

# 触媒壁に沿う解離気体境界層の数値解析

露 木 太 郎\*・小 口 伯 郎

## A Numerical Analysis for Chemical Non-Equilibrium Boundary Layer of Dissociated Gases over a Flat Plate with Arbitrary Catalycity

By

Taro TSUYUKI and Hakuro OGUCHI

**Abstract:** In the present paper we are concerned with a numerical analysis of the boundary layer of non-equilibrium dissociated gases over a semi-infinite flat plate with catalytic surface. The method of analysis is basically along with the series-expansion method in terms of the distance from the leading edge along the surface. A straightforward application of the series-expansion method to the problem is shown to result in a solution valid only within a very narrow region near the leading edge. To eliminate this difficulty in the series-expansion method, the temperature involved in the atom-production term has been approximated by the associated frozen temperature, and then a numerical scheme is presented such that any higher order terms in the series solution can be evaluated. In the actual procedure, the truncation error for the resulting solution can be estimated, and the error caused by the approximation for the atom-production term can also be checked if the same procedure is iterated by applying the resulting temperature as the zeroth iterate.

The method presented here is applied to the numerical example of high temperature flow of nitrogen over a flat plate surface for a wide variety of surface catalycity and uniform flow velocity. An applicability of the method to the actual problem has been confirmed and the effect of the dissociation-recombination reaction of gases and the catalytic surface reaction is examined on the boundary-layer-flow characteristics; temperature and atom-concentration profiles, and heat transfer to the surface.

### 概 要

解離気体の非平衡境界層の数値解析が、表面触媒作用を持つ平板について行なわれた。解法は、基本的に級数展開法によっている。しかし、級数解の欠点である狭い収束範囲を拡大するため、境界層方程式中の反応項に含まれている温度分布を、平板先端の温度分布すなわち凍結境界層の温度分布で近似する方法が提案された。これにより、級数は漸次、高次の項まで容易に求められ、数値解析の結果、収束域を十分広げ得ることがわかった。

---

\* 石川島播磨重工業(株)技術研究所

また、高温窒素気体の平板境界層に応用した数値解の結果から、壁の触媒作用の強さによる境界層内部の原子濃度分布、温度分布、壁への熱伝達の壁に沿う分布など、物理量のふるまいに及ぼす影響が調べられた。

## 記 号

$c$	質量濃度	$T_d$	解離特性温度
$C_p$	比熱	$u$	流速の $x$ 成分
$\bar{C}_p$	境界層内の平均比熱	$U$	速度パラメータ ( $=u_e^2/2\bar{C}_pT_e$ )
$D$	拡散係数	$v$	流速の $y$ 成分
$f$	流れ関数	$\dot{w}$	原子の生成率 (単位時間, 単位体積 当り)
$h$	エンタルピー	$W$	(28) 式で定義される原子生成項
$h_d$	解離エネルギー	$x$	平板に沿う先端からの距離
$k$	熱伝導率	$y$	平板に垂直方向距離
$k_r$	再結合反応速度係数	$\zeta$	境界層 Damköhler 変数 ((23) 式)
$k_{r0}$	(11) 式で定義される定数	$\xi, \eta$	(15), (16) 式で定義される境界層 変数
$k_w$	壁の触媒反応速度係数	$\theta$	無次元温度 ( $=T/T_e$ )
$K$	(30) 式で定義される反応パラメータ	$\mu$	粘性係数
$l$	密度と粘性の積比 ( $\rho\mu/\rho_e\mu_e$ )	$\nu$	動粘性係数
$m_1$	原子量	$\rho$	密度
$m_2$	分子量	$\rho_d$	解離特性密度
$N_u$	ヌッセルト数	$\omega$	反応速度係数の温度指数 ((11) 式)
$p$	圧力		
$Pr$	プラントル数	添 字	
$\dot{q}$	熱伝達率	1	原子
$\dot{q}_c$	熱伝導による熱伝達率	2	分子
$\dot{q}_d$	再結合による熱伝達率	$e$	一様流
$R$	気体常数	$E$	平衡状態
$R_0$	普遍気体常数	$i$	気体成分
$Re$	レイノルズ数	$w$	壁面
$Sc$	シュミット数		
$T$	絶対温度		

## 1. ま え が き

たとえば、衛星の帰還時に見られるように、高速飛行体のまわりの気体は解離・再結合反応をとまなうほど高い温度になる。このような高温気体の流れについて、熱防御の技術上の要請から特に物体のまわりの境界層の解析がすでに多くなされてきた。この場合、気体としては空気の成分気体である窒素、酸素などの二原子分子気体が考えられる。現象は通常の流体力学の場合と比較して、i) 境界層内での解離反応、ii) 物体表面での触媒反応の二つの

反応が流れのふるまいと相互に関連して取り扱われなければならない点でやっかいなものとなる。そのために、従来多くの研究においては、i) あるいは ii) について、いずれか一方に着目し、他方の反応についてはある簡単な局限状態を仮定した解析が行なわれた。たとえば、境界層反応は“凍結”とし、物体表面における触媒反応と流れの相互作用に着目する解析[1]-[4]、あるいは物体表面の触媒反応については完全または非触媒とし、境界層内反応と流れの相互作用のみに着目した解析[5]-[8]がある。

物体形状としては、代表的なものとして球（よどみ点近傍）、平板がある。このうち、特に平板については先端から後流に進むにつれ、気体反応は“凍結”状態から“平衡”状態にわたる遷移過程を含む。この点で、平板境界層は気体反応、表面触媒反応と流れの関連を知るうえで都合のよい課題である。この意味で、本論文においては平板境界層の解析に主題をおいた。

境界層内部の反応および壁の触媒反応をともに考慮した一般的な解析の手法を分類すると、級数展開法、積分法および差分法による直接的数値計算法などとなる。級数展開法は気体内反応の型を固定しうる球状物体のよどみ点境界層の解析において有効に使用された[9]。しかし、平板境界層については、きわめて狭い収束範囲にしか有効な解が得られず、その適用に問題を残している[10]、[11]。積分法による解析[12]は、かなり広い範囲にわたって答を与える点で有利であるが、その基本となる仮定、すなわち境界層内の詳細なふるまいを消して積分量で置き換えるという点で、解析結果の不確定さを避けることができない。差分法による直接的解析は、その厳密さおよびその適用範囲の広さのいずれにおいても他の手法に優れていることは言うまでもないが、その適用例[6]を見てもわかるように、気体内反応、表面触媒反応を同時に考慮して一般的に取り扱うのに簡便かつ有用な手法とは言えない現状である。

そこで、ここでは従来の級数展開法のもつ重大な欠点であった“結果の収束範囲がきわめて限られる”という点を克服するために、新たな近似を導入して、比較的簡便で定量的にも十分実用に耐える数値解析法を提案しようとする。実際の数値例に適用した結果を示し、それによって得られた解離気体境界層の特徴的なふるまいについて議論する。

## 2. 解離気体境界層問題の定式化

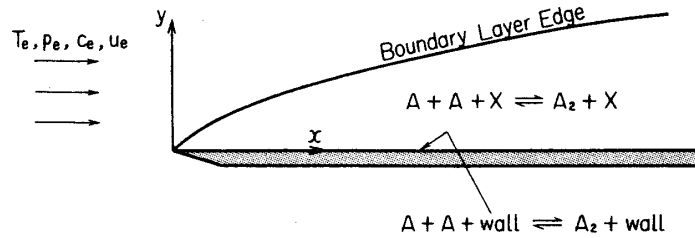
### 2.1 平板に沿う解離気体の境界層

解離平衡にある気体の一様流れの中に、半無限平板が流れに沿って置かれているとしよう(第1図)。解離気体としては、簡単のため二原子分子を考え、反応は



で表わされるとする。ここで  $A_2$ ,  $A$  はそれぞれ分子、原子を、 $X$  は衝突の第三体を示す。なお、 $k_d$  および  $k_r$  はそれぞれ解離反応および、再結合反応の速度係数である。

平板先端に原点をとり、それに沿って  $x$  軸、垂直に  $y$  軸を選ぶ。速度の成分を  $(u, v)$ 、密度、圧力、温度を  $\rho, p, T$  とすると、連続および運動量の式は定常状態において



第1図 平板に沿う解離気体の境界層

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

となり，通常の境界層方程式と同じ形で与えられる．ここで  $\mu$  は粘性係数である．しかし，解離，再結合などの反応によって，エネルギー式および分子・原子の質量濃度の変化を表わす式が考慮されなければならない．

すなわち，エネルギー式は

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial C_P T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_P T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \sum_{i=1,2} \dot{w}_i (h_i + h_{ai}) \\ &+ \sum_{i=1,2} C_{Pi} \left( D_i \rho \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{D_i T \rho C_i}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで，添字  $i$  は原子については  $i=1$ ，分子については  $i=2$  とする． $k$ ， $C_P$ ， $D_i$ ， $D_i T$  はそれぞれ気体の熱伝導係数，定圧比熱，拡散係数，熱拡散係数を表わす．なお  $h$  はエンタルピー， $h_a$  は解離エネルギー， $\dot{w}$  は単位時間，単位体積当りの質量生成率を表わす．質量濃度  $c_i$  については，

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial y} + \frac{D_i T \rho c_i}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{w}_i \quad (6)$$

と与えられる．これらの関係の詳細な導きについては，たとえば[13]を参照されたい．なお，気体は理想気体として，状態方程式

$$p_i = \rho_i R_i T \quad (7)$$

を加えることによって，(2)-(6)の方程式は解析に十分なものとなる．ただし， $\dot{w}_i$ ， $h$  はあとに示されるようにすべて他の変数によって具体的に表わされる．

境界条件を考える．平板面において，速度のすべりおよび気体の吹き出しはなく，また平板面の温度  $T_w$  はいたるところ一定であるとする．このとき

$$\left. \begin{aligned} y=0: u=v=0, T=T_w \\ y \rightarrow \infty: u=U_e, T=T_e, c_i=c_{ie} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる．ここで，添字  $e$  は境界層外の一様流における値を示す．壁における濃度  $c_{iw}$  についてはあとで詳しくふれる．

式 (1) によって支配される反応を考えると, 反応速度論によると, 原子  $A$  のモル濃度  $[A]$  の時間変化は

$$\frac{d[A]}{dt} = 2k_r[X] \left\{ \frac{[A_E]^2}{[A_2]_E} [A_2] - [A]^2 \right\}$$

によって与えられる. ここで添字  $E$  は反応が平衡であるときの値を示す. 原子の質量濃度  $c_1$  を  $c$  で書き換えると, 分子の質量濃度  $c_2$  は  $1-c$  となる. この関係に注意して, 上式に原子量  $m_1$  を乗じ, モル濃度  $[A]$  を質量濃度  $\rho c/m_1$  で表わすと, 原子の質量生成率  $\dot{w}$  は

$$\dot{w} = 4k_r \rho \left( \frac{p}{R_0 T} \right)^2 \left\{ \frac{c_E^2}{1-c_E^2} (1-c) - \frac{c^2}{1+c} \right\} \quad (9)$$

のようになる. ここで  $R_0$  は不遍気体定数, 平衡状態における原子濃度  $c_E$  は熱力学的状態量の関数として求められる. ここでは Lighthill [17] によって提案された近似を解析の便宜のために用いることにする. すなわち,

$$\frac{1-c_E^2}{c_E^2} = \frac{\rho_d R_0 T}{2m_1 p} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right) \quad (10)$$

と与えられる.  $T_d$  は解離特性温度,  $\rho_d$  は解離特性密度と呼ばれるもので, 特に Lighthill の近似においては  $\rho_d$  は一定値をとるものとされる.

式 (9) に現われる反応速度係数  $k_r$  は, 対象となる温度範囲においては,

$$k_T = \frac{k_{r0}}{T^\omega} \quad (11)$$

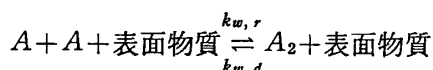
のように, 定数  $k_{r0}$ ,  $\omega$  を用いて表わすことができる. そして, 定数  $k_{r0}$ ,  $\omega$  は与えられた気体に対し実験などによって求められている. 上述の関係 (10), (11) を (9) に代入すると, 原子の質量生成率  $\dot{w}$  は

$$\frac{\dot{w}}{\rho} = \frac{4k_{r0}}{T^\omega} \left( \frac{p}{R_0 T} \right)^2 \left[ \frac{\rho_d R_0 T}{2m_1 p} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right) (1-c) - \frac{c^2}{1+c} \right] \quad (12)$$

となる.

## 2.2 表面触媒反応

前節で取り扱った, 二原子分子の解離再結合反応をともなう境界層内では原子あるいは分子が拡散によって表面に到達する. この場合, 平板表面ではその触媒性によって次に示される反応が起る.



単位面積, 単位時間当りの原子の生成量を  $\dot{W}_A$  とすると,

$$\dot{W}_A = -k_{w,r}[A]^{n_1} + k_{w,d}[A_2]^{n_2}$$

によって与えられよう. ここで  $n_1$ ,  $n_2$  は反応次数である.

固体壁の温度が  $2,000^\circ\text{C}$  以下の範囲を考えると, 上式において右辺第 2 項は無視してさしつかえないことが知られている [14]. したがって,  $\dot{W}_A$  は近似的に

$$\dot{W}_A = -k_{w,r}[A]^{n_1}$$

と与えられる. 原子の質量濃度  $c$ , 気体密度  $\rho$  および触媒反応速度係数  $k_w$  を用いて

$$\dot{W}_A = -k_w(\rho_w - c_w)^{n_1} \quad (13)$$

とも書くことができる。ここで  $K_w$  は反応速度論により活性化エネルギー  $E_w$ , 壁温  $T_w$  とするとき

$$K_w = K_0 \exp(-E_w/R_0 T_w)$$

のように表わされる。係数  $K_0$  は温度に依存する。

さて、本論文で対象とする二原子気体については、反応次数  $n$ , は 1, すなわち一次反応とみなすことが許される。したがって、物体表面における質量収支について、次の関係が成り立つ。すなわち、

$$\rho_w D_w \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_w = k_w \rho_w c_w$$

あるいは

$$\left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_w = \frac{k_w}{D_w} c_w \quad (14)$$

この関係は壁での触媒反応を考慮するとき、質量濃度に課される条件となる。

### 2.3 境界層変数の導入と数学的定式化

前出の境界層方程式を取り扱うのに、通常よく用いられる変数  $\xi, \eta$  を  $x, y$  の代わりに導入するのが便利である。すなわち、

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e dx \quad (15)$$

$$\eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (16)$$

ここで、添字は境界層外の一様流における値を示す。速度  $u$  を無次元流れ関数  $f$  を用いて

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (17)$$

で表わし、無次元温度  $\theta$

$$\theta = \frac{T}{T_e} \quad (18)$$

を用いて、基礎方程式 (2)-(6) を書き改めると

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( l \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 2\xi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( C_p \frac{l}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + C_p f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \sum_{i=1,2} \frac{2\xi}{\rho_e \mu_e u_e^2 T_e} \frac{\dot{w}_i}{\rho} (h_i + h_{di}) \\ + \frac{u_e^2}{T_e} l \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 + \sum_{i=1,2} C_{pi} \frac{l}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 2\xi C_p \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{l}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial c_i}{\partial \eta} + \frac{2\xi}{\rho_e \mu_e u_e^2} \frac{\dot{w}_i}{\rho} = 2\xi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial c_i}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) \quad (21)$$

となる。ここで  $l, Pr, Sc$  はそれぞれ密度と粘性係数の積比、プラントル数、シュミット数で

$$l = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D}$$

と与えられる.

境界条件も (8) および (14) を新変数について書くと,

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: \quad & f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \\ & \theta = \theta_w, \\ & \frac{\partial c_i}{\partial \eta} = S_{ci} \frac{k_w \sqrt{2\xi}}{\mu_w u_e} c_{iw} \\ \eta \rightarrow \infty: \quad & \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad \theta = 1, \quad c_i = c_{ie} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

結局, 問題は基礎方程式 (19)-(21) を境界条件 (22) に従って解くことに帰着する. しかし, なおこのままでは一般に解析を進めることは困難であり, 以下, いくつかの簡単な仮定の下に取り扱うことにする. すなわち, 1) 気体の輸送係数を代表する密度・粘性の積比  $l$ , プラントル数  $Pr$ , シュミット数  $Sc$  はそれぞれ一定値をとるとする. 特に  $l=1$  とする. 2) 比熱  $C_p$  は境界層内部の平均値  $\bar{C}_p$  を用いる. これら輸送係数および熱力学的物性値に関する簡略化の仮定は, 得られる解の厳密さを失わせることになるが, ここで特に着目している境界層内の気体反応と平板表面での触媒反応が, 境界層内の気体のふるまいをいかに支配するかという点に関しては本質的に大きな誤りのない結論に導くものと考えられる. 事実この種の仮定はすでに従来多くの解析に採用されているもので, たとえば文献 [7] [8] を参照されたい.

#### 2.4 Damköhler 変数

ここで, 気体内反応の強さを測る “Damköhler 変数” を導入することが便利である. 2.1 節において, 原子の質量生成率  $\dot{w}$  の表示が得られた. (12) 式によって, 気体内反応に要する特性時間  $\tau_R$  は

$$\tau_R \sim \rho / \dot{w} \sim \frac{T^{\omega+2} (R_0)^2}{4k_{r0} (p)}$$

と与えられる. 他方, 流れの特性時間  $\tau_F$  は

$$\tau_F \sim x / u_e$$

すなわち, 着目する場所に気体粒子が到達するに要する時間と考えられる. したがって, 気体内反応の進みの度合は二つの特性時間の比の大きさによって測ることができよう. すなわち,

$$\tau_F / \tau_R \sim \frac{4k_{r0}}{u_e T^{\omega+2}} \left( \frac{p}{R_0} \right)^2 x$$

$\tau_F / \tau_R \gg 1$  の場合には, 気体内反応は非常に早く進み, いたる所, 反応に関しては平衡状態に

あるとみなすことができよう。また、逆に  $\tau_F/\tau_R \ll 1$  ならば、気体内反応の進みはきわめて遅く、反応はいわゆる凍結状態にあるとみなされる。このように特性時間の比  $\tau_F/\tau_R$  は反応の進み度を測る目安を与えるもので、これを一般に Damköhler 数と呼んでいる。ここでは、あとの応用に便利のために、因数 2 を乗じて、Damköhler 変数  $\zeta$  として

$$\zeta = \frac{8k_{r0}}{u_e T_e^{\omega+2}} \left( \frac{p}{R_0} \right)^2 x \quad (23)$$

と定義されるものを用いる。変換 (15) により、

$$\zeta = \frac{8}{\rho_e \mu_e u_e^2} \frac{k_{r0}}{T_e^{\omega+2}} \left( \frac{p_e}{R_0} \right)^2 \xi \quad (24)$$

と書くこともできる。

2.3 節において示された境界条件および輸送係数に関する簡単な仮定を考慮して基礎方程式を  $(\xi, \eta)$  変数から  $(\zeta, \eta)$  変数に移すと、結局、次の方程式および境界条件が得られる。

$$f''' + f f'' = 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - A_1 W + 2U f'^2 = 2f' \zeta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \quad (26)$$

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial c}{\partial \eta} + W = 2f' \zeta \frac{\partial c}{\partial \zeta} \quad (27)$$

ここで ' は  $\eta$  に関する微分を表わす。また、

$$A_1 = \frac{h_d}{\bar{C}_P T_e}, \quad U = \frac{u_e^2}{2\bar{C}_P T_e} \\ W = \frac{\zeta}{\theta^{\omega+2}} \left[ A_2 \theta \left\{ \exp\left(-\frac{A_3}{\theta}\right) \right\} (1-c) - \frac{c^2}{1+c} \right] \quad (28)$$

ここで

$$A_2 = \frac{\rho_d R_0 T_e}{2m_1 p}, \quad A_3 = \frac{T_d}{T_e} = \frac{2m_1 \bar{C}_P}{R_0} A_1$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: \quad & f=f'=0 \\ & \theta=\theta_w \\ & \left( \frac{\partial c}{\partial \eta} \right)_w = K \sqrt{\zeta} c_w \\ \eta \rightarrow \infty: \quad & f'=1, \quad \theta=1, \quad c=c_e \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで

$$K = k_w \frac{Sc}{2} \frac{R_0}{p} \sqrt{\frac{T_e^{\omega+2}}{k_{r0}} \frac{\rho_e \mu_e}{\mu_w^2}} \quad (30)$$

### 3. 解法と数値解析

前章において導かれた  $(\zeta, \eta)$  変数の基礎方程式の形から、速度  $u$  あるいは流れ関数  $f$  は単に Blasius 解によって与えられることがわかる。したがって、温度  $\theta$  と原子質量濃度  $c$  に関する連立微分方程式を処理することになる。(26), (27), (29) 式の形からただちに



$$\theta(\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\eta) \zeta^{n/2} \quad (31)$$

$$c(\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\eta) \zeta^{n/2} \quad (32)$$

なる級数解が形式的に存在することが見られる. この場合, 上記の級数解を (26), (27) に代入して得られる, 係数  $\theta_n(\eta)$ ,  $c_n(\eta)$  の常微分方程式系を逐次, 解くことによって最終的な解に到達することが予想される.

実際に, 計算を行なうと,

$$n=0$$

$$\frac{1}{P_r} \theta_0 + f \theta_0' + A_4 f'^{1/2} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{S_c} c_0'' + f c_0' = 0 \quad (34)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0: \quad \theta_0 = \theta_w, \quad c_0' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: \quad \theta_0 = 1, \quad c_0 = c_e \end{array} \right\} \quad (35)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{1}{P_r} \theta_n'' + f \theta_n' - n f' \theta_n = A_1 W_n \quad (36)$$

$$\frac{1}{S_c} c_n'' + f c_n' - n f' c_n = -W_n \quad (37)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0: \quad \theta_n = 0, \quad c_n' = K c_{n-1} \\ \eta \rightarrow \infty: \quad \theta_n = 0, \quad c_n = 0 \end{array} \right\} \quad (38)$$

ここで  $W_n$  は生成項  $W$  の展開係数で

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\eta) \zeta^{n/2} \quad (39)$$

から求められる. (28) 式にみられるように,  $W$  の形は複雑で, 実際に (39) 式から  $W_n$  を求めることは  $n$  が大きくなると, きわめて困難になる. 著者は実際に  $W_4$  まで求め, それを付録に示してある.  $n=4$  まで, すなわち  $\zeta^2$  までの解を得たが, それによると収束領域は  $\zeta=0$  のきわめて近くに限られ, 一般に実用上, 価値のないものであることが示された. 結果の詳細は後に述べられる. 実際には  $n$  の値が数 10 まで必要とされるので, この方式をそのまま進めることはほとんど望みがないものといえる.

以上の議論で明らかのように, 級数展開による解は原理的には厳密解を与えるが, 実際には生成項  $W$  の表示が複雑なために, 十分収束する解に到達することはむずかしいことがわかった.  $W$  の表示 (28) 式を見ると, ただちにわかるように, その難点の最大の原因は  $\theta$  によるものである. この点に着目して,  $W$  中に現われる温度  $\theta$  の処理を考え,  $\zeta=0$  における温度  $\theta(0, \eta) = \theta_0(\eta)$  によって近似することにした. その理由は, ここで問題にしている平板境界層において, 平板表面温度は一定の場合だけが考えられていること, また境界層外一様流においては, いたる所気流温度は等しいこと, によって  $\theta$  の  $\zeta$  に関する依存は  $\eta$  に関するものより弱いと考えられるからである. このことは, 定性的な推論で必ずしも定量的

な裏付けは得られない。しかし、実際にこのような近似に基づいて解が得られたとすると、その解の検討によって近似の妥当性は定量的に判定される。以下このような立場から、上述の近似を導入して解析を進めることにする。事実、 $W$  の直接的な展開において遭遇した困難は容易に取り除かれ、 $W_n$  について次の表示が得られる。

$$W_0=0, W_1=0 \quad (40)$$

$$W_2 = \frac{1}{\theta_0^{\omega+2}} [A_2 \theta_0 \{\exp(-A_3/\theta_0)\} (1-c_0) - \{(c_0-1)+d_0\}] \quad (41)$$

$$n=3, 4, 5, \dots$$

$$W_n = -\frac{A_2}{\theta_0^{\omega+1}} \{\exp(-A_3/\theta_0)\} c_{n-2} + \frac{1}{\theta_0^{\omega+2}} \{c_{n-2} + d_{n-2}\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで} \quad d_0 &= \frac{1}{1+c_0} \\ d_n &= -\frac{1}{1+c_e} \sum_{m=1}^n c_m d_{n-m} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

以上のように与えられる  $W_n$  を用いて、方程式 (33)-(38) を逐次に解くとき、所望の次数  $n$  まで計算を進めることができる。

ここで原子濃度  $c$  の壁面での条件 (30) について注意しておく。式 (30) に現われる係数  $K$  は一般に有限であるが、局限の場合として  $K \rightarrow \infty$  が考えられる。これは触媒反応速度  $k_w$  が無限大の場合に相当し、完全触媒壁と呼ばれる場合である。このとき、条件 (29) は

$$\eta=0: \quad c_w=0 \quad (44)$$

となり、したがって  $c_n$  に関しても単に

$$\eta=0: \quad c_{nw}=0 \quad (45)$$

のように与えられる。

#### 4. 熱 伝 達

平板に沿う解離非平衡境界層の解析についてはすでに述べられたが、得られた解から求まる工学上重要な量として壁への熱伝達率、すなわち壁の単位面積、単位時間に流入する熱量がある。ここで考えている問題においては通常の流体の場合と異なり、熱伝導による熱伝達  $\dot{q}_{c,w}$  のほか、原子あるいは分子の拡散によって運ばれる熱量  $\dot{q}_{d,w}$  があることである。この場合、全熱伝達率  $\dot{q}_w$  は

$$\dot{q}_w = \dot{q}_{c,w} + \dot{q}_{d,w} \quad (46)$$

と与えられる。

熱伝導による熱伝達  $\dot{q}_{c,w}$  は

$$\dot{q}_{c,w} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w, \quad (47)$$

拡散による熱伝達  $\dot{q}_{d,w}$  は  $i$  種気体の拡散速度を  $V_i$  とすると

$$\dot{q}_{d,w} = -\rho_w \sum_{i=1,2} \{c_i (h_i + h_{di}) V_i\} \quad (48)$$

となる。Fick 則によると、拡散速度  $V_i$  は

$$c_i V_i = -D_i \frac{\partial c_i}{\partial y}.$$

また定義から

$$\sum_{i=1,2} c_i V_i = 0$$

であるから, (48) 式は

$$\dot{q}_{d,w} = \rho(h_1 + h_d - h_2) D_1 \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_w$$

と表わされる. 解離エネルギー  $h_d$  に比べ,  $h_1 - h_2$  は十分小さいので,

$$\dot{q}_{d,w} = \rho_w h_d D_1 \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_w = \rho_w h_d k_w c_w \quad (49)$$

と書くことができる. ここで,  $k_w$  は壁における熱伝導率である. したがって,

$$\dot{q}_w = -k \frac{\partial T}{\partial y} + \rho h_d D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_w \quad (50)$$

を得る. ここで  $D_1$  を  $D$  で置き換えている. 変換 (15), (16) により, 上式は

$$\dot{q}_w = \sqrt{\frac{\rho_e \mu_e u_e}{2x}} \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e} \left( \frac{\bar{C}_P T_e}{P_r} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{h_d}{S_c} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} \quad (51)$$

あるいは, (31), (32) を用いて

$$\dot{q}_w = 2 \sqrt{\frac{\rho_e \mu_e k_{r0}}{T_w^{\omega+2}}} \frac{p}{R_0} \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e} \left\{ \left( \frac{C_P T_e}{P_r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n'(0) \zeta^{(n-1)/2} + \frac{h_d}{S_c} \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(0) \zeta^{(n-1)/2} \right\} \quad (52)$$

と書くことができる. いずれにしても,  $\theta_n, c_n$  が求められるとき壁への熱伝達率を上に掲げた表示を用いて計算することができる.

全熱伝達率において, 伝導による寄与と拡散による寄与を比較するとき, (51) 式括弧内の 2 項の比が重要となる. このために, ここで次の量を定義しておく.

すなわち,

$$Q_c = \left( \frac{1}{P_r} \frac{\bar{C}_P T_e}{u_e^2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (53)$$

$$Q_d = \left( \frac{1}{S_c} \frac{h_d}{u_e^2} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (54)$$

$Q_c, Q_d$  を用いると伝導による寄与は

$$\frac{\dot{q}_{c,w}}{\dot{q}_w} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_d}, \quad (56)$$

拡散による寄与は

$$\frac{\dot{q}_{d,w}}{\dot{q}_w} = \frac{Q_d}{Q_c + Q_d} \quad (57)$$

となる.

熱伝達率の無次元表示として, ヌッセルト数  $N_u$  がしばしば用いられる. ここでは次に

定義される  $N_u$  を用いることにする.

$$N_u = \frac{x}{k_w(T_e - T_w)} \left( \frac{\rho_e \mu_e}{\rho_w \mu_w} \dot{q}_w \right) .$$

レイノルズ数  $Re = u_e x / \nu_e$  とすると, 熱伝達パラメータは

$$\frac{N_u}{\sqrt{Re}} = \frac{\dot{q}_w x}{k_w(T_e - T_w)} \sqrt{\frac{\nu_e}{u_e x}} \frac{\rho_e \mu_e}{\rho_w \mu_w} . \quad (58)$$

最後に着目される一つの重要な性質である壁に沿う原子濃度分布の表示をあげておく. 一樣流の原子濃度  $c_e$  に対する割り合として  $Z_w = c_w / c_e$  を定義すると

$$Z_w = \frac{1}{c_e} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) \zeta^{n/2} \quad (59)$$

と与えられる. あとに  $\dot{q}_{c,w}/\dot{q}_w$ ,  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_w$ ,  $Q_c$ ,  $Q_d$ ,  $N_u/\sqrt{Re}$ ,  $Z_w$  などの具体的な数値結果が図によって示される.

### 5. 数値例と級数解の収束性の吟味

二原子分子の代表例として, 気体は窒素とした. ショック・チューブあるいはアーク加熱風洞の実験において実現可能な一樣流状態を考え, 一例として

$$T_e = 5500^\circ\text{K}, \quad p_e = 0.01 \text{ atm}, \quad c_e = 0.443$$

に対し, 一樣流速度を次の四つの異なる場合を考えた. すなわち,

$$u_e = 1, 3, 5, 10 \text{ km/s} .$$

平板温度は  $T_w = 300^\circ\text{K}$  とし, 平板の触媒性について, i) 完全非触媒, ii) ガラスのような非金属, iii) 酸化金属, iv) 金属, v) 完全触媒の五つの場合を取りあげた. 触媒反応係数  $k_w$  とし, それぞれに対応して

$$k_w = 0, 2, 100, 1000, \infty (\text{cm/s})$$

とした (表 1).

表 1 一樣流および壁の状態, パラメータ  $U$  および  $K$

$T_e$	(°K)	5500				
$P_e$	(atm)	0.01				
$C_e$		0.443				
$u_e$	(km/s)	1	3	5	10	
$U$		0.0678	0.611	1.70	6.78	
$T_w$	(°K)	300				
$K_w$	(cm/s)	0	2	100	1000	$\infty$
$K$		0	0.0952	4.76	47.6	$\infty$

実際の計算において必要な気体（窒素）の物性値は以下のようなものが用いられた。平均比熱  $\bar{C}_P$  としては、 $C_P=5R_0/m_2$ ,  $C_{P2}=4R_0/m_2$  であるから、それらの平均値として

$$\bar{C}_P=9R_0/2m_2=1.34 \times 10^7 [\text{erg/gm}^\circ\text{K}]$$

とした。

解離エネルギー  $h_d$ , 特性解離温度  $T_d$  は、それぞれ

$$h_d=3.36 \times 10^{11} [\text{erg/gm}^\circ\text{K}]$$

$$T_d=1.1323 \times 10^5 [^\circ\text{K}]$$

と選んだ。なお  $P_r=0.7$ ,  $S_c=0.5$  とし、粘性係数、熱伝導率は Ahtye と Peny [15] の計算値を用いた。

表 2 数値例に用いた気体（窒素）の物性値

比 熱 $\bar{C}_P$ (erg/gm $^\circ\text{K}$ )	$1.34 \times 10^7$
特 性 温 度 $T_d$ ( $^\circ\text{K}$ )	$1.1323 \times 10^5$
特 性 密 度 $\rho_d$ (gm/cm $^3$ )	130
再結合速度係数 $k_{r0}$ (cm $^6$ $^\circ\text{K}^2$ /mol $^2$ S)	$2.6 \times 10^{22}$
$\omega$	2

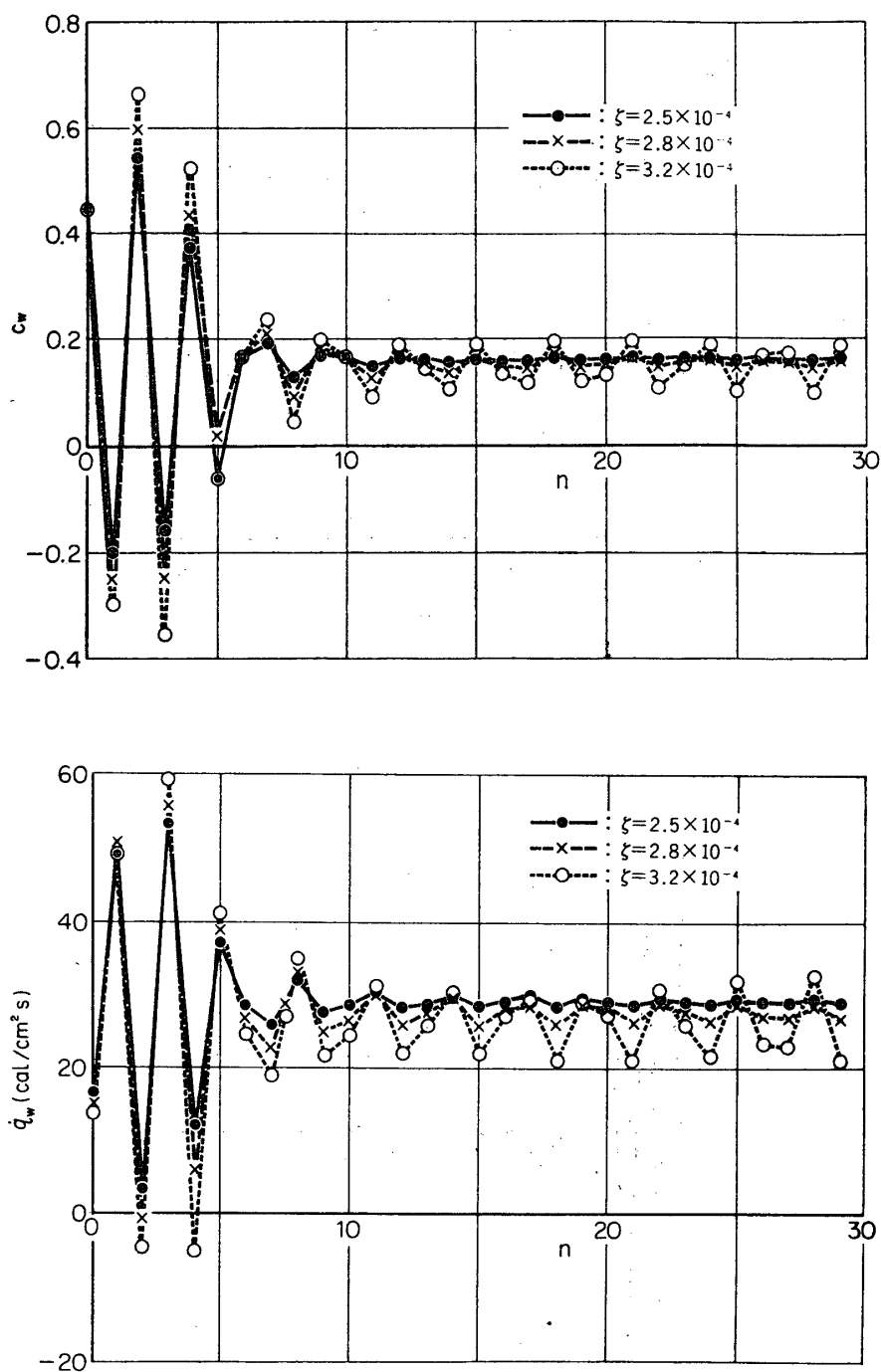
気体の反応について、再結合反応速度係数  $k_r$  は

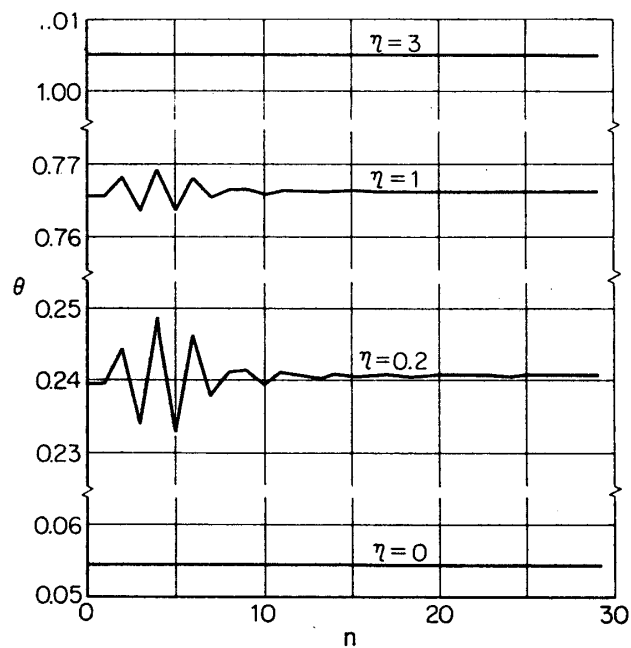
$$k_r=k_{r0}/T^\omega=2.6 \times 10^{22}/T^2 [\text{cm}^6/\text{mol}^2\text{s}]$$

(Hsu と Anderson [16] 参照)。以上の物性値が表 2 にまとめられている。これで、計算に必要なすべてのパラメータが与えられたことになり、この場合の数値計算が実行された。

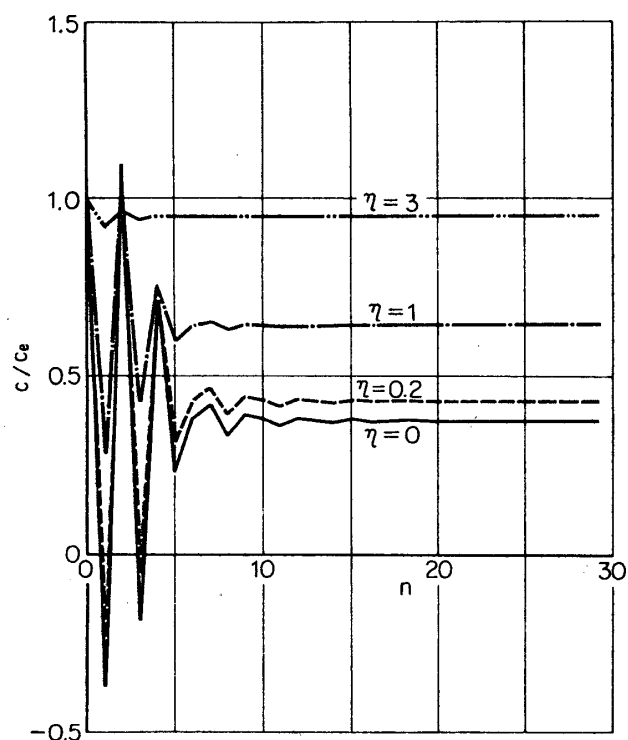
$\theta_n$ ,  $c_n$  はそれぞれ二階の線形常微分方程式の解であるが、 $\eta=0, \eta \rightarrow \infty$  において境界条件が与えられている、いわゆる 2 点境界値問題となっている。実際には  $\eta \rightarrow \infty$  までとすることはできないから、すべての微係数が十分小さいと見なされる、ある有限の  $\eta$  がとられた。ここでは  $\eta=7$  として十分であった。解法は Runge-Kutta-Gill 法により、適当な初期予想値から出発する繰り返し計算で  $\eta=0$  および  $\eta=7$  における条件を満足する解  $\theta_n$ ,  $c_n$  が求められる。なお次数も実際には無限項とすることはできないので、計算機の容量 (HITAC 5020F) の制限から  $n=30$  以上は打ち切られた。したがって、得られた級数解としては、 $n=29$  とした級数 (31), (32) の収束する範囲において適用可能なものであるといえる。

級数解の収束性は次のように調べられた。数値例に従って説明すると、 $n \leq 29$  のすべての  $n$  について  $\theta_n$ ,  $c_n$  が求められるとき、任意の  $\zeta$  に対しおのおの  $n (\leq 29)$  について  $c_\omega$  および  $q_\omega$  を求める。これらの値を  $n$  に対しプロットした結果の一例が第 2 図に示してある。図において、 $\zeta$  として  $\zeta=2.5, 2.8, 3.2 \times 10^{-4}$  に対するものが示してある。図から見られるように、 $\zeta=3.2 \times 10^{-4}$  に対しては、 $n=29$  においてもまだかなり振動していて、十分収束した値に達していない。しかし、 $\zeta=2.5 \times 10^{-4}$  に対しては十分収束に達しているものとみなすことができる。したがって、この例においては  $n=29$  の選択によって  $\zeta$  に関する

第2図 壁面原子濃度および壁への熱伝達の収束性 ( $U=1.70$ ,  $K=47.6$ )



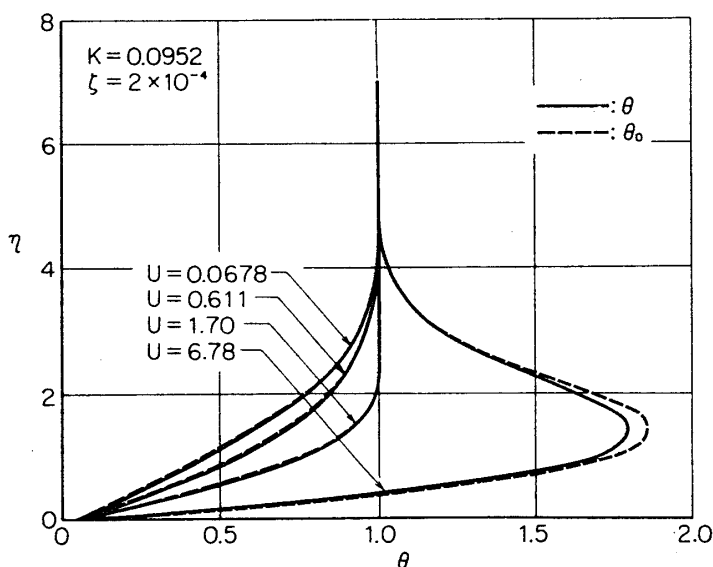
第 3 図 境界層内気体温度の収束性 ( $U=1.70$ ,  $K=46.7$ ,  $\zeta=2.2 \times 10^{-4}$ )



第 4 図 境界層内原子濃度の収束性 ( $U=1.70$ ,  $K=46.7$ ,  $\zeta=2.2 \times 10^{-4}$ )

る収束範囲は  $\zeta \leq 2.5 \times 10^{-4}$  であるといえる。さて、 $\zeta$  のこの範囲において境界層内の温度、濃度が十分収束しているか、どうかを調べる必要がある。その結果を第3, 4図に示してある。前述の収束限界付近の  $\zeta = 2.2 \times 10^{-4}$  について、境界層内の異なる位置  $\eta$  として 0, 0.2, 1, 3 を選び  $\theta = \sum_{i=0}^n \theta_i \zeta^{i/2}$ ,  $Z = \sum_{i=0}^n Z_i \zeta^{i/2}$  の値を  $n$  に対してプロットした。これによると、前出の収束限界内においては境界層内部のいたる所で温度、濃度いずれについても十分な収束が見られる。以上の検討は、各数値例について容易に行なえるので、その結果級数解が十分収束に達しているとみなされる場合に、その数値結果を解として採用することにした。なお、 $K$  が小さくなると収束範囲は  $\zeta$  に関して大きくなる傾向がみられる。以下に提出される解はすべてそのようにして得られたものである。

なお、ここで得られた級数解は生成項  $W$  に現われる温度  $\theta$  を凍結温度  $\theta_0$  によって置き換える近似の結果、求められたものである。この近似の妥当性については、得られた温度  $\theta$  と凍結温度  $\theta_0$  との比較によって確かめられる。 $\zeta = 0$  において、両者は常に一致するが、 $\zeta$  が大きくなるにつれて一般にその差は増大するから、収束限界  $\zeta_{\max}$  付近においてその比較を行なえば十分であろう。その比較の例を第5図に示す。パラメータ  $U$  を変えて、一様流速度の影響が調べられた。図の例はパラメータ  $K = 0.0952$  すなわち  $k_w = 2 \text{ cm/sec}$  に対するものであるが、 $K$  の値がこの値と異なっても温度分布について図で判別できるほどの差が現われない。したがって、現在取り扱っている数値例においては、温度分布はパラメータ  $U$  によってほとんど決定されるものといえる。なお、第5図から見られるように、与えられた  $U$  に対し、得られた温度分布は凍結温度すなわち  $\zeta = 0$  における温度分布と比較するとき、その差は小さいことが示されている。これは、原子生成項  $W$  に現われる温度  $\theta$  を凍結温度  $\theta_0$  で置き換える近似が少なくとも定性的には妥当であるとの証明を与える。より定量的な検討として、新たに得られた  $\theta(\eta, \zeta_{\max})$  を原子生成項  $W$  中の温度  $\theta$  に代入し



第5図 得られた境界層温度と凍結温度との比較



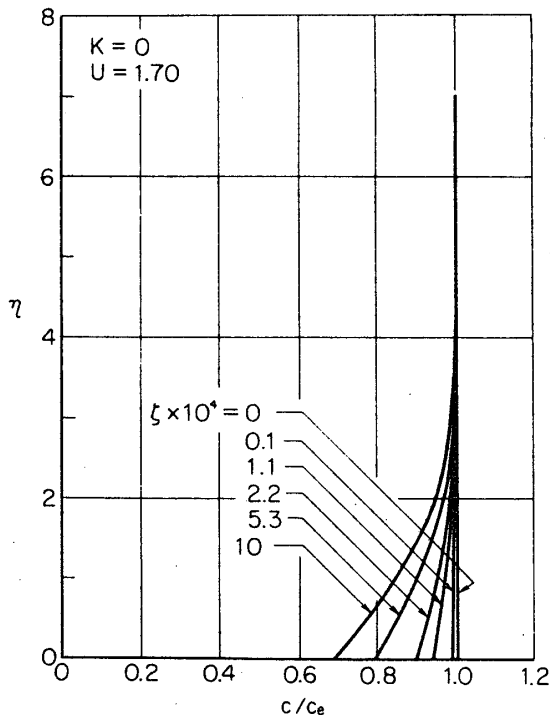
て、同様の計算を繰り返すことによって求まる温度  $\hat{\theta}(\eta, \zeta_{\max})$  を  $\theta_0$  と比較するとき先の近似によってもたらされる誤差を見積ることができる。この点に関しては、すべての数値例について実行されなかったが、実際に取り扱われた一、二例の結果によると現在の数値結果の誤差はたかだか 2~3% 以内である。

## 6. 結果とその検討

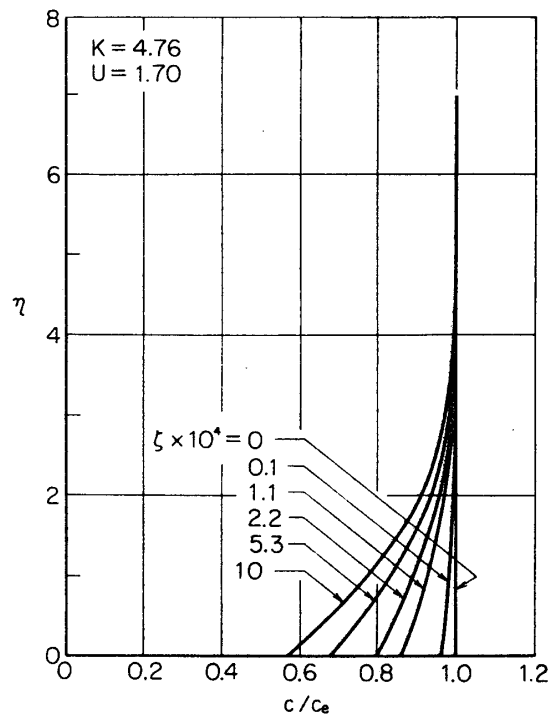
前章で述べたように、ここに提出する数値解析の結果は、気体を窒素として表 1 にまとめて示してあるような一様流状態に対するものである。なお、壁の状態も表 1 に示してある。

基礎方程式 (25)-(27) および境界条件 (29), (30) より、気体が指定され一様流温度  $T_e$ 、圧力  $p_e$  が与えられるとき、解を支配するパラメータは触媒性を代表する反応パラメータ  $K$  (触媒反応速度に比例する) と一様流速度パラメータ  $U (=u_e^2/2\bar{C}_p T_e)$  の二つである。ここでの数値例は種々の  $K, U$  の値に対して得られたもので、i)  $U$  を一定にして、 $K$  を変えるとき、境界層およびそれに関連する物理量がどのように変わるかという点に着目した。この場合は、壁の触媒性が境界層のふるまいにどのような影響を与えるかについての知識を与えよう。ii)  $K$  を一定にして、 $U$  を変えるとき境界層およびそれに関連する物理量がどのように変わるか。この点については、壁の触媒性は一定であるが、 $U$  の変化によって境界層内の温度分布が大きく変化し、それによって境界層内気体反応の状態が変化するから、境界層内気体反応の影響を見ることができる。

触媒性の影響を知る例として、速度パラメータ  $U = u_e^2/2\bar{C}_p T_e = 1.70$  に対し、 $K = 0.0952$ ,



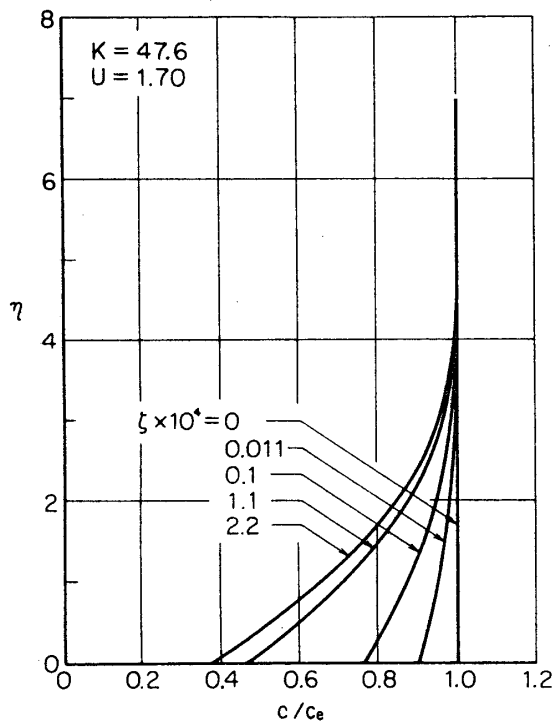
第 6 図 境界層内の原子濃度分布



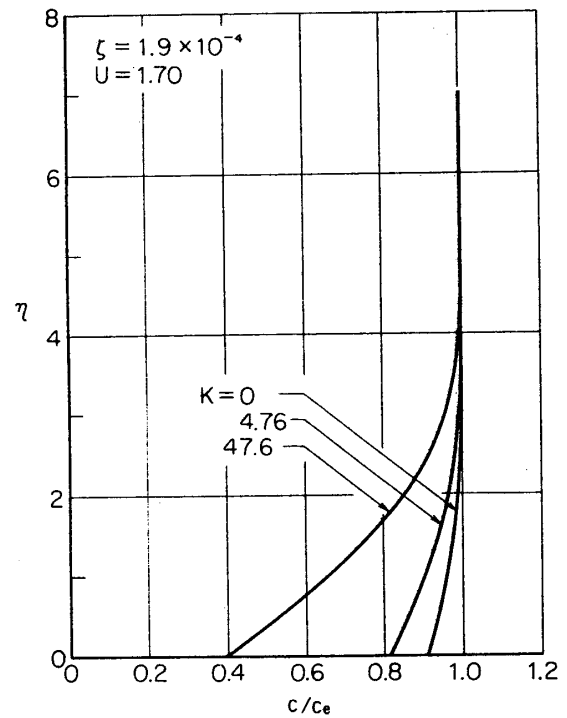
第 7 図 境界層内の原子濃度分布

4.76, 47.6 のそれぞれの場合における境界層内原子濃度分布の先端からの距離による変化を示したのが、第 6, 7, 8 図である。反応パラメータ  $K$  が大きくなると、壁および境界層内の原子濃度の減少が大きく、したがって濃度勾配も壁の近くで急激となる。この模様をより明らかにするために、先端から距離  $\zeta$  が一定の位置での濃度分布を比較した (第 9 図)。これによると、触媒性の濃度分布におよぼす影響は明らかである。

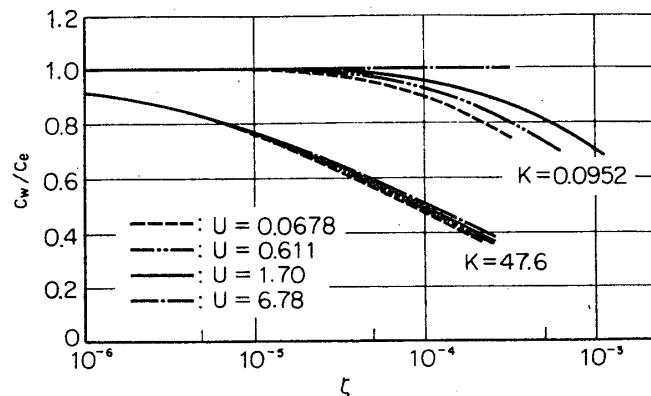
特に壁に沿っての原子濃度分布のふるまいは、ショック・チューブあるいはその他の実験装置において有用な原子濃度測定探子の開発に関連して興味がある。ここで、触媒性の強い



第 8 図 境界層内の原子濃度分布



第 9 図 壁面触媒反応の強さによる境界層内の原子濃度分布

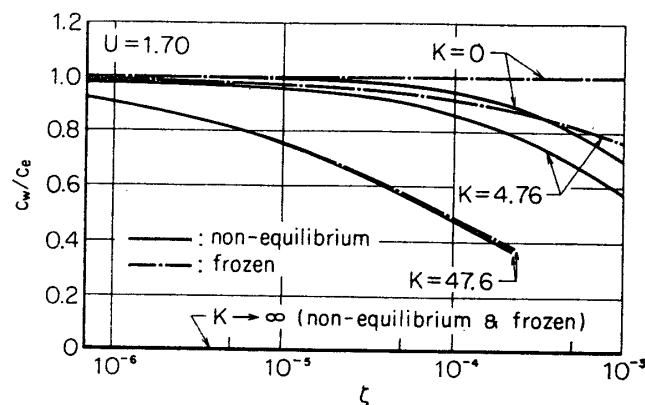


第 10 図 壁面原子濃度分布に及ぼす一様流速の影響

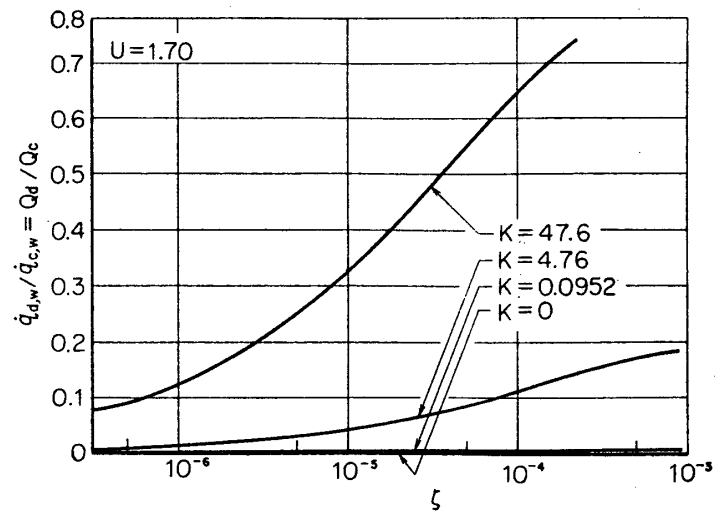
壁と弱い壁との場合について、種々の速度パラメータ  $U$  に対する壁面原子濃度分布を示す (第 10 図). さきに述べたように,  $U$  の大きさにより境界層内気体反応の度合いに著しい差がある. にもかかわらず, 強触媒壁 ( $K=47.6$ ) の場合には壁に沿う原子濃度分布に大きな差が現われていない. したがって, この場合壁上原子濃度分布に関しては壁の触媒性が支配的なものであるということが出来る. これに反し弱触媒壁 ( $K=0.0952$ ) の場合には原子濃度分布に  $U$  の変化による差が比較的大きく現われている. この事実は, 弱触媒壁の場合には壁上原子濃度分布は触媒性の強さばかりでなく, 気体内反応の度合いによっても支配されることを示している.

上記の事実をより顕著に示すものとして, 気体内反応が全く起っていない, いわゆる凍結境界層の解によって得られる壁面原子濃度分布を, 速度パラメータ  $U=1.70$  の場合に反応パラメータ  $K$  を変えて比較した (第 11 図). 強触媒壁 ( $K=47.6$ ) の場合には, 凍結境界層とした解と現在の解法によるものとの差はほとんど認められない. すなわち, 気体内反応の影響がきわめて小さいことを示している. 一方, 局限の場合として  $K=0$ , すなわち完全非触媒壁の場合には気体内反応の影響による凍結境界層の解 ( $c_w/c_e=1$ ) とのずれは比較的大きくなっている. このずれは, 速度パラメータ  $U$  とともに大きくなるものと推定される.

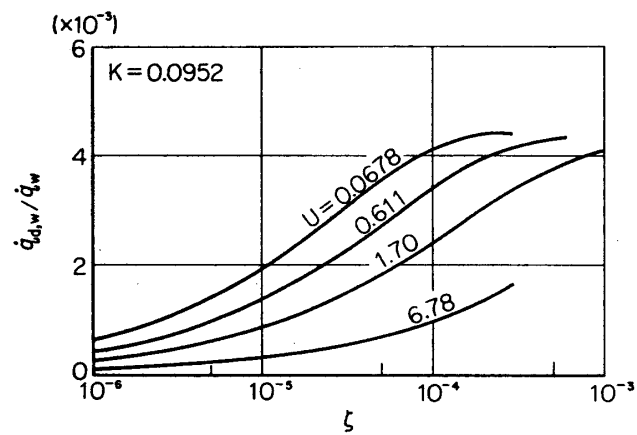
さて, 壁面の原子濃度つまり壁面に滞留する原子濃度の大きさは拡散による壁への熱伝達の割合に對する一つの目安を与える (式 (49) を参照). すなわち, 壁面の滞留原子濃度が大きいほど, 拡散による壁への熱伝達の割合は大きいものとなる. また, その逆もいえる. 一定の  $U$  に対し, 拡散による熱伝達と伝導による熱伝達の比  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_{c,w}$  がパラメータ  $K$  によってどのように変わるか, その変化を示したのが第 12 図である. 特に, 拡散による熱伝達に着目し, それが全熱伝達に占める割合  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_w$  を与えられた  $K$  に対し  $U$  を変えて  $\zeta$  について画いたものが第 13, 14 図である. これによると,  $U$  が大きいとき, 比  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_w$  は小さくなる傾向を示している. 異なる  $K$  の値について, 定性的な傾向は同じであるが, 小さい  $K$  すなわち弱触媒壁の場合には  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_w$  の値そのものはきわめて小さく, 實際上無視しうほどの値である. したがって, 弱触媒壁の場合  $U$  の変化すなわち気体反応の度合いの影響は  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_w$  の値において無視しうほど小さいといえる. 逆に, 強触媒壁



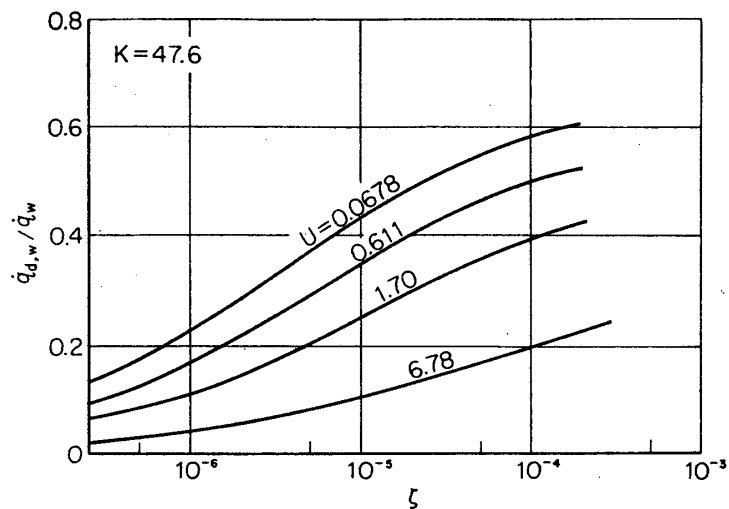
第 11 図 非平衡境界層と凍結境界層における壁面原子濃度の比較



第12図 再結合熱伝達の熱伝導熱伝達に対する割合



第13図 一様流速度による再結合熱伝達と全熱伝達の比の変化



第14図 一様流速度による再結合熱伝達と全熱伝達の比の変化

の場合には、 $U$  の変化によって、すなわち気体内反応の度合いによって  $\dot{q}_{d,w}/\dot{q}_w$  の値は大きな影響を受けるものといえる。

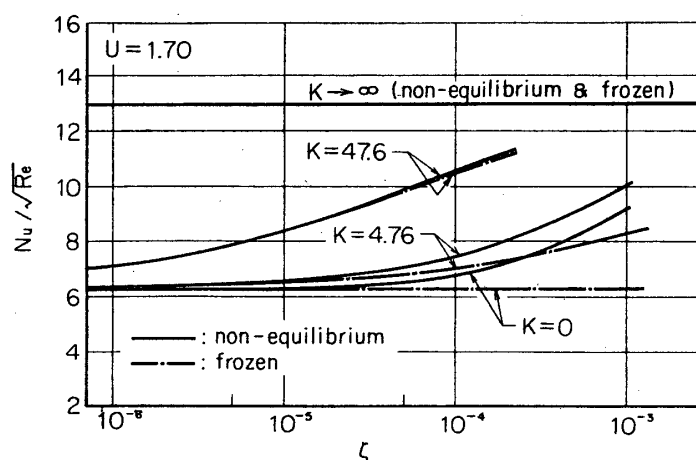
全熱伝達率に関し、熱伝達パラメータ  $Nu/\sqrt{Re}$  を一つの速度パラメータ  $U (=1.70)$  に対し、反応パラメータ  $K$  の種々の値について先端からの距離  $\zeta$  に対してプロットしたのが第 15 図に示してある。ここで、比較のために凍結境界層として得られた値も示されている。この図によると、強触媒壁の場合には凍結境界層解との大きな差は認められない。これは、気体内反応の影響は触媒反応の影響に比較して十分小さいことを意味している。弱触媒壁については、それとは逆に気体内反応の影響が強く現われている。これらのことは、壁面原子濃度分布のふるまいについて前に見た傾向と一致している。

上記の数値例におけるように、定められた気体について一様流温度、圧力および壁面温度が与えられるとき、解は速度パラメータ  $U$  と反応パラメータ  $K$  との二つに依存している。このうち、パラメータ  $K$  は触媒反応速度  $k_w$  に比例するから、この場合  $K$  は触媒反応の強さを代表すると考えられる。表 2 に示されるように、取り扱った数値例において選ばれた  $K$  の値はそれぞれ  $k_w=0, 2, 10^2, 10^3, \infty$  に相当するもので、実際の表面材料として対応を求めると、それらはそれぞれ完全非触媒性材料、ガラスのような有機材料、酸化金属、金属、完全触媒性材料に相当するものである。

Damköhler 変数  $\zeta$  が先端からの距離  $x$  の代わりに用いられているが、気体の種類と一様状態が与えられるとき、(23) 式より容易に  $\zeta$  との関係を求めることができる。たとえば、ここで取り扱った数値例においては、その関係は  $x(\text{cm})$ ,  $u_e(\text{cm/s})$  として

$$\zeta = \frac{3.38}{u_e} x$$

で与えられる。表 1 に示される  $u_e$  と  $U$  との関係から、得られた結果において、 $\zeta$  より  $x$  への読み替えは容易に行なわれる。



第 15 図 熱伝達パラメータ

## ま と め

この論文では、解離反応をともなう原子分子気体の平板に沿う境界層流れの数値解析について一つの方法が提案された。特に解析においては境界層内反応および壁面での触媒反応の両者を考慮する一般的な場合を取り扱いの対象とした。従来よく知られている級数展開法は、この問題にそのまま適用することは困難で、実際の応用に当って有用な答が得られないことが指摘された（付録参照）。ここでは、その障害となっている反応生成項中の温度を凍結温度によって置き換える近似を導入して、十分広い収束範囲をもつ級数解に導く数値解析法を提案し、それによる実際の数値例への適用結果を示した。

この数値解析法の特徴は、級数解を計算機の容量の許す範囲で所望の項数まで計算することができること、また得られた結果の収束範囲および生成項に課した近似による誤差を定量的に見積ることが容易であること、さらには繰り返し計算によって、より厳密な解に到達する可能性をもつことなどがあげられる。

なお、物体形状として平板が選ばれたが、これについては平板境界層それ自身工学上の応用において重要であるばかりでなく、特に境界層内反応に関しては、先端から後方に進むとき、凍結流から平衡流までの全遷移過程を含んでいる点で興味ある問題である。ここで提案された手法は、薄い物体周りの境界層の問題の解析に、拡張適用できる可能性も期待される。

最後に、本論文は著者の一人（露木）が東京大学大学院工学系研究科に提出した学位論文の一部を含んでいることを付記しておく。

1972 年 5 月 31 日 航空力学部

## 参 考 文 献

- [1] Chambré, P. L. and Acrivos, A., "On chemical surface reactions in laminar boundary layer flow", Jour. of Appl. Phys., Vol. 27, No. 11, pp. 1322-1328, 1956.
- [2] Goulard, R., "On catalytic recombination rate in hypersonic stagnation heat transfer", Jet Propulsion, Vol. 28, No. 11, pp. 737-745, 1958.
- [3] Inger, G. R., "Dissociated laminar boundary layer flows over surface with arbitrary continuous distributions of catalycity", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 6, No. 9, pp. 815-832, 1963.
- [4] Freeman, N. C. and Simpkins, P. G., "On the diffusion of species in similar boundary layer with finite recombination rate at the wall", Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XVIII, Pt. 2, pp. 213-229, 1965.
- [5] Fay, J. A. and Riddell, F. R., "Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air", Jour. of Aero. Sci., Vol. 25, No. 2, pp. 73-85, 1958.
- [6] Blottner, F. C., "Chemical nonequilibrium boundary layer", AIAA Journal, Vol. 2, No. 2, pp. 232-240, 1964.
- [7] Rae, W. J., "A solution for the nonequilibrium flat plate boundary layer", AIAA Journal, Vol. 1, No. 10, pp. 2279-2288, 1963.
- [8] Inger, G. R., "Highly nonequilibrium boundary layer flows of a multicomponent dissociated gas mixture", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 7, No. 11, pp. 452-460, 1964.
- [9] Ladnova, L. A., "Nonequilibrium laminar heat transfer with a flow of dissociated gas", Heat

Transfer-Soviet Reseach, Vol. 1, No. 3, pp. 47-61, 1969.

- [10] 小口伯郎・露木太郎, “非平衡解離気体の平板に沿う境界層”, 第 13 回 応用数学力学講演会 講演予稿集, p. 45, 1968.
- [11] Takano, A. and Suzuki, T., “Nonequilibrium boundary layer of a dissociated gas over a catalytic flat plate”, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 11, No. 19, pp. 44-59, 1968
- [12] Takano, A., “Integral method solution for nonequilibrium boundary layer flow of a dissociated gas over a catalytic flat plate”, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 13, No. 22, pp. 10-26, 1970.
- [13] Dorrance, W. H., “Viscous Hypersonic Flow”, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [14] Chung, P. M., “Chemically reacting non-equilibrium boundary layers”, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 2, Academic Press Inc., New York, pp. 109-270, 1965.
- [15] Ahtye, W. F. and Peng, Tzy-Cheng, “Approximations for the thermodynamic and transport properties of high-temperature nitrogen with shock-tube applications”, NASA TN D-1303, 1962.
- [16] Hsu, Cheng-ting and Anderson, J. E., “Nonequilibrium dissociating flow over a cusped body”, AIAA Journal, Vol. 1, No. 8, pp. 1784-1789, 1963.
- [17] Lighthill, M. J., “Dynamics of a Dissociating Gas I - Equilibrium Flow”, Jour. of Fluid Mech., Vol. 2, Part 1, pp. 1-32, 1957.

#### 付録 A. 厳密な級数展開における $W_n$ およびそれを用いた解析例

初等的であるが、やや長い計算の結果  $W_n$  について  $n=4$  まで求めた。その形を示すと、

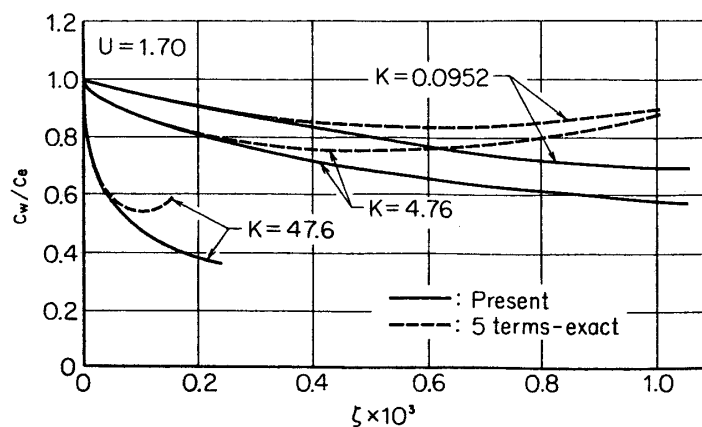
$$W_0=0, W_1=0 \quad (A1)$$

$$W_2 = \frac{A_2}{\theta_0^{\omega+1}} \left\{ \exp\left(-\frac{A_3}{\theta_0}\right) \right\} (1-c_0) - \frac{1}{\theta_0^{\omega+2}} \frac{c_0^2}{1+c_0} \quad (A2)$$

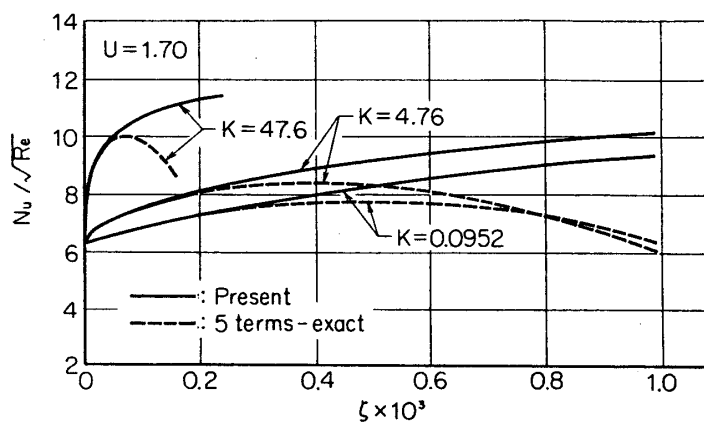
$$W_3 = -\frac{A_2}{\theta_0^{\omega+1}} c_1 \left\{ \exp\left(-\frac{A_3}{\theta_0}\right) \right\} - \frac{1}{\theta_0^{\omega+2}} \frac{c_0(2+c_0)}{(1+c_0)^2} c_1 \quad (A3)$$

$$W_4 = A_2 \left[ -\frac{c_2}{\theta_0^{\omega+1}} + \left( \frac{A_3}{\theta_0^{\omega+3}} - \frac{\omega+1}{\theta_0^{\omega+2}} \right) (1-c_0) \theta_2 \right] \exp\left(-\frac{A_3}{\theta_0}\right) \\ - \left[ \frac{1}{\theta_0^{\omega+2}} \left\{ \frac{c_1^2 - 2(1+c_0)c_2}{(1+c_0)^3} + \frac{c_2}{(1+c_0)^2} + c_2 \right\} - \frac{c_0^2}{1+c_0} \frac{\omega+2}{\theta_0^{\omega+3}} \theta_2 \right] \quad (A4)$$

(A1)-(A4) に示される  $W_n$  を用い、方程式 (33)-(38) に基づいて  $n=4$  まで計算することができる。実際の数値例として、本文における数値例と同一の条件すなわち気体として窒素を選び  $T_e=5,500^\circ\text{K}$ ,  $p_e=0.01 \text{ atm}$  に対し速度パラメータ  $U=1.70$ , 反応パラメータ  $K=0.0952, 4.76, 47.6$  について壁の原子濃度分布  $c_w/c_e$  および熱伝達パラメータ  $N_u/\sqrt{Re}$  の分布がそれぞれ第 A-1, A-2 図に示されている。比較のために、本論文の数値結果も併記してある。これらの図から、明らかに、5 項近似はその収束範囲がきわめて限られたものであることが見られる。その収束範囲において、本論文での近似級数解との一致はきわめて良い。



第 A-1 図 壁面原子濃度分布の比較



第 A-2 図 熱伝達パラメータの比較