

# 軟鋼および実用高強度 Al 合金有限長棒の 高速引張りにおける応力波伝播挙動の解析

河 田 幸 三・黒 河 邦 彦・橋 本 彰 三

Analysis of Stress Wave Propagation Behaviours in  
High Velocity Tension of Bars of Finite Length of  
a Mild Steel and High Strength Al Alloys

By

Kozo KAWATA, Kunihiko KUROKAWA and Shozo HASHIMOTO

**Abstract:** Using the constitutive equations of a mild steel that introduced the plastic flow function of Johnston-Gilman type and of high strength Al alloys that introduced the plastic flow function basing upon thermal activation process of dislocation, the behaviours of bars of finite length are analysed by finite element method. The differences between these two cases such as the existence and non-existence of sharp stress peak in wave front, are clarified.

## 概 要

Johnston-Gilman 型塑性流動関数を導入した軟鋼の構成方程式および転位の熱活性化過程にもとづく塑性流動関数を導入した実用高強度 Al 合金の構成方程式の両者について、有限長棒の高速引張りの挙動が有限要素法により解析され、波頭における鋭い応力ピークの存否など動的挙動における両者の差異が明らかにされた。

## 1. まえがき

有限長棒の高速引張り [1]～[6] における応力波伝播、ひいては歪分布、伸び等の問題は、その本質の解明に微視的観点から導かれた構成方程式が必要である。著者の一人は栗山 [5] と共に Johnston-Gilman 型塑性流動関数を導入した構成方程式を導き、軟鋼の半無限長棒の高速引張りを取り扱い、従来矛盾の生ずるとされた点の矛盾を解消した。同構成方程式を用いて反射の介入する有限長棒の問題はまだ解かれていらない。前論文において、fcc の実用高強度 Al 合金の構成方程式 [7]～[9] が導かれた。

本論文では、bcc の軟鋼および fcc の実用高強度 Al 合金の両者の有限長棒の高速引張りの解析を行い、両者の構成方程式の差異にもとづく挙動の差異を解明する [13]。

## 2. 塑性変形を伴う応力波伝播問題の有限要素法による数値計算法について

数値計算は、有限要素法を用いて行った。本章では数値計算法の概略を述べる。

金属の高速変形を取り扱うにあたって、一般の弾性問題との大きな相違点は2点ある。第一には、慣性力の項が無視しえない事であり、他の一つは、塑性変形を伴う事である。まず、慣性力と塑性変形を伴う問題について変位法による有限要素法解析のための基礎方程式を求め、次に  $g(|\sigma|, \epsilon_p)$  で塑性流動関数が与えられる場合の一次元解析に適用する。

S. Kuriyama & K. Kawata [5] は Johnston-Gilman型塑性流動関数をもつ構成方程式で記述される材料中の応力波伝播の問題を特性曲線法を用いて解き、実験結果のよく解釈されることを示した。S. Nakagiri & H. Shimooka [11] は上述と同一の材料につき同一の問題を有限要素法を用いて解き、上述の特性曲線法による解と良く一致することを示している。

## 2.1 有限要素法の基礎方程式 [10], [11]

一つの要素の節点の変位増分  $\{\Delta\delta\}^e$  に伴う要素内の変位増分  $\{\Delta f\}$ 、歪増分  $\{\Delta\epsilon\}$  を、

$$\{\Delta f\} = [\mathbf{N}] \{\Delta\delta\}^e \quad (1)$$

$$\{\Delta\epsilon\} = [\mathbf{B}] \{\Delta\delta\}^e \quad (2)$$

と表わす。すると節点の加速度増分に伴う慣性力の増分  $\{\Delta p\}$  は、

$$\{\Delta p\} = -\rho [\mathbf{N}] \{\Delta\ddot{\delta}\}^e \quad (3)$$

と表わされる。以上の表示を用いれば応力増分  $\{\Delta\sigma\}$ 、加速度増分  $\{\Delta\ddot{\delta}\}^e$  に伴う節点の等価節点力の増分  $\{\Delta F\}^e$  は、

$$\{\Delta F\}^e = \int [\mathbf{B}]^T \{\Delta\sigma\} d(\text{vol}) - \int [\mathbf{N}]^T \{\Delta p\} d(\text{vol}) \quad (4)$$

で表わされる [10]。さて、応力増分  $\{\Delta\sigma\}$  と歪増分  $\{\Delta\epsilon\}$  との間に次の関係。

$$\{\Delta\sigma\} = [\mathbf{D}] \{\Delta\epsilon\} - \{\Delta q\} \quad (5)$$

があるとする。ここで  $[\mathbf{D}]$  は剛性マトリックスであり、 $\{\Delta q\}$  は塑性流動に伴う応力緩和を表わしている。例えば一次元問題では次の様になるものである。

i) 弾性問題では、 $[\mathbf{D}] = E$ ,  $\{\Delta q\} = 0$ .

ここで、 $E$  はヤング率である。

ii) 定歪速度構成方程式（歪速度不依存型構成方程式）をもつ弾塑性体では、

$$[\mathbf{D}] = \partial\sigma/\partial\epsilon, \quad \{\Delta q\} = 0.$$

iii) 歪速度依存型構成方程式をもつ弾塑性体については、次節に示される。

さて、(2), (3), (5) 式を (4) 式に代入すると、次の様に等価節点力が表示される。

$$\begin{aligned} \{\Delta F\}^e = & \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\Delta\delta\}^e d(\text{vol}) - \int [\mathbf{B}]^T \{\Delta q\} d(\text{vol}) \\ & + \int \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\Delta\ddot{\delta}\}^e d(\text{vol}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、要素の剛性マトリックス  $[\mathbf{k}]^e$ 、質量マトリックス  $[\mathbf{m}]^e$ 、及び  $[\Delta r]^e$  を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{k}]^e &= \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d(\text{vol}) \\ [\mathbf{m}]^e &= \int \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \\ [\Delta r]^e &= \int [\mathbf{B}]^T \{\Delta q\} d(\text{vol}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

すると等価節点力 (6) 式は、次式で表わされる。

$$\{\Delta F\}^e = [\mathbf{k}]^e \{\Delta\delta\}^e - \{\Delta r\}^e + [\mathbf{m}]^e \{\Delta\ddot{\delta}\}^e \quad (8)$$

これを全要素について寄せ集めると、

$$\{\Delta F\} = [\mathbf{K}] \{\Delta\delta\} - \{\Delta R\} + [\mathbf{M}] \{\Delta\ddot{\delta}\} \quad (9)$$

但し、

$$[\mathbf{K}] = \sum_m [\mathbf{k}]^e, \quad [\mathbf{M}] = \sum_m [\mathbf{m}]^e, \quad \{\Delta \mathbf{R}\} = \sum_m \{\Delta \mathbf{r}\}$$

となり、2階の連立微分方程式を得る。

次に、この微分方程式を、Newmark 1/6  $\beta$  法を用いて連立代数方程式に直す[12], [11]。すなわち、微小時間  $\Delta t$  間での変位、速度、加速度の増分を

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \delta = \dot{\delta}_t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\delta}_t \Delta t^2 + \beta \ddot{\delta}_t \Delta t^3 \\ \Delta \dot{\delta} = \ddot{\delta}_t \Delta t + \frac{1}{2} \dddot{\delta}_t \Delta t^2 \\ \Delta \ddot{\delta} = \ddot{\ddot{\delta}}_t \Delta t \end{array} \right\} \quad (10)$$

と表わす。未定乗数として

$$u = \beta \ddot{\delta}_t \Delta t^3 \quad (11)$$

を導入して、

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \delta = \dot{\delta}_t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\delta}_t \Delta t^2 + u \\ \Delta \dot{\delta} = \ddot{\delta}_t \Delta t + \frac{1}{2\beta} u \\ \Delta \ddot{\delta} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} u \end{array} \right\} \quad (12)$$

と表わし、(12)式を(9)式に代入して、

$$\{\Delta \mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \left( \{\ddot{\delta}\}_t \Delta t + \frac{1}{2} \{\ddot{\ddot{\delta}}\}_t \Delta t^2 + \{\mathbf{u}\} \right) - \{\Delta \mathbf{R}\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{u}\}$$

を得、結局、

$$\left( [\mathbf{K}] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}] \right) \{\mathbf{u}\} = \{\Delta \mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{R}\} - [\mathbf{K}] \left( \{\dot{\delta}\}_t \Delta t + \frac{1}{2} \{\ddot{\delta}\}_t \Delta t^2 \right) \quad (13)$$

という連立一次方程式が得られる。これを解いて、(12)式に代入して、新しい変位、速度、加速度が求まる。又同時に得られる変位増分を(2)式に代入して、歪増分が、更に(5)式に代入して応力増分が求まる。結局、与えられた塑性流動関数、又は、塑性変形を支配する法則から、(5)式の  $[\mathbf{D}]$ ,  $\{\Delta \mathbf{q}\}$  が求まれば、この問題はすべて解けることになる。

## 2.2 塑性挙動の取り扱い

前節において、(5)式における剛性マトリックス  $[\mathbf{D}]$  と、塑性流動による応力緩和の項  $\{\Delta \mathbf{q}\}$  を除いては、すべて求めることができた。本節においては、塑性歪速度が、応力と塑性歪の関数  $g(|\sigma|, \epsilon_p)$  で与えられる塑性挙動を示す材料の  $[\mathbf{D}]$  と  $\{\Delta \mathbf{q}\}$  を一次元問題について求める。

さて、一次元塑性歪速度が  $g(|\sigma|, \epsilon_p)$  で与えられるから、

$$\dot{\epsilon}_p = g(|\sigma|, \epsilon_p) \quad (14)$$

で表わせる。全歪は、弾性歪と塑性歪の和として与えられるが、塑性変形はその方向が応力により異なってくることを考えると、次の関係が成り立つ。

$$\dot{\varepsilon}_p = \text{sgn}(\sigma) \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\Delta\dot{\sigma}}{E} \right) \quad (15-a)$$

又は

$$\Delta\varepsilon_p = \text{sgn}(\sigma) \left( \Delta\varepsilon - \frac{\Delta\sigma}{E} \right) \quad (15-b)$$

ここで

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma > 0) \\ -1 & (\sigma < 0) \end{cases}$$

となる関数である。ここで、

$$\Delta\varepsilon = \dot{\varepsilon}_t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\varepsilon}_t \Delta t^2$$

$$\Delta\dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}_t \Delta t$$

と書けば、 $\Delta\dot{\varepsilon}_p$  は次の様に表わせる。

$$\Delta\dot{\varepsilon}_p = 2(\Delta\varepsilon / \Delta t - \dot{\varepsilon}_t) \quad (16)$$

同様に

$$\Delta\dot{\sigma} = 2(\Delta\sigma / \Delta t - \dot{\sigma}_t) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\varepsilon}_p &= 2(\Delta\varepsilon_p / \Delta t - \dot{\varepsilon}_{pt}) \\ &= 2(\Delta\varepsilon_p / \Delta t - g(|\sigma|, \varepsilon_p)) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。一方 (14) 式より、

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\varepsilon}_p &= \Delta g(|\sigma|, \varepsilon_p) \\ &= g_\sigma \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot \Delta\sigma + g_{\varepsilon p} \Delta\varepsilon_p \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $g_\sigma$ ,  $g_{\varepsilon p}$  は各々  $\partial g(\sigma, \varepsilon_p)/\partial\sigma$ ,  $\partial g(\sigma, \varepsilon_p)/\partial\varepsilon_p$  を表わす。

(18), (19) 式より、

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{\Delta t}{1 - \frac{\Delta t}{2} g_{\varepsilon p}} \left\{ \frac{\text{sgn}(\sigma)}{2} g_\sigma \Delta\sigma + g(|\sigma|, \varepsilon_p) \right\} \quad (20)$$

又、(20) 式を (15) 式に代入して、

$$\left\{ \frac{1}{E} + \frac{\frac{\Delta t}{2} g_\sigma}{1 - \frac{\Delta t}{2} g_{\varepsilon p}} \right\} \Delta\sigma = \Delta\varepsilon - \frac{\text{sgn}(\sigma) \Delta t}{1 - \frac{\Delta t}{2} g_{\varepsilon p}} g(|\sigma|, \varepsilon_p)$$

故に、 $[\mathbf{D}]$ ,  $\{\Delta\mathbf{q}\}$  は次のように求まる。

$$[\mathbf{D}] = E \cdot \frac{1 - \frac{\Delta t}{2} g_{\varepsilon p}}{1 - \frac{\Delta t}{2} g_{\varepsilon p} + E \frac{\Delta t}{2} g_\sigma} \quad (21)$$

$$\{\Delta q\} = E \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) \Delta t}{1 - \frac{\Delta t}{2} g_{\epsilon p} + E \frac{\Delta t}{2} g_\sigma} \cdot g(|\sigma|, \epsilon_p) \quad (22)$$

(21), (22) と (5) 式から、歪増分  $\{\Delta \epsilon\}$  が求まれば、応力増分  $\{\Delta \sigma\}$  が求まる。これらを (20) 式に代入することにより塑性歪増分  $\{\Delta \epsilon_p\}$  も求まる。なお、(20), (21), (22) 式は、除荷過程、そして正負の繰り返し荷重を受けるような場合にも適用可能ることは明らかである。

### 2.3 一次元棒の解析 [7], [8]

実際に、軟鋼及び Al 合金棒の解析を行うにあたっての境界条件の与え方、分割数等について述べる。

1 回の計算の時間増分  $\Delta t$  は、弾性波が 1 要素を伝播する時間と一致する様にとった。即ち、要素の長さ  $\Delta l$ 、弾性波速度  $c (= \sqrt{E/\rho})$  とすれば、 $\Delta t = \Delta l/c$  である。これは弾性体中で特性曲線に沿っているため精度が一番良く、(21) 式で  $g_\sigma > 0$  だから  $D \leq E$  となり、常に  $\sqrt{D/\rho} \cdot \Delta t \leq \Delta l$  となっているため、収束条件は満足されている。

次に境界条件の与え方を示す。衝撃端には一様速度を与えたが、一段階で零から与えられた速度まで上昇させたわけではなく加速度の連続性を保ちながら段階的に上昇させた (Fig. 1)。具体的には、軟鋼 (長さ 100 mm) の計算では、5, 7.5, 10, 20 m/sec の衝撃速度の解析では、500 要素に分割し、最初の 10 回で既定の速度にした。50 m/sec の場合は、1000 要素に分割し、20 回で速度を上げた。一方 Al 合金の解析では、すべての速度とも 250 要素

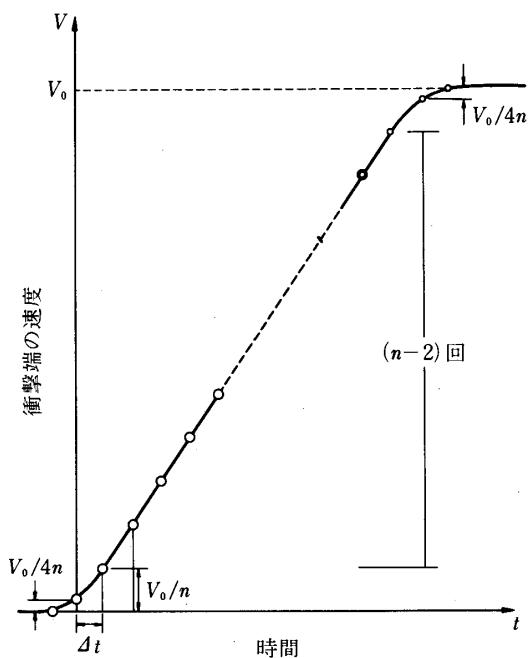


Fig. 1 衝撃端における境界条件 (速度) の時間変化

に分割し、25回に分けて速度を上げた。

Al合金の解析では、波頭のピークの存在の有無を調べた。波頭のピークが計算上の誤差から生じる可能性としては、1要素の長さ  $\Delta l$  が長すぎる場合、すなわち時間増分が大きすぎる場合と、衝撃端での速度の増加により生ずる1回の応力増分  $\Delta\sigma$  が大きすぎる場合を考えられる。そこで  $\Delta l$  と  $\Delta\sigma$  を独立に変化させ波頭のピークの有無を調べた。この結果  $\Delta\sigma$  が大きすぎると計算誤差として波頭に応力ピークを生じるが、これはあくまで計算誤差であり実際には応力ピークは生じないことが確かめられた[7]。

連立方程式は共役傾斜法を用い  $10^{-10}$  の精度まで計算された。

### 3. 軟鋼の有限長棒の高速引張りについて

軟鋼はbccの代表的材料の一つで既に栗山と著者の一人[5]がJ-G型構成方程式を導き、半無限長棒の高速引張りの計算を行いその挙動を説明している。ここでは反射の介入する有限長棒の場合を取り扱った。用いた構成方程式は前回と同じく下記のものである。

$$\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = \frac{4}{3}b \left[ N_0 + \frac{3}{4}M \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \right] v^* \exp \left( - \frac{2 \left[ D + \frac{3}{4}H \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \right]}{\sigma} \right) \quad (23)$$

定数は  $b = 2.5 \times 10^{-7} \text{ mm}$ ,  $v^* = 3.2 \times 10^6 \text{ mm/sec}$ ,  $N_0 = 3.75 \times 10^4 \text{ mm}^{-2}$ ,

$M = 10^9 \text{ mm}^{-2}$ ,  $D = 200 \text{ kg/mm}^2$ ,  $H = 10666 \text{ kg/mm}^2$ ,

$E = 2.15 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$

有限長棒の長さ  $l$  は 100 mm をとり、一端固定、他端の引張り速度  $V = 5, 7.5, 10, 20, 50 \text{ m/sec}$  と変化させた。この結果を Figs. 2~12 に示す。何れも右端を固定し左端を引張った場合について、若干の時刻での応力  $\sigma$  及び塑性歪  $\varepsilon_p$  の分布を示している。反射との関係は図中に表示してある。

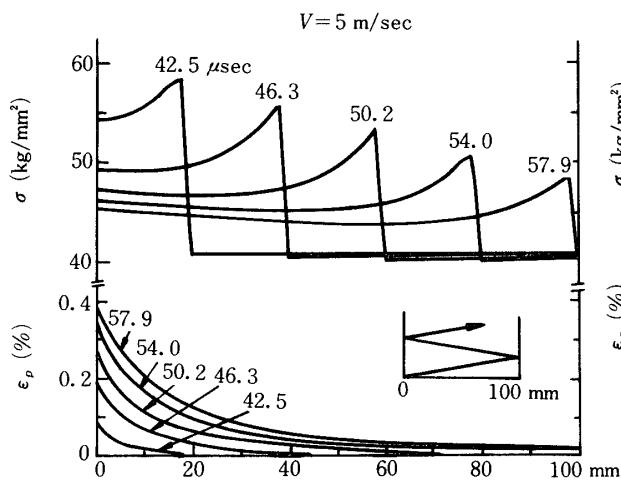


Fig. 2 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 5 \text{ m/sec}$ )

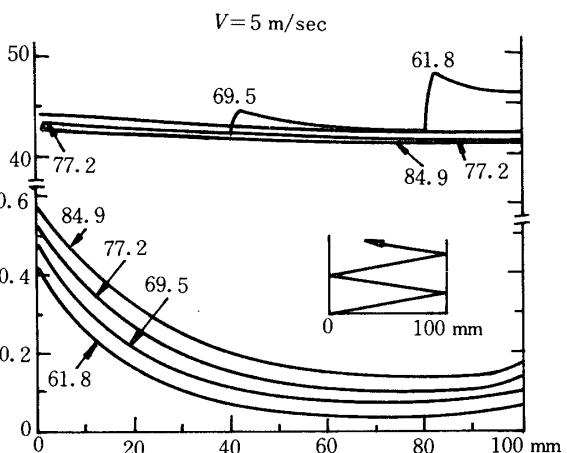


Fig. 3 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 5 \text{ m/sec}$ )

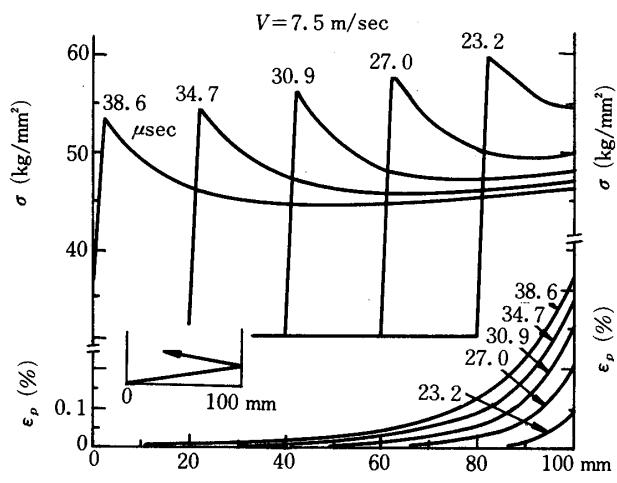


Fig. 4 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 7.5 \text{ m/sec}$ )

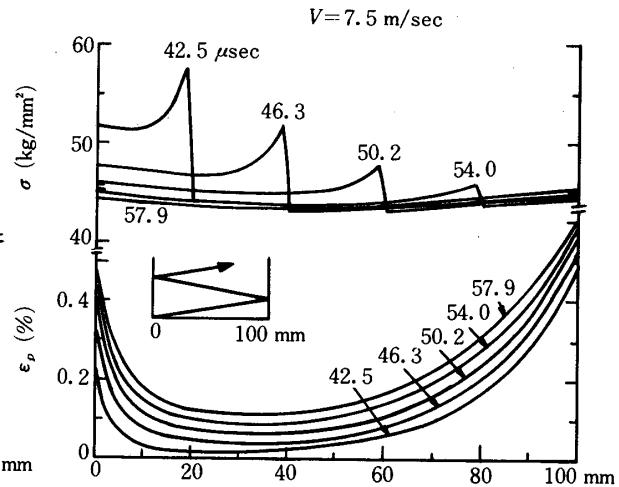


Fig. 5 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 7.5 \text{ m/sec}$ )

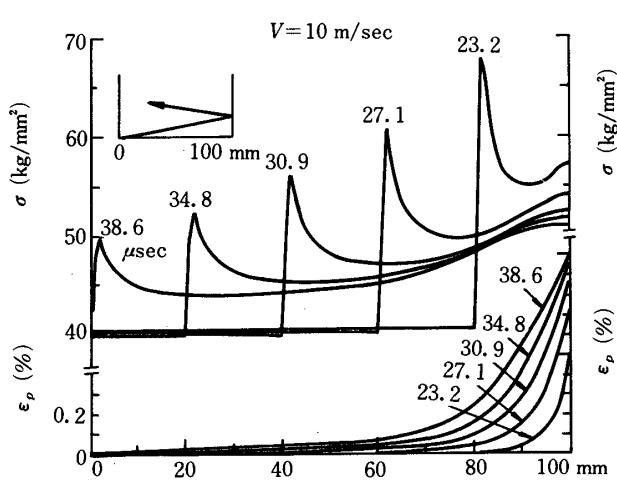


Fig. 6 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 10 \text{ m/sec}$ )

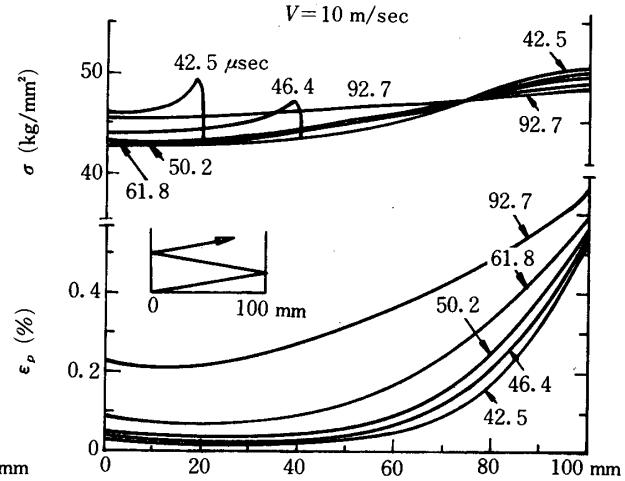


Fig. 7 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 10 \text{ m/sec}$ )

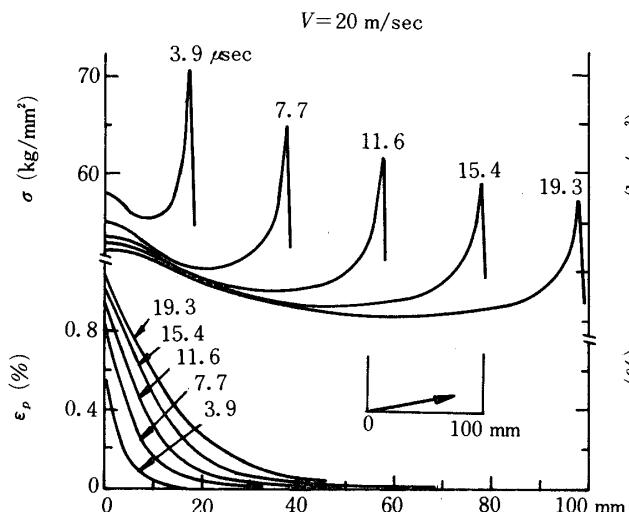


Fig. 8 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 20 \text{ m/sec}$ )

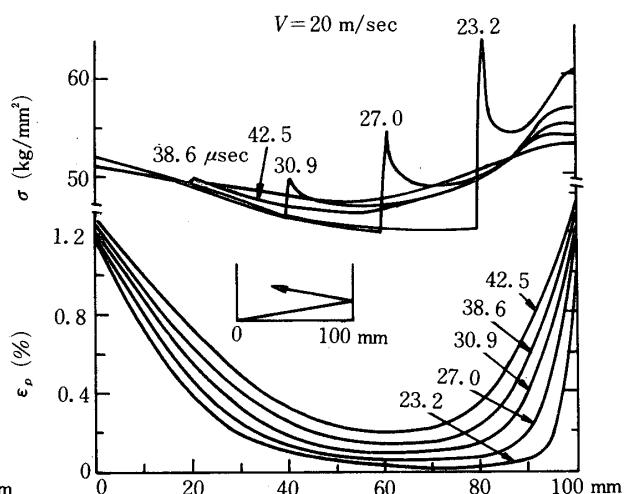


Fig. 9 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 20 \text{ m/sec}$ )

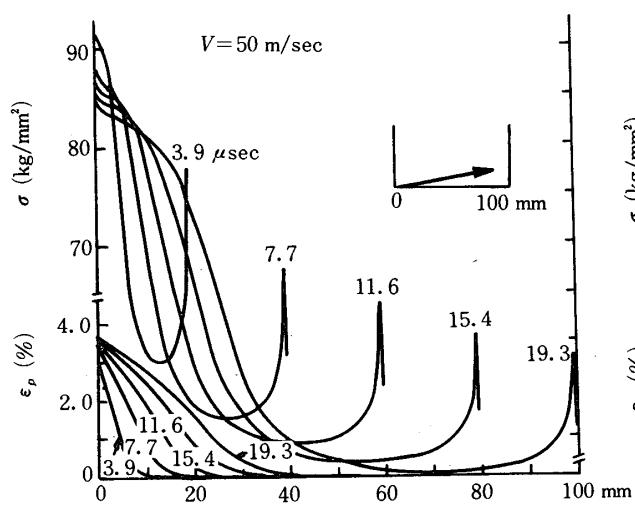


Fig. 10 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 50 \text{ m/sec}$ )

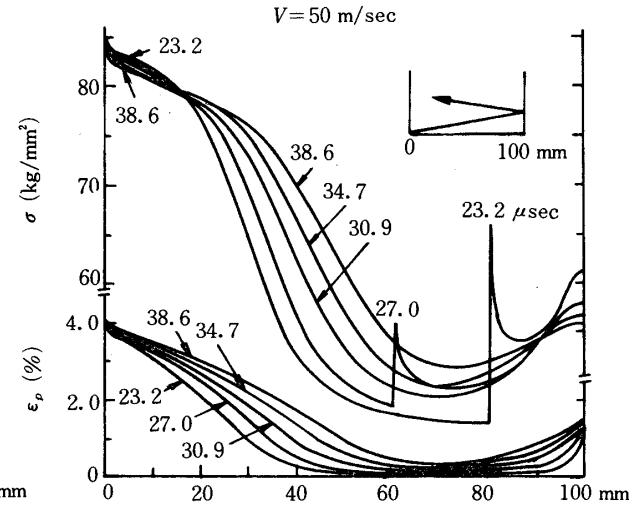


Fig. 11 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 50 \text{ m/sec}$ )

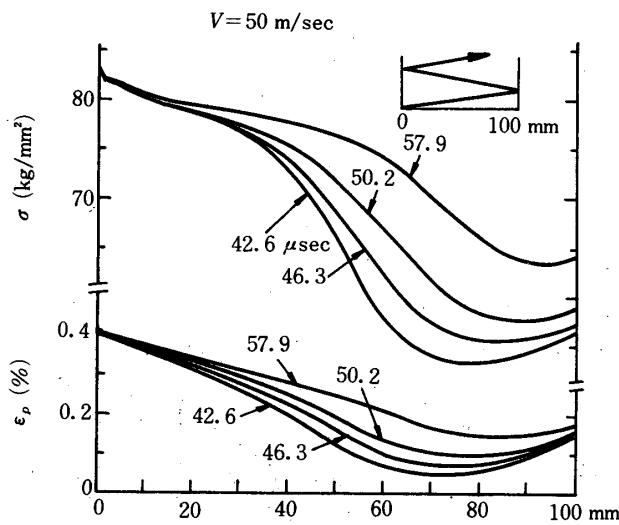


Fig. 12 軟鋼有限長棒の高速引張り  
( $V = 50 \text{ m/sec}$ )

また  $V = 10 \text{ m/sec}$  の時の棒中3点での応力  $\sigma$ , 塑性歪  $\epsilon_p$  の時間変化を Figs. 13, 14 に示す。以上の結果から次の事実が知られる。

1) bcc では波頭の応力ピークが著しく現れる。反射後もこの応力ピークは見られる。減衰は著しい。

2) 上述の応力ピークは  $V = 5 \text{ m/sec}$  では  $69.5 \mu\text{sec}$  ではまだ見られるが  $77.2 \mu\text{sec}$  では殆んど見られない。 $V = 7.5 \text{ m/sec}$  では  $57.9 \mu\text{sec}$  以降、 $V = 10 \text{ m/sec}$  では  $50.2 \mu\text{sec}$  以降、 $V = 20 \text{ m/sec}$  では  $42.5 \mu\text{sec}$  以降、 $V = 50 \text{ m/sec}$  では  $30.9 \mu\text{sec}$  以降応力ピークが見

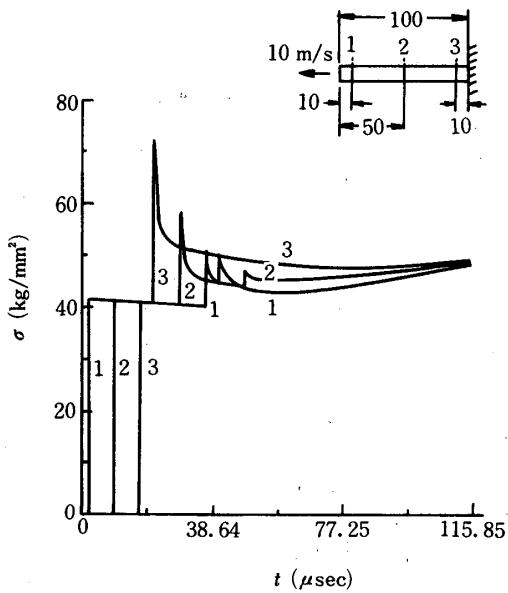


Fig. 13 軟鋼有限長棒の高速引張り  
での  $\sigma-t$  の例 ( $V = 10 \text{ m/sec}$ )

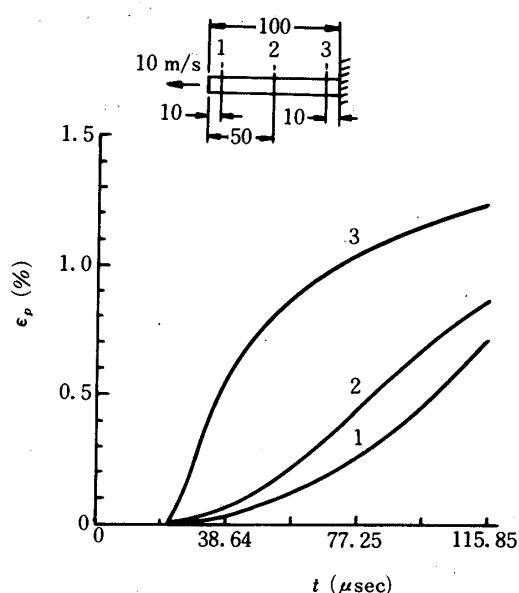


Fig. 14 軟鋼有限長棒の高速引張り  
での  $\epsilon_p-t$  の例 ( $V = 10 \text{ m/sec}$ )

られなくなる。

3) 初期においては  $\sigma$ ,  $\epsilon_p$  共に棒の場所で著しく異なり、特に末端から  $\epsilon_p$  が上昇する傾向を示す。

4) しかし、 $t \rightarrow \infty$  では、段々各点の応力、塑性歪が平均値に収束してくる傾向を示すように考えられる。

5) この bcc に固有といつてもよい鋭い応力ピークは、材料破壊の誘因となる場合のあることが考えられる。

#### 4. 実用高強度 Al 合金の有限長棒の高速引張りについて

##### 4.1 構成方程式 (24), (24') の比較

$$\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = c_3 \exp \left\{ -\frac{U_0}{kT} \left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_g}{\sigma_0 \left( 1 + H \left( \epsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \right)} \right) \right\} \quad (24)$$

$$\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = c_1 \sigma \exp \left\{ -\frac{U_0}{kT} \left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_g}{\sigma_0 \left( 1 + H \left( \epsilon - \frac{\sigma}{E} \right) \right)} \right) \right\} \quad (24')$$

(24), (24') は河田ら [7]～[9] により導かれた。互に pre-exponential 項が異なっている。定数は、 $E = 7190 \text{ kg/mm}^2$ ,  $c_3 = 4.5 \times 10^{12} \text{ sec}^{-1}$ ,  $U_0 = 30.3 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{mm}$ ,  $\sigma_0 = 19.42 \text{ kg/mm}^2$ ,  $k$ : Boltzmann 定数,  $T = 300^\circ \text{K}$ ,  $c_1 = 2.32 \times 10^{11} (\text{kg}/\text{mm}^2)^{-1} \text{ sec}^{-1}$  で計算する。

Fig. 15 に両方程式についての応力  $\sigma$ , 塑性歪  $\epsilon_p$  分布の例を示す。

Fig. 15 は反射の介入前の例を示すもので、これから次の事柄が知られる；

- 1) 構成方程式 (24) 式と (24') 式で高速変形の挙動に殆んど差がない。
- 2) 波頭に鋭いピークは出ない。これは fcc の特徴と考えられる。
- 3) 加工硬化の係数  $H$  の増大と共に、 $\sigma$  及び  $\epsilon_p$  における plateau の形成が顕著にな

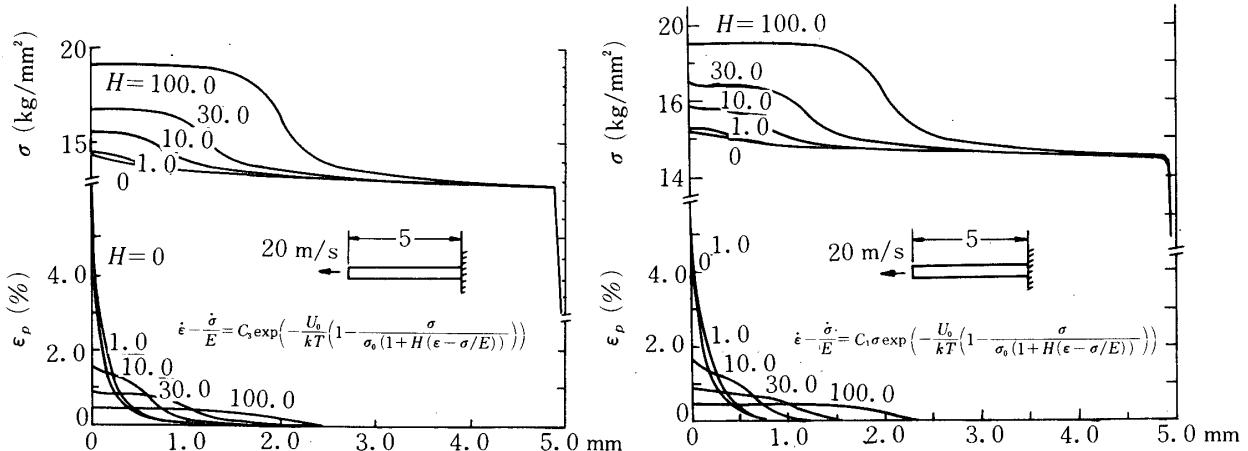


Fig. 15 構成方程式 (24), (24') の両材料の有限長棒の高速引張り

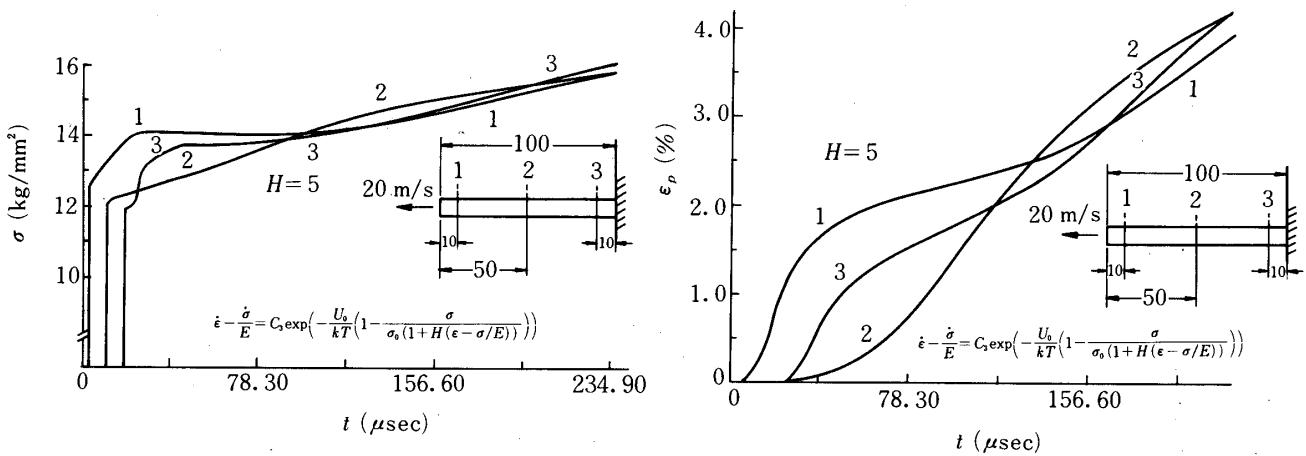


Fig. 16 式 (24) の材料の有限長棒の高速引張り

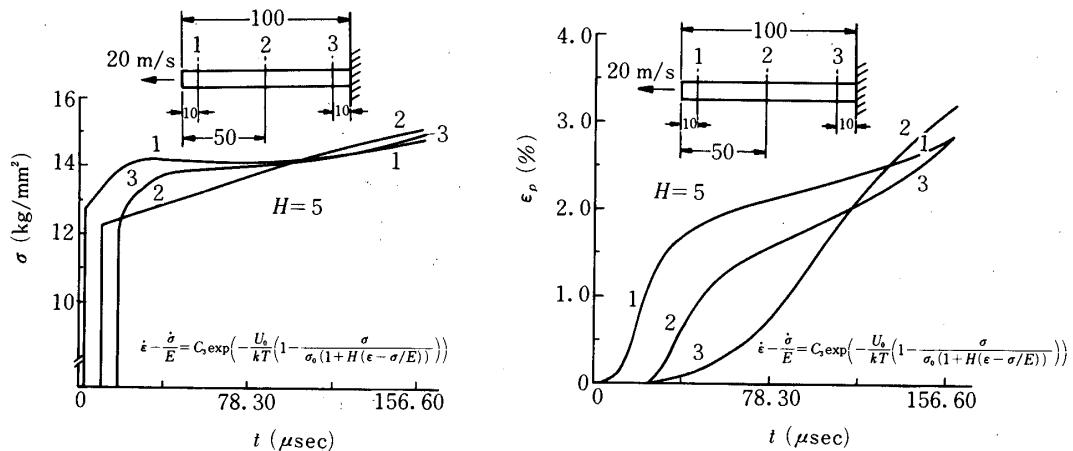


Fig. 17 式 (24') の材料の有限長棒の高速引張り

る。従って  $H=5 \sim 9$  の実在の高強度 Al 合金では plateau の形成は見られる。plateau の形成は J-G 型の軟鋼に限らないことになる。

Fig. 16, 17 に或る特定個所の  $\sigma$ ,  $\epsilon_p$  の時間変化を求めた例を示す。これは反射の介入後までも含むものである。これから次の事柄が知られる。

1) 前の例と同様、式 (24) と (24') ではほとんど差がない。

2) 点 1, 2, 3 において  $\sigma - t$ ,  $\epsilon_p - t$  は差異のある挙動を示す。

Fig. 18 に式 (24) について、より長い時間の間の計算を示す。時間の経過と共に点 1, 2, 3 における  $\sigma$ ,  $\epsilon_p$  の値は差が減ってくる事が知られる。故に或る時間経過後は有限長棒中の応力  $\sigma$ , 塑性歪  $\epsilon_p$  の分布は一様に近くなることが知られる。

#### 4-2 構成方程式 (24), (25) の比較

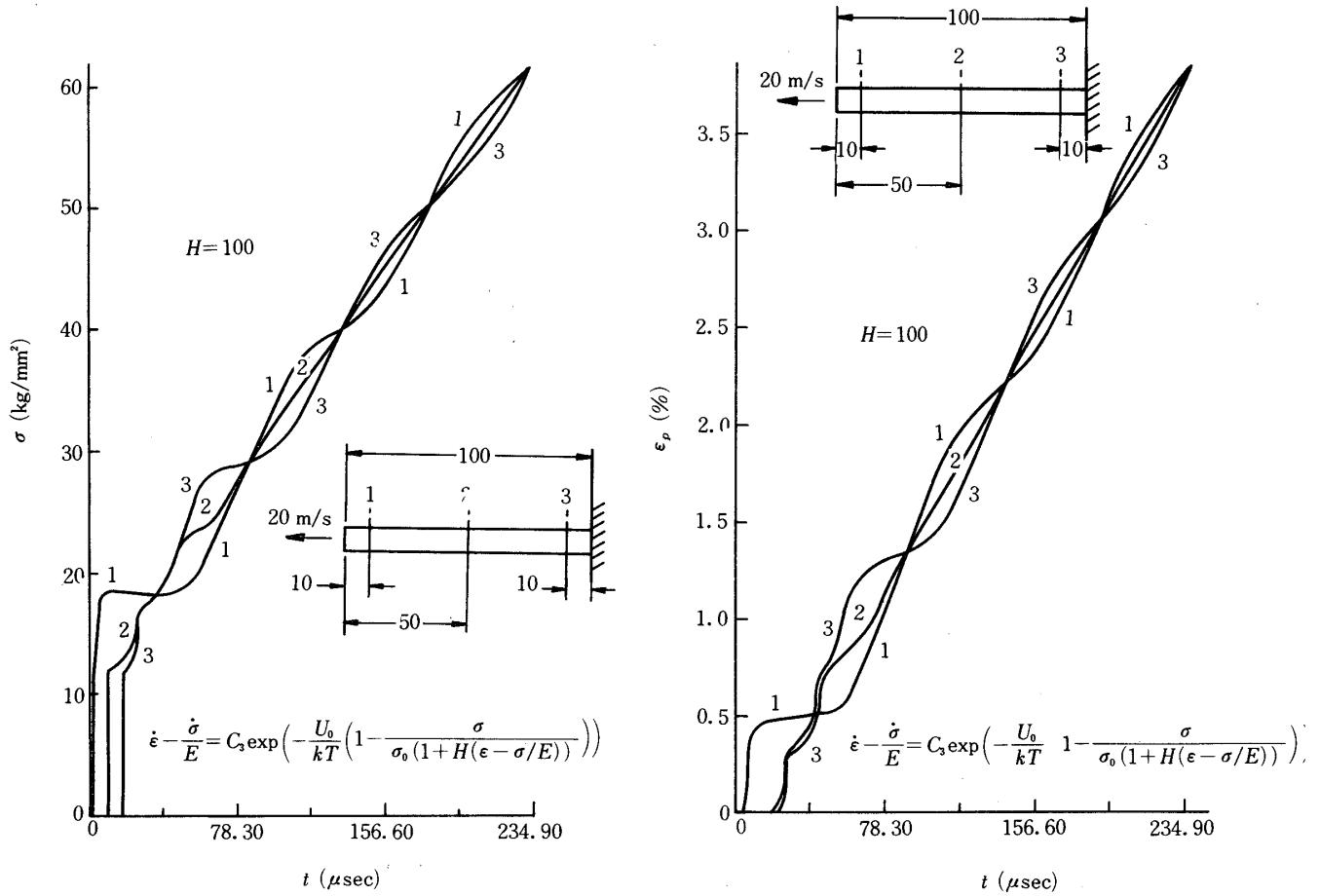


Fig. 18 式 (24) の材料の有限長棒の高速引張り (多数回反射の介入する時)

構成方程式 (24) と (25) を有限長棒の高速引張りで比較した例を Fig. 19 に示す。

$$\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = C_3 \exp\left\{-\frac{U_0}{kT}\left(1 - \frac{\sigma - \sigma_g}{\sigma_0(1 + H(\epsilon - \frac{\sigma - \sigma_g}{E}))}\right)\right\} \quad (25)$$

Fig. 19 から次の事柄が知られる：

- 1) 式 (24) の分母の  $\sigma$  を  $\sigma - \sigma_g$  でおきかえた式 (25) の与える挙動は式 (24) の与えるそれと僅かに異なるが、大勢において差はないといってよからう。
- 2)  $\sigma_g$  の導入は  $\sigma_g = 0$  の場合に比べ、波頭近くでは応力波の  $\sigma$  値を  $\sigma_g$  だけ増大するが、 $\epsilon_p$  の介入していく辺りになると  $\sigma - \sigma_g$  は同一ではなくなる。Fig. 19 の (b) は  $\sigma - \sigma_g$  で、(a) は  $\sigma$  でプロットしてある。

#### 4.3 定構成方程式理論の適用可能範囲について

Kármán 理論のような定構成方程式理論が、本来歪速度依存型構成方程式を用いるべき場

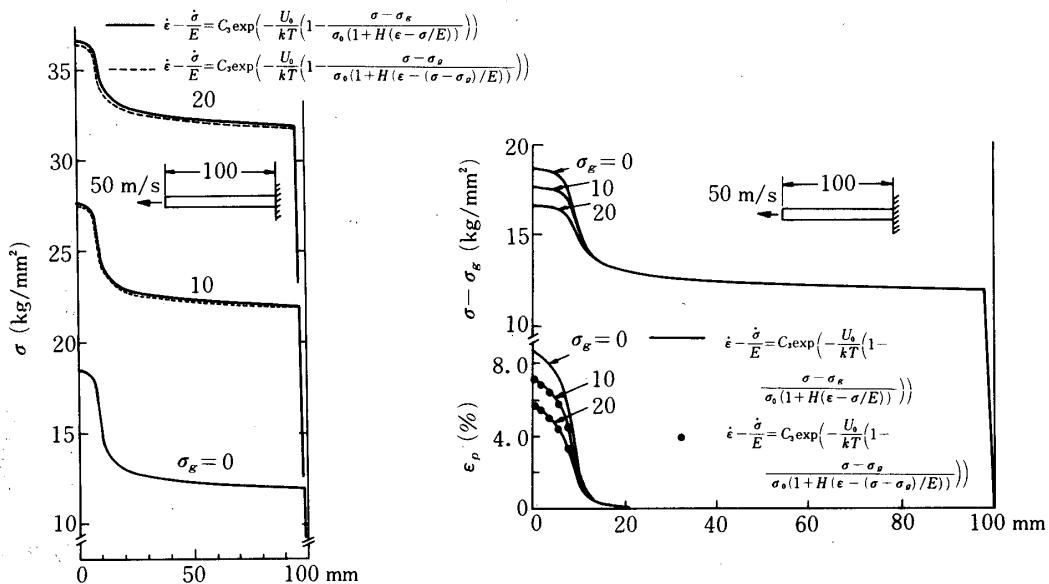


Fig. 19 構成方程式 (24) と (25) の材料の高速引張り

合にどの程度近似的に用いられるかは、興味ある論議の対象であるといえよう。

次に、構成方程式 (24) と  $E_p = 1095 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 13.2 \text{ kg/mm}^2$  の定構成方程式について、長さ 100 mm の有限長棒の 20 m/s での高速引張りについて比較した。この結果を Fig. 20 (1)~(7) に示す。図中、曲線が構成方程式 (24) に、折線が定構成方程式に対応する。

これから次の事柄が知られる：

1) 定構成方程式理論は応力の大きさの order は表現できるが、応力分布の細部にわたっては表現出来ない。

2) 真の構成方程式の形によって合致の程度が当然異なってくる。

J-G 型構成方程式の場合は一般に fcc の場合よりも合致が悪いように思われる。

#### 4.4 実用高強度 Al 合金有限長棒の高速変形挙動の総括

1) 実用高強度 Al 合金を模擬する構成方程式 (24), (24')において、その高速変形挙動において pre exponential 項  $c_3$ ,  $c_1\sigma$  の差はほとんどない。

2) この fcc 構成方程式において、その有限長棒の高速引張りにおいて波頭に鋭い応力ピークは出ない。この点 bcc と全く異っており、fcc の特徴と考えられる。

3) plateau の形成は加工硬化の係数  $H$  の増大と共に  $\sigma$  及び  $\epsilon_p$  において著しくなる。実在高強度 Al 合金では  $H = 5 \sim 9$  程度で、なだらかな plateau の形成が見られるはずである。従って plateau 形成が J-G 型の軟鋼のみに限らず、fcc の Cu, Al にも見られる実験事実は、上記の議論を支持する。

4) 多重反射介入後の挙動は計算した範囲では、有限長棒各点上の  $\sigma$ ,  $\epsilon_p$  の時間変化は  $t$  増大と共に差が減り、一様化してくる。この点は有限長棒の高速引張りの実用測定

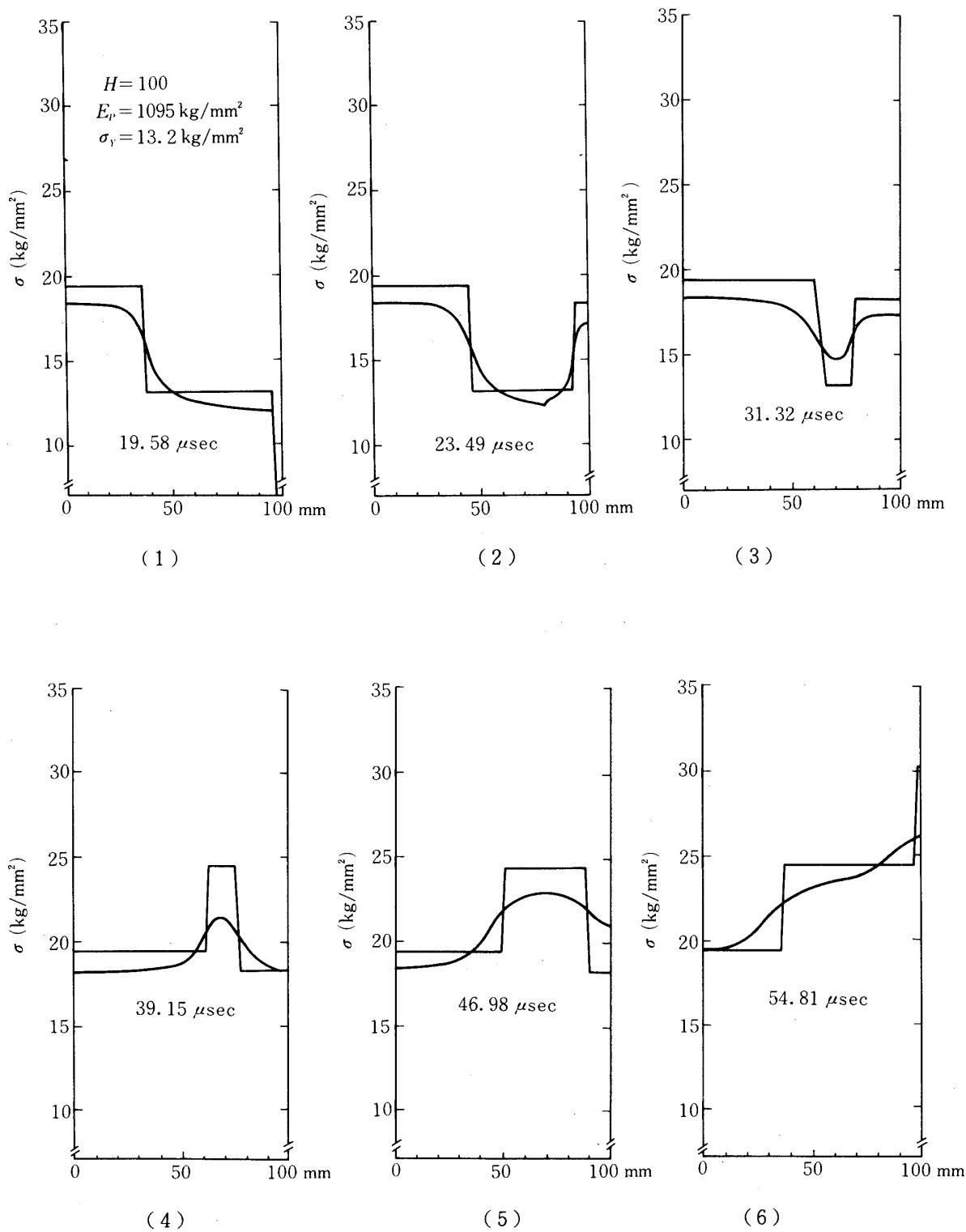
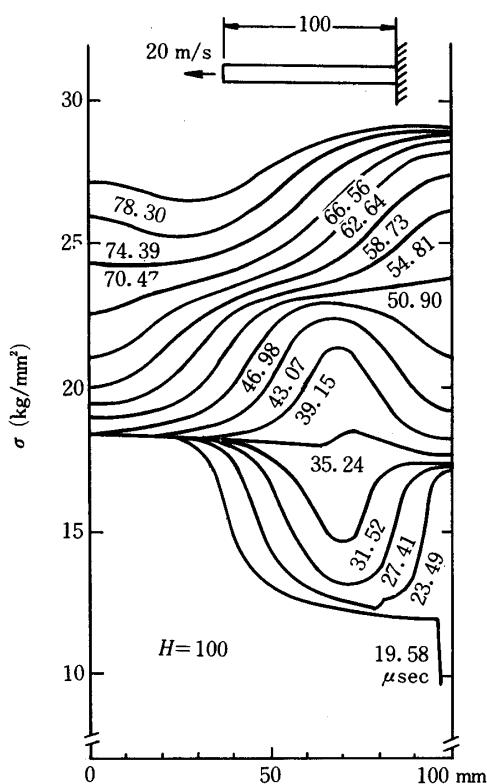


Fig. 20 構成方程式 (24) と定構成方程式との比較



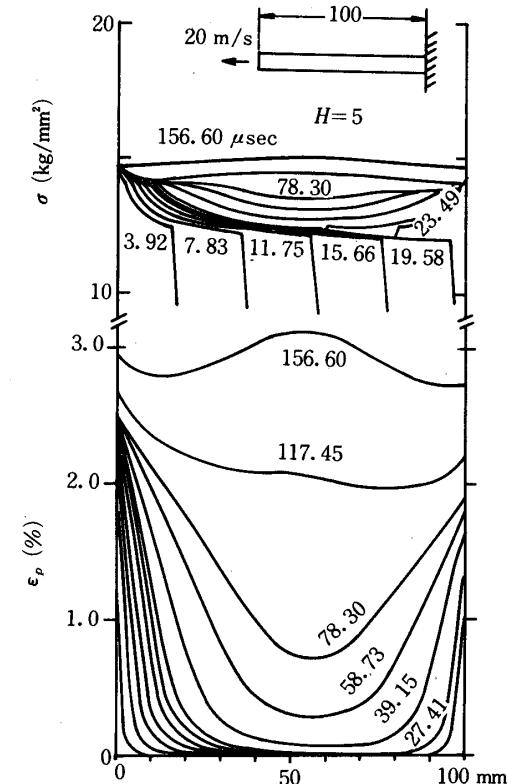
$$\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = C_3 \exp\left(-\frac{U_0}{kT}\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0(1+H(\epsilon-\sigma/E))}\right)\right)$$

(7)

Fig. 20 構成方程式 (24) と定構成  
方程式との比較

の基礎と考えられる。

- 5)  $\sigma_g$  をとり入れることは、単に  $\sigma_g$  の shift だけではない応力波挙動を与える。
- 6) 式 (24) で分母に  $\sigma_g$  をとり入れた式 (25) は著しい差を与えない。
- 7) 式 (24), (24'), (25) を基礎として高強度実用 Al 合金の高速変形の挙動は議論できると考えられる。



$$\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = C_3 \exp\left(-\frac{U_0}{kT}\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0(1+H(\epsilon-\sigma/E))}\right)\right)$$

Fig. 21 構成方程式 (24),  $\sigma_g = 0, H = 5$  での  
多重反射と  $\sigma, \epsilon_p$  の増大の挙動

## 5. 結 論

- 1) 有限要素法に Newmark 1/6  $\beta$  法を組合せて、軟鋼及び実用高強度 Al 合金有限長棒の高速引張りにおける応力波伝播、歪分布、伸び等の挙動が解析された。
- 2) 有限長棒の挙動は材料固有の構成方程式によって相違する。
- 3) 波頭における鋭い応力ピークが bcc の軟鋼に存在し、fcc の実用高強度 Al 合金には存在しない。これは構成方程式の差による顕著な差の一例であり、両者の破壊の挙動の差とも密接に結びついているとも考えられる。
- 4) 応力  $\sigma$  及び塑性歪  $\epsilon_p$  における plateau は両構成方程式について現れ、実験の傾向

を支持する。

5) 材料の高速変形の挙動の研究には上述のように微視力学的観点から導かれた構成方程式の導入が極めて有力な手段となると考えられる。

6) 定構成方程式も少なくとも実用高強度 Al 合金の場合にはおおよその傾向を推測するのに、若干程度の意味をもち得る。

7) bcc の軟鋼では有限長棒の引張りで、末端での反射後も波頭の応力ピークは現れる。この応力ピークは  $V$  の関数の或る時刻以後現れなくなる。

8) fcc, bcc の両者において、 $\sigma - t$ ,  $\epsilon_p - t$  関係で、当初は棒内の点により差異が著しいが、多重反射後時間経過につれ遂次平均化されてくる傾向を示す。

9) 構成方程式にもとづく高速変形挙動の解析は、巨視的な動的挙動解析のあらゆる面での基盤をなすと考えられる。

1978年4月11日 材料部

### 文 献

- [1] K. Kawata, S. Fukui, J. Seino: Aero. Res. Inst., Universtiy of Tokyo, Report No. 389 (1964), 165.
- [2] K. Kawata, S. Fukui, j. Seino: Bull. Inst. Space & Aeronautical Science, University of Tokyo, 1-4A (1965), 390.
- [3] K. Kawata, S. Fukui, J. Seino, N. Takada: Behaviour of Dense Media under High Dynamic Pressure (Dunod, Paris, 1968), 313.
- [4] K. Kawata, S. Kuriyama: Proc. 9th Int. Symposium on Space Technology and Science (Tokyo, AGNE) (1971), 233.
- [5] S. Kuriyama, K. Kawata: J. Appl. Phys., 44 (1973), 3445.
- [6] K. Kawata, S. Kuriyama: Mechanical Properties at High Rates of Strain (Inst. of Phys. Conference Ser. No. 21, London, Bristol, 1974), 215.
- [7] 河田幸三, 橋本彰三, 黒河邦彦: 第3回衝撃工学シンポジウム論文集(東大宇宙研, 1976), 197.
- [8] 河田幸三, 橋本彰三, 黒河邦彦: 第4回衝撃工学シンポジウム論文集(東大宇宙研, 1977), 145.
- [9] 河田幸三, 橋本彰三, 黒河邦彦: 東大宇宙研報告, 実用高強度 Al 合金の構成方程式とその高速変形について, 東大宇宙研報告, 14, 2 (B), (1978), 841.
- [10] K. Kurokawa and K. Kawata: On the Dynamic Stress Concentration of Notched Plates as Induced by Tensile Stress Waves, Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Report No. 540 (1976), 47-89.
- [11] S. Nakagiri and H. Shimooka: A Note on the Finite Element Approach to the Plastic Propagation in Metal Obeying the Strain-Rate Dependent Constitutive Equation, CAS 研究報告, No. 19 (1976), 39-44.
- [12] N. M. Newmark: A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. ASCE, 85, No. EM3, (1959), 67-94.
- [13] K. Kawata, S. Hashimoto, K. Kurokawa: IUTAM Symposium on High Velocity Deformation of Solids (August, 1977, Tokyo), Collected abstracts, 1. In printing in Proc. from Springer.