

プラズマ平衡問題の数値解析（初歩的考察）

菊地文雄

Numerical Analysis of MHD Equilibria (Fundamental Considerations)

By

Fumio KIKUCHI

Abstract: This work deals with numerical computations of MHD equilibria described by boundary value problems of semi-linear elliptic equations. Only a simplified model equation is analyzed in this report to obtain some fundamental informations from the standpoint of numerical analysis. The discretization is based on the use of the simplest finite element method, i.e., the piecewise linear simplex model. Our numerical method is essentially based on the Newton type techniques combined with the displacement-control procedures, which are frequently employed in the finite element analysis of buckling problems. Numerical solutions are obtained for both one and two dimensional problems to see numerical behaviors and accuracy of the proposed method. As a result, our method has turned out to be effective for the analysis of nonlinear paths of solutions.

概 要

本研究は、半線形楕円型方程式の境界値問題により記述される、プラズマ平衡問題の数値計算を扱ったものである。本報では数値解析的立場からの基礎的情報を得るため、ある簡略化されたモデル方程式のみを解析した。離散化には最も簡単な区分1次単体モデルの有限要素法を用いた。数値計算法は、座屈問題の有限要素解析でよく使うような、変位制御法を併用した Newton 型の技法を採用した。本手法の数値的挙動、精度を調べるため、1次元問題と2次元問題の双方について数値解を求めた。その結果、本方法は非線形解の径路を解析するのに有効なことがわかった。

1. はじめに

石油ショック以来、エネルギー問題の重要性が強く認識されるようになったが、その対応策として現時点で最も有望視され、しかも投資が蓄積されているのは原子力エネルギーによる方法である。原子力エネルギーを得る手法としては、良く知られているように、主に核分裂によるものと核融合によるものが考えられている。前者については、現に一部は実用に供されており、苦しみなながらも信頼性を増大しつつあるが、後者については未だ基礎研究の段

階にあり、全体としては未来のエネルギー源（候補）と言えよう。

核融合エネルギーを安全に制御して利用するため、現在考えられている最有力の方法は電磁気的な閉じ込めの使用であり、その実現のため各国で大規模なプロジェクト研究が進行中である。科学・技術の他の分野と同様、このような研究では実験と理論の有機的結合が不可欠である。実際、核融合研究では実験装置の製作といえども巨額な費用が必要であり、設計にあたっては理論解析による十分な検証が要求される。逆に、理論計算に必要な基礎データの多くは実験結果から得られる。理論的観点から寄与すべき点は多々あるが、その主要テーマとして例えば次の二つが挙げられる：

- (i) 電磁気的に閉じ込められたプラズマの平衡状態の存在とその形態
- (ii) 平衡解の安定性

(i)の考察には、通常は MHD 方程式から誘導される非線形境界値問題（あるいは非線形固有値問題）を解くことが要求される。(ii)の目的のためには、厳密には平衡解近傍で非線形初期値境界値問題を解かねばならぬが、第1段階として、微小外乱に対する線形応答を調べる必要があり、そのために線形固有値問題を扱うのが普通である。いずれの場合も、純解析的な取扱いには限度があり、数値計算法によるシミュレーションが大きな役割を果たしている。現在では、数値実験がいわば理論の中での実験として独立した地位を占めつつある。

以上のような現状認識に基づき、本小論ではプラズマの平衡を記述する方程式として用いられる、ある半線形楕円型方程式の境界値問題（あるいは非線形固有値問題）の有限要素法による数値計算法について、初歩的な考察を実施する。最初にモデル方程式を考え、次にその有限要素近似方程式を構成する。さらにその数値解法について説明し、最後に基礎的な数値実験結果について述べる。特に構造力学において広く使用されている局所線形化の原理に基づく数値解法（Newton 法、増分法など）がここで考えているような問題にも有効なことを示したい。考えている非線形方程式は非線形性のため、かなり複雑な解の挙動を示すと予想され、今後そのような解を系統的に求めることを目標とするが、本報はそのための準備である。

プラズマの平衡問題の数値解析については、Lackner [1] の解説がある。特に緩和法系の差分法による計算例として Suzuki [2], [3] を挙げておく。有限要素法による計算の試みとして西岡 [4] がある。多価性を有する非線形解の扱いについては例えば Meyer-Spasche の研究 [5] がある。方程式の物理的背景については宮本 [6]、有限要素法の基礎については Strang & Fix [7] を挙げるに止める。

2. 準 備

ここではプラズマの閉じ込めにおける平衡状態の決定に用いられる一記述方程式（例えば宮本 [6]）の、本質的な部分を保って簡略化して得られる、次の問題を考える。

$$-\Delta u = \lambda f(u) \quad (\Omega \text{ 内で}), \quad u = -\alpha \quad (\partial\Omega \text{ 上で}) \quad (1)$$

上記において Δ はラプラシアン、 Ω は1次元または2次元空間内の有界領域、 $\partial\Omega$ はその境界、 λ は実パラメーター、 α は正のパラメーターである。 Ω 内の点は x で表わすが、1次元

問題では x の座標も x (あるいは x_1) で, 2次元問題では $x = (x_1, x_2)$ と記す. $u = u(x)$ は求めるべき未知関数である.(1) で非線形性を表わす関数 $f(u)$ は, 次の形をしているものとする.

$$f(u) = \begin{cases} u & (u \geq 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases} \quad (2)$$

$u > 0$ の部分がプラズマ領域に, $u < 0$ は真空に対応する.

容易にわかるように, $\alpha = 1$ と選んでも一般性を失わないので, 以下では $\alpha = 1$ と定める. 我々は (1) を満たすようなスカラー λ と関数 u の対 $\{\lambda, u\}$ を見出せばよい. 関数 u には 1 階導関数までの連続性が要求されるが, (2) からわかるように非線形項には $u = 0$ の部分に折れ曲りがあり, u の符号により支配方程式の形に変化がある. $u = 0$ の部分は解が定まって初めてわかるから, 一種の自由境界と考えられる. また容易にわかるように, $u = -\alpha$ なる定数関数は任意の λ に対して (1) を満足する. しかし λ の値によっては他の解が存在し, しかも方程式の非線形性の結果 (式 (1) は半線形楕円型方程式の境界値問題である), 場合によっては分岐も含むような, かなり複雑な挙動を示すと考えられている. ここで考えたモデル方程式では $u > 0$ の部分がプラズマの存在領域に対応しており, プラズマの閉じ込めの観点からは, そのような $u = -\alpha$ 以外の非自明解を (数値的に) 求めることが我々の目標となる.

後の取扱いのため, (1) を弱形式で表わそう. 問題は関数 $u \in H^1(\Omega)$ として, $u + \alpha \in H_0^1(\Omega)$ かつ次式を満たすものを見出すことである.

$$\langle u, \bar{u} \rangle = \lambda (f(u), \bar{u}) \quad (\text{任意の } \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ に対し}) \quad (3)$$

ただし $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ は通常のソボレフ空間であり, 双 1 次形式 \langle, \rangle と $(,)$ は次式で与えられる.

$$\langle u, \bar{u} \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} dx, \quad (f, \bar{u}) = \int_{\Omega} f \bar{u} dx \quad (4)$$

n は次元数 (1 または 2) である. $(,)$ は $L_2(\Omega)$ 空間の内積に他ならない. ソボレフ空間については, 例えば [8] を参照のこと.

(1) または (3) は非線形方程式であり, 一般には数値的にしか解けない. その数値解法としては, 従来は例えば差分法や有限要素法と緩和法的手法を組合わせた手法が多く用いられているようである (例えば Suzuki [2], [3], 西岡 [4] など). しかしながら方程式の非線形性のため, 種々の工夫をしないと数値解を安定に得られない. また λ の同一パラメーター値に対し, 有意な解 ($u = -\alpha$ 以外の非自明な解) が一意とは限らぬので, 解を系統的に追跡するには経験と工夫が必要であろう.

ところで (3) の非線形項を調べると, $f(u)$ は $u = 0$ の部分を除いて u に関して微分可能になっている. したがって構造力学において用いられる Newton 法や増分法など, 局所線形化の原理に基づく手法をこの問題にも適用できるのではないかと考えられる. 実際, 構造力学における有限要素法では, (3) と同類のパラメーター入りの非線形方程式に対し,

増分法により安定限界点をも越えて解の径路を組織的に追跡する手法が開発されている(例えば Hangai & Kawamata [9]). 局所線形化に基づく手法では, 各ステップの演算にマトリックスの逆転が必要とされ, 計算は多少複雑になるが, 計算の安定性等の観点からは, 当然試みられるべき有望な手法と考えられる.

次節以下では, (3) に対する有限要素スキームを考え, 局所線形化による解法を示し, 若干の数値的経験について述べる. 方程式から予想される, 注意すべき事項として, 例えば次のようなものが考えられる.

- (i) 非線形項に折れ曲りがあるので, 数値計算の反復に悪い影響があり得る.
 - (ii) 非線形項で u の正負の判定が必要.
 - (iii) 非線形性により計算が不安定になりやすい.
 - (iv) $u = -\alpha$ 以外の非自明解をできるだけ組織的に求める必要がある. 解の径路が求められることが望ましい.
- (i), (ii) については構造力学における弾塑性問題, (iii) については座屈解析, (iv) については増分法に関する知識が役立つ. 今後これらの点を解決してゆきたい.

3. 有限要素近似

有限要素としては一番単純な区分1次式単体要素を用いる. すなわち, Ω を単体要素の集合として近似し, 1次元問題では線分要素上の x の1次式で, 2次元問題では三角形要素上の x_1 と x_2 の1次式により関数を近似する. 節点(補間点)は単体の頂点を用い, 近似関数は要素間でも連続(適合)とする. このようにして得られる通常 Ω 上の連続区分1次式関数の空間を S^h , その部分空間で, $\partial\Omega$ 上で零となる関数のなす空間を S_0^h とする.

Galerkin 法の原理に基づけば, (3) の近似問題は, 関数 $u_h \in S^h$ として $u_h + \alpha \in S_0^h$ かつ次式を満たすものを見出すことである.

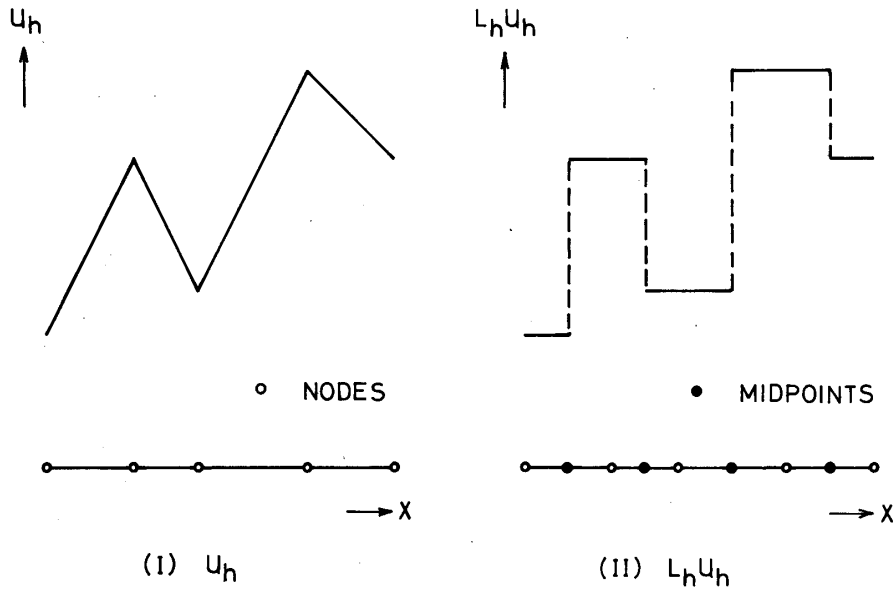
$$\langle u_h, \bar{u}_h \rangle = \lambda_h(f(u_h), \bar{u}_h) \quad (\text{任意の } \bar{u}_h \in S_0^h \text{ に対し}) \quad (5)$$

ここで λ の値も近似値として扱う場合があるので, λ_h と書いた.

(5) を節点未知数に関する連立方程式として表わす際, 左辺に対する表示は容易であるが, 右辺の非線形項を厳密に評価することは面倒であるし, あえて評価しても大きな効果は期待できない. そこで右辺にいわゆる集中化を施すことにする. すなわち Fujii [10] が示したように, 重心, 中点等を使い, n 次元単体要素を $n+1$ 個の等測度の部分領域(重心領域)に分割し, $u_h \in S^h$ を各部分領域内では一定値をとる区分的定数関数で置き換える. 集中化の作用素を L_h で表わす. 1次元問題における u_h と $L_h u_h$ の対応例を第1図に示す. 同図からもわかるように, 節点では $u_h = L_h u_h$ である. 我々は(5)の代りに次式を用いる.

$$\langle u_h, \bar{u}_h \rangle = \lambda_h(f(L_h u_h), L_h \bar{u}_h) \quad (\text{任意の } \bar{u}_h \in S_0^h \text{ に対し}) \quad (6)$$

(6) で右辺を評価する際には, $f(L_h u_h)$ の分布が区分的定数状になり, 節点のみで値を評価するのと同じことになってしまい, $L_h u_h$ の正負の判定も非常に楽になる. なお(5)



第1図 u_h と $L_h u_h$ の関係 (1次元問題)

の右辺の評価の際、数値積分公式として1次元問題では線分要素の2頂点での値を使う2点公式(台形公式)、2次元問題では三角形要素の3頂点での値を使う3点公式を用いて近似的に計算しても、結果的には(6)と同一のスキームが得られる。

以上により、我々の目標は(6)を満たすようなスカラー λ_h と S^h の元 u_h との対 $\{\lambda_h, u_h\}$ を見出すことになる。なお(6)から通常の節点未知数に関する(非線形)連立方程式を得るには、(6)の \bar{u}_h として S_0^h に属すすべての基底関数(形状関数)を順にとっていけばよい。(6)の左辺からは通常のマトリックス表示を求めることができる。

4. 局所線形化の原理に基づく数値計算法

(6)は節点未知数について非線形であるから、局所線形化の原理により反復で解くことにする。ただし非線形項 $f(u)$ の u に関する導関数が必要になるが、(2)からわかるように、 $f(u)$ は一般に $u = 0$ の部分で微分可能ではない。そこで導関数の代りに次の関数を代用として使う

$$\partial f(u) = \begin{cases} 1 & (u > 0) \\ 1/2 & (u = 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases} \quad (7)$$

このような $\partial f(u)$ を使う以下の方法がどの程度まで正当化されるかは今後の課題である。

いま基準点として $\{\lambda_{h0}, u_{h0}\}$ が与えられているとき、増分を $\{\mu_h, v_h\}$ として、 $\{\lambda_h, u_h\} = \{\lambda_{h0} + \mu_h, u_{h0} + v_h\}$ が(6)を満たすようにしたい。ただし λ_{h0}, μ_h は実数、 $u_{h0} + \alpha \in S_0^h, v_h \in S_0^h$ とする。 $\{\lambda_{h0} + \mu_h, u_{h0} + v_h\}$ を(6)に代入し、増分 $\{\mu_h,$

v_h } に関し形式的に線形化すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \langle v_h, \bar{u}_h \rangle - \lambda_{h0} (\partial f(L_h u_{h0}) v_h, L_h \bar{u}_h) \\ = \mu_h (f(L_h u_{h0}), L_h \bar{u}_h) + \lambda_{h0} (f(L_h u_{h0}), L_h \bar{u}_h) - \langle u_{h0}, \bar{u}_h \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

上記で「形式的に」と記したのは、 f の導関数では必ずしも ∂f を用いたからである。一般に (8) で μ_h と v_h の両方を未知量とすることは、(8) に等価な連立方程式の独立な方程式の数に関する考察から不可能なことがわかる。すなわち、 v_h に関する未知数の数は、一般に (8) 式に対応する独立な方程式数に等しい。もし λ_h の値を指定するならば、 $\lambda_{h0} = \lambda_h$ 、 $\mu_h = 0$ として v_h を (8) より求めればよい。(8) を得る際に線形化をしているから、計算により得られる $\{\lambda_{h0} + \mu_h, u_{h0} + v_h\}$ は必ずしも (6) を満足はしない。十分な精度を得るには、 $\{\lambda_{h0} + \mu_h, u_{h0} + v_h\} \rightarrow \{\lambda_{h0}, u_{h0}\}$ として、以上の過程を必要なだけ反復すればよい。ただし、それが可能なためには、(8) の左辺に現れる線形化作用素 (あるいは等価なマトリックス方程式の係数マトリックス) が常に逆を有しなければならない。そして反復が安定であるためには、線形化作用素が特異に近くてはならない。

非線形方程式では線形化作用素が特異、もしくは特異に近くなることはしばしばあり、しかもそのような特異点 (臨界点) は物理的に安定限界点などの重要な意味を持つ場合が少なくない。したがって、線形化作用素が特異に近いからといって計算を避けるわけにはいかない。そのような場合には、当然ながら前記の λ_h の値を固定した計算法は数値的に安定性が悪い。その対策として、 v_h (あるいは u_h) 中のある自由度 (普通はある節点での v_h の値など) をパラメータ的に指定し、 v_h 中の残りの自由度および μ_h の値を未知量として求める方法が有効であることが、構造力学における座屈解析などで知られており、盛んに使用されている (例えば文献 [9])。さらに、ここで考えている問題では自明な解 $u_h = -\alpha$ へ前記の反復が収束することは避けたいが、その意味からも v_h のある節点値を指定することは有効であろう。以下に v_h のある節点値を制御して計算する方法について説明しよう。

まず広く知られているように、(8) 式は次のような等価なマトリックス方程式で表わされる。

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mu_h \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (9)$$

ただし \mathbf{v} は v_h の節点値 ($v_h \in S_0^h$ ゆえ $\partial \Omega$ 上の節点は除く) 全体を節点番号の順に並べたベクトル、 \mathbf{K} は (8) の左辺に対応する係数マトリックス (構造問題では剛性マトリックスに対応する)、 \mathbf{g} は (8) の右辺第1項から生じる量に対するベクトルで、 \mathbf{v} と同じ次元を有する。 \mathbf{f} は同様に右辺の残りの項から生じるベクトルである。よく知られているように、(9) を得るには (8) で \bar{u}_h として各節点に対応する形状関数を (境界節点は除いて) 節点番号順に代入していけばよい。 \mathbf{K} は対称マトリックスになることがわかる。 \mathbf{K} 、 \mathbf{g} 、 \mathbf{f} は $\{\lambda_{h0}, u_{h0}\}$ に依存する。

次に指定すべき v_h の節点値を簡単のため \mathbf{v} の第1成分 v_1 であるとする。 \mathbf{v} の残りの部分 (一般にベクトル) を v_2 とし、(9) を分割して次の形に書く。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \mu_h \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

g_1, f_1 は v_1 に対応し、スカラーであり、 g_2, f_2 はそれぞれ v_2 に対応する \mathbf{g}, \mathbf{f} の残りの部分で、一般にベクトルである。 \mathbf{K} の分割において、 K_{11} はスカラー、 K_{12} は v_2 と同じ次元の横ベクトル、 K_{21} は K_{12} の転置に等しく、 K_{22} は v_2 の次元と同次数の正方マトリックスである。

すでに述べたように、 λ_h を固定するのであれば、 $\lambda_{h0} = \lambda_h$ 、 $\mu_h = 0$ とし、(9) を解いて \mathbf{v} を求めればよい。ここで考えているように v_1 を指定するのであれば、次のようにする。(10) を書き下して、

$$\begin{cases} K_{11}v_1 + K_{12}v_2 = \mu_h g_1 + f_1 \\ K_{21}v_1 + K_{22}v_2 = \mu_h g_2 + f_2 \end{cases} \quad (11)$$

上記の第2式より、

$$v_2 = K_{22}^{-1} (\mu_h g_2 + f_2 - K_{21}v_1) \quad (12)$$

(12) を (11) の第1式に代入し μ_h について解けば、

$$\mu_h = - \frac{f_1 - K_{12}K_{22}^{-1}f_2 - (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})v_1}{g_1 - K_{12}K_{22}^{-1}g_2} \quad (13)$$

(13) の右辺の量はすべて既知であるから、この式により μ_h が決定される。ただし K_{22} は正則で、(13) の右辺の分母は零でないものとする。(13) を (12) に代入すれば、 v_2 も決定される。

\mathbf{K} が特異に近くても、 v_1 をうまく選べば K_{22} は特異でなくなり、かなり安定な計算が可能になる場合が少なくない。(13) の分母が零に近くなるかどうかは、実は臨界点の性質にも大きく依存するが、その詳細については省略する。 v_1 の選び方は一意ではないが、大まかにいって \mathbf{v} の成分中で最も絶対値が大きくなりそうなものを選ぶと効果的な場合が少なくない。

計算に当っては以上の過程を必要なだけ反復すればよいが、まず最初のステップでは v_1 をある値を選んで計算し、次のステップからは $v_1 = 0$ として十分に収束するまで反復するのが効果的である。

なお連立1次方程式の解法としては、対称で可変なバンド幅を有するバンドマトリックスに対する Gauss の消去法を用いた (例えば [11] 参照)。計算にあたっては、すべて倍精度を用いた。

5. 1次元問題による検討

まず区間 $(-1/2, 1/2)$ における (3) の1次元問題を扱った。 $u(x) = -1$ (ただし $\alpha = 1$) なる自明解の他に、 $\lambda > \pi^2$ では非自明解が一意に存在し、しかも陽に表示できる。

すなわち,

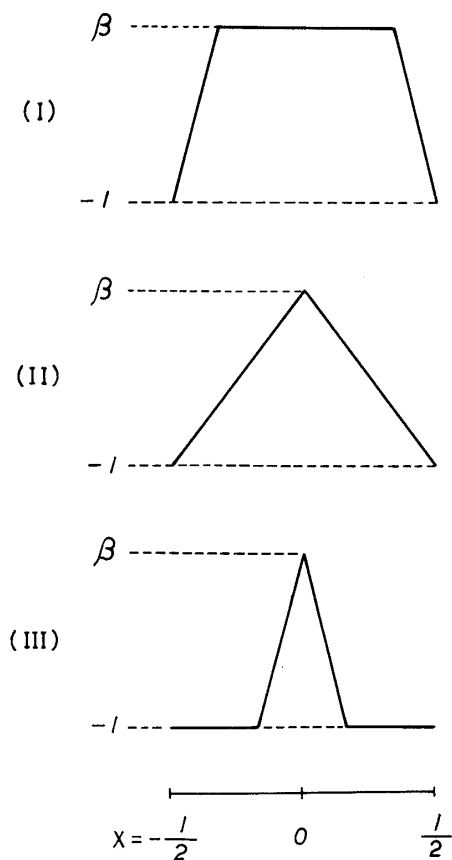
$$u(x) = \begin{cases} 2 \cos(\sqrt{\lambda} x) / (\sqrt{\lambda} - \pi) & (|x| \leq \pi / (2\sqrt{\lambda})) \\ (\pi - 2\sqrt{\lambda} |x|) / (\sqrt{\lambda} - \pi) & (|x| > \pi / (2\sqrt{\lambda})) \end{cases} \quad (14)$$

数値的体験を積むため、 λ を制御する方法と、 u の節点値を制御する方法の両方を試験した。また関数の近似における反復の出発値もいくつか変えてみた。有限要素分割として区間 $(-1/2, 1/2)$ を等分割したが、(6)で集中化を用いた結果、得られる近似方程式は最も平凡な差分式と一致した。なお、反復の第 ν ステップでの近似を上付きの (ν) で表わすと、採用した計算の打ち切り条件は次式で与えられる $(u_h^{(\nu)} = u_h^{(\nu-1)} + v_h)$ 。

$$\max_x |v_h^{(\nu)}(x)| / \max_x |u_h^{(\nu)}(x)| \leq \eta \quad (15)$$

u_h, v_h は区分1次式ゆえ、 \max は実は節点上で考えればよい。ここでは $\eta = 10^{-10}$ とする。

計算のための u_h の出発値として、第2図に示すような三種類の関数を考えた。(I)では境界を除いて u_h の節点値をすべて $\beta > 0$ とし、(II)では $u_h(0) = \beta$ なる三角形分布、



第2図 反復の出発関数の例 (1次元問題)

(Ⅲ) では中心節点値が $u_h(0)=\beta$ となる以外はすべての節点で値が -1 となるようにしてある。(Ⅰ), (Ⅲ) では出発関数の分布は要素分割と共に変化する。

計算にあたっては, $u_h(0)$ の値を固定し, λ_h の出発値を 10 とする節点値制御と, $\beta=1$ とした λ 値制御とを比較した。分割数は 10, 20, 40 の三種類を考えた。なお解の対称性を利用すれば, 要素数を半減できる。

第3図には λ と $u(0)$ の関係を示す。厳密解では,

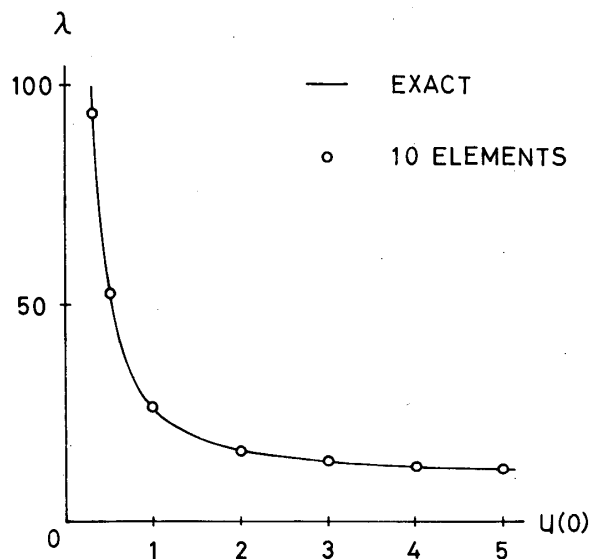
$$\sqrt{\lambda} = \frac{2}{u(0)} + \pi \quad (16)$$

の関係が成立する。 $\lambda \leq \pi^2$ では自明解しか存在しない。 λ が大きくなると, $u \geq 0$ の部分は狭くなり, それだけ関数の分布の近似が面倒になるためか, 一般に精度も落ちてくる。図中の白丸は 10 要素分割による結果であるが, λ が π^2 に近い部分の方が精度は良好のようである。

第1表には $u_h(0)$ の値をパラメータ的に変えたときの, 計算による λ_h 値への分割数 (N) の影響をみた。第2表では λ 値をパラメータ的に変化させたときの, 計算での $u_h(0)$ 値の様子を示す。分割数 N が大になるにつれ, 結果は全般に改善されていくが, 必ずしも収束は単調ではないようである。

第4図には $u(0)=0.5, 1.0$ について, 厳密解 (14) および 10 要素分割による数値解に基づく u の分布を示した。これらの場合には, この程度の分割でも大体の分布は再現できるようである。

第3表には計算の反復回数に関する結果をまとめた。反復が (15) の条件を満たすよう収



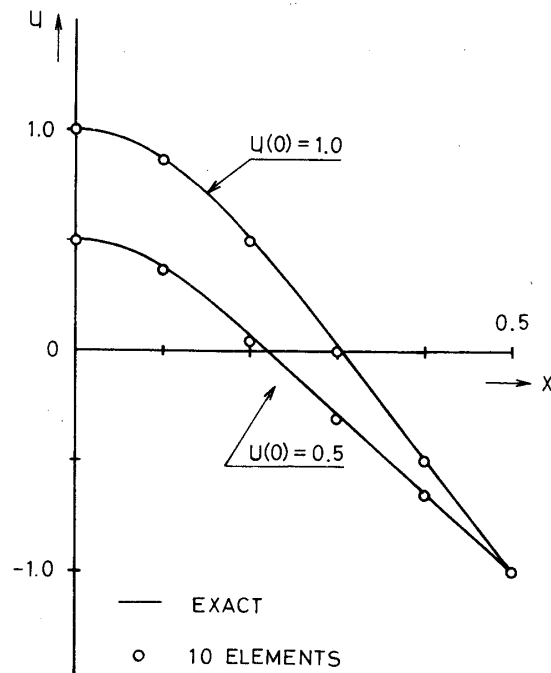
第3図 λ と $u(0)$ の関係図 (1次元問題)

第1表 λ の数値解の収束のようす (線分領域)

$u(0)$ \ N	10	20	40	exact
0.5	52.52	50.82	51.01	51.00
1.0	26.79	26.47	26.43	26.44
2.0	17.00	17.11	17.15	17.15

第2表 $u(0)$ の数値解の収束のようす (線分領域)

λ \ N	10	20	40	exact
15	2.710	2.725	2.731	2.735
20	1.474	1.505	1.503	1.503
50	0.516	0.507	0.510	0.509

第4図 u の x 方向分布の例 (1次元問題)

束して、しかも数値解における非自明解に収束した場合には、その回数を記してある。

節点値制御の場合には計算は比較的安定しており、多くの場合は10回以内の反復で収束

第3表 収束に必要な反復回数(出発関数, 分割数等の影響)

出発関数 N	(I)			(II)			(III)		
	10	20	40	10	20	40	10	20	40
$u(0) = 0.1$	4	13	7	1	1	8	2	2	7
0.3	6	7	7	8	6	6	C 2	C 2	8
0.5	7	6	6	6	6	6	8	8	8
1.0	6	6	6	6	6	6	9	13	8
4.0	5	5	5	5	5	5	7	7	7
9.0	5	5	5	5	5	5	7	8	7

(a) 節点値制御 (λ の出発値は10として計算)

出発関数 N	(I)			(II)			(III)		
	10	20	40	10	20	40	10	20	40
$\lambda = 10$	2	2	2	*	*	*	*	*	*
20	3	3	3	3	3	3	*	*	*
50	3	3	3	2	3	3	4	*	*
100	5	5	5	3	3	3	4	4	*
500	C 8	C 12	C 14	C 4	5	C 14	2	3	C 14
1000	C 8	C 13	C 5	C 4	C 13	C 5	2	2	4

(b) λ 値制御 ($\beta = 1$ として計算開始)

注1: *は自明解 $u = -1$ へ収束したことを示す。

注2: 例えば C 5は反復計算が周期5回で繰返すようになったことを示す。

注3: $\eta = 10^{-10}$ とした。

した。ただし(III)を出発関数とした場合には、反復が周期的になる事例があった。当然ながら自明解へ収束することはない。全般的には $u_h(0)$ が大きい方が収束が良好のようである。

次に λ 値制御の場合であるが、 λ の値が大になると、反復が周期的になりやすく収束しにくい。また λ が小さいと自明解に収束しやすく、(III)の場合は特にそうである。このことは(III)の分布図からも感覚的には了解できよう。ただし非自明解へ収束する場合には、反復回数は比較的小さいようである。また出発関数の選び方には敏感のようである。

節点値制御の方が全般に計算は安定であるが、場合により二つの制御法を使い分けるといかもしれない。計算が周期的になる場合があるのは、非線形項に折れ曲りがあることと関係があるかもしれないが、周期的になるのを防ぐには、4節で説明した計算法により得られる各反復での修正量をそのまま使わず、適当な係数を乗じて補正すると効果的かと考えている。

6. 2次元問題の計算例

3節で考えた三角形要素を用い、円、正方形、長方形等の領域について計算してみた。計算法は1次元の場合と本質的には同じである。反復の出発関数としては、境界節点では境界値-1を指定し、その他の節点では共通の正の値 β を与えてみた(1次元での(I)に相当)。以下の数値例はすべて節点値制御によるものである。ただし節点値を半連続的に変化させていく場合には、2番目以降の節点値に対応する計算での出発関数は、前の節点値での収束解を用いた。いわゆる増分法的な手法である。以下の例では領域の図心での節点値を指定して計算したが、円、正方形では多くの場合に収束した。しかし長方形では収束しない例があった。今後は指定節点を変更できるように、工夫する必要があると考える。なお対称性のある解を扱うときには、良く知られているように、自然境界条件を用いて、要素分割する領域を節約できる。

6.1 円形領域

この場合に求めたのは軸対称解であり、問題は1次元化できる。しかし数値的扱いは2次元問題とかわりないし、厳密解がわかるので精度の検討に使える。

円は原点を中心とする単位円とする。 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とすれば、軸対称解に対しては

$$\Delta = d^2/dr^2 + (1/r) d/dr \quad (17)$$

である。(3)の非自明な軸対称解は次のように与えられる。

$$u(x) = \begin{cases} u(0) J_0(\sqrt{\lambda} r) & (r \leq \alpha_0 / \sqrt{\lambda}) \\ -1 + (\log_e r) / \log_e(\alpha_0 / \sqrt{\lambda}) & (r > \alpha_0 / \sqrt{\lambda}) \end{cases} \quad (18)$$

ここで $u(0)$ は $r=0$ での u の値、 J_0 は0次の第1種 Bessel 関数、 α_0 は J_0 の最初の零点で、 $\alpha_0 = 2.4048255$ である。非自明解が存在するためには、 $\lambda > \alpha_0^2$ でなければならない。 λ と $u(0)$ の間には次式が成立する。

$$\sqrt{\lambda} = \alpha_0 \exp\left\{1 / (\alpha_0 u(0) J_1(\alpha_0))\right\} \quad (19)$$

J_1 は1次の第1種 Bessel 関数で、 $J_1(\alpha_0) = 0.5191474$ である。

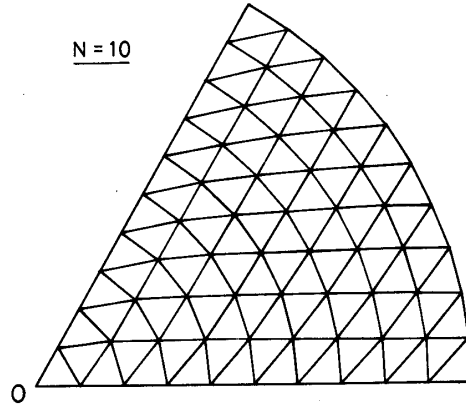
要素分割は 60° の扇形領域を比較的規則的に分割した。半径方向には N 等分し、 $N=5, 10, 20$ としてみた。有限要素数は25, 100, 400である。要素分割の例を第5図に示す。

第4表には u_h の中心での値 $u_h(0)$ をパラメーターとして、 λ_h の値を示してある。収束は必ずしも単調ではない。

第6図には u_h の分布を $u_h(0) = 1, 2$ $N=5$ の場合について示しておいた。 r の値が等しい格子点でも u_h の値は必ずしも同じではないが、その差はわずかであり、グラフ上では識別できない。数値解の精度は必ずしも十分とは言えない。

6.2 正方形領域

次に $|x_i| < 1/2$ ($i=1, 2$)で与えられる単位正方形領域を扱った。 x_1 軸、 x_2 軸に関する対称性のある解のみを考え、全体の1/4領域のみを、 $N \times N$ の規則格子に分割して解析した。原点での u_h の値 $u_h(0)$ を順に5, 4, 3, 2, 1と変化させて計算した。

第5図 扇形領域の有限要素分割の例 ($N = 10$)第4表 λ の数値解の収束のようす (円形領域)

$u(0)$	N	5	10	20	exact
1.0		33.47	28.63	28.97	28.70
2.0		12.64	12.82	12.87	12.88
3.0		9.652	9.805	9.853	9.865

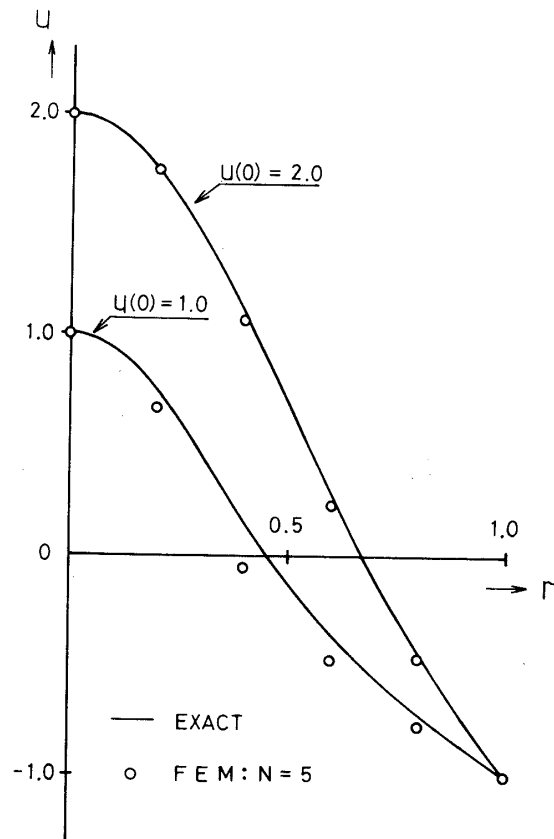
第7, 8, 9図には順に $N = 5, 10, 20$ の場合の自由境界 ($u_h = 0$ のなす曲線) を示してある. 図中には用いた要素分割と, 計算による λ_h の値も示してある. 分割数による解の変化はこれらの図を比較すればわかる. $u_h(0)$ の大きいときの結果はほぼ信頼できるようであるが, $u_h(0)$ が小さい部分では分割数の影響が大きく, 十分に厳密解に収束していないおそれがある.

第10図には $N = 20$, $u_h(0) = 1$ の場合の等高線による u_h の分布表示を与えた. 等高線間隔は 0.25, 灰色の部分が $u_h > 0$ の領域を示す. なお自由境界の形状は, $u_h(0)$ が小さくなるにつれ円に近くなる.

6.3 長方形領域

最後に $|x_1| < 1.5$, $|x_2| < 0.5$ で与えられる縦横比3の長方形領域について計算した. 分割は正方形領域の場合と同様, $1/4$ 領域を 15×5 , 30×10 の一様な正方形格子に分割した. $u_h(0) = 5$ としたときの計算結果を等高線により示したのが第11図である. なお, 対応する λ_h の値は, 15×5 分割で 15.86, 30×10 分割で 15.90 である. 等高線図には分割により大きな差は見出せなかった. 等高線間隔は 1 である.

$u_h(0)$ を小さくすると, 反復の収束は微妙になり, 解の径路がかなり複雑になっていることが予想される. したがって信頼できる結果を示すにはさらに工夫が必要と思われる, その

第6図 u の r 方向分布の例 (円形領域)

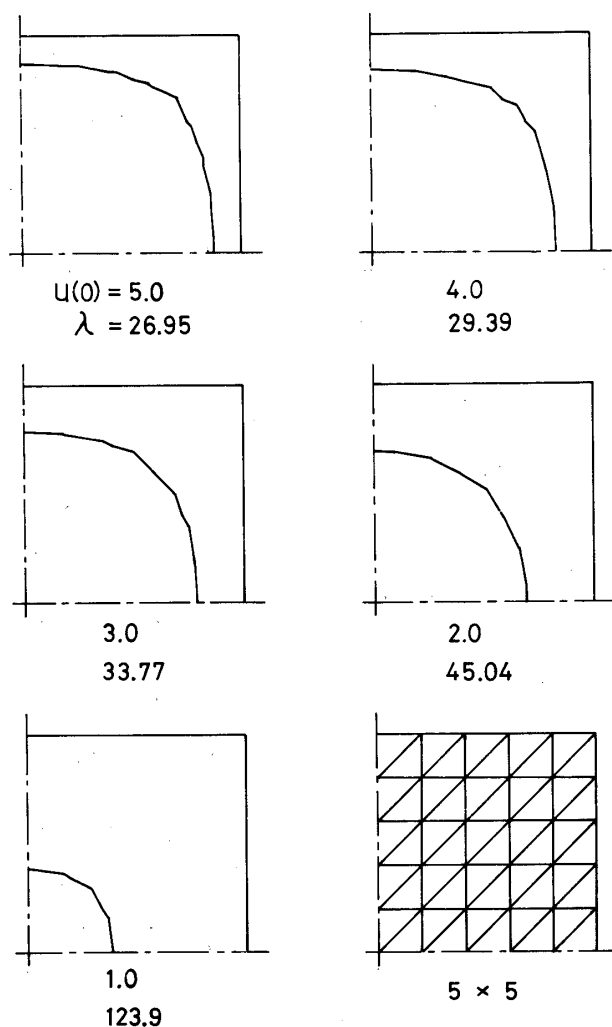
解決は今後の課題としたい。

7. 結 言

プラズマ平衡に関連する、あるモデル問題について、構造力学等でしばしば用いられる、局所線形化の手法を応用した有限要素法による解法を示し、計算例により、その特性を検討した。その結果、ここに示したような解法がある程度は使用できることが確認された。今後の課題としては、例えば次のようなものが考えられよう。

- (i) 解法の反復過程の収束と分割に関する誤差評価などの理論的考察
- (ii) アイソパラメトリック要素などの高次要素の使用の検討
- (iii) 非線形径路の組織的追跡の試み
- (iv) より実際的なモデル方程式の数値計算
- (v) 緩和法系統の解法との優劣の比較

(iii) については分岐なども含めて計算できるよう、準備中である。また (iv) にも関連して、MHD 平衡方程式にはさまざまなモデルが考案されているが、本解法がどの程度まで汎用性があるか、今後の課題である。

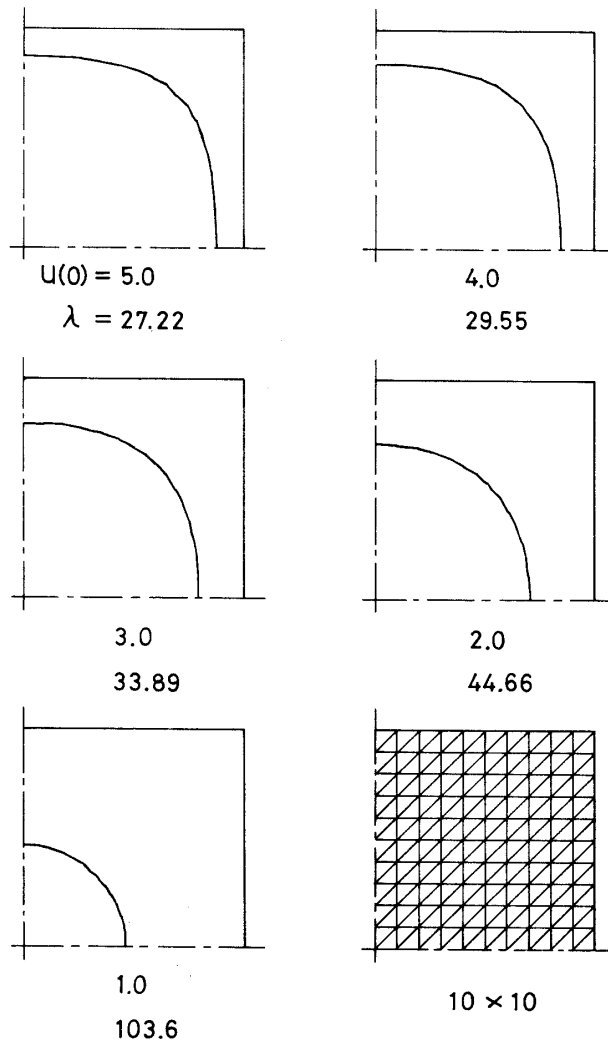


第7図 正方形領域での自由境界の計算例(5×5分割)

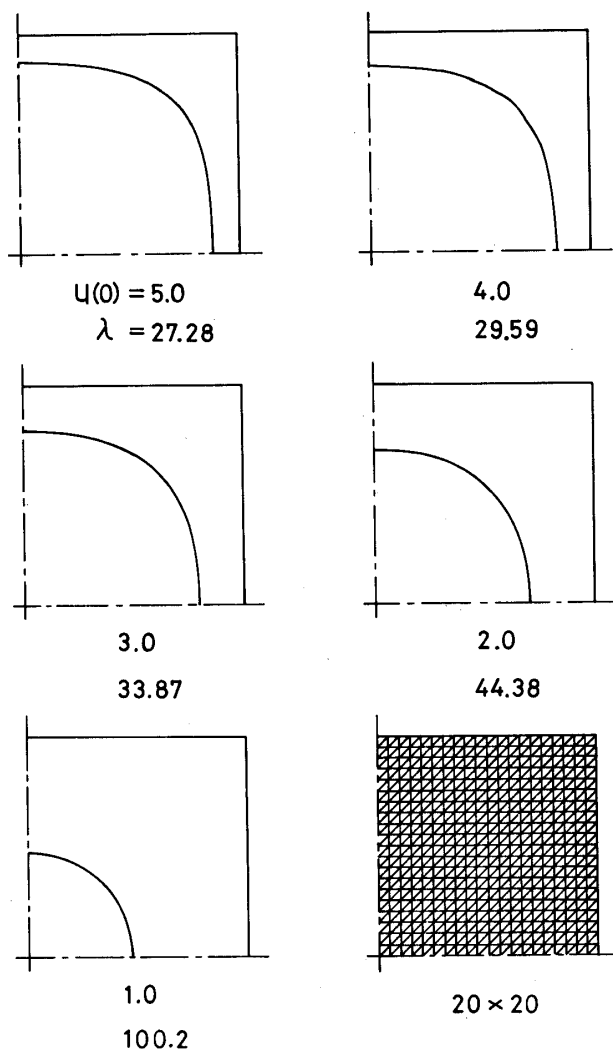
謝 辞

本報告をまとめるにあたり、多くの方のお世話になった。数値解析的な面からは、電気通信大学の牛島照夫助教授、中村正彰氏、花田孝郎氏らから教えていただいた点が多く、また物理的、数値計算的な面からは、日本原子力研究所の竹田辰興副主任研究員、常松俊秀氏らから資料の提供、助言、検討などをいただいた。さらに計算の実行、結果の整理には本研究所助手であった石川隆司氏(現在航空宇宙技術研究所)の協力が大きい。厚く謝意を表します。

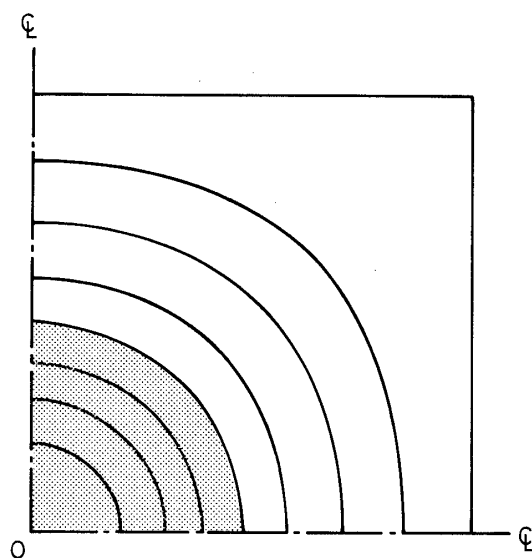
1978年4月3日 航空力学部



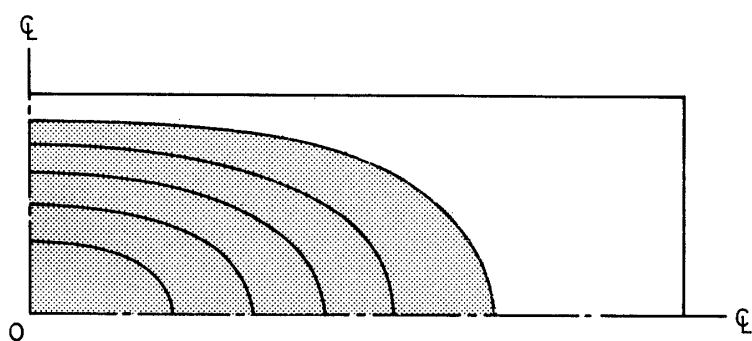
第8図 正方形領域での自由境界の計算例 (10 × 10 分割)



第9図 正方形領域での自由境界の計算例 (20×20 分割)



第10図 正方形領域での u の等高線計算例
($u(0) = 1$, 20×20 分割)



第11図 長方形領域での u の等高線計算例
($u(0) = 5$, 10×30 分割)

参考文献

- [1] K. Lackner: Computation of ideal MHD equilibria, *Computer Physics Communications*, 12 (1976) 33–44.
- [2] Y. Suzuki: Free-boundary MHD-equilibria in axisymmetric tori, *Nucl. Fusion*, 14 (1974) 345–352.
- [3] Y. Suzuki et al.: Free-boundary MHD equilibria, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, 1 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1975) 411–420.
- [4] 西岡: 有限要素法を用いたプラズマの平衡計算, 電磁流体力学の基礎方程式の数学的ならびに数値解析的研究研究成果報告書 (1977) 13–27
- [5] R. Meyer-Spasche: Numerical treatment of Dirichlet problems with several solutions, *ISNM*, 31 (1976) 147–163.
- [6] 宮本: 核融合のためのプラズマ物理, 岩波 (1976) 7章.
- [7] G. Strang and G. J. Fix: *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall (1973).
- [8] R. Temam: *Numerical Analysis*, D. Reidel Pub. Co. (1973) Ch. 7.
- [9] Y. Hangai and S. Kawamata: Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, Report of the Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, 22 (1973) 245–296.
- [10] H. Fujii: Finite element schemes: stability and convergence, in *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, UAH Press (1972) 201–218.
- [11] K. J. Bathe and E. L. Wilson: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall (1976) Ch. 7. (菊地訳: 有限要素法の数値計算, 科学技術出版社)