

ノズルインサート内の非定常温度分布 の数値計算および実験値との比較

秋 葉 録二郎・山 下 三和子

1. 序 論

固体ロケットモータのノズルスロート部は高度の耐熱性が要求され、普通グラファイトがこの部分の材料として使われる。これはまた、heat sink として用いられるので、厚みをもったブロックであり、燃焼中この内部はきわめて大きな温度勾配が存在することとなる。

この内部の温度分布を求めることは、グラファイトの最高温度や、これに隣接する材料が受ける温度条件を知る意味でグラファイトの流れに直接さらされない部分の温度を知るうえで、また、さらに内部の熱応力を求めるために設計上大きな意味をもつ。

しかし、この部分の温度を実験的に数多く測定することは、これがエンジンの中でもきわめて重要な部分であるだけに実際上の制約が大きく、従来わが国では中ないし大型のものについてはほとんど測定値がないといった状態であった。

そこで、まず、この様な中空の軸対称の任意形状の物体中の温度分布を熱伝導方程式を数値的に解いて、求める計算プログラムを完成させ、これと並行して実験も計画し、両者より各種のパラメータとして妥当なものを推定し設計に役立たせようというのがわれわれのねらいとするところであった。

2. 軸対称中空物体の熱伝導方程式の数値解法

熱伝導方程式自体は何ら特別のものではないが、グラファイトの様な材料でしかもきわめて高温になることが予想される場合、熱伝達係数および比熱が温度の関数であること、さらに前者について方向性が著しいことが考慮されねばならない。

今の場合軸対称ということで一応伝達率の成分はノズル軸方向とそれに直角方向という2方向で変わると考える。

基礎方程式は

$$\begin{aligned}\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \text{div} \left(\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \lambda_{II} \frac{\partial \theta}{\partial z} \mathbf{i}_z \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{II} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\ &= \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \lambda_{II} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda_{II}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}\end{aligned}\quad (1)$$

λ_1, λ_{II} はそれぞれ軸に直角、並行方向の値である。

$\rho, c, \lambda_1, \lambda_{II}$ についてそれぞれ代表的な定数値をとり、 $\rho^*, c^*, \lambda_1^*, \lambda_{II}^*$ とすれば上式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda_{\perp}^*}{\rho^* c^*} \left[\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\rho^* c^*}{\rho c} \frac{1}{\lambda_{\perp}^*} \frac{d\lambda_{\perp}}{d\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{\lambda_{\parallel}^*}{\rho^* c^*} \left[\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^*} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\rho^* c^*}{\rho c} \frac{1}{\lambda_{\parallel}^*} \frac{d\lambda_{\parallel}}{d\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2)$$

これを境界条件 ((4)~(6) 式) の下に差分でとくため、

$$\Delta t = m \frac{\Delta r^2}{\alpha_{\perp}^*} = n \frac{\Delta z^2}{\alpha_{\parallel}^*} \quad (3)$$

とおく。ここに $\alpha_{\perp}^* = \lambda_{\perp}^* / \rho^* c^*$, $\alpha_{\parallel}^* = \lambda_{\parallel}^* / \rho^* c^*$ 。また, $\rho^* c^* / \rho c$, $\lambda_{\perp} / \lambda_{\perp}^*$, $\lambda_{\parallel} / \lambda_{\parallel}^*$ はそれぞれ θ の関数として与えられるものである。

[境界条件]

境界上での値を ()_c で示すと, 境界条件は境界の切線と z 軸のなす角を α として, 燃焼ガスと境界上で

$$-\left(\lambda_{\perp} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_c = h(\theta_f - \theta_s) \cos \alpha = h_r(\theta_f - \theta_s) \quad (4)$$

$$\left(\lambda_{\parallel} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_c = h(\theta_f - \theta_s) \cos \alpha = h_z(\theta_f - \theta_s) \quad (5)$$

断熱壁で

$$\left(\lambda_{\perp} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_c = \left(\lambda_{\parallel} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_c = 0 \quad (6)$$

差分の空間的網目の大きさは $\Delta r, \Delta z$ であり, 網目の一点 [(0, 0) と略記する] の Δt 時間での温度変化分 $\Delta \theta_{00}$ は (0, 0) とそれに隣接する 4 点 (-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1) の現在温度より次の形で決められる。すなわち,

$$\Delta \theta_{00} = mR + nZ \quad (7)$$

ここで R, Z は隣接点がグラファイト領域 (θ) 内にあるか燃焼ガス領域 (H) にあるかまたは断熱壁 (I) 内に入っているかによってそれぞれ次の計算式に従って計算する。当然 (0, 0) 点はグラファイト領域内の点である。

R の計算に関し, (-1, 0)-(1, 0) の順で領域を記す。

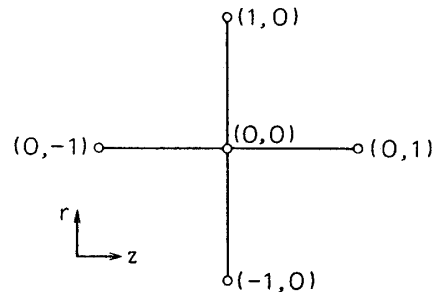
(i) D-D

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*} \left\{ (\theta_{10} - 2\theta_{00} + \theta_{-10}) + \frac{\Delta r}{2r} (\theta_{10} - \theta_{-10}) \right\} + \frac{1}{4} \frac{\rho^* c^*}{\rho c} \left(\frac{d(\lambda_{\perp}^*)}{d\theta} \right)_{00} (\theta_{10} - \theta_{-10})^2 \quad (8)$$

(ii) H-D

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \left[\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*} \left\{ g_{-10} \Delta r - (\theta_{00} - \theta_{10}) + \frac{\Delta r^2}{2r} \left(\frac{\theta_{10} - \theta_{00}}{\Delta r} - g_{-10} \right) \right\} \right] \quad (9)$$

$$+ \left[\frac{d(\lambda_{\perp}^*)}{d\theta} \right]_{00} \frac{\Delta r^2}{4} \left(\frac{\theta_{10} - \theta_{00}}{\Delta r} - g_{-10} \right)^2 \quad (9)$$



第 1 図 網目の各点の位置関係

ただし, g_{-10} は,

$$g_{-10} = \frac{h_r}{\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*}\right)_{-10}} \lambda_{\perp}^* (\theta_f - \theta_{-10}) \quad (10)$$

$$\theta_{-10} - \theta_{00} = \frac{3}{8} g_{-10} \Delta r - \frac{1}{8} (\theta_{10} - \theta_{00}) \quad (11)$$

より求める. $\theta_f \gg \theta_{-10}$, かつ Δr が十分小さければ

$$g_{-10} \doteq \frac{h_r}{\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*}\right)_{00} \lambda_{\perp}^*} (\theta_f - \theta_{00}) \quad (12)$$

(iii) D-H

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \left[\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*} \left\{ g_{10} \Delta r - (\theta_{00} - \theta_{10}) + \frac{\Delta r^2}{2r} \left(\frac{\theta_{00} - \theta_{-10}}{\Delta r} + g_{10} \right) \right\} + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*} \right)_{00} \frac{\Delta r^2}{4} \left(\frac{\theta_{00} - \theta_{-10}}{\Delta r} + g_{10} \right)^2 \right] \quad (13)$$

ここで g_{10} は

$$g_{10} = \frac{h_r}{\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*}\right)_{10} \lambda_{\perp}^*} (\theta_f - \theta_{10}) \quad (14)$$

$$\theta_{10} - \theta_{00} = \frac{3}{8} g_{10} \Delta r - \frac{1}{8} (\theta_{-10} - \theta_{00}) \quad (15)$$

より求める. $\theta_f \gg \theta_{10}$ かつ Δr が十分小さければ

$$g_{10} \doteq \frac{h_r}{\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\perp}^*}\right)_{00} \lambda_{\perp}^*} (\theta_f - \theta_{00}) \quad (16)$$

(iv) I-D, D-I

それぞれ H-D, D-H で $g_{-10} = 0$, $g_{10} = 0$ とする.

(v) H-I などは (0, 0) が I 内にあるとする.

z の計算に関し, (0, -1) - (0, 1) の順で領域を記す.

(i) D-D

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \left[\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^*} (\theta_{01} - 2\theta_{00} + \theta_{0-1}) + \frac{1}{4} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^*} \right) (\theta_{01} - \theta_{0-1})^2 \right] \quad (17)$$

(ii) H-D

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \left[\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^*} \{ g_{0-1} \Delta z - (\theta_{00} - \theta_{01}) \} + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^*} \right)_{00} \frac{\Delta z^2}{4} \left(\frac{\theta_{01} - \theta_{00}}{\Delta z} - g_{0-1} \right)^2 \right] \quad (18)$$

ここで, g_{0-1} は

$$g_{0-1} = \frac{h_z}{\left(\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^*}\right)_{0-1} \lambda_{\parallel}^*} (\theta_f - \theta_{0-1}) \quad (19)$$

$$\theta_{0-1} - \theta_{00} = \frac{3}{8} g_{0-1} \Delta z - \frac{1}{8} (\theta_{01} - \theta_{00}) \quad (20)$$

より求める。 $\theta_f \gg \theta_{0-1}$ かつ Δz が十分小さければ

$$g_{0-1} \doteq \frac{h_z}{\left(\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{II}^*}\right)_{00} \lambda_{II}^*} (\theta_f - \theta_{00}) \quad (21)$$

(iii) D-H

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho c} \left[\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{II}^*} \{g_{01} \Delta z - (\theta_{00} - \theta_{0-1})\} + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{II}^*} \right) \frac{\Delta z^2}{4} \left(\frac{\theta_{00} - \theta_{0-1}}{\Delta z} + g_{01} \right)^2 \right] \quad (22)$$

ここで, g_{01} は

$$g_{01} = \frac{h_z}{\left(\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{II}^*}\right)_{01} \lambda_{II}^*} (\theta_f - \theta_{01}) \quad (23)$$

$$\theta_{01} - \theta_{00} = \frac{3}{8} g_{01} \Delta z - \frac{1}{8} (\theta_{0-1} - \theta_{00}) \quad (24)$$

より求める。 $\theta_f \gg \theta_{01}$ かつ Δz が十分小さければ

$$g_{01} \doteq \frac{h_z}{\left(\frac{\lambda_{II}}{\lambda_{II}^*}\right)_{00} \lambda_{II}^*} (\theta_f - \theta_{00}) \quad (25)$$

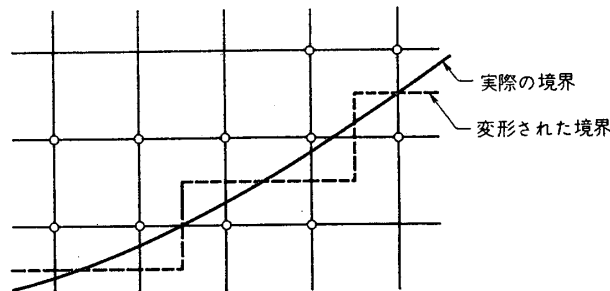
(iv) I-D, D-I

それぞれ H-D, D-H で $g_{0-1} = 0$, $g_{01} = 0$ とする。

(v) H-H は (0, 0) が H 領域内にあるとする。

その他 (I-I など) は (0, 0) が I 領域内にあるとする。

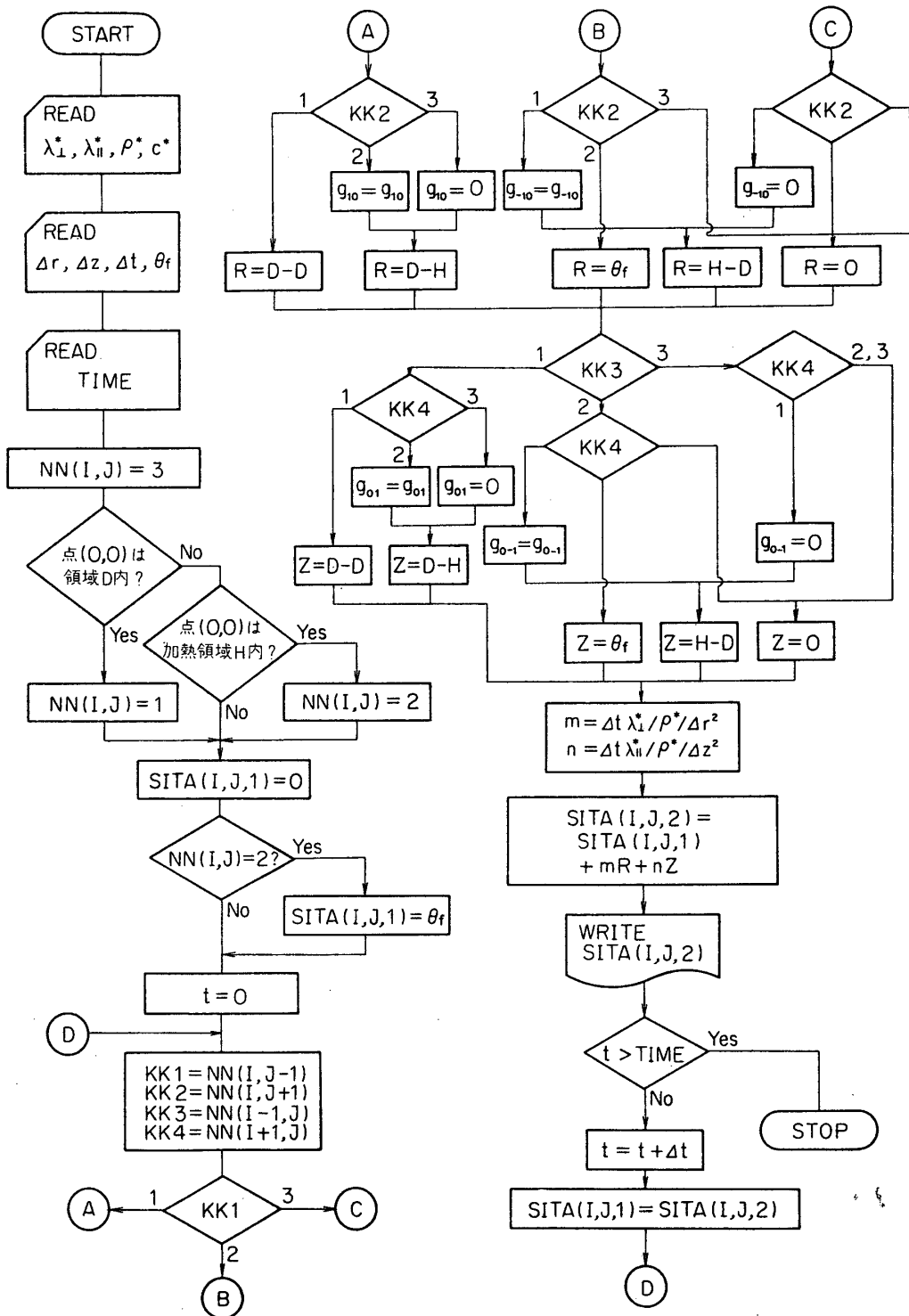
これらの式は隣接する格子点 3 点を通る 2 次曲線より微係数を求め、もとの微分方程式に代入して得られる差分式であり、この際境界は第 2 図の様に変形して考えられていることとなる。ただし h_r, h_z の計算にはもとの境界の傾斜角 α を用いる。



第 2 図 実際の境界と変形された境界

3. プログラムについて

プログラムの概略は第 3 図にフローチャートで示した。また計算は HITAC 5020 を用い



第3図 フロチャート

て行なった。プログラムの計算精度は約 6.9 けたで、演算時間は、網目の数によって異なるが、M-12 モータの場合、網目の数が 3,216 個で燃焼開始後 40 秒までの温度変化を求めるのに 672 秒を要した。

また演算の収束性は、 m, n にかかわってくるが、この計算では、 $m=n=0.1064$ を用いた。

i) 解析解が得られている場合の比較

無限にひろがっている物体に円筒状の孔があげられ、この面より熱が放散される場合は解析解が得られている。(文献 (1) p. 334~338)

数値的には無限とはいかないが十分に大きい値としてこれを扱うこととし、次の数値をえらんで比較した。

すなわち、

内孔半径 $r=a=1$ cm

外径 = 99 cm

$\Delta r=0.5$ cm

$\lambda/\rho c=1.33$ cm²/sec

$h=0.0662$ cal/cm² sec°C

$\lambda=0.331$ cal/cm sec°C

これによる値としては、全く図 (文献 (1) p. 338 の Fig. 43) の上では差異が認められない程度の結果が得られた。

ii) λ 一定としての計算例

S-300 用グラファイト内部の温度分布計算として以下の数値を用いて計算した。

すなわち、

$$q=h(\theta_f-\theta_s)\frac{r_t}{r} \quad (\text{convergent part})$$

$$=h(\theta_f-\theta_s)\left(\frac{r_t}{r}\right)^2 \quad (\text{divergent part})$$

$$h=0.0556 \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}^\circ\text{C}, \quad \theta_f=2,700^\circ\text{C}$$

グラファイトの定数として

$$\lambda=0.331 \text{ cal/cm sec}^\circ\text{C}, \quad \rho=1.56 \text{ g/cm}^3, \quad c=0.160 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

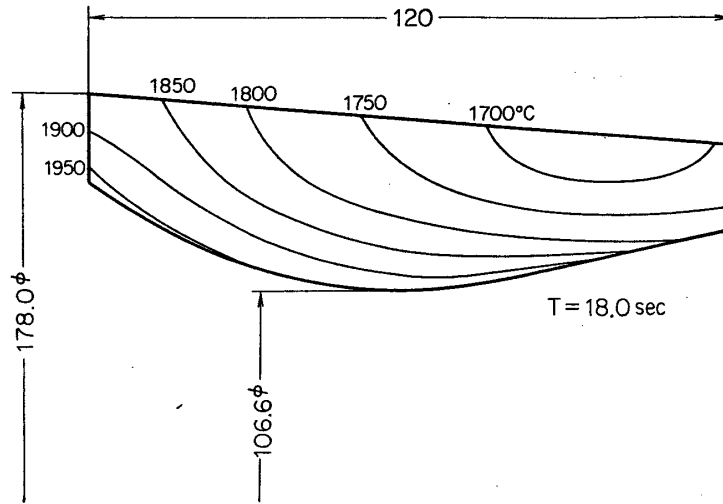
初期温度 $\theta=0^\circ\text{C}$, $\Delta r=\Delta z=0.5$ cm

また、ガス流にさらされない部分は断熱として扱っている。

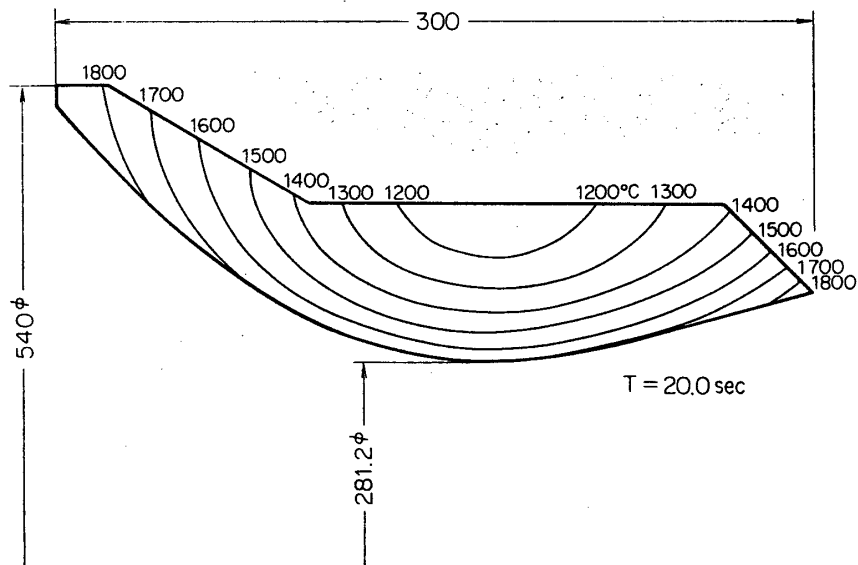
この計算結果を第 4 図に示す。

この計算では境界近傍での温度分布の精度をよくするため第 2 図格子点を結ぶ縦横線上で温度分布が 2 次曲線で近似されるとして、これと実際の境界との交点で境界条件が満される様 R, Z の計算式を修正した。

また、同様の仮定による 735 モータのグラファイトインサート内部温度分布の計算結果を



第 4 図 S-300 用グラファイト温度分布

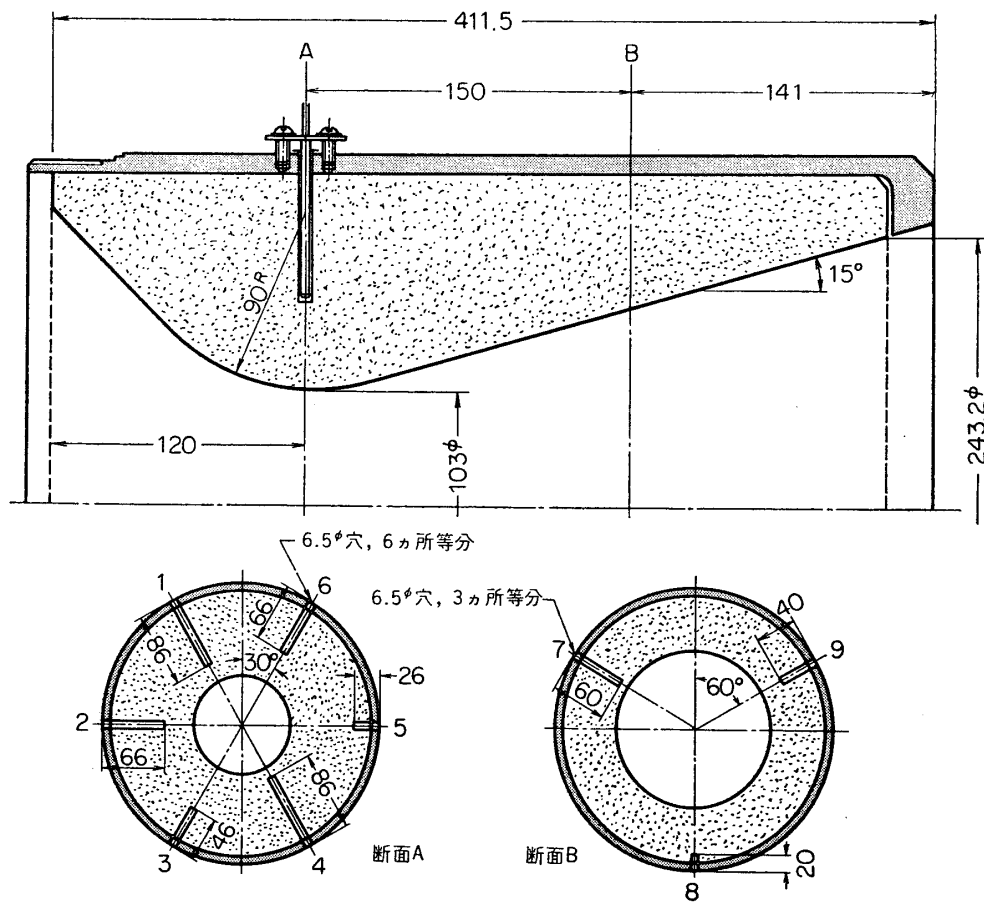


第 5 図 735 モータグラファイト温度分布

第 5 図に示す。

iii) M-12 のためのグラファイトインサート温度分布の計算と実験結果

M-12 モータのノズルグラファイトインサートは、モータの機能向上によるガス温度の増大および軽量化大型化に伴う肉厚の減少等 M-10 に比し熱的にきびしくなるので、その地上燃焼に先だち、300φ のシミュレーションモータを計画、グラファイト部の温度測定を試みた。また、M-12 モータもこの様な大型としては初めてグラファイトインサート内部の温度を計 5 点測定した。

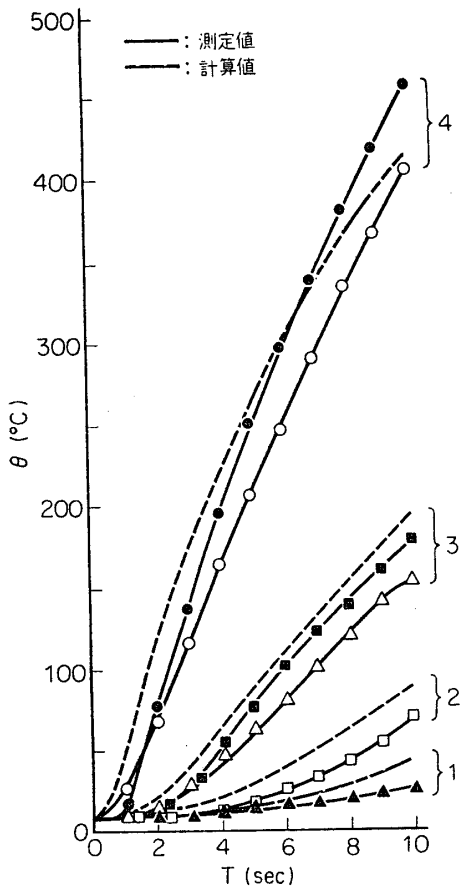


第 6 図 (A) 300φ シミュレーションモータ温度測定位置

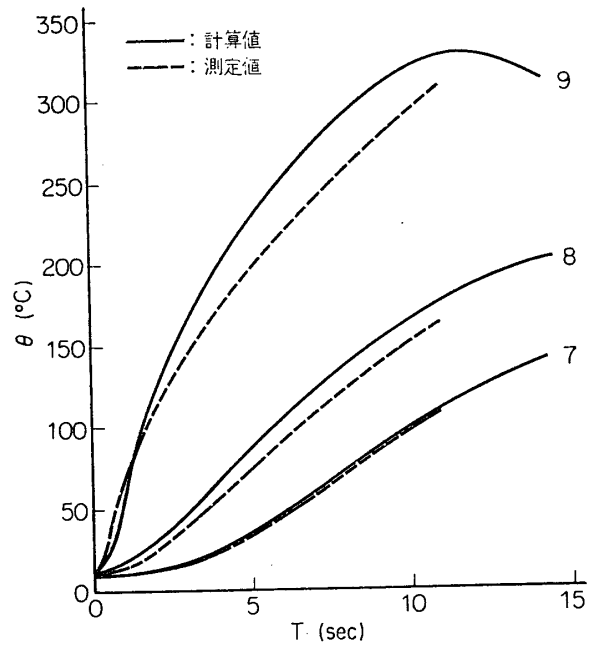
以下これらに並行して試みた数値計算との比較においてインサート内部温度分布の概要をのべる。

まず 300φ シミュレーションでは、第 6 図 (A) の点の温度測定を行なった。これに先立ち各種定数を仮定して計算した値はこの測定結果第 6 図 (B) と一致のよくない点があったので、一応万偏なく余り差異の大きくない様に定数を調節したのが同図点線である。この場合異方性は考慮しなかったが、熱伝達率についての温度依存性は考慮した。この場合使われた数値は以下の通りである。ただし、 c, λ は文献 (2) p. 134, p. 136 より直線近似したものである。

定数補正なし		定数補正したもの	
$h(\text{cal/cm}^2 \text{sec}^\circ\text{C})$	0.0556		0.03597
$\lambda(\text{cal/cm sec}^\circ\text{C})$	$-0.0002672 \cdot \theta_{00} + 0.4102$ ($\theta_{00} \leq 607^\circ\text{C}$)		$-0.00006995 \theta_{00} + 0.3553$
	$-0.00003968 \theta_{00} + 0.2099$ ($\theta_{00} > 607^\circ\text{C}$)		
$\rho(\text{g/cm}^3)$	1.56		1.56



第6図(B-1) 300φ シミュレーションモータ (断面A)



第6図(B-2) 300φ シミュレーションモータ (断面B)

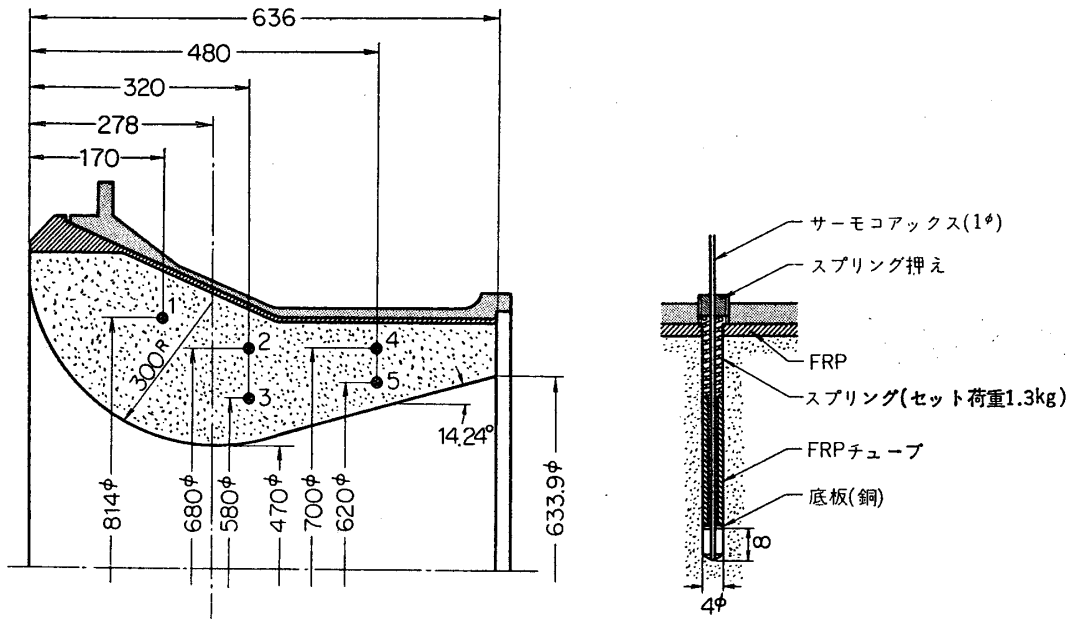
$$c(\text{cal/g}^\circ\text{C}) = \begin{cases} 0.0003182\theta_{00} + 0.1245 & (\theta_{00} \leq 577^\circ\text{C}) \\ 0.00008667\theta_{00} + 0.3213 & (577^\circ\text{C} < \theta_{00} \leq 1,327^\circ\text{C}) \\ 0.000025\theta_{00} + 0.420 & (\theta_{00} > 1,327^\circ\text{C}) \end{cases}$$

左に同じ

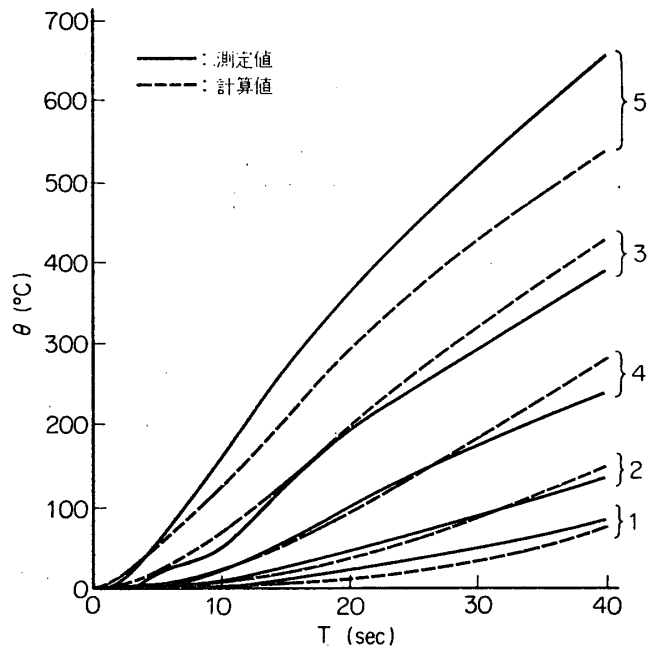
初期温度 $\theta = 9^\circ\text{C}$, $\Delta r = \Delta z = 1 \text{ cm}$

これによっても軸方向でのずれが大きく、 h に対する仮定をもう少し厳密なものにおきかえる必要がある様である。また、外壁に近づく程測定値が低目となるのは、外壁が断熱壁でないことの影響もあろう。

M-12 モータは第7図(A)の各点の計測がなされ、同図(B)の測定結果が得られた。300φ シミュレーションで調節した定数を用いて計算したところ、表面に近い部分の差が大



第 7 図(A) M-12 モータ温度測定位置



第 7 図(B) M-12 モータグラフ

きかった。これは初期には表面コーティングが有効であるためと考えられるので、最初の 10 秒間、 h は $1/2$ の値を使って計算した。その結果を同図に点線で示した。

このらの結果はまだ十分満足できるものとはいえないが、今後測定を重ね、また定数データが厳密なものとなればよりよい予測が可能となろう。

4. 結 び

現段階において、熱特性が異方性でしかも温度依存性のある軸対称熱伝達の問題が数値的に解かれ、ノズルインサート内部の温度分布の概略状況が把握できるようになった。

今後、より正確なパラメータの推定、計算時間の短縮、計算精度の向上に関する検討を続けるつもりである。

おわりに、実験に当って測定を担当した日産自動車KKの各位、および秋葉研、加勇田、中部両技官、上杉助手に感謝する。

1972年6月10日 新設部(工学)

参 考 文 献

- [1] Carslaw and Jaeger "Conduction of Heat in Solids" (1959) Oxford Press
- [2] Y.S. Touloukian. (Editor) "Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials" Vol. 1 (1967) MacMillan Co.