらに現在の発射方向 (自転を有効に用いるため東方に発射し、発射点緯度を  $i$  とする) では、外乱による  $i$  の影響は比較的少なく、外乱の補償という立場からは、 $a$ ,  $e$  すなわち楕円形状を要求にあわせるのが最も有効で観測上も意義があると思われる。

軌道形状は、自由度が2であるから、 $a$ ,  $e$  のほか、たとえば、エネルギー、運動量のような2個のパラメータにより記述される [4]。この考え方によれば、点火位置 (時刻) と打出し角による制御とは、前段軌道のエネルギー、運動量に追加する増分を適当に変化させることにほかならない。推力一定であれば (頂点までは) 点火位置が早いほどエネルギー増加は大きく、高度が高いほど角運動量増加は大きいので、途中適当な点で適当な方向へ発射することによって、 $a$ ,  $e$  を目標値へ近づけようというものである [5]。

またこの方式および計算を考慮する際、次の仮定をおいている。

1. 最終段ロケットにより得られる速度増分は、発射時刻、方向によらず事前に計算された値に一致するものとする。
2. 最終段ロケットによる増速は、インパルスで与えられ前段軌道からただちに最終軌道に移行するものとする。燃焼時間中に受ける重力変化の影響は別途計算して補正するものとする。
3. 前段軌道はこの計算に入るまえに十分な精度で推定されるものとする。
4. 最終段軌道の目標値は、その時点での接触軌道として与えられ摂動を無視して、この軌道へ投入する方式を求めるものとする。
5. 実際の指令信号は基準量からの点火時刻、姿勢基準角の修正量を与える必要があるが、そのための座標変換などに関しては省略する。したがってあとに示されるように軌道面内における考察により解を求め、最後に制御量に変換する。
6. 目標軌道は双曲線 (地球を脱出する) 軌道ではないもののみを考える。

### 2.3 制御方式の評価基準

前述のように制御の自由度が3個、制御対象の自由度が3個であっても必ずしも、 $a$ ,  $e$ ,  $i$  を常に目標値に一致させることは可能ではなく、一般には不可能な場合の方が多い。しかし衛星投入は目標軌道以外では意味のない点目標 (Point target) ではないから、 $a$ ,  $e$ ,  $i$  が一致しなくても投入を中止するわけではない。この場合には次善の軌道が常に存在し、最悪の場合でも衛星達成可能なら投入を行ない、目標が数段階に分かれることになる。この場合  $i$  は外乱の影響を受けにくい、 $a$ ,  $e$  は大きく変化し、観測上は  $a$ ,  $e$  は重要な意味を持つと思われること、および遠近地点高度のうち、近地点高度は、もし目標からずれるときわめて危険であることから、

次のような段階の目標をまとめた評価が適当と思われる。

1.  $a$ ,  $e$  の目標達成が可能であれば、これを優先させ、その解が複数個存在すればその中で各種誤差（推力またはジャイロドリフト）の影響を最も受けにくいものをとる（したがって  $i$  を規定値に一致させることはしない。実際に  $a$ ,  $e$  を目標値に一致させる条件では  $i$  はほとんど変化できず、達成誤差が変化するだけである）
  2. 前項が不可能な場合には近地点高度  $a(1-e)$  を目標に一致させる、残った自由度で遠地点高度  $a(1+e)$  をできるだけ目標に近づける、この場合エネルギー過剰で遠地点高度が達成できない場合には 3' 項と同じ評価に従うものとする。
  3. 前項も不可能な場合（前段遠地点高度が低すぎて近地点高度達成不能な場合）には近地点高度を最大にする。この場合遠地点高度はなるべく目標値に近づける。
  - 3.' 1. ないし 3. においてエネルギー過剰のため前段軌道面から大きくはずれて打つ場合（現実には 3. の場合に多い） $a(1+e)$  を一致させるため  $i$  が著しくずれる恐れがある。したがってこの場合に限り  $i$  に対してあらかじめ決めた領域内  $[i_{4min}, i_{4max}]$  で上の評価に従うものとする。ただし 1. ~ 3. は優先させる。
  4. 近地点高度が衛星可能高度（たとえば地上 150 km）に到らない場合点火を停止させる。
  5. 以上すべての場合に装置の誤差により近地点高度があらかじめ設定した高度を下まわる場合には、目標近地点を下まわった分だけ上昇した新しい目標軌道に対して同じ評価で軌道達成をはかる。（ただし有効に働くのは 1., 2. 項の場合のみ）
- したがって制御問題は以上の前提条件のもとで与えられた前段軌道上から目標軌道と速度インパルスを与えられてうへの評価基準に従う軌道推移を行なうための発射方法（時刻，方向 2 軸）を求めることとなり，以下軌道推移の性質および最終的な求解計算方式を示す。

### 3. 速度インパルスによる軌道推移の性質

#### 3.1 達成軌道高度の極値

速度インパルスによる軌道推移を考えると、インパルスの大きさが定まっている場合、達成軌道は Hohmann 移行または直線軌道となる場合（または前段軌道上  $\cos E_3 = e_3$  で発射して円軌道となってしまう場合のみ）に極値をとることが示されている [6]。特に近地点高度の最大値は、前段軌道の遠地点で進行方向に打つ狭義の Hohmann 移行により実現されるので、前節評価の 3. 項はこれにより達成される。

#### 3.2 増速ベクトルの誤差による達成軌道高度誤差

3.1 と同様にして Hohmann 移行において遠近地点高度誤差が極値をとることが示される。したがって近地点誤差を最小にするためには、推移後の達成軌道の近地点になるべく近い点で移行することが必要である。評価の 1 項ではこの結果を用いる。

#### 3.3 同一平面内における軌道推移に必要な速度インパルスの変化

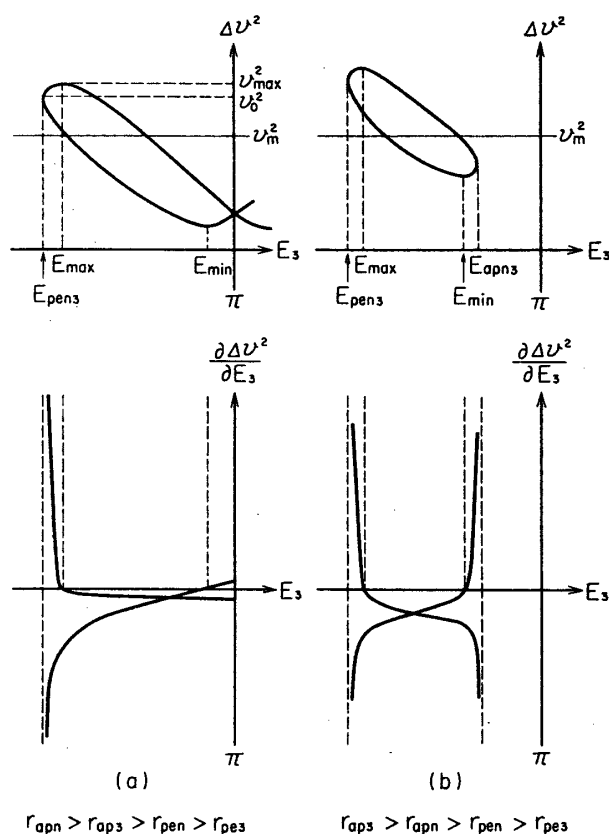
同一平面内において、与えられた速度インパルスにより目標軌道へ推移可能かどうかのチェックならびに解の存在する場合の求解については、適当な変数変換により解析的に求められることが示される（次節参照）

しかし評価に従う計算方式を考えるためには、定性的性質を知る必要があるので、まず同

一面内において推移を行なうために必要とする速度インパルスの大きさの変化（これは簡単に求められる）を求めると、図 3-1 のように示される。上図より明らかに  $E_3 \in [0, \pi]$  の範囲において、解が存在 ( $\Delta v^2 = v_m^2$  で移行可能な場合) するときは、一般に 2 個の解があることがわかる。この場合には評価 1 より  $E_{pen3}$  に近い方（すなわちできるだけ高度が低く達成軌道近地点に近い解）を選ばなければならない。また軌道面外への移行を考えると、その高度における速度増分は同一平面内移行の場合最大であるから、等価的には  $v_m$  が低下したことになる、軌道面を移行により変化させれば  $v_m^2 \in [v_{\min}^2, v_0^2]$  である場合には  $v_m$  の低下により解（の内  $E_{pen3}$  に近いもの）は必ず  $E_{pen3}$  より遠くなる（すなわち発射点高度が上昇し、誤差の増加を招く）。 $v_m^2 \in [v_0^2, v_{\max}^2]$  の場合には、 $E_{pen3}$  において軌道面を変えて発射するのが最良である。

### 3.4 同一平面内における軌道投入の求解

前節の定性的傾向から、 $a_N, e_N$  を達成可能な場合には、 $v_m^2 \geq v_0^2$ （推力過剰）の場合を除き、前段軌道面内へ投入することにより、評価基準 1 に従うことになる。この求解は  $r_3$



注)  $r_{ap3} < r_{pen}$  解無し  
 $r_{pes} > r_{apn}$  解無し  
 $r_{ap3} \geq r_{apn} \geq r_{pes} \geq r_{pen}$  の場合は省略  
 $E_3 \in [\pi, 2\pi]$  は  $\pi$  を中心として対称となる。

図 3-1 軌道達成に必要な速度インパルスの変化

に対する 4 次式となり、解析的求解は不可能であるが、 $v_m$  の局地水平からの打出し上下角を  $\theta_D$  として、 $X = \cos \theta_D$  とおくと、 $X$  に関する 3 次方程式求解問題に帰着することが示され、これは Cardan の方法により解析的に求められる。 $\theta_D$  が求められると

角運動量増分が  $v_m \cos \theta_D / r$  となることから  $r$  も定まる。他方  $v_m^2 \in [v_{\min}^2, v_{\max}^2]$  にあるかどうかの判定も、3 次方程式の解  $X$  が  $[-1, 1]$  の範囲に存在するかどうかにより、同時に判定可能である。さらに解が存在しない場合には、任意の  $v^2 \in [v_{\min}^2, v_{\max}^2]$  と  $v_m^2$  の大きさを判定することにより、 $v_m^2 > v_{\max}^2$  (推力過剰) か  $v_m^2 < v_{\min}^2$  (推力不足) かを判定できる。これには  $v_0^2$  を計算するのが最も容易である。

なお、 $v_{m2} \in [v_0^2, v_{\max}^2]$  にあるときは、 $E_{peN3}$  で軌道面外へ回転させて発射するのが、誤差の上からは好ましい。

### 3.5 推力不足の場合

前節の結果、推力が不足で  $a_N, e_N$  達成不可能な場合でも、3.1 により  $r_{peN}$  が達成できる場合には、評価基準 2. に従う解を求めることになる。今発射地点を頂点 ( $E_4 = 0$  or  $\pi$ ) として合成速度が水平になるよう (このうち、速度の大きくなるものをとる) にした場合の、反対側の頂点は、ある高度  $r_c$  以上では発射地点より高く、 $r_c$  以下 (水平に打てる限界  $r_{cm}$  が存在すれば、その高度まで、存在しなければ、 $a_3(1-e_3^2)$  以下の  $r_c'$  (または  $a(1-e)$ ) までの間) では発射地点が遠地点となる。いずれの場合も、近地点高度達成可能の場合には Hohmann 移行による近地点が  $r_{peN}$  を越えているので、上述の打ち方をして、近地点高度 (これは発射地点を下げると低下する) が  $r_{peN}$  となる発射高度  $r_0$  が存在する。図 3-2 は、三つの場合

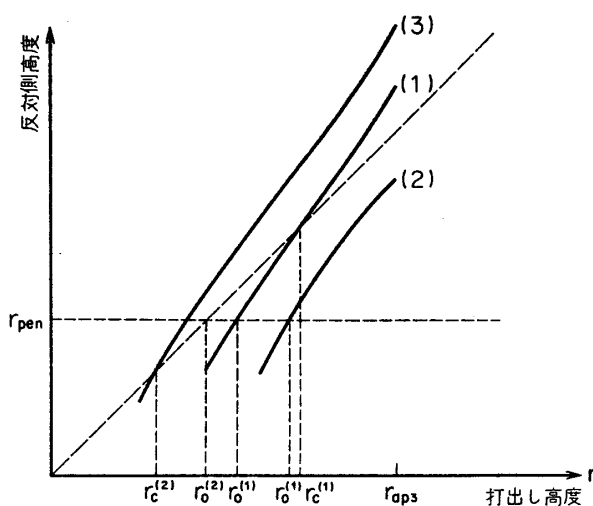


図 3-2 合成速度を水平とした場合の遠近地点の変化

- (1)  $r_0 \leq r_c \leq r_{ap3}$
- (2)  $r_{ap3} < r_c$
- (3)  $r_c < r_0 = r_{peN} < r_{ap3}$

を表わしている。 $r_{cm}$  では前段軌道に比べて、角運動量一定でエネルギーのみを減少させる打ち方になるので、 $r_{pe3}$  より高い近地点高度を得るが、これが  $r_{peN}$  より高い場合には、上に述べた  $r_0$  は存在しない。したがってこの場合には、別途考慮する必要があるが、実際にはほとんど起らないので省略する (この場合でも  $r_{ap3}$  で軌道面をかえて打出せば、 $r_{peN}$  に等しい近地点高度を得られる)。

評価基準 2 に従うためには、近地点高度のみは目標の  $r_{peN}$  に一致させ、遠地点高度を  $r_{apN}$  に近づける必要がある。ところで、近地点高度  $r_{peN}$  が与えられた場合、これを満足す



る軌道のエネルギー  $C_4$  と角運動量  $h_4$  の間には

$$r_{peN} = a_4(1 - e_4) = -\frac{\mu}{2C_4} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2C_4}{\mu^2} h_4^2} \right) \quad (3-1)$$

の制限条件が加わるので、軌道面内の打出しを考え、 $v_m$  が与えられれば、打出し高度が定まると打出し方向は（解があれば）一意に定まるものである。上述の  $r_0$  における打出しも、その高度における唯一の解であり、上の制限条件には、特異な点は存在しないので、打出し高度を変化させても、 $r_{peN}$  を一定に保つ解が得られる。特に  $[r_0, r_{ap3}]$  には確実に解が存在するので、その中で遠地点高度が  $r_{apN}$  に最も近いものを選べばよい。この時遠地点高度が、 $r_{apN}$  を越えているか、どうかは  $r_0$  で打出したときの遠地点高度の状態による。

a)  $r_{apN} > r_{ap3} > r_{peN} > r_{pe3}$  の場合

図 3-2, (1), (2) では  $r_0$  で打ったときの達成軌道の遠地点高度は  $r_{ap4} < r_{ap3} < r_{apN}$  であるから遠地点高度は不足している。

(3) の場合は、 $r_0$  で打ったときの遠地点高度が  $r_{ap4} > r_{apN}$  であれば軌道面を変化することにより、 $r_{apN}$  と一致させることができ、これは推力不足に矛盾するものであり得ない。 $r_{peN}$  を保って  $r_{apN}$  よりも低い遠地点高度を持つような軌道投入は可能であるが、目標軌道を満足する解は存在しないので、この場合には  $r_{peN}$  を保ち、遠地点高度最大の打ち方を求める問題となる。

b)  $r_{ap3} > r_{apN} > r_{peN} > r_{pe3}$  の場合

図 3-2, (1) で  $r_c \leq r_{apN}$  とすると  $r = r_{apN}$  で最終段が水平になるように打つと、打ち出し点を近地点にすることができる。その点で推力を減少させると、この点を遠地点にし、近地点高度を  $r_{peN}$  に一致させられ、推力不足に矛盾する。したがって  $r_c > r_{apN}$  である。((3) はあり得ない)

$r_0 > r_{apN}$  の場合、 $r = r_{apN}$  で最終段が水平になるように打つと、打ち出した近地点高度は、 $r_{peN}$  より大きく推力を減少して軌道達成可能であるから、推力不足に矛盾する。したがって  $r_0 > r_{apN}$  であり、これより高い地点では遠地点高度は一層  $r_{apN}$  からはなれるので、 $r_0$  における推移が評価基準 2. を満足する解となる。

すなわち  $r_{peN}$  を満足し、遠地点高度最小の打ち方を求める問題となる。

この間の関係は文献[6]の線図(図 3-3)からも図式的に説明される。a) では一定地点の軌跡( $r_{peN}$ )上でできるだけ右へ動いて  $r_{apN}$  へ近づけるのに対して、b) では  $v_m$  による移行可能範囲が右にあってできるだけ左へ近づける場合が推力不足であることを示している。

### 3.6 推力不足の場合の近似解

a) の求解

近地点一定にして遠地点高度を最大にするには、同じ条件のもとに  $C$  (または  $h^2$ ) を最大にすればよい。以後達成軌道を添字 4 で示すと

$$h_4 = h_3 + v_m r \cos \theta \quad (3-2)$$

であるから、高度  $r$  における打出しにおいて  $h_4^2$  を最大にするには  $\theta = 0$  すなわち  $v_m$  を局地水平に打出すことにほかならない。この打出し方で近地点が目標近地点高度  $r_{peN}$  に等

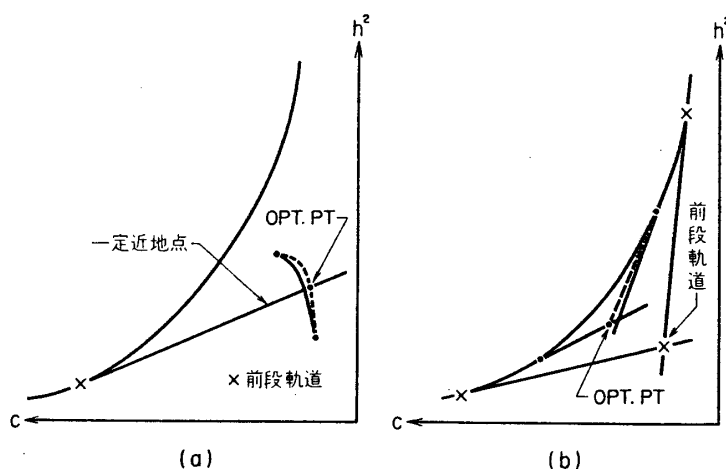


図 3-3 エネルギー角運動量面上の軌道変化

しくなる高度を  $r_1$  とおくことにすれば、これより低高度では  $h_4$  は減少するので最適点はこの高度以上にある。他方  $r$  におけるエネルギー増加は、 $v_3$  の水平からの角度を  $\alpha$  として

$$C_4 = C_3 + v_3 v_m \cos(\theta - \alpha) + \frac{v_m^2}{2} \quad (3-3)$$

であるから、 $\theta = \alpha$  すなわち進行方向に打ち出せば最高となる。この結果近地点が  $r_{peN}$  になる高度を  $r_2$  とすれば、これより高い点では  $v_3$  が減少して、 $C_4$  は低下するため、最適点はこの高度以下の発射により達成される。

結局、近地点を  $r_{peN}$  に保ち  $[r_1, r_2]$  の間で打つときに、 $r_{ap4}$  が最高値をとる。さらに  $r_1, r_2$  において近地点を  $r_{peN}$  として打ったときの遠地点  $r_{ap4}$  は互いに等しいことが示される。(これは誤差のうえから当然近地点に近い  $r_1$  の方が好ましい)。

これはまた 3.3 における 3-1 図上で、同じ軌道上から等しい軌道へ投入する際、水平または進行方向に打出す場合必要な速度増分は等しいことから明らかである。 $r_1$  または  $r_2$  における打出しで達成できる軌道には、3-1 図に示されるようにこれよりきわめてわずかな少ない推力でも投入可能であるが、その軌道に投入するために  $v_m$  以下では不可能な場合が最適点である。この解を直接求めるためには、3-1 式の制限条件のもとに

$$r_{ap4} = 2a_4 - r_{pe} \quad (3-4)$$

を最大にすることが必要であるが、これはきわめて複雑な最適計算を必要とし、これに比べて  $r_{ap4}$  の増加は ( $v_m$  の余裕はほとんどないため) わずかである。(実際には、 $r$  を決定してここで  $v_m$  により  $r_{p4} = r_{pe}$  を満足する打ち方を探索し、このときの  $r_{ap4}$  を求めこれが最小になる点を探索することになる)。これに対して  $r_1$  または  $r_2$  を求める計算は単純な 3 次方程式に帰着されニュートン法でもきわめて簡単に求解可能である。したがってオンラインでは  $r_1$  を求めるのが最も効率がよいと思われる。

#### b) の求解

近地点高度一定の条件のもとに  $r_{ap4}$  を最小とするのは、計算上前項と同様困難が多い。

したがって近似的に最も利用しやすいのは、発射地点を遠地点として近地点が  $r_{peN}$  を満

足する点であって、これより高い地点にはよりよい解は存在しない。これは図 3-1 において  $E_{apN}$  を利用したことになり、この点は  $v_m$  の最小点でないからもう少し良い点が存在する ( $r_1, r_2$  に対応する点は  $r_{apN}$  を越えていて、この場合は意味がない) ので最適点ではないがきわめて近い解となる。これも簡単な式となりニュートン法により容易に解を求め得る。以上 a), b) に対する近似解はいずれもきわめて良い近似となっていることが数値例から示されるが、よりよい近似解が存在するかどうかについてはなお検討が必要である。

### 3.7 推力過剰の場合

推力過剰の場合は、いずれの場合においても軌道面変更により等価的な推力は減少し、2 倍以上過剰でない限り一応  $a, e$  を一致させ得る。ただしこの場合には軌道面変更により、 $i$  が変化するのでこれが適当な範囲におさまるように注意する必要がある。発射位置は 3.3 に示した理由 (誤差上) から  $E_{peN3}$  が望ましく、このとき、 $v_{\max}^2 - v_0^2$  の余剰分で  $i$  が変化するが  $i_3 = i_4$  とは限らないので、余り問題にならない。このとき  $v_3$  の垂直方向成分を打消して残った水平速度成分を水平面内で回転させれば、 $E_{peN3}$  で近地点となる。一方 Hohmann 移行によっても近地点高度不足となり、遠地点高度過剰となる場合には、評価基準 3. に従って、軌道面外移行によって遠地点高度のみを目標値に一致させる。以上いずれの場合も軌道面変更による  $i$  の変化について同じ検討を要するので、これも次節にまとめて示す。

### 3.8 軌道面傾斜角の変化

$E_{peN3}$  における前段軌道垂直速度を  $v_{3y}$  とおいたとき、 $v_m$  によりこの成分を打消し、残った水平面内成分  $v_{mx} (= \sqrt{v_m^2 - v_{3y}^2})$  を水平面内 ( $X-Z$  面とする) で回転させることを考える。X 軸 (前段進行面を  $X-Y$  面とする) から  $\varphi_0$  回転して、 $a_4, e_4$  を達成できたとすると、この結果の  $i_4$  は図 3-5 の三角形を解くことによりただちに求められる。ただし  $\theta_{peN3}$  は  $E_{peN3}$  に対応する前段軌道上の真近点離角 (true anomaly)

$$\left( \theta_{peN3} = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+e_3}{1-e_3}} \tan \frac{E_{peN3}}{2} \right) \text{ である。}$$

この結果達成される  $\varphi_0$  と  $i_4$  の関係は図 3-6 に示され、 $\min i_4 = i_3'$  となり ( $\varphi = \varphi_m$  とする)、これは発射点で地球赤道と平行に打出す場合である ( $i_3'$  は発射点地心緯度)、これは一般に  $\varphi_0$  が相当変化しても  $i_4$  にきかない場合が多く ( $i_3' = \frac{\pi}{2}$  なら  $i_4 \equiv \frac{\pi}{2}$  で  $\varphi_0$  によらない) むしろ制御上  $\varphi_0$  まで回転できない場合の方が多い。もしこの結果が  $i_4$  の許容

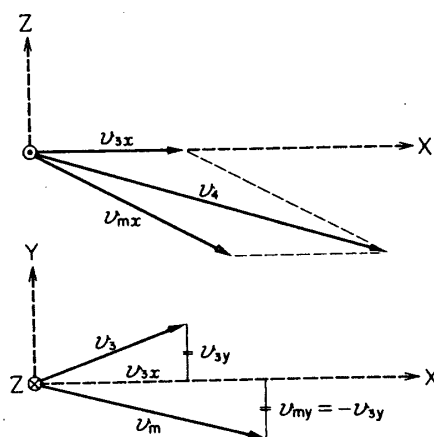


図 3-4 座 標 系

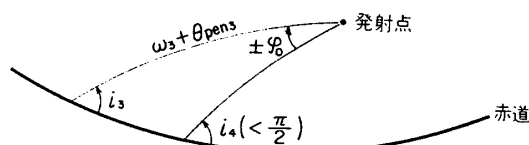


図 3-5 軌道面外移行の場合の球面三角形

限界内に入っていればこのまま発射される。他方もしこの結果が許容限界を越えていれば、許容限界に対応する  $\varphi_i$  を計算し（一般に 4 個存在し、これとその補角が加わる）そのうち、絶対値がさきに求めた  $\varphi_0$  より小さいものを選び、その中で絶対値最大のものが評価基準 3 に従う解である。ただし  $\varphi_0$  より小さい  $\varphi_i$  が存在しない場合には評価基準 3 により  $\varphi_0$  の内  $\min |\varphi_i|$  に近い解を選ぶ。  $E_{ig}=\pi$  で発射する場合には、 $v_{3y}=0$ ,  $\theta_{peN3}=\pi$  として全く同様に扱える。もし  $\varphi_i$  が全く存在しない場合すなわち  $i_{4\max} \leq i_3'$  では、 $|\varphi| < |\varphi_0|$  内で  $i_{4\min}$  とするため  $|i_3'|$  に対応する  $\varphi=\varphi_m \leq |\varphi_0|$  なら、その角度で発射しそうでなければ、 $\varphi_0$  の内  $i_4$  の低い方を選ぶ。一般に  $i_4$  は高い方が観測上望ましいので、余り問題にならない。

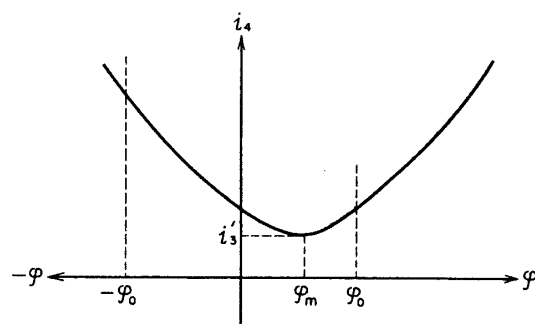


図 3-6 軌道面傾斜角の変化

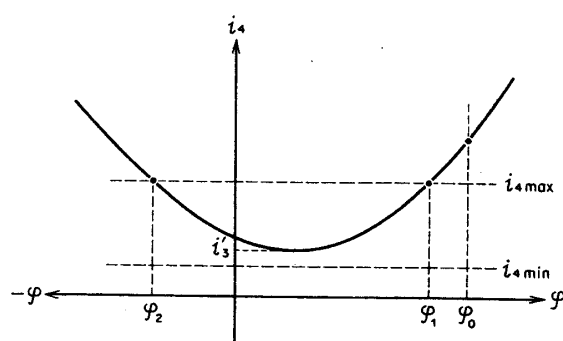


図 3-7 軌道面傾斜角の限界

#### 4. 求解の Flow

前章で示された軌道推移の性質を考慮すると、2.3 の評価基準に（ほぼ）従う発射方式を求める流れ図を得ることができる。ここでオンライン計算であるということから、フローチャート作製上次の点に注意する。

(1) 前述のように一部くり返し計算が必要となるが、そのまえにチェック可能なものはできるだけさきに行ない、最長の計算時間になるべく短くなるようにする。

(2) 計算時間短縮と記憶装置節約は矛盾することが多いが、全般に短い計算であるから、後者優先を考える。

(3) フロー中で求解不能となつてはならない。これは結局前章の検討が不十分なときに発生する。特に  $\sqrt{x}$  において  $x < 0$  となつて求解不能となると、計算停止の恐れがあるので、検討不十分な場合に備えて、このチェックを残しておく。万一ここへ入れれば Hohmann 移行などの絶対安全な解へ流れる。

(4) 上述の問題とともに計算誤差などのチェックのため、求解とともに、その方式で打った場合の達成軌道に関する情報 ( $a_4$ ,  $e_4$  など) を計算し直す。最終的には、この結果も判断の基準とする。

以上の内 (3) 項は不要であるべきものであるが、少なくとも発射前のシュミレーションではチェックしておいた方がよい。

以上のもとに全体のフローチャートは図 4-1 に示されるようなものとなる。順序は大体次の通りである。

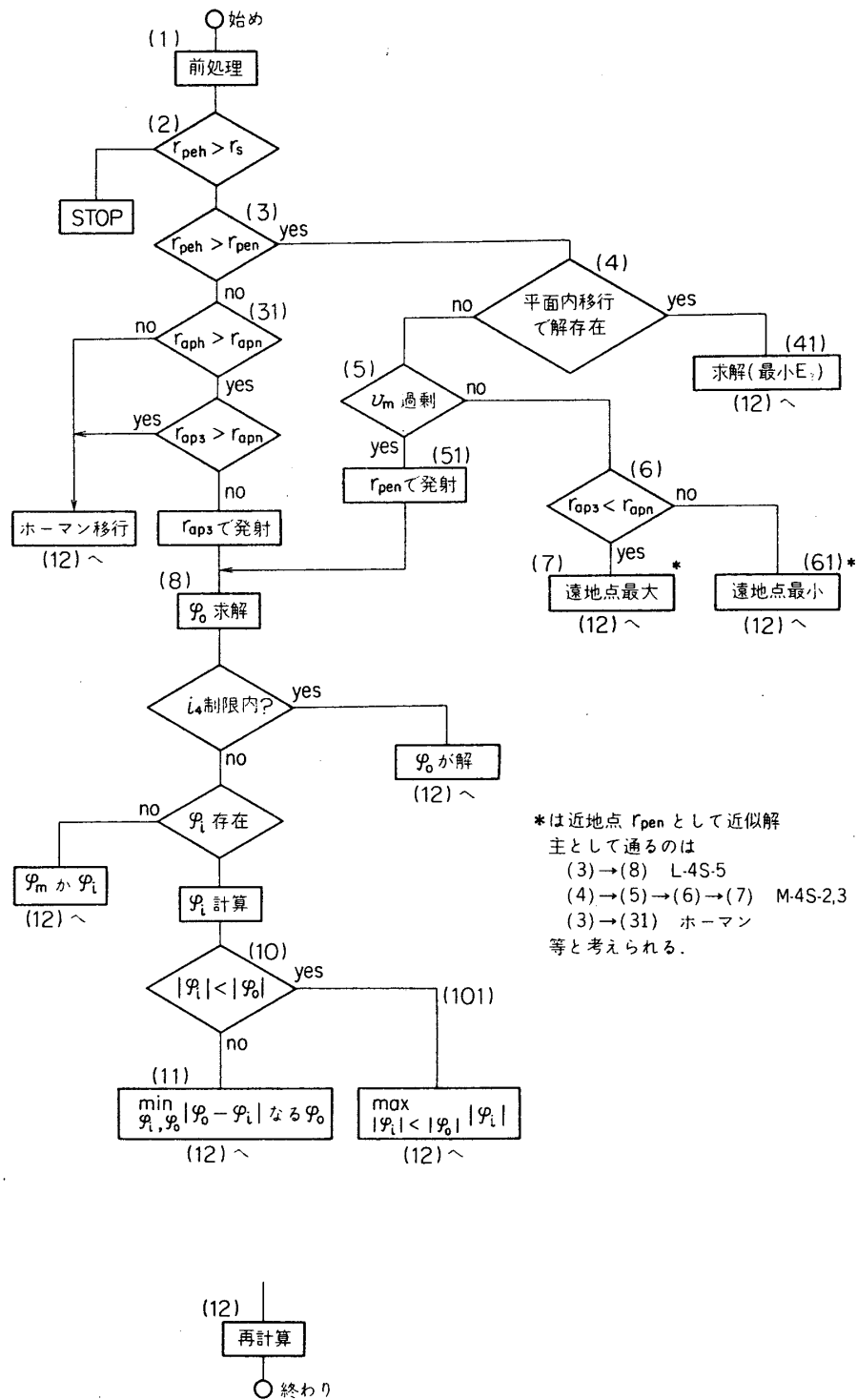


図 4-1 求解の Flow Chart

1. 前処理
  2. 衛星達成 (近地点高度が  $R_s(\doteq 150 \text{ km} + R_e)$  より高い場合) 可否のチェック, 不可なら停止 (21)
  3. 近地点高度達成可否のチェック, 不可なら (31) で, ホーマン移行による遠地点高度を求め, 仕様遠地点高度を越えていなければホーマン移行, 越えていれば  $E_{ig}=\pi$  で発射して 8. へ
  4. 軌道面内移行で解の存在のチェック, 解があれば (41) で最小のもの求解\*
  5. 4. で解が存在しなければ過剰かどうかチェック, 過剰なら (51) で  $E_{pen3}$  を発射地点 (近地点とする) にして 8. へ
  6. 3.5 の a) かどうかチェック, b) なら (61) で遠地点ほぼ最小として求解\* (打出し点を遠地点にする)
  7. a) 近地点一定で水平に打出せる解 (ほぼ遠地点高度最大) 求解\*
  8.  $\varphi_0$  を求めて,  $i_4$  が制限内かどうかチェック, 制限内なら  $i_4$  に近い方へ発射\* (発射地点とし, 速度を水平面内に回転して  $a_4, e_4$  を達成できる角度を  $\varphi_0$  とする)
  9. 8. で  $i_4$  制限外なら,  $\varphi_i$  を計算, ただし  $\varphi_i$  存在しなければ (91) で  $|\varphi| < |\varphi_0|$  の内  $i_4$  最小を求解\*
  10.  $|\varphi_i| < |\varphi_0|$  なる  $\varphi_i$  が存在するかどうかチェック, 存在すれば (101) でその内の最大を求解\*
  11. 最小  $|\varphi_i|$  を求解し,  $\varphi_i$  に近い  $\varphi_0$  を求解\*
  12. 求解後再計算して  $a_4, e_4$  の達成値, ジャイロ指示角計算, 表示などのあと処理.
- 実際には部分的チェックなどを追加しているので一層複雑になるが原理的には, 図 4-1 に示される.

## 5. 誤差に対する補正

以上のフローは評価関数 (2.3) を優先しているため

- (1) 推定の誤差
- (2) 装置 特にジャイロの基準値のドリフトによる誤差
- (3) 装置上の制約による制御機構上の限界

などのない場合には, 大体最適解を与える. これらの誤差の影響を考慮しても (1) はほとんど問題にならず, (3) についても主にジャイロのヨー軸まわりの回転に制限が加わるのでフローの (8) において制限を加えればよい. 計算・伝送・制御の時間が不足の場合 (頂点が近い場合) には,  $E \in [\pi, 2\pi]$  の対称点を利用すればよい.

問題は (2) 項であるが確率的に生じる誤差の影響を考えた最適基準は一般に

- A. 期待値を最良にする (Exp. min.)
- B. 最大誤差の場合を最良にする (min. max)

が考えられており, A. ならドリフトも平均 0 と考えざるを得ないから (系統的誤差が既知なら当然除いておく) そのままでよい.

実際には特に近地点高度に対して, B を考えることがあって, (8) に入った場合を除

き、最悪のドリフト（これも適当な数値の仮定によらざるを得ない）でもある特定の事前に与えた高度以上（たとえば  $r_{peN}=500\text{ km}+R_e$  でも  $250\text{ km}+R_e$  以上）の近地点高度を与えるような打出し方法が望ましいことが多い。

はじめにこれを考えて打出し方法を求めることは不可能に近いが、結果を (12) によって再計算する関係から、得られた解の誤差による近地点への影響はただちに求められる。これを利用して次のステップにより仕様を補正して同じ計算を通せば保証高度を得ることができる。

今横軸に目標とする近地点高度をとり、縦軸に、上のフローによって得られる近地点高度をとると、図 5-1 実線を得る。ここに最大角度誤差による近地点高度誤差を加えると斜線部が追加される。（この計算はフローの (12) で角度をずらせばただちに得られる）、目標近地点高度が  $r_{peN}(<r_{ap3})$  であったとき、誤差による近地点最小値が保証高度  $r_{as1}$  を越えていれば、落下する恐れはないのでそのまま実行される。もし  $r_{as2}$  のように  $\Delta r$  だけ高い場合、min max 的評価では近地点最小値が  $r_{as2}$  となるような、目標近地点高度  $r'_{pe.op}$  を求めこれに対応する解を求めるのが最適であるが、これを直接求めるのは困難である。

近似解として、目標近地点高度を  $r_{peN}+\Delta r$  にすると一般に目標近地点高度上昇とともに、達成される近地点高度誤差が減少していくので  $r_{as2}$  は保証されることになる。

そこで近地点高度を  $r_{pe4}'=r_{pe4}+\Delta r=a_4'(1-e_4')$ ,  $r_{ap4}'=r_{ap4}=a_4'(1+e_4')$  として同じフローをくり返して計算したものが最終の解になる（1回で  $r_{as}$  を越えなければ越えるまでくり返す）ただし  $r_{peN}$  が  $r_{ap3}$  を越えるか、求解の結果が Hohman 移行になっている場合は、そのまま実行する。

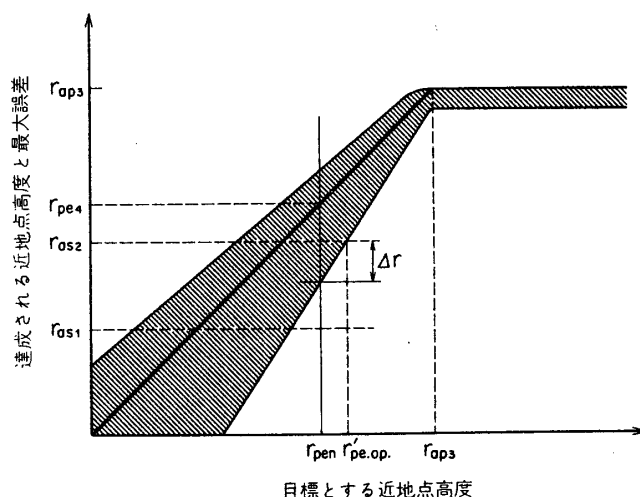


図 5-1 誤差に対する補正の考え方

## 6. 表示とプログラム構成

### 6.1 表 示

表示事項は装置増設を伴うので、十分な検討を要し、また既設の装置との整合なども検討しなければならないが、前述の方式を実際に行なうさい考慮すべき事項を示す。

本来この誘導方式の評価方法や結果に特に問題がなければ人間の介入する必要はないが、次のような点で表示を必要とする。

- (1) 評価基準以外の評価が入る場合もあるので、変更の可能性を残す。
- (2) それまでの追跡状況，すなわち前段軌道情報が妥当かどうかの確認
- (3) 計算プログラム自体の信頼性不十分のために，結果として得られた制御量が妥当かどうかの確認（計算ミスなども含む）
- (4) 以後の決定，すなわち計算通り指令信号を送るか，修正を行なわないか，または停止するか判断基準とする（保安関係も含む）
- (5) 計算結果の制御量が装置の能力からみて妥当かどうかの確認（装置不調などの外乱による制限も含む）
- (6) 予測される誤差限界の確認

以上は要するに

- a) 計算機以上の情報を持って，最終的決定を人間が介入して行なえること
- b) その結果，計算結果以外の方策をとり得，また時間的にも余裕があること
- c) 指令信号による変更よりも，無修正で点火する方が，伝送路を含め装置上の目的達成の信頼性が高いことを前提として，その判断のための情報（すなわち第（2），（3），（5），（6）項）を得るため表示を必要とするものである。これは前章までの最適化計算と相反するような印象を与えるが，a) に示すようにフィードバックされる情報が異なれば止むを得ない。情報の多い分だけレベルの高い最適化が可能であり，計算結果は，その一つの情報と見なされると考えてよい。したがって，上に示されたような情報を，最も簡単に直感的に人間に与えられるような表示方法が要求される。

内容的には以下のように示される。

- ① 設定 (Preset) の値のまま，点火した場合の達成軌道，特に遠近地点高度と傾斜角および誤差
- ② 計算結果による達成可能状態（適当な指標による）
- ③ 計算結果による達成軌道の遠近地点高度，傾斜角および誤差
- ④ 指令信号量，角度修正量と点火時刻
- ⑤ 前段軌道情報，特にその形状，すなわち  $a_3$ ,  $e_3$  または遠地点高度速度
- ⑥ 指令信号送出の限界時刻

このうち①，②，③は，人間のとり得る政策の結果の予測情報であり，⑥は判断を行なう制限時間である。④は装置の可能性のチェックに用いられる。⑤は追跡状態のチェックおよび①～③と合わせて計算結果のチェックに用いられる。

以上は短時間に有効に理解利用できる量をはるかに越えており，実際には分業にならざるを得ず，制約の高いものからチェックして，その結果で最終的に判断せざるを得ない。

## 7. 数 値 例

以上の軌道投入プログラムの有効性を検証するために，過去数回の衛星投入の実績値に適用した場合，どのような軌道が得られるかを数値例により示す。プログラムはフォートラン



IVで作製したものをを用いた。

表 7-1 にL-4S-5, M-4S-2, 3 号機にこのプログラムを適用した場合の達成軌道および制御量を, 実績値と比較して示す。いずれも外乱が大きく目標軌道に完全に一致させることは不可能であるが, 2 章の評価基準に従って多少の改善が可能なが示される。

表 7-1 L-4S-5, M-4S-3, 2 号機における適用例

ロケット名	目 標 軌 道 (SESノートより)				実 績 軌 道				このプログラムにより達成される軌道			操 作 量		
	近地点 [km]	遠地点 [km]	軌道傾斜角 [度]	4段スラスト予定 [km/sec]	近地点 [km]	遠地点 [km]	軌道傾斜角 [度]	4段スラスト実測 [km/sec]	近地点 [km]	遠地点 [km]	軌道傾斜角 [度]	$T_{ig}$ [sec]	$\beta$ [度]	$\phi$ [度]
L-4S-5 (おおすみ)	530	2900	31.5	3.84	335	5160	31.1	4.01	352	2900	29.7	420	90	24.7
M-4S-2 (たんせい)	620	3800	31.3	3.58	988	1110	29.7	3.57	620	1647	31.7	639	90	0
M-4S-3 (しんせい)	620	3900	32.0	3.51	874	1870	32.0	3.50	620	2250	31.5	596	90	0

注 プログラムに使用した4段推力は予定値  
目標軌道とは発射前の性態計算によるもの

さらに表 7-2 には非現実的な場合も含めて非常に大きな外乱が加わる場合のプログラムの適用結果を示す。これにより 3 章の各検討項目に対応した求解結果が示される。例としては, M-4S-3 号機の実績軌道から仮定による種々の目標軌道投入を計算した。

最後にこのプログラムによる操作変数, 達成軌道が外乱によってどう変化するかを全般的に把握する目的で, 非常に大きな範囲にわたって外乱を変化させた場合のプログラム出力を計算し, その結果を図 7-1 以降に示す。

この際, 前段軌道形状は  $a_3, e_3$  という 2 自由度の変化をするが, これを直感的に理解しやすい遠地点高度  $r_{ap3}$  とその頂点速度  $v_{ap3}$  に換算し, これが外乱により変化する場合のプログラム適用結果を示している。目標軌道としては M-4S-2 号機 ( $r_{peN}=620$  km,  $r_{apN}=3800$  km) をとっているが, 前述の各号機は大体等しいものと考えてよい。図中 \* 印の点は, 各ロケットの実績の 3 段目軌道状態を示しており, これに対する解が表 7-1 に示されている。

このような図は, 実際に飛しょうまえに計算作製が可能であって, オンラインの追跡結果から,  $r_{ap3}, v_{ap3}$  を得れば, 計算機がなくても, 操作量を判断することができること, したがって, 万一求解が不可能となっても, この図表よりバックアップできること, また事前に外乱と軌道投入の可能性が大体判断できることから有益なものと考えられる。さらに大体の外乱の大きさが予想され, それに対してなおこの制御方式で目標軌道に投入するためには, どの程度の推力の余裕が必要かを直感的に理解できる。

表 7-1 目標軌道を仮定しての数値例, 前段軌道は M-4 S-3, B<sub>3</sub>

(a=4302.9 km, e=0.6856, i=31.46° 使用)

Case	目 標 軌 道						達 成 軌 道			操 作 量		
	近地点 [km]	遠地点 [km]	軌道傾斜角 [度]	$\Delta I_{nc}$ [度]	4 段スラスト [km/sec]	RASR [km]	近地点 [km]	遠地点 [km]	軌道傾斜角 [度]	$T_{ig}$ [sec]	$\beta$ [度]	$\phi$ [度]
1	500	200	31.0	2.5	3.8	300	541	1713	$i_3$	375	-2	0.0
							500	2000			68.97	
							454	2291			+2	
2	600	600	31.0	6.0	4.0	500	341	651	34.9	379	-2	35.6
							600	600			64.62	
							547	862			+2	
2'	759	759	"	"	"	"	546	835	35.9	492	-2	44.4
							759	759			73.98	
							680	971			+2	
3	600	800	31.0	3.0	3.2	250	524	900	$i_3$	646	-2	0.0
							600	866			84.7	
							592	909			+2	
4	900	3000	31.0	3.0	38.8	250	866	300	30.8	703	-2	16.7
							875	300			70.0	
							866	3003			+2	
5	1000	3000	33.0	1.0	4.0	500	871	4141	34.0	703	90.0	-17.1
							875	4142				
							871	4141				

注  $\Delta I_{nc}$  軌道傾斜角の制限, RASR 保証高度,達成軌道が 3 ケ有るのは操作量の  $\beta$ (Pitch) に  $\pm 2$  度の誤差があった場合の達成軌道を示す。

Case 1 の場合は目標軌道を達成できる。

Case 2 の場合は目標軌道を達成できるが,  $\beta$  に誤差があった場合に保証高度を下まわってしまうので, 目標軌道を Case 2' に変更して解を求める。

Case 3 の場合は近地点は目標に一致するが, 遠地点が合わせられない場合

Case 4 の場合は遠地点は目標に一致するが近地点が合わせられない場合

Case 5 の場合は軌道傾斜角の制限いっぱいまで  $\phi$  をふった場合

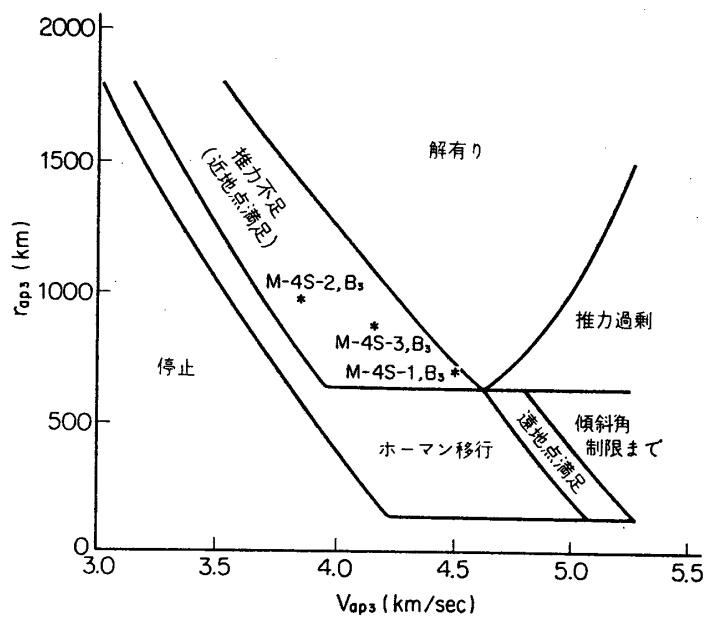


図 7-1

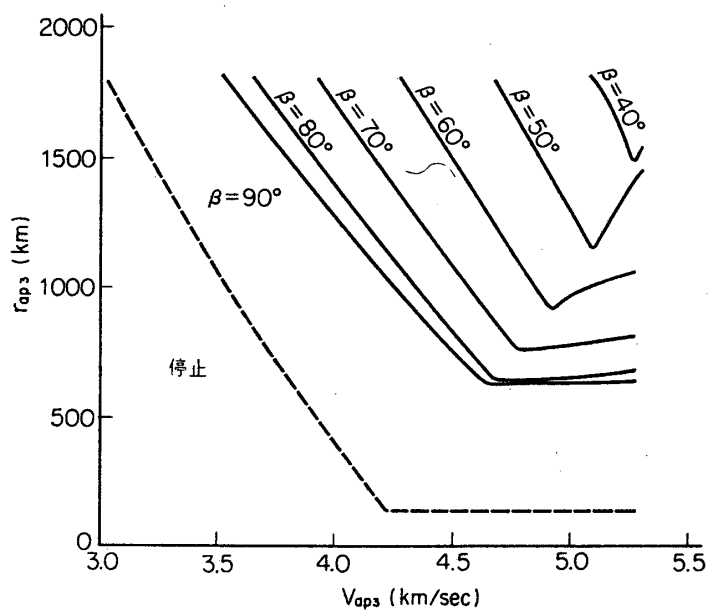


図 7-2 上下方向制御量

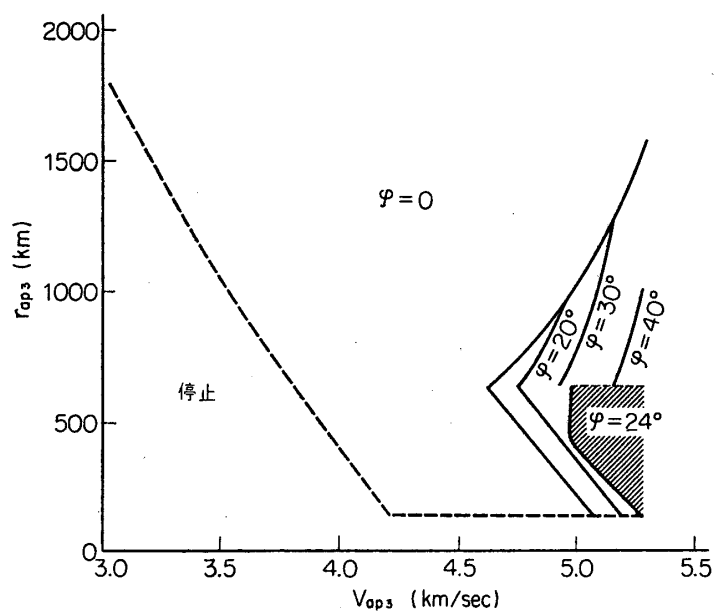


図 7-3 左右方向制御量

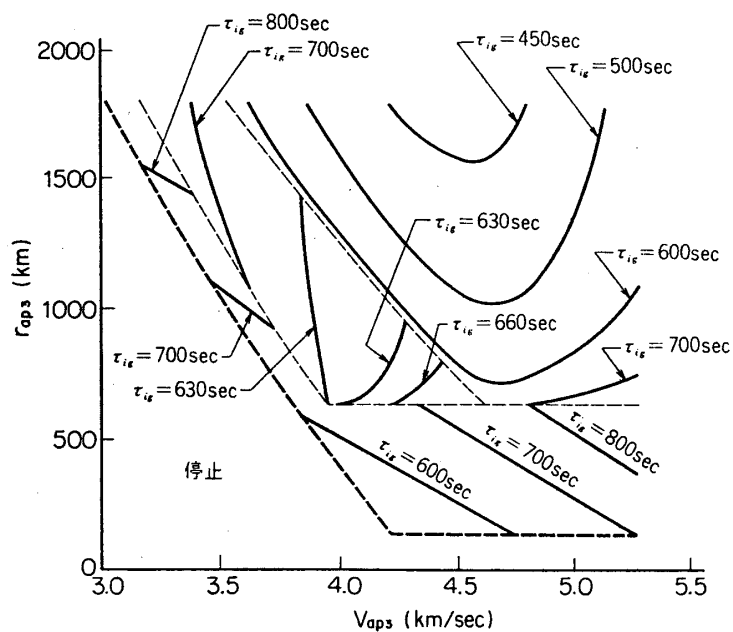


図 7-4 発射時間制御量

## 8. 問 題 点

現在までに以上の検討が行なわれてきたが、次のような問題点が残されている。

## 1. 評価基準

特に評価が問題であって、それに近づけることにあまり意味が認められなければ、このプログラムは意味を失う。また近地点高度を可能な限り維持しようとしているが、ある程度下げてもよいという場合には、多少低めの目標値にするなどの変更が必要である。これは打上げ能力に余裕を持たすことにはかならず、制御を行なうということは、本来外乱のある場合には、これを余裕のある能力で打消そうということであることから止むを得ない。

## 2. 制御誤差

これをどう考慮するかは打上げの思想にもよる。特にこの結果停止する場合は、その基準をよく決めておかなければならない。

## 3. 速度インパルス近似の影響

上下方向に向けて発射することも多く、上昇中に発射することもあるので、速度インパルスと考えたことによる誤差の補正も必要になる。簡単な補正式でくり返し計算できれば最も現実的であり現在検討中であるが、方式の基本概念を変えるものではない。

以上の問題点については、実際の衛星打上げの目的や考え方によるので、現状で技術的検討は一応終了したものとする。数値例に示すように、前段軌道に大きな誤差が存在すれば、その効果も少なくなるが基本的には常に実現可能な最適解を求めるので実用上の応用価値は十分期待できるものである。

本方式の検討に当たっては「Radio Guidance 検討会議」において、特に斉藤教授、渡辺教授、野村教授、浜崎教授、東口教授に本方式についての基本概念や、装置系の概念またはその関連について終始御指導いただくとともに、具体的な手法についても長期間詳細に御検討いただき、種々有益な御助言をいただいたことを厚く感謝する。また本方式中最も重要な 3.4 における求解計算については、同会議で検討中、日本電気伊藤、仲田、平石氏により求解方程式が誘導され、この方式の計算時間を著るしく短縮することが可能となり、実用化に際しての貢献が大きかったことを付記し、特に感謝する次第である。さらに同会議において一諸に御検討いただき、プログラミングにも御協力いただいている日本電気のかたがた、および方式全体にわたり御検討、御助言をお願いした松尾助手に感謝の意を表わしたい。

1972 年 6 月 12 日 新設部 (工学)

## 付 録

## A. 3.3 の誘導

[1] 軌道推移に必要な増速ベクトル  $\Delta v$

楕円軌道の基本式から

$$r = a_3(1 - e_3 \cos E_3) = a_4(1 - e_4 \cos E_4) \quad (\text{A-1})$$

また高度  $r$  における速度ベクトルは、図 A-1 の座標系で

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h/r \\ \pm v \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h/r \\ \pm \sqrt{v^2 - (h/r)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } h &= \sqrt{a\mu(1-e^2)} \\ v^2 &= 2E + 2\mu/r = -\mu/a + 2\mu/r \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

であって

$$\begin{aligned} v \sin \theta &= \pm \sqrt{v^2 r^2 - h^2} / r = \pm (1 - e \cos E)^{-1} a^{-1} \\ &\times \sqrt{-\frac{\mu}{a} a^2 (1 - e \cos E)^2 + 2\mu a (1 - e \cos E) - a\mu(1 - e^2)} \\ &= \frac{\sqrt{a\mu e}}{a(1 - e \cos E)} \sin E \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

とも表わされる。

以上から、 $E$  が  $[0, \pi]$  にある場合と  $[\pi, 2\pi]$  にある場合は、垂直方向速度の符号が変わるだけで対称となる。実際には発射地になるべく近い所で軌道投入を行なうことが望ましいので、 $E \in [0, \pi]$  のみを考察する。

(A-2) ~ (A-4) より

$$v_3 = \sqrt{\frac{\mu}{a_3}} \cdot \frac{1}{1 - e_3 \cos E_3} \left[ \sqrt{1 - e_3^2} \right] e_3 \sin E_3 \quad (\text{A-5})$$

同様に

$$v_4 = \sqrt{\frac{\mu}{a_4}} \cdot \frac{1}{1 - e_4 \cos E_4} \left[ \sqrt{1 - e_4^2} \right] \pm e_4 \sin E_4 \quad (\text{A-6})$$

ただし (A-6) において  $E_4$  は  $[0, 2\pi]$  が許されるが、物理的意味を明確にするため、 $E_4 \in [0, \pi]$  として、 $\pm \sin E_4$  と表わす。

以上から、必要な増速ベクトル  $\Delta v$  は

$$\Delta v = v_4 - v_3 = \frac{\sqrt{\mu}}{r} \left[ \frac{\sqrt{a_4(1 - e_4^2)} - \sqrt{a_3(1 - e_3^2)}}{\pm \sqrt{a_4 e_4 \sin E_4} - \sqrt{a_3 e_3 \sin E_3}} \right] \triangleq \frac{\sqrt{\mu}}{r} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

ただし  $E_4$  は (A-1) より消去可能で、 $A, B$  は  $E$  のみの関数となるから、 $E$  を変化したとき、 $\Delta v^2(E)$  の変域が求まり、これが  $[\alpha v_m^2, v_m^2]$  (ただし  $\alpha$  は軌道面変更による等価的増速の減少を示すもので、 $v_m > 2v$  でない限り、 $0 \leq \alpha \leq 1$  である。 $v_m > 2v$  であれば  $1 - \frac{2v}{v_m} < \alpha < 1$  となる。図 A-2 参照) と共通部分を持つとき解が存在する。これを調べるため、 $\Delta v^2$  の曲線追跡を行なう。

## [2] 変域

$$\begin{aligned} (\text{A-1}) \text{ より } |\cos E_4| &= \frac{1}{e_4} \left| 1 - \frac{a_3}{a_4} (1 - e_3 \cos E_3) \right| \leq 1 \\ & \quad (\text{A-8}) \end{aligned}$$

でなければならない。

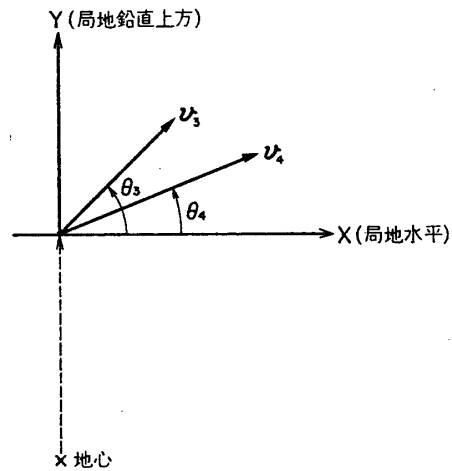


図 A-1

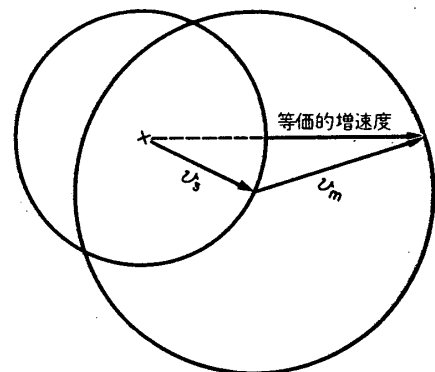


図 A-2 等価的増速度の変化

等号が満足される  $E_3 \in [0, \pi]$  が存在するとき

$$\begin{aligned} a_3(1 - e_3 \cos E_{pe4}) &= a_4(1 - e_4) \\ a_3(1 - e_3 \cos E_{ap4}) &= a_4(1 + e_4) \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

とするば

- (1)  $r_{ap4} > r_{ap3} > r_{pe4} > r_{pe3}$  では,  $E_{pe4}$  のみが存在し, 解は  $E \in [E_{pe4}, \pi]$   
 (2)  $r_{ap3} > r_{ap4} > r_{pe4} > r_{pe3}$  では, とともに存在し,  $E \in [E_{pe4}, E_{ap4}]$  に解が存在する.  
 (また  $r_{ap3} > r_{ap4} > r_{pe3} > r_{pe4}$  では  $E \in [0, E_{ap4}]$  に,  $r_{ap4} > r_{ap3} > r_{pe3} > r_{pe4}$  では  $E \in [0, \pi]$  に存在するが, 現実的でない,  $[r_{ap4}, r_{pe4}] \cap [r_{ap3}, r_{pe3}] = \phi$  なら解は存在しない)

[3] 曲線追跡

$$\Delta v^2 = \frac{\mu}{r^2}(A^2 + B^2) \quad (\text{A-10})$$

で示されるが,  $B$  が複号を含むので, 一般に  $E$  に対し 2 個の解が存在し,  $\Delta v^2$  は 2 本の曲線となる. ただし  $E_{pe4}$ ,  $E_{ap4}$  では,  $\cos E_4 = 1$  で一意に定まる.

$$\text{また} \quad \frac{\partial \Delta v^2}{\partial E} = \frac{2\mu}{r^2} \left[ -\frac{1}{r}(A^2 + B^2) \frac{\partial r}{\partial E} + B \frac{\partial B}{\partial E} \right] \quad (\text{A-11})$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad \frac{\partial r}{\partial E} &= ae \sin E, \quad \frac{\partial B}{\partial E} = \pm \sqrt{a_4 e_4} \cos E_4 \frac{\partial E_4}{\partial E} - \sqrt{a} e \cos E \\ a_4 e_4 \sin E_4 \frac{\partial E_4}{\partial E} &= ae \sin E \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

である.

上式は全て  $E$  の関数であって,  $E$  が与えられれば容易に求めることができるが, (A-11) が 0 になる  $E$  を求めるのは, 探索によらざるを得ない.

今特殊な点における  $\Delta v^2$ ,  $\partial \Delta v^2 / \partial E$  を調べる.

①  $E = E_{pe4}$

$\sin E_4 = 0$  であり,  $\sin E \neq 0$  であるため (A-12) より  $\partial E_4 / \partial E = \pm \infty$  すなわち  $\partial \Delta v^2 / \partial E = \mp \infty$  ( $B < 0$ ) ( $E \geq E_{pe4}$  のみ) である. (A-13)

②  $E = \pi$  (解の存在する場合)

$B = \pm \sqrt{a_4 e_4} \sin E_4$ ,  $\partial B / \partial E = \sqrt{a} e$  より

$$\partial \Delta v^2 / \partial E = \pm \frac{2\mu}{r^2} \sqrt{a_4 e_4} \sqrt{a} e \sin E_4 \quad (\text{A-14})$$

であるが,  $E = \pi$  において符号を逆にした曲線が対称であることから  $\frac{\partial \Delta v^2}{\partial E} \Big|_{\pi} + \frac{\partial \Delta v^2}{\partial E} = 0$  となるのは当然である.  $\Delta v^2$  は当然  $\pm$  いずれの場合も等しい.

以上より  $E \in [E_0, \pi]$  において + 側の  $\Delta v^2$  ( $E_4 \in [0, \pi]$  となるように打つ) は極小値, - 側の  $\Delta v^2$  ( $E_4 \in [\pi, 2\pi]$  となるように打つ) は極大値を持ち, 両端で一致し,  $\pi$  においては交叉していることが示される. この結果図 3-1 や図 A-3 のような変化をする.

③  $B = 0$  の地点 ( $\sqrt{a_4 e_4} \sin E_4 = \sqrt{a} e \sin E$  すなわち水平に  $v_m$  を打つ場合)

これは角運動量を最大とする打ち方であるが, (A-11) より

$$\frac{\partial \Delta v^2}{\partial E} = -\frac{2\mu}{r^3} A^2 ae \sin E < 0 \quad (\text{A-15})$$

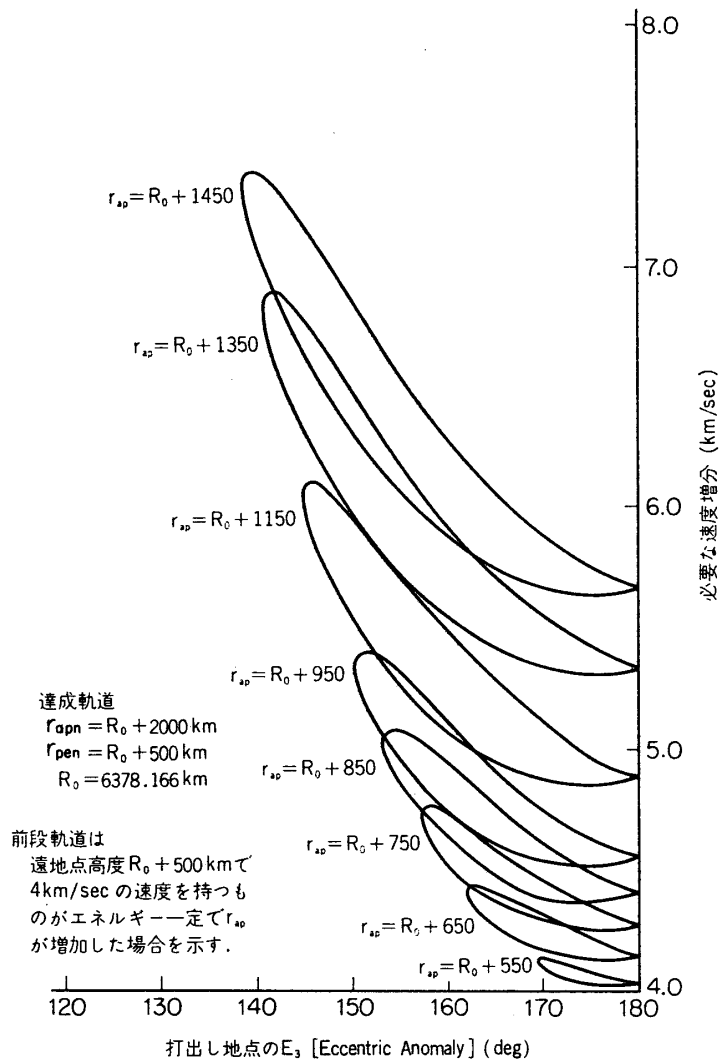


図 A-3 軌道達成に必要な速度インパルスの変化例

このような  $E$  は (A-1) と  $B$  を連立して

$$(1 - e \cos E)^2 = a_4/a(a_4 - a) \cdot [a_4(1 - e_4^2) - a(1 - e^2)] = \frac{r^2}{a^2} \quad (\text{A-16})$$

の解として求められる。ただし  $E \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$

この  $E$  と  $\pi$  の間に極値が存在する。

以上の計算には  $E$ ,  $E_4$  が含まれているので、これを消去して、 $r$  のみで表わすと (A-2) より

$$\begin{aligned} \Delta v^2 &= \left( \frac{h_4 - h_3}{r} \right)^2 + \left\{ \pm \sqrt{v_4^2 - \left( \frac{h_4}{r} \right)^2} - \sqrt{v_3^2 - \left( \frac{h_3}{r} \right)^2} \right\}^2 \\ &= -2h_3h_4/r^2 + v_3^2 + v_4^2 \pm 2\sqrt{v_3^2 - \left( \frac{h_3}{r} \right)^2} \sqrt{v_4^2 - \left( \frac{h_4}{r} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$



ただし

$$v_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a_i}} \quad (i=3, 4) \quad (\text{A-3})$$

となり  $1/r$  に関する 4 次式である。これを用いると、(b)  $E = \pi$  すなわち  $r = a(1+e)$ 

$$\Delta v^2 = -2h_3h_4/\{a(1+e)\}^2 + \frac{4\mu}{a(1+e)} - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu}{a_4} \quad (\text{A-18})$$

(a)  $E = E_{p4}$  すなわち  $r = a_4(1-e_4) (< a(1+e))$ 

$$\Delta v^2 = -2h_3h_4/a_4(1-e_4) + \frac{4\mu}{a_4(1-e_4)} - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu}{a_4} \quad (\text{A-19})$$

(c)  $B = 0$ 

$$\Delta v^2 = \frac{(h_4 - h_3)^2}{r^2} \text{ であるが (9-2) より } \frac{1}{r^2} = \frac{\mu \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right)}{h_4^2 - h_3^2} \text{ であるから}$$

$$\Delta v^2 = \mu \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) \left( \frac{h_4 - h_3}{h_3 + h_4} \right) \quad (\text{A-20})$$

となる。

(d) 進行方向に打出す場合

$$\Delta v^2 = (v_3 - v_4)^2 = v_3^2 \left( 1 - \frac{h_4}{h_3} \right)^2$$

$$\text{一方 } v_3^2 = -\frac{\mu}{a} + \frac{2\mu}{r}, \quad v_4^2 = v_3^2 \frac{h_4^2}{h_3^2} = -\frac{\mu}{a_4} + \frac{2\mu}{r}, \quad v_4 = \frac{h_4}{h_3} v_3$$

より

$$v_3^2 \left( 1 - \frac{h_4}{h_3} \right)^2 = \frac{\mu}{a_4} - \frac{\mu}{a_3}$$

であるから

$$\Delta v^2 = \mu \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) \frac{h_4 - h_3}{h_3 + h_4} \quad (\text{A-21})$$

となり、いずれの場合も  $\Delta v^2$  は等しい。即ち (c) (d) の打ち方では同じ  $v_m$  に対して同じ軌道を達成することになる。

このときの  $r$  は

$$r = \frac{2(h_3^2 - h_4^2)}{\frac{h_3^2}{a_4} - \frac{h_4^2}{a_3}}$$

により与えられる。

$$\text{また } \frac{\partial E}{\partial r} > 0 \text{ で } \frac{\partial \Delta v^2}{\partial r} \text{ は、この地点で } \frac{2\mu}{r} \left[ -2 + \frac{v_4}{v_3} + \frac{v_3}{v_4} \right] > 0$$

であるから、明らかに  $\Delta v^2$  の極小値は (c), (d) の間に存在し、(c), (d) における  $\Delta v^2$  (A-20, 21式) もかなりよい近似となることが示される。

$\frac{\partial^2 \Delta v^2}{\partial E^2}$  も比較的簡単に計算され

$$\frac{\partial^2 \Delta v^2}{\partial E^2} = -\frac{6\mu}{r^4} [A^2 + B^2] (ae \sin E)^2 - \frac{2\mu}{r^3} \left[ \left( 2B \frac{\partial B}{\partial E} ae \sin E \right) + (A^2 + B^2) ae \sin E \right]$$

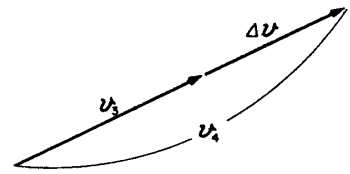


図 A-4

$$-\frac{4\mu}{r^2} \frac{\partial r}{\partial E} \frac{\partial B}{\partial E} B + \frac{2\mu}{r^2} B \left( \frac{\partial^2 B}{\partial E^2} \right) + \frac{2\mu}{r^2} \left( \frac{\partial B}{\partial E} \right)^2$$

で与えられ、初期値として (c), (d) の中点をとると、 $\frac{\partial \Delta v^2}{\partial E} = 0$  の点、すなわち  $\Delta v^2$  の最小値はニュートン法でも容易に求められる。

(e)  $E = E_{ap4}$  (存在する場合)

(A-12) において、 $E_4 = \pi$  で  $\cos E_4 = -1$  となるから  $\frac{\partial \Delta v^2}{\partial E} = \pm \infty$  となり、図 3-1 に示されるような閉曲線となる、(b), (c), (d) に相当する点は存在する保証はない。

### B. 3-4 の誘導

図 A-5 の打出し角度  $\theta_D$  を用いると、

$$h_4 = h_3 + v_m r_3 \cos \theta_D \quad (\text{A-22})$$

$$C_4 = C_3 + \frac{1}{2} v_m^2 + v_3 v_m \sin(\theta_D + \beta) \quad (\text{A-23})$$

$$h_3 = r_3 v_3 \sin \beta \quad (\text{A-24})$$

$$C_3 = \frac{1}{2} v_3^2 - \frac{\mu}{r_3} \quad (\text{A-25})$$

と示されるので、

$$\Delta h = h_4 - h_3 = v_m r_3 \cos \theta_D \quad (\text{A-22}')$$

また  $\Delta C = C_4 - C_3$  とおくと

$$\Delta C - \frac{1}{2} v_m^2 = v_3 v_m \sin(\theta_D + \beta) \quad (\text{A-23}')$$

となる。(A-22'), (A-23') より

$$\Delta h \left( \Delta C - \frac{1}{2} v_m^2 \right) = v_m^2 r_3 v_3 \cos \theta_D \sin(\theta_D + \beta) \quad (\text{A-26})$$

であるから、(A-24) 式を用いて  $\sin \beta \neq 0$  (前段が直線軌道でない) の場合

$$\frac{\cos \theta_D \sin(\theta_D + \beta)}{\sin \beta} = \frac{\Delta h \left( \Delta C - \frac{1}{2} v_m^2 \right)}{v_m^2 h_3} \quad (\text{A-27})$$

(A-27) 式右辺は前段軌道によって定まる定数である。したがって

$$K \equiv \Delta h \left( \Delta C - \frac{1}{2} v_m^2 \right) / v_m^2 h_3 \quad (\text{A-28})$$

とすれば、(A-27), (A-28) 式より

$$\frac{\cos \theta_D \sin(\theta_D + \beta)}{\sin \beta} = \frac{\frac{1}{2} (\sin(2\theta_D + \beta) + \sin \beta)}{\sin \beta} = K \quad (\text{A-29})$$

となり

$$\frac{\sin(2\theta_D + \beta)}{\sin \beta} = 2 \left( K - \frac{1}{2} \right) \equiv K' \quad (\text{A-30})$$

を得るが、 $\cos \beta \neq 0$  (前段遠近地点でない) の場合には

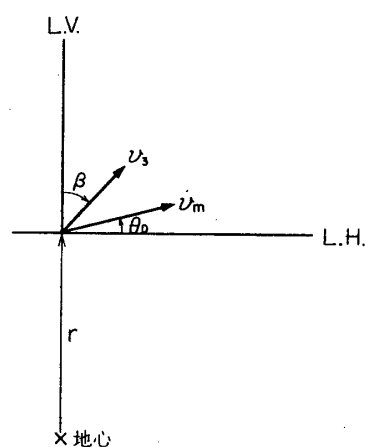


図 A-5

$$\frac{\sin(2\theta_D + \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin 2\theta_D}{\tan \beta} + \cos 2\theta_D = K' \quad (\text{A-31})$$

$$\text{すなわち} \quad \tan \beta = \frac{\sin 2\theta_D}{K' - \cos 2\theta_D} \quad (\text{A-32})$$

を得る. 一方 (A-24), (A-25) 式より  $v_3$  を消去すると

$$\sin^2 \beta = \frac{h_3^2}{2C_3 r_3^2 + 2\mu r_3} \quad (\text{A-33})$$

を得る.

一方 (A-22') 式より  $\cos \theta_D = 0$  (局地垂直方向以外へ発射) の場合,

$$r_3 = \Delta h / v_m \cos \theta_D \quad (\text{A-34})$$

であるから, (A-33), (A-34) 式より

$$\sin^2 \beta = \frac{h_3^2 v_m^2 \cos^2 \theta_D}{2C_3 \Delta h^2 + 2\mu \Delta h v_m \cos \theta_D} \quad (\text{A-35})$$

を得るが,

$$\sin^2 \beta = \frac{\tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} \quad (\text{A-36})$$

に (A-32), (A-35) 式を用いれば

$$\sin^2 \beta = \frac{\left( \frac{\sin 2\theta_D}{K' - \cos 2\theta_D} \right)^2}{1 + \left( \frac{\sin 2\theta_D}{K' - \cos 2\theta_D} \right)^2} = \frac{4 \sin^2 \theta_D \cos^2 \theta_D}{K'^2 - 2K' \cos \theta_D + 1} = \frac{4(1 - \cos^2 \theta_D) \cos^2 \theta_D}{K'^2 - 2K' \cos \theta_D + 1} \quad (\text{A-37})$$

より結局

$$\frac{h_3^2 v_m^2 \cos^2 \theta_D}{2C_3 \Delta h^2 + 2\mu \Delta h v_m \cos \theta_D} = \frac{4(1 - \cos^2 \theta_D) \cos^2 \theta_D}{K'^2 - 2K'(2\cos^2 \theta_D - 1) + 1} \quad (\text{A-38})$$

を得る. ここで  $\cos \theta_D = X$  とおいて整理すれば

$$\frac{h_3^2 v_m^2}{2C_3 \Delta h^2 + 2\mu \Delta h v_m X} = \frac{4(1 - X^2)}{K'^2 - 2K'(2X^2 - 1) + 1} \quad (\text{A-39})$$

すなわち

$$X^3 + \left( \frac{2C_3 \Delta h^2 - h_3^2 v_m^2 K'}{2\mu v_m \Delta h} \right) X^2 - X + \frac{(K' + 1)^2 h_3^2 v_m^2 - 8C_3 \Delta h^2}{8\mu v_m \Delta h} = 0 \quad (\text{A-40})$$

$$\text{また } r_3 v_m X = \Delta h \quad (\text{A-41})$$

(A-40) 式は  $X$  についての 3 次方程式であり, 解析的に解くことができる. また目標軌道が達成できる条件は (A-40), (A-41) 式の  $X$ ,  $r_3$  が次の範囲に解を持つことである.

$$|X| \leq 1, \quad r_{pe3} \leq r_3 \leq r_{ap3} \quad (\text{A-42})$$

実際には (A-40) 式の左辺を  $f(X)$  とおくと

$$\begin{aligned} f(X) &= X^3 + aX^2 - X + b & \text{ただし} \\ a &= \frac{2C_3 \Delta h^2 - h_3^2 v_m^2 K'}{2\mu} \\ b &= \frac{(K' + 1)^2 h_3^2 v_m^2 - 8C_3 \Delta h^2}{8\mu v_m \Delta h} \end{aligned}$$

現実的な場合として  $\Delta h > 0$  とすると

$$f(0) = b > 0$$

$$f(1) = f(-1) = a + b = \frac{v_m h_3^2 (K' + 1)^2}{8\mu \Delta h} > 0$$

$f'(X) = 0$  より  $f(X)$  が極値を持つ  $X$  の値を求めると

$$f'(X) = 3X^2 + 2aX - 1$$

$$\therefore X_{m1} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 3}}{3} > 0, \quad X_{m2} = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 3}}{3} < 0$$

以上の条件を考えると  $f(X)$  のグラフは図 A-6 ようになる。判別式  $D$  の符号を考えて

$$D < 0 \text{ かつ } X_{m1} < 1$$

の時解が存在する。

$X$  の求解は文献 [7] による方法により、平方根および三角関数の計算のみで与えられ、3 次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  が 3 実根を持つとき、その根は

$$p < 0, \quad q^2 + p^3 \leq 0 \text{ の場合}$$

$$y_1 = -2r \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$y_2 = +2r \cos(60^\circ - \varphi/3)$$

$$y_3 = +2r \cos(60^\circ + \varphi/3)$$

で与えられる。ここに

$$3p = (3ac - b^2)/3a^2, \quad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^3} + \frac{d}{a}$$

$$\cos \varphi = \frac{q}{r^3}, \quad r = \pm \sqrt[3]{|p|}$$

により計算され、 $r$  の符号は  $q$  の符号と等しくとる。

$\cos \theta_D = X_0$  が得られれば、打出し地点は、その離心近点離角を  $E_0$  として、 $r = a_3(1 - e_3 \cos E)$  および (A-34) 式から、 $a_3 e_3 \neq 0$  のとき

$$E_0 = \cos^{-1} \left( \frac{a_3 - \frac{\Delta h}{v_m X_0}}{a_3 e_3} \right)$$

で与えられる。

### C. 3.5 の誘導

[1] 発射地点高度を半径とする円軌道に投入するために必要な速度増分  $v_{mc}$  は、単に高度のみの関数となる (ただし局地水平方向速度と同方向に打出す場合のみを考える。)

$a_4 = r$ ,  $v_4$  一定で  $e_4 = 0$  であるから、 $h_4 = a_4 v_4 = \sqrt{a_4 \mu (1 - e_4^2)}$  より

$$v_4 = +\sqrt{\frac{\mu}{r}} \equiv v_{mc}(r) \quad (\text{A-43})$$

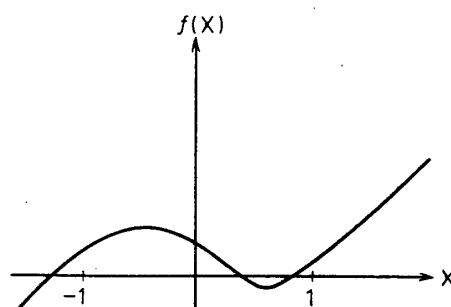
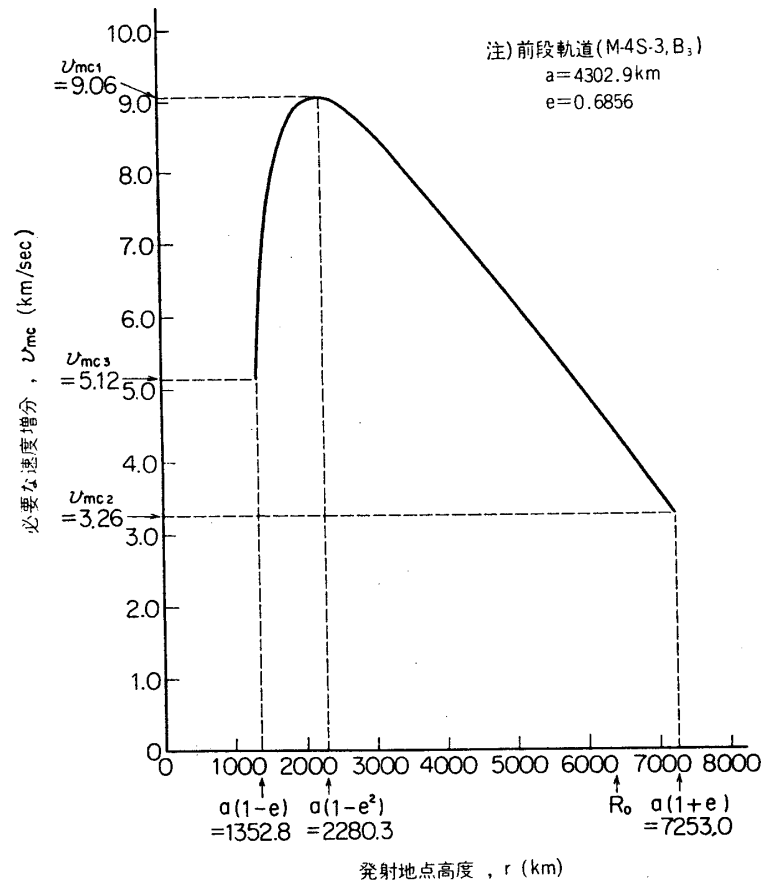


図 A-6

図 A-7 発射地点高度を半径とする円軌道に投入するために必要な速度増分  $\Delta v$ 

を得る.

前段軌道  $a_3$ ,  $e_3$  が与えられると

$$a_3(1-e_3) \leq r \leq a_3(1+e_3)$$

の範囲で, 円軌道投入に必要な  $v_{mc}$  は

$$\begin{aligned} v_{mc}^2 &= (v_4 - h_3/r)^2 + (v_3 \sin \theta)^2, \quad (v_3 \sin \theta)^2 = v_3^2 - \left(\frac{h_3}{r}\right)^2 \\ &= v_4^2 - 2v_4 h_3/r + v_3^2 \\ &= 3\mu/r - 2\sqrt{\mu}/\sqrt{r} \cdot \frac{h_3}{r} + 2C_3 \end{aligned} \quad (\text{A-44})$$

$$\text{今 } y = 3\mu/r - 2\sqrt{\frac{\mu}{r}} \cdot \frac{h_3}{r} \quad (\text{A-45})$$

とおけば

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{3\sqrt{\mu}}{r^2} \left( -\sqrt{\mu} + \frac{h_3}{\sqrt{r}} \right) \quad (\text{A-46})$$

となるので  $y$  は

$$r_0 = \frac{h_3^2}{\mu} = a_3(1-e_3^2) \quad (\text{A-47})$$

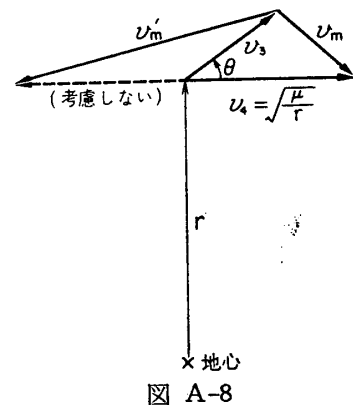


図 A-8

で最大値

$$v_{mc1}^2 = \frac{\mu}{r} \left( 3 - \frac{2\sqrt{a_3(1-e_3^2)}}{\sqrt{r}} - (1-e_3^2) \right) = \mu e_3^2 / \{a_3(1-e_3^2)\} \quad (\text{A-48})$$

をとり、これより高い点では、これ以下の推力で円軌道移行が可能となる。

さらにその高度  $r$  で円軌道移行に必要な速度増分  $v_{mc}(r)$  以上の推力があれば、その点を近地点とし、 $e > 0$  の楕円軌道へ投入可能であり、軌道面を変化させれば、円軌道に投入することも、可能となる ( $\sqrt{v_m^2 - (v_3 \sin \theta)^2} > v_4 + v_3 \cos \theta$  では不可能)  $v_{mc} > v_m$  では、その点を遠地点として  $e > 0$  の楕円軌道になる。

逆にある  $v_m$  が与えられたとき、合成速度が水平になるように打出した場合の達成軌道の遠近地点は  $(2a_4 - r)$  で図 A-10 のように示される。

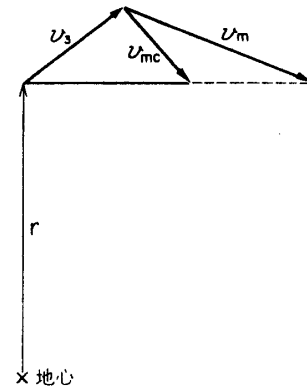


図 A-9

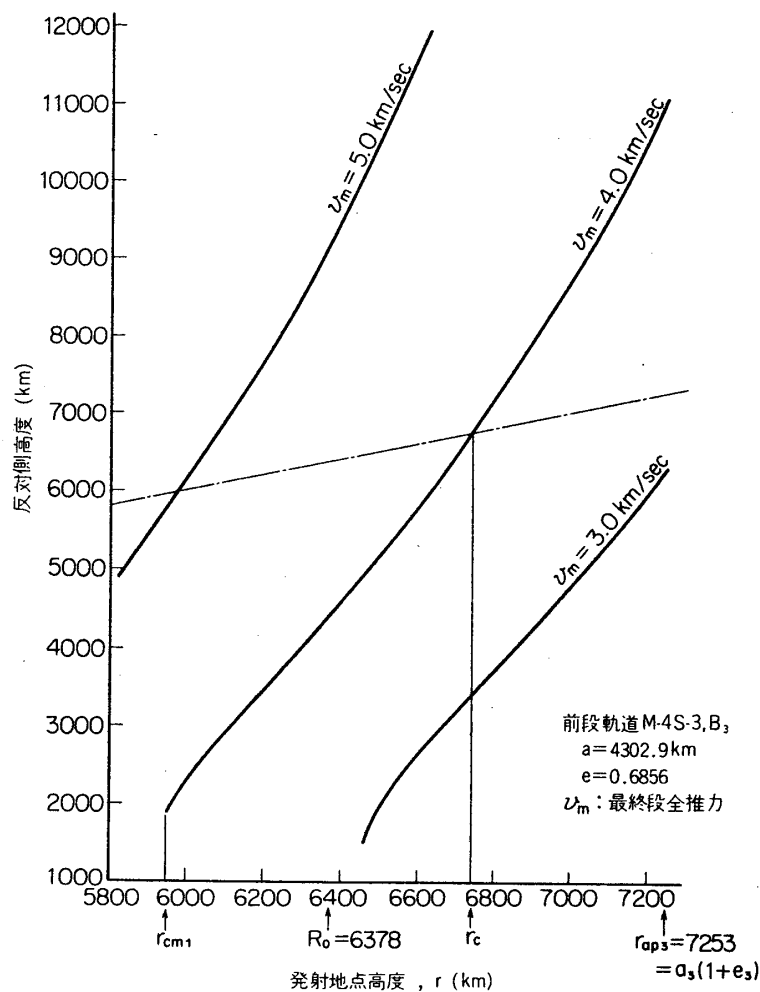


図 A-10 発射地点で合成速度が水平になるように最終段を打ったときの遠近地点高度

ここに  $r_c$  は  $v_m^2 = v_{mc}^2(r_c)$  となる点を表わす.

また  $r_{cm}$  は  $(v_3 \sin \theta)^2 = v_m^2$  となる高度であって,

$$v_3^2 - \frac{h_3^2}{r^2} = -\frac{\mu}{a} + \frac{2\mu}{r} - \frac{h_3^2}{r^2} = v_m^2 \quad (\text{A-49})$$

の根である.  $v_m = 0$  の場合の根は  $1/r$  の 2 次式であって,  $\frac{1}{a(1+e)}$ ,  $\frac{1}{a(1-e)}$  であるから,

上式の根  $1/r$  は, その中点  $\frac{1}{a(1-e^2)}$  を中心に存在する.  $v_m^2 > v_{mc1}^2$  であれば常に合成速度が水平になるように打ち出せてその点が近地点となる.  $v_m^2 < v_{mc}^2$  では  $[r_{cm1}, a(1+e)]$  および  $[a(1-e), r_{cm2}]$  のみに存在する,  $r_c > a(1+e)$  の場合には, Hohmann 移行を行なっても, その点が遠地点になる.

$r_c$  は, (A-44) 式  $\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$  に関する 3 次式より求められ,  $r_{cm}$  は  $1/r$  に関する 2 次式 (A-48)

よりただちに求められる.  $r_c < r_{cm1}$  となることはあり得ず, 現実には  $r = a(1-e^2)$  以下の高度は余り問題にならない.

$$\begin{aligned} \text{なお} \quad r = a(1+e) \text{ では } v_{mc2}^2 &= \mu/a(1+e) \cdot (1 - \sqrt{1-e})^2 \\ r = a(1-e) \text{ では } v_{mc3}^2 &= \mu/a(1-e) \cdot (1 - \sqrt{1+e})^2 \end{aligned} \quad (\text{A-50})$$

であり,

$$Z \equiv \frac{a}{\mu}(v_{mc2}^2 - v_{mc3}^2) = \frac{1}{1-e^2}[-6e + 2(1+e)^{3/2} - 2(1-e)^{3/2}]$$

となる, 右辺 [ ] 内は,  $e$  に関する 2 次微分が,  $0 \leq e \leq 1$  で常に負  $\left(\frac{3}{2}[(1+e)^{-1/2} - (1-e)^{-1/2}]\right)$  で, 1 次微分は,  $e=0$  で 0 となるので,  $0 \leq e \leq 1$  で  $z \leq 0$  である. したがって頂点で円軌道に投入する場合に,  $v_{mc}^2$  は最小値をとる.

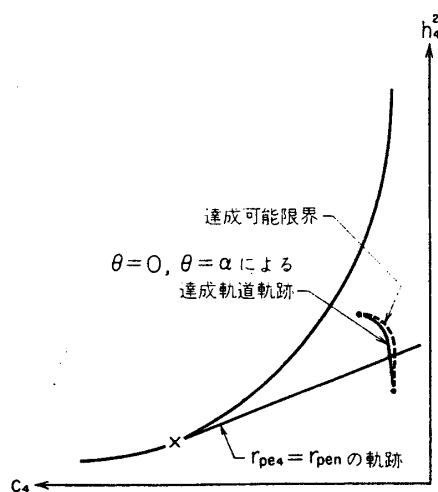


図 A-11

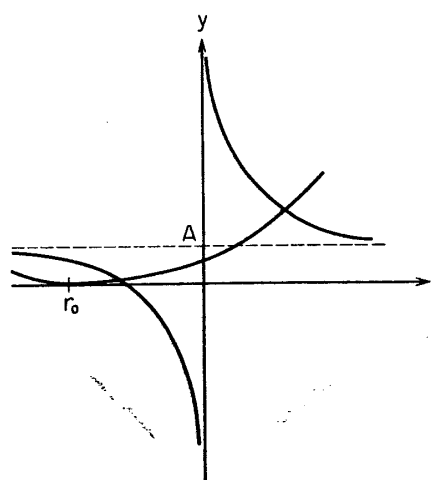


図 A-12

[2] 近地点高度  $r_{peN}$  が与えられた場合, 軌道形状を示す 2 個のパラメータ  $a, e$  には

$$r_{peN} = a_4(1 - e_4) \quad (A-51)$$

の制約が加わり, エネルギー, 角運動量は,

$$a_4 = -\frac{\mu}{2C_4}, \quad e_4 = \sqrt{1 + \frac{2C_4}{\mu^2} h_4^2} \quad (A-52)$$

で表わされている. したがって (A-51) に (A-52) を代入して  $h_4^2$  で微分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dC_4}{dh_4^2} \frac{\partial}{\partial C_4} \{a_4(1 - e_4)\} - a_4 \frac{\partial e_4}{\partial h_4^2}, \quad \frac{\partial}{\partial C_4} \{a_4(1 - e_4)\} = \frac{a_4}{2e_4 C_4} (e_4 - 1)^2 \\ a_4 \frac{\partial e_4}{\partial h_4^2} &= \frac{a_4}{2e_4} \frac{2C_4}{\mu^2} \quad \text{より} \\ \frac{dC_4}{dh_4^2} &= \frac{(2a_4 C_4)^2}{\mu^2} \bigg/ 2a_4^2 (e_4 - 1)^2 = \frac{1}{2r_{peN}^2} = \text{const} \end{aligned} \quad (A-53)$$

を得,  $h_4^2 - C_4$  線図上直線となって示されることにはかならない.

この条件で遠地点高度

$$r_{ap4} = a_4(1 + e_4) = 2a_4 - r_{peN} \quad (A-54)$$

を最大にするには,  $a_4$  最大 (すなわち  $C_4$  最大) または  $h_4^2$  最大にしなければならない.

したがって, その高度で  $h_4^2$  最大とする発射, すなわち  $v_m$  を局地水平 ( $v_3$  進行方向) に打出す場合, およびその高度で,  $C_4$  最大とする発射, すなわち  $v_m$  を  $v_3$  方向へ打出す場合の内近地点高度が  $r_{peN}$  になるものは, かなりよい近似解を与えることが予想される.

ある高度が指定され ( $r$  とする),  $v_m$  によって  $r_{pe4} = r_{peN}$  となる発射方向を求めるため

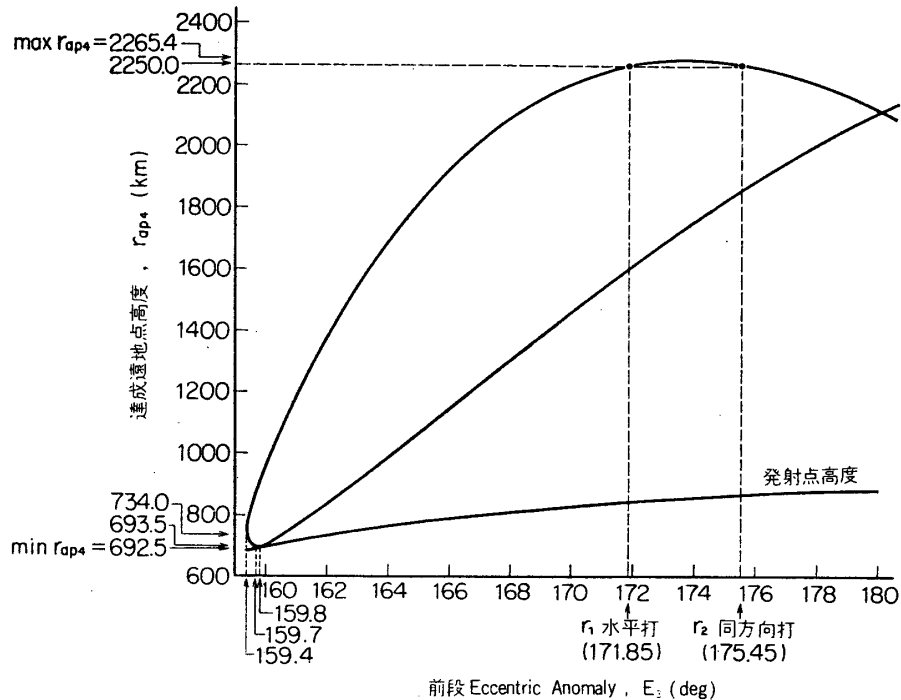


図 A-13 近地点高度一定での遠地点高度変化 (同一平面内移行)



には, その結果達成される  $C_4$ ,  $h_4^2$  が, 条件 (A-51) を満足するものを求めることになり, かなり複雑である. 1 例として図 A-13 を得る.

水平から角度  $\theta$  で  $v_m$  を打出したものとし,  $v_3$  は水平から  $\alpha$  の方向とすると,

$$h_4 = h_3 + v_m \cdot r \cdot \cos \theta \quad (\text{A-55})$$

$$C_4 = C_3 + v_3 \cdot v_m \cdot \cos(\theta \sim \alpha) + v_m^2/2 \quad (\text{A-56})$$

であり,  $r$  と  $v_3$  には (A-3) 式の関係があって, これと (A-51), (A-52) より  $\theta$  は一意に定まるはずであるが, 解析的に求めることは困難である.

しかしながら,  $\cos \theta = 0$  で  $r_{pe4} = r_{peN}$  となる高度を  $r_1$  とすると, これより低い高度では, (A-55) は減少するので, 上の条件のもとでは  $r_{ap4}$  は減少する.  $\theta = \alpha$  のとき  $r_{pe4} = r_{peN}$  である高度を  $r_2$  とすると, これより高い高度では,  $v_3$  が減少して, (A-56) が減少するので,  $r_{ap4}$  は減少する.

上の二通りの打ち方は,  $r_{ap3}$ ,  $r_{pe3}$  において一致し,  $r_{ap3}$  においては  $r_{pe4} > r_{peN}$ ,  $r_{pe3}$  においては  $r_{pe4} \leq r_{pe3} < r_{peN}$  であるから, いずれもうえに述べた解が存在する, 前節に示した注意より, この二つの打ち方により達成される軌道はまったく等しくなる.

この軌道に投入するため必要な速度増分は, わずかではあるが  $v_m$  より少なくてもよく, したがって, 図 3-1 において,  $v_m$  がちょうど  $\Delta v^2$  曲線の最小点で接し,  $r_{pe4} = r_{peN}$  となるような軌道へ投入するのが最適解であり, しかもこの解は  $r \in [r_1, r_2]$  に存在する.

なお一般に  $v_m$  一定にして  $\theta = 0$  または  $\theta = \alpha$  で高度をかえて打出す場合, 達成される軌道の  $C_4 - h_4^2$  面における軌跡はまったく一致する. 今上の二通りの打ち方を近似解として考えると,

$\cos \theta = 1$  の場合

$$h_4 = h_3 + v_m r$$

$$C_4 = C_3 + \frac{v_m^2}{2} + v_3 v_m \cos \alpha = C_3 + \frac{v_m^2}{2} + v_m \frac{h_3}{r}$$

より  $r$  を消去して

$$C_4 = C_3 + \frac{v_m^2}{2} + v_m^2 h_3 / (h_4 - h_3)$$

$\cos \theta = \alpha$  の場合

$$h_4 = h_3 + v_m r \cos \alpha = h_3 + v_m \frac{h_3}{v_3}, \quad C_4 = C_3 + \frac{v_m^2}{2} + v_3 v_m$$

より  $v_3$  を消去し

$$C_4 = C_3 + \frac{1}{2} v_m^2 + v_m^2 h_3 / (h_4 - h_3)$$

ただし  $h_4$  をあたえた場合, 同じ軌道に投入するためには,

$$\theta = 0 \text{ では } r = (h_4 - h_3) / v_m$$

$$\theta = \alpha \text{ では } r = (h_4 - h_3) / v_m \cos \alpha$$

で後者の方が高度は高くなる.

$r_1$  の求解

$$\left. \begin{aligned} h_4 &= h_3 + v_m r \\ C_4 &= C_3 + \frac{v_m^2}{2} + v_m h_3 / r \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-57})$$

であるから、これと (A-51), (A-52) より  $a_4$ ,  $e_4$  を消去して  $r$  が得られる.

(A-51) より

$$1 + e_4 = 2 - \frac{r_{peN}}{a_4} = 2 + 2r_{peN}C_4/\mu$$

$$1 - e_4^2 = (1 + e_4)(1 - e_4) = -2C_4h_4^2/\mu^2 = \frac{1}{a_4} \frac{h_4^2}{\mu} = \frac{1}{a_4} r_{peN}(1 + e_4)$$

より

$$r_{peN}(2 + 2r_{peN}/\mu \cdot C_4) = \frac{h_4^2}{\mu} \quad (\text{A-58})$$

したがって (A-57) を (A-59) に代入すれば

$$(v_m r + h_3)^2 = 2 \left\{ K r_{peN} + r_{peN}^2 \left( C_3 + \frac{v_m^2}{2} \right) \right\} + 2r_{peN}^2 v_m h_3 / r \quad (\text{A-59})$$

となりこれは  $r$  に関する 3 次式にはかならない,  $r$  は  $[r_{pe3}, r_{ap3}]$  に一意に定まる.

$r_2$  の求解

$$\left. \begin{aligned} h_4 &= h_3 \left( 1 + \frac{v_m}{v_3} \right) \\ C_4 &= C_3 + \frac{v_m^2}{2} + v_3 v_m \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-60})$$

であるから、これを (A-58) に代入すると

$$(h_3 + v_m h_3 / v_3)^2 = 2 \left\{ K r_{peN} + r_{peN}^2 \left( C_3 + \frac{v_m^2}{2} \right) \right\} + r_{peN}^2 v_m v_3 \quad (\text{A-61})$$

となり  $v_3$  に関する 3 次式に帰着する.

以上いずれも、解析的に求まるが、誤差のうえからは、 $r_1$  が望ましい。 $r_1$  に対する (A-59) 式は

$$A = 2 \left\{ \mu r_{peN} + r_{peN}^2 \left( C_3 + \frac{v_m^2}{2} \right) \right\}$$

ただし  $A$  は  $r_{peN} = a_4(1 - e_4) < a_3(1 + e_3)$

$$C_3 = -\mu/2a_3 \quad \text{より}$$

$$2 + 2r_{peN}C_3/\mu = 2 - a_4(1 - e_4)/a_3 > 2 - a_3(1 + e_3)/a_3 = 1 - e_3 > 0$$

となるため

$$A > r_{peN}(1 - e_3) + r_{peN}^2/\mu \cdot v_m^2 > 0 \quad \text{であるとおくと,}$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= A + 2r_{peN}^2 v_m h_3 \cdot \frac{1}{r} \\ y &= (v_m r + h_3)^2 \end{aligned} \right.$$

との交点であるが、後者は  $r_0 = -\frac{h_3}{v_m} < 0$ ,  $y = 0$  を頂点とする下に凸な 2 次式であるから、

$r > 0$  に 1 実根が存在し、これが求めるものである、 $A$  の値により負の領域にも 2 実根が存在する。これはニュートン法によっても容易に求解可能である。

#### D. 3.6 の近似解と最適解の数値例

達成近地点高度一定なる打出し条件のもとで、打出し点を移動させたときの達成遠地点高度変化のようすを、M-4S-3 号機について数値計算してみた例を図 A-13 に示す。このグラフよりプログラムでの近似解と最適解の差は以下のごとくである。(ただし  $r_{peN} = 620$  km,  $v_m = 3.51$  km/sec)

##### a) 遠地点をなるべく上げる場合

プログラムでの解 (合成速度水平打)  $r_{ap4} \doteq 2250.0$  km

数値計算での最適解  $r_{ap4} \doteq 2265.4$  km

差約 15.4 km

##### b) 遠地点をなるべく下げる場合

プログラムでの解 (水平打)  $r_{ap4} \doteq 693.5$  km

数値計算での最適解  $r_{ap4} \doteq 692.5$  km

差約 1.0 km

#### E. 3.7 の誘導

最終段遠地点を目標に合わせるために、最終段を前段遠地点で横に振る角 ( $\varphi$ ) の計算

$$a_{pk} = \frac{r_{ap3} + r_{apN}}{2}, \quad e_{pk} = 1 - \frac{r_{ap3}}{a_{pk}}$$

ただし  $a_{pk}$ :  $r_{ap3}$ ,  $r_{apN}$  を通る軌道の長半径

$e_{pk}$ :  $r_{ap3}$ ,  $r_{apN}$  を通る軌道の離心率

$r_{ap3} < r_{apN}$  の場合、この軌道の近地点での速度  $v_k$  は

$$v_k = \sqrt{\frac{\mu}{a_{pk}} \left( \frac{1+e_{pk}}{1-e_{pk}} \right)}$$

となる。したがって移行後の速度はこの  $v_k$  とならなければならない。図 A-14 の三角形で第 2 余弦法則を使用して、軌道面角度  $\theta$  と、前段に対する最終段打出角 (水平面内での)  $\varphi$  を求めると、

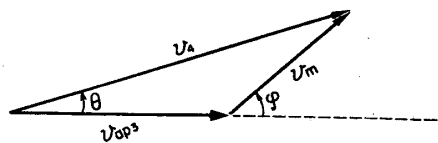


図 A-14

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left( \frac{v_k^2 + v_{ap3}^2 + v_m^2}{2 \cdot v_k \cdot v_{ap3}} \right) \\ \varphi &= \tan^{-1} \left( \frac{v_k \sin \theta}{v_k \cos \theta - v_{ap3}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (A-62)$$

最終段を前段遠地点で横に振って打ったときできる軌道傾斜角の計算

図 A-15 において、球面三角形の余弦法則より

$$\left. \begin{aligned} \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \right\} \quad (A-63)$$

AC の長さ (角) を  $w_p$  とする, ( $w_p = \omega_3 - \pi$ )

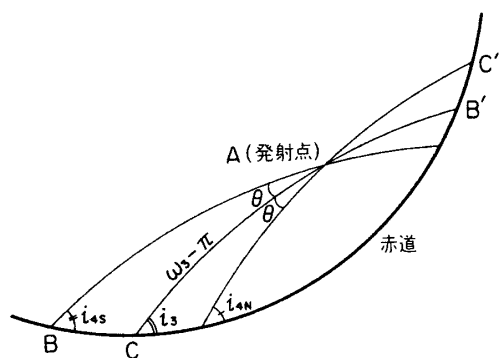


図 A-15

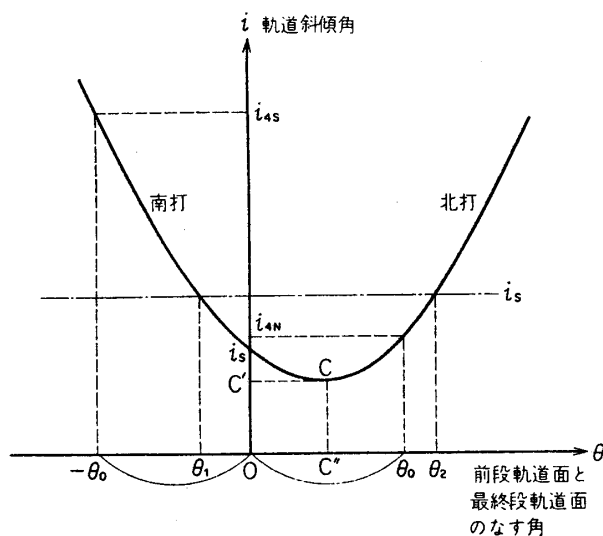


図 A-16 軌道面のなす角と軌道斜傾角

まず移行後の Ase. Node が移行前の Ase. Node より手前にくる場合は、角  $A(=\theta)$ 、角  $C(=\pi-i_s)$ 、辺  $b(=w_p)$  が与えられると (2) より、

$$i_{4s} = \cos^{-1}(-\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b)$$

同様に北側に打ったときは、角  $B'(=\pi-i_s)$ 、辺  $C(=\pi-w_p)$  より

$$i_{4N} = \cos^{-1}(-\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c)$$

したがって、前段の  $i_s$ 、 $\omega_s$  および  $v_m$  をあたえると、 $\theta$  に対する  $i_{4N}$ 、 $i_{4s}$  が求まり、これをグラフにすると図 A-16 のようになる。点 C は発射点で速度が赤道に平行になるように打つことを示し、発射位置が与えられれば、その地点の緯度  $C'$  より小さい軌道傾斜角に打入することは不可能である。

(A-62) 式で得られた  $\theta_0$  で打った場合、達成される軌道傾斜角  $i_{4s}$  または  $i_{4N}$  が許容される軌道傾斜角の中に有るときは  $i_{4s}$  または  $i_{4N}$  で  $i_N$  に近い方 (南か北) に打てばよい。

この範囲に入らない場合は、その限界  $i_s$  となるような軌道面角度  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  を求めることが必要になる。 $i_s$  が  $C'$  より小さければ、そのような  $i_s$  に対応する  $\theta$  は存在しない。 $i_s$  が  $C'$  のときは  $\theta$  は  $C''$  で一つだけ有る。 $i_s$  が  $C'$  より大きければ二つの角が有る。球面三角形における正弦法則

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

を使用すれば、 $A$ 、 $B$ 、 $a$  があたえられたとき、 $b$  は二つの値をとり  $b_1=b$ 、 $b_2=\pi-b$  とおけるから、 $A$ 、 $B$ 、 $a$ 、 $b$ 、(または  $b_2$ ) から

$$\text{Napier の比例式} \quad \tan \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}$$

を使用して角  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が求まる。角  $\theta$  より  $\varphi$  を (A-62) より計算できる。

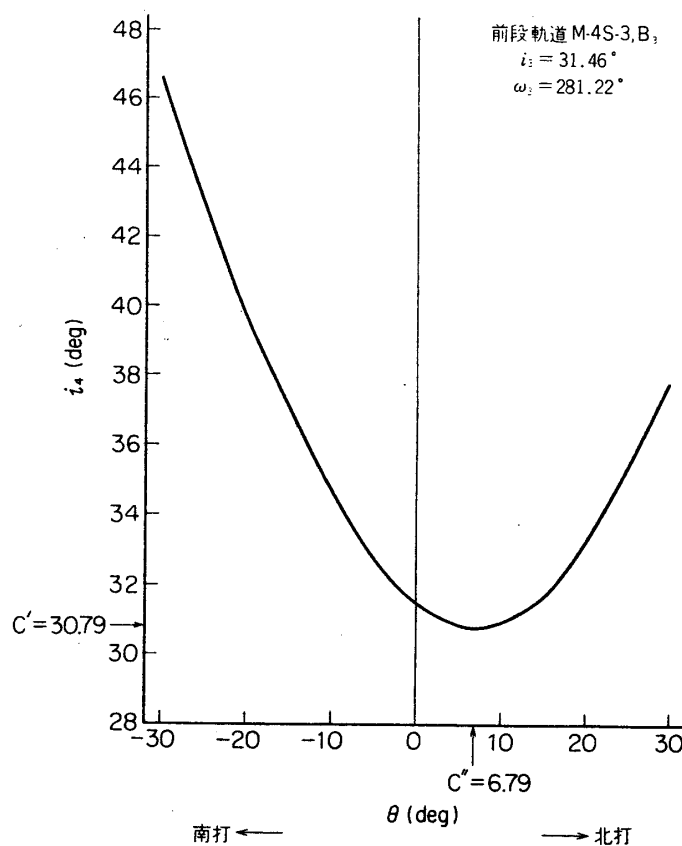


図 A-17 前段遠地点で横に最終段を打ったときにできる傾斜角の変化

M-4S-3 号機の軌道データより実際の値を計算してみると, 図 A-17 がえられる.

### 参 考 文 献

- [1] 松尾, 秋葉「L-4S-1 号機の飛行計画」宇宙研報告 第4巻, 第4号 (B) p. 659. 1968年12月
- [2] 斎藤, 野村, ほか総合報告試験衛星「たんせい」通信学会誌 5-12, 1971年12月, p. 1666
- [3] 石谷, 玉木「カルマンフィルタの応用」宇宙研報告 第8巻2号 (A) p. 264 1972年6月
- [4] 東口「軌道推移の基本的考え方について」スペース・エレクトロニクスシンポジウム 1969年6月 p. 80
- [5] 石谷, 前田 科学衛星打上げロケットの電波誘導方式について 昭和46年電気学会全国大会 1330
- [6] 浜崎, 石谷, 玉木「速度インパルスによる軌道推移における達成軌道高度の極値」宇宙研報告 第7巻, 第3号 p. 694 1971年7月
- [7] 基礎数学ハンドブック 森北出版 p. 128