

軸流ファンの動翼後流の測定

田中英穂・丸田秀雄・三村富嗣雄*・熊谷隆王**

1. ま え が き

前報 [1] の軸流ファンの回転騒音の発生とダクト伝播の研究で、動静翼列の干渉音の音圧レベルは、翼列の軸間距離に依存し減少することが明らかになった。

動静翼列に起因する干渉音としては、翼列のポテンシャル干渉によるもの及び上流側翼列の粘性後流と下流側翼列との干渉によるものが考えられる。前者のポテンシャル干渉音は理論的には翼列間の軸間距離に対し指数関数的に減少するので、その減少傾向は軸間距離に対して急激である。従って動静翼列の軸間距離が翼弦長の1～1.5倍程度離れば、ほぼ気流の乱れのレベルとなり余り問題はない。

後者の粘性後流と下流側翼列との干渉の問題に関しては、翼列に対する空力的励振力を解明する立場から Kemp & Sears [2] の先駆的研究があり、その後、梶、岡崎 [3] はこの問題を翼列騒音の問題に拡張している。この場合、翼列の粘性後流のモデルとしてはいずれも単独翼の粘性後流に関する Silverstein [3] らの実験式を翼列の後流にも拡張して用いている。梶らの研究によれば、粘性後流との干渉による翼列騒音の減衰は、ポテンシャル干渉音のそれに比し、非常に緩やかであることが示されている。

上記のように従来の研究では、翼列の粘性後流のモデルとしていずれも単独翼の後流に関する実験式を二次元翼列に拡張して使用しているが、実際の軸流ファンなどの内部流れは粘性ならびに三次元的要素が無視できず、更に動静翼列の相対運動による複雑な流れ場を構成しており、従って、実際の軸流ファンの翼列干渉音について研究するためには、実際の三次元翼列の粘性後流の特性について解明することが不可欠なことである。

この場合静翼列の後流は静的計測が可能であるが、動翼列の後流となると、翼枚数と回転数の積を基本周波数とし、その高次の高調波を含む非定常流であるため、計測の困難さから信頼できるデータは余り得られていない状態であった。最近になって熱線風速計を用いての計測法が開発され、幾つかの測定例 [5～7] が報告されているが、三次元的動翼後流の減衰過程を解明するにはなお不十分である。

今回、1本の熱線風速計を回転させることにより、三次元の周期的な動翼後流の速度分布を計測できる計測システムを試作したので、その計測法について報告すると共にそれを用いて測定した軸流ファンの動翼後流の測定例について報告する。

* 内地研究員 昭和52年度 (航空宇宙技術研究所)

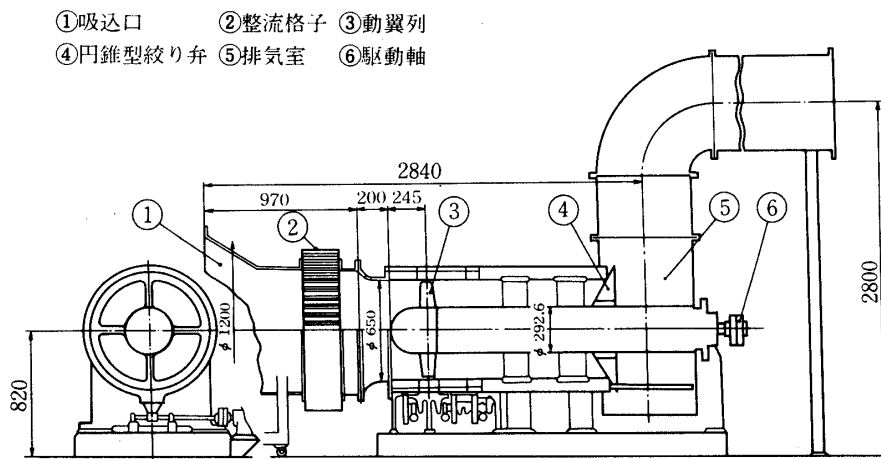
** " 昭和53年度 (")

記号

- V : 動翼の流出速度
 V_x : 軸方向速度
 V_y : 周方向速度
 V_z : 半径方向速度
 W : 相対流出速度
 U : 周速度
 θ : スワール方向の角
 φ : ピッチ方向の角
 p : 翼列のピッチ
 $\left. \begin{array}{l} v_{xc}/V_{xm} \\ v_{yc}/V_{ym} \\ w_c/W_m \end{array} \right\}$ 後流の無次元速度欠損
 $\left. \begin{array}{l} b_x/p \\ b_y/p \\ b_w/p \end{array} \right\}$ 後流の無次元半値幅
 L : 無次元距離 (長さ/翼弦長)
 ν : 無次元スパン方向位置

2. 実験装置

供試実験装置は、前報の回転騒音に関する研究に用いた単段軸流ファンである。静翼列は、動翼後流の測定範囲を拡大するため今回は取り除いてある。また、インレットディストーションをなくし流入気流を一様化し且つ、安定化するため、吸込みベルマウス下流側で直径



第1図 軸流ファンの組立図

第1表 動翼列の諸元

半径比 λ	0.45	0.50	0.525	0.65	0.725	0.80	0.875	0.95	1.00
翼弦長 C_R (mm)	95.00	93.38	90.94	88.50	86.06	83.63	81.19	78.75	77.13
ソリディティ σ_R	1.551	1.372	1.162	1.00	0.872	0.768	0.682	0.609	0.567
翼厚 t_{Rmax} (%)	12.00	11.82	11.55	11.27	11.00	10.73	10.45	10.18	10.00
相対流入角 β_1 (deg)	43.91	46.93	50.89	54.29	57.19	59.70	61.89	63.80	64.95
食違角 ξ_R (deg)	27.11	32.83	40.09	45.79	49.89	53.13	56.04	58.80	60.40

翼形 NACA 65系, 翼枚数 15

800 mm のダクトの中間に、ハニカム整流格子及び金網（24メッシュ）よりなる整流装置を設けている。上記整流装置により、動翼前面の環状流路内の周方向並びに半径方向の流速分布は十分一様化されており、平坦度は 4000 rpm の作動状態において、内外壁の境界層を除き 1.5 % 以内である。第 1 図に軸流ファンの概略組立図を、第 1 表に動翼列の仕様をそれぞれ示す。

3. 三次元流れの計測法

ターボ機械の内部流は、翼枚数と回転数との積を基本周波数とする高次の周波数成分を含んだ周期的変動流となっており、また、半径方向の速度成分も無視し得ない三次元流れでもある。

このような三次元の変動流れの計測には、広帯域の周波数応答特性の良好な計測器が要求される。定温度形熱線風速計はこの種の要望を満たしているが、三次元流れを計測できるセンサの開発が製作及び特性上に難点があって実用化が遅れている。

しかし、定速回転の作動状態においては、軸流ターボファンの内部流動現象は時間及び空間的に安定した周期的変動流れとなっている。このような周期性が保持される動翼後流について、Whitfield ら [5] は 1 本の傾斜形ホットワイヤを用いて三次元流れを測定する計測法を開発している。

本報告では、上記文献の計測法を参照し、新たに開発した下記データ処理システムと組合せて三次元の周期的変動流れのオンライン計測システムを完成した。

3.1 熱線風速計

熱線風速計の三次元センサは、回転軸に対し 54.7° の方向にホットワイヤ（5 μ ）を張った傾斜形のプローブである。

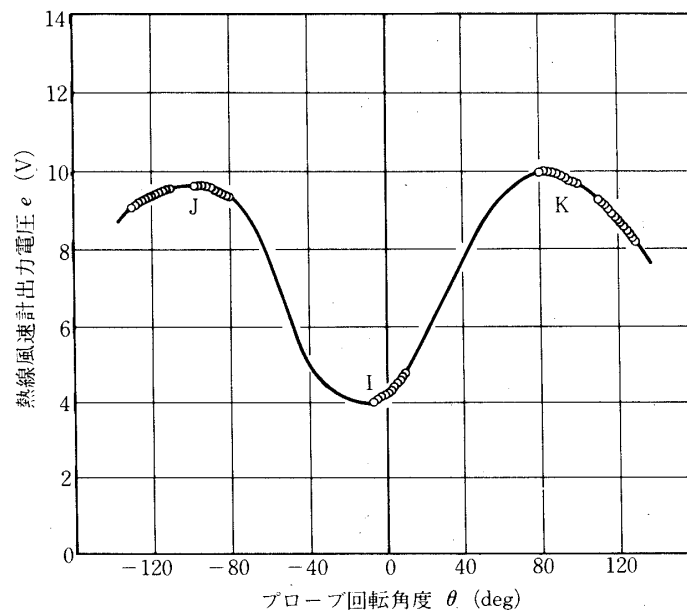
三次元流れの測定は、そのプローブを回転軸まわりに 120° ずつ回転させて、I, J, K 三方向の風速成分 v_i, v_j, v_k を基礎データとし、付録に示す測定原理により瞬時の流速 V の X, Y, Z 方向の速度成分 V_x, V_y, V_z を検出する。その検定は下記のように行った。

三次元熱線風速計は吹出口直径 80 mm の横形検定風洞の測定部に三次元測定装置を設置して、風速 50 m/s 一定のもとで三次元流れに対する特性を調べた。測定装置は吹出口中心の流出方向に X 軸をとり、X 軸上の吹出口より下流側約 30 mm の点を座標の原点と定めて、垂直方向を Y 軸、水平方向を Z 軸としており、ホットワイヤの中心を原点に合せて、Z 軸に一致させている。また Z 軸の時計方向廻りの回転角を正のスワール角 θ として、ホットワイヤの J, K 方向の出力電圧 e_j 及び e_k が等しい ($e_j = e_k$) 時のホットワイヤのスワール角を基準 ($\theta = 0^\circ$) とし、また Y 軸の反時計方向廻りの回転角を正のピッチ角 φ として、支持軸が流速に対して直角な位置を $\varphi = 0^\circ$ と定めている。

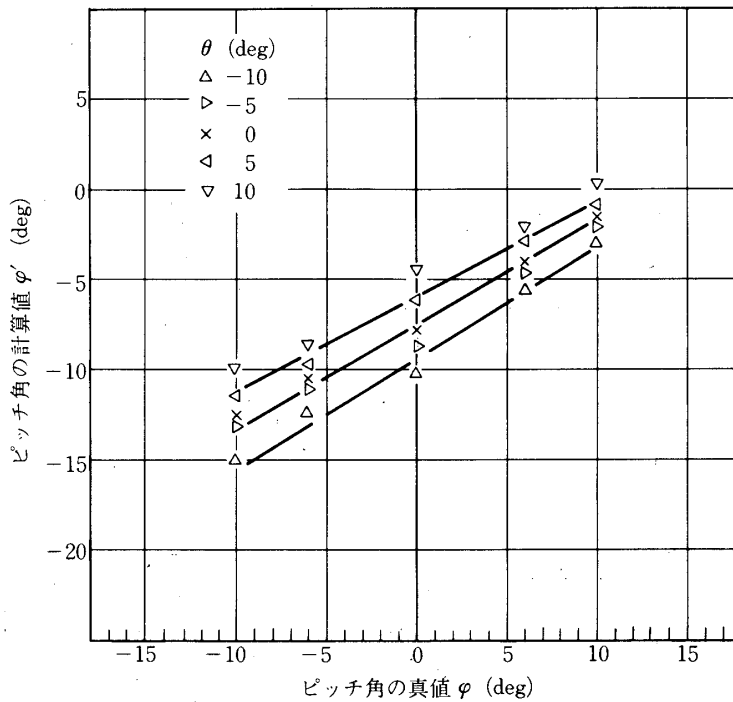
第2図は $\varphi = 0^\circ$ に対するスワール方向の風向特性を示している。横軸は Z 軸廻りの回転角 θ を表わし (原点 $\theta = 0^\circ$ は上記 $v_j = v_k$ のスワール角の零度とは異なり、ホットワイヤの両極針が流速に対して機械的に定めた平行位置を原点としている)、縦軸は角度位置に対する風速計の出力電圧値 e を示す。

風向特性は理想的には縦軸に対して対称となるが、本ホットワイヤの例では、J (左側) 及び K (右側) 方向で最大値が異なり、非対称性を示している。これは J, K 方向でホットワイヤの円柱面が風向に対して同じでなく、そのためホットワイヤ表面の汚れ具合が異なる、あるいは、針先端部の溶接処理の不均一等が感度差の原因となっているものと判断される。

第3図は、ピッチ角 φ 方向の特性を示す。横軸は風向に対する支持軸のピッチ角 φ であり、



第2図 ホットワイヤの風向特性



第3図 ホットワイヤのピッチ方向の特性

縦軸は I, J, 及び K 方向の指示電圧値 e_i , e_j 及び e_k のそれぞれの値を用いた計算値 ϕ' である。

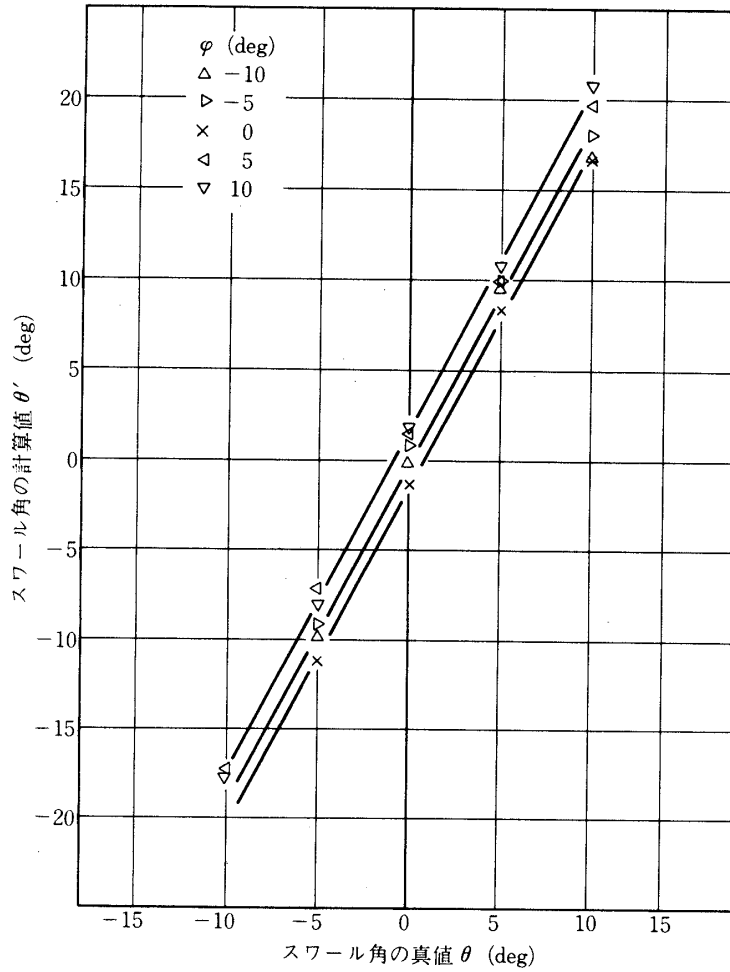
ホットワイヤを通過する流れは、両極針及びその支持部（直径 4 mm）の端面効果により先端方向に偏るため、 $\phi = 0$ で計算値の ϕ' が数度負の値を示すが、 ϕ に対してほぼ直線的に変化している。この現象は、 $\phi = 180^\circ$ の測定においても同じである。スワール角 θ に対して計算値 ϕ' は多少変り平行移動している。

第4図は、スワール角 θ に対する風向特性である。横軸はスワール角 θ 、縦軸は I, J, K 方向の指示値による計算値 θ' である。ほぼ原点を通る直線であるが、ピッチ角の変化に対して計算値が僅かに平行移動する。これは上述したホットワイヤの汚れや支持部の端面効果などに起因しているものと推測される。

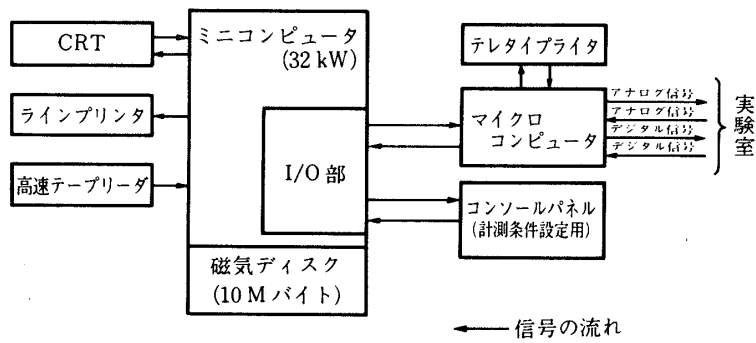
3.2 データ処理システム

本装置は、ミニコンピュータ ICOM-C5 (32 kW) を主体に各種アナログ計測器入出力の制御用マイクロコンピュータ AIDACS-2000 及び周辺機器によってデータ処理装置を構成している。各実験室には電送ケーブル端末部を設けて、オンラインによる実験データの集録、波形分析（高速フーリエ変換）及び統計処理が可能である。第5図はデータ処理装置のハードウェアの構成ブロック図を示しており、また第2表には各種機器の主な仕様を示している。

マイクロコンピュータのコンソールパネルにはサンプリングモード（トリガパルスの内



第 4 図 ホットワイヤのスワール方向の特性



第 5 図 ハードウェア構成ブロック図

第2表 データ処理装置の仕様

機器の名称	規格及び性能
ミニコンピュータ ICOM-C5	メモリ容量：32kW, ICメモリ, 磁気ディスクメモリ容量：10Mバイト
紙テープ読取装置	単位数：8単位, 読取速度：400cps
入出力タイプライタ	印字速度：600字/分, 使用コード：8単位ASCII
高速プリンタ	速度：300ライン/分, 印字方式：チェーン方式
DMAマルチチャンネル	データ転送方式：ダイレクトメモリアクセス (DMA), アナログチャンネル数：4ch
ADC	ビット構成：8ビット, 入力電圧： $\pm 5V$
	サンプリングインタバル： $3\mu s \sim 99\mu s$
マルチプレクサ付ADC	データ転送方式：プログラムモード, アナログチャンネル数：16ch
	ビット構成：12ビット, 入力電圧： $\pm 10V$, 変換時間： $40\mu s/1ch$
波形解析処理器	高速フーリエ変換 (FFT), 自己相関, 相互相関, クロススペクトル, パワースペクトル

部か外部かの区別)の選択トグルスイッチ及び、高速及び低速A-D変換器切換スイッチ、データ集録条件(サンプリング数、間隔など)などを設定するデジタルスイッチが設けてあり、従って、パネル面のスイッチ操作で所定のモードのフーリエ変換などの計算がミニコンピュータによって実行できる。その計算結果は必要に応じてラインプリンタで作表するかデジタル-アナログ変換器(DAC)を介してXYレコーダに記録もできる。

本実験では上記データ集録のソフトプログラムに付録に示したホットワイヤ出力に関する計算式及び前節で述べたホットワイヤの三次元特性を付け加えて変動速度の解析を行っている。

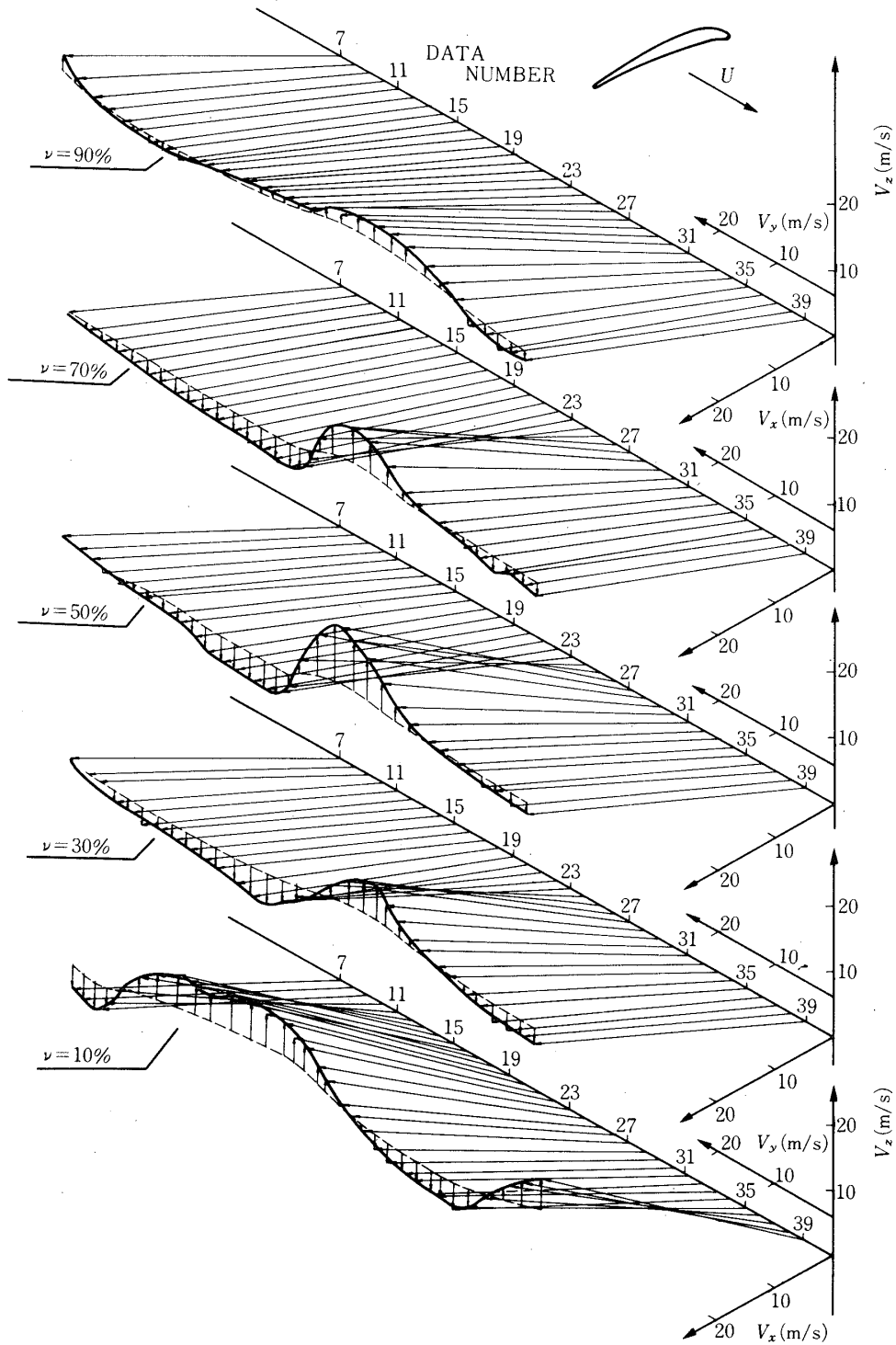
3.3 データ集録方法

データ集録に際しては、本装置の内部クロックによる内部トリガパルスを用いてデータサンプリングを実行しているが、サンプリング開始のスタートトリガパルスとして動翼回転軸に1回転に1このトリガパルス発生器を設けて、そのパルスを用いている。

サンプリング条件は動翼列(翼枚数15)の1ピッチ間隔に付き25点のデータ点を選び、3ピッチ間にわたって計測を行っている。従ってサンプリングレイトは回転数によって異なる。データの集録回数は99回で平均化処理をしている。なお本測定において、電送ケーブル(長さ100m)の周波数特性に因り動翼後流の高調波成分の振幅及び位相が逓減することを避けて、オフラインによるアナログデータレコーダを用いている。

4. 実験結果及び考察

4.1 流出速度 V の変化



第6図 半径方向位置 (ν) に対する後流速度ベクトルの変化 ($L = 1.16$)

本実験は絞り弁開度 $f = 180 \text{ mm}$ (全閉位置 $f = 0 \text{ mm}$), 回転数 $n = 2000 \text{ r.p.m}$ の一定として, 定常状態における軸流ファンの動翼後流の流れを測定している. 測定に使用したセンサは第3章に述べた傾斜形ホットワイヤである.

測定断面は, 動翼下流側軸方向に無次元長さ (長さ/平均半径の翼弦長) $L = 0.71, 1.16, 1.62, 2.09$ の4点を取り, 軸に垂直な半径方向位置には, 無次元スパン方向位置 $\nu = 10, 30, 50, 70, 90\%$ の5点をとっている.

第6図は, $L = 1.16$ の上記各半径位置で測定した動翼の流出速度 V の時間的変化の様相を示している. 図の X, Y 及び Z 軸には軸流速度 V_x , 円周方向速度 V_y 及び半径方向速度 V_z (上向き正) をそれぞれ示している. Y 軸には25点のデータ点を等間隔にとり, 動翼1ピッチ間の各データ点の流出速度 V の変化を表している.

スパン方向位置50%における流出速度の変化についてみると, 主流速度は一樣に流出しているが, 腹側で急激に流出角及び半径方向の流れが大きくなり, 最大値に達して背面側方向に減少してもとの流れにもどっている. 静止座標系での後流は相対座標系上での速度欠損の大きい後流と, 回転方向に周速度 U とが加わった合成流として速度を増して流出するが, 主流の軸流速度に比して後流の軸流速度が非常に小さいために流れ角が大きく変化する.

また, 後流内での半径方向速度成分 V_z の変化は流出角の増大によって周方向速度 V_y が主流の V_y に較べて大きくなり, 半径方向の平衡条件を満たさなくなったこと及び動翼の境界層の三次元流れに関係しているものと推測される. 上記傾向は他の半径位置でも同様な傾向をしているが, 内外壁方向では後流の上向きの速度成分 V_z が小さくなる傾向を示している.

第7図は, 同一スパン方向位置50%についての流出速度 V の軸方向の変化を示す. 図の L は, 動翼後縁から計った無次元距離である. 流出速度が回転方向にら旋状に流れるため, 下流側方向に後流の到達時間の遅れがある. 軸方向に対する後流の形状変化については後述する.

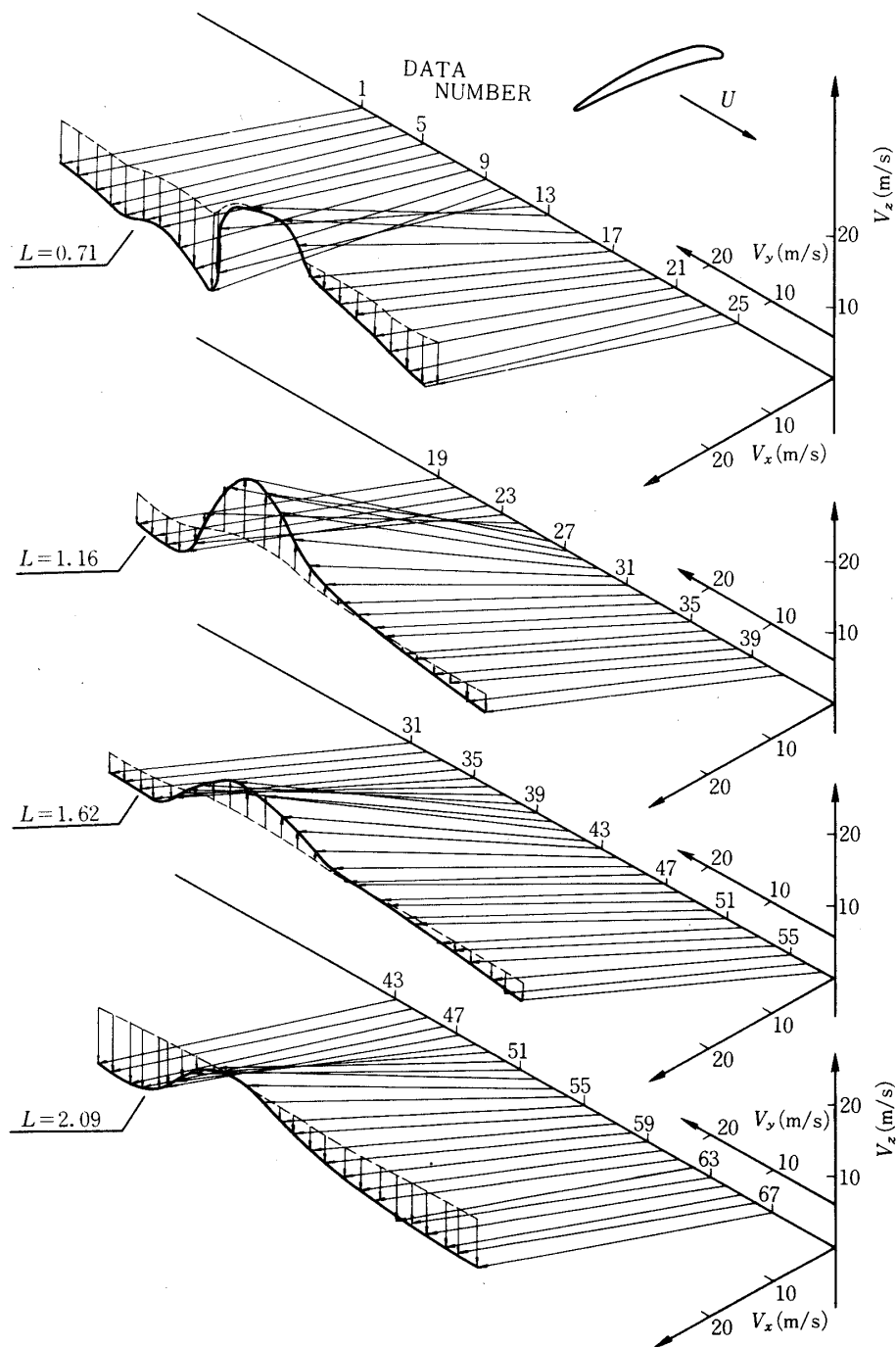
4.2 流出速度 V 及びその成分速度 V_x, V_y, V_z の変化

第8図は動翼1ピッチ間の流出速度 V の変化を示す. 測定断面は $L = 0.71$ で, 半径位置50%である. 図の横軸は測定時間 T (データ点) で周方向位置に対応しており, 縦軸は流出速度 V を表している.

主流の流出速度 V はほぼ一樣になっている. 後流の流出速度は測定翼によって多少の変化があるが, 主流に匹敵する大きさとなっている.

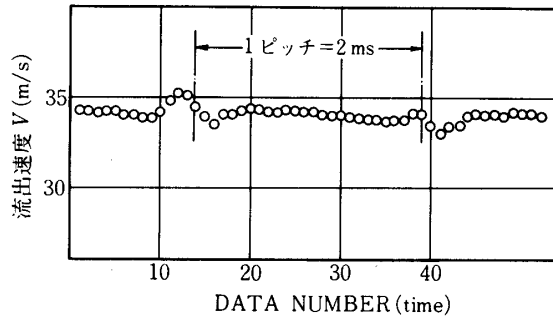
第9図は, 軸流速度 V_x の変化図である. 速度欠損の最大値 v_{xc} (平均軸流速度 V_{xm} - 後流の最小速度) なる点の左側が動翼の腹面側であり, その右側は背面側である. 主流の V_x はほぼ一樣な分布を示している. 後流は速度欠損の最大点に対して腹面側では幅が狭く, 速度減少率が大きく, 背面側ではそれに比して幅が広くなり, 減少の傾向が緩やかになっている. このことは動翼の腹面側の境界層が薄く, 背面側では厚くなっていることを意味している.

第10-a図は, 周速度 V_y の変化図である. 動翼1ピッチ間の主流の V_y は背面側より隣接翼の腹面側方向に減少しているが, 動翼後流に入ると (腹面側) 急激に速度を増し大き

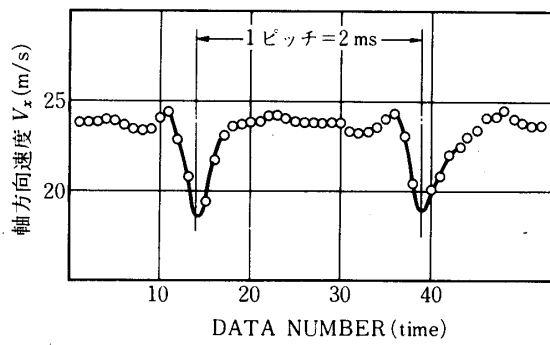


第 7 図 軸方向位置 (L) に対する後流速度ベクトルの変化

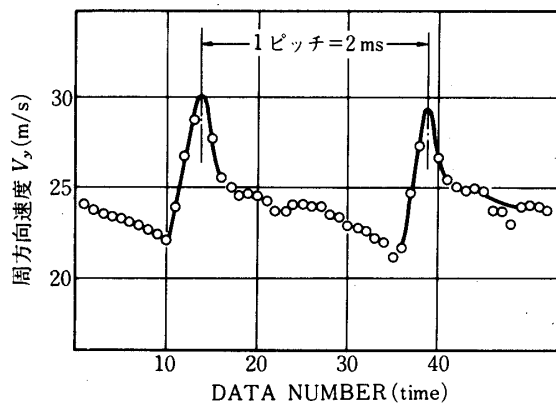
くなり最大速度に達して後流の背面側境界を通り抜けるとともに V_y は徐々に元の値に回復する。



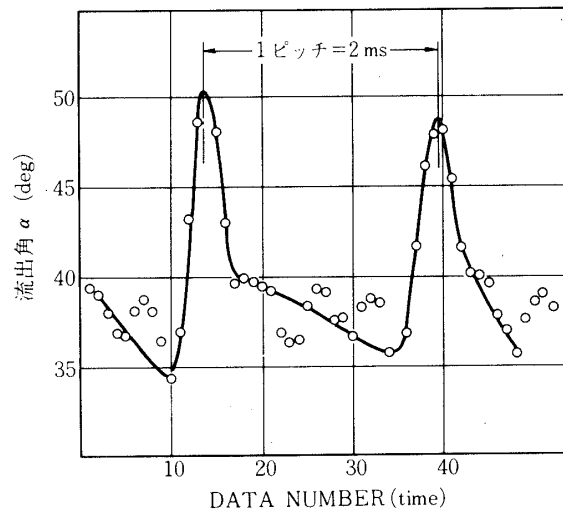
第8図 後流の流出速度 V の変化 ($L = 0.71$)



第9図 後流の軸方向速度 V_x の変化 ($L = 0.71$)



第10-a 図 後流の周方向速度 V_y の変化 ($L = 0.71$)

第10-b 図後流の流出角 α の変化 ($L = 0.71$)

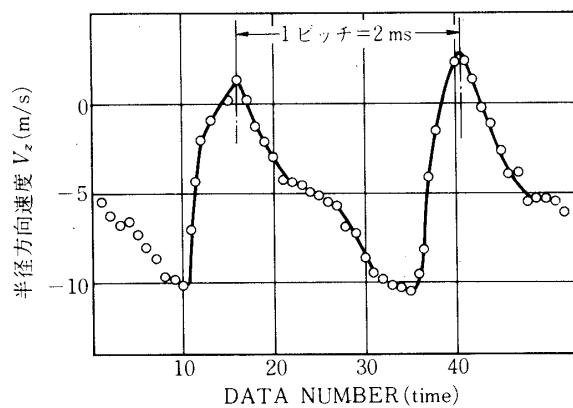
第10-b 図は、流出角 α （スワール角）の1ピッチ間の変化を示す。流出角 α の変化は、第10-a 図と傾向的には同様な変化を示している。

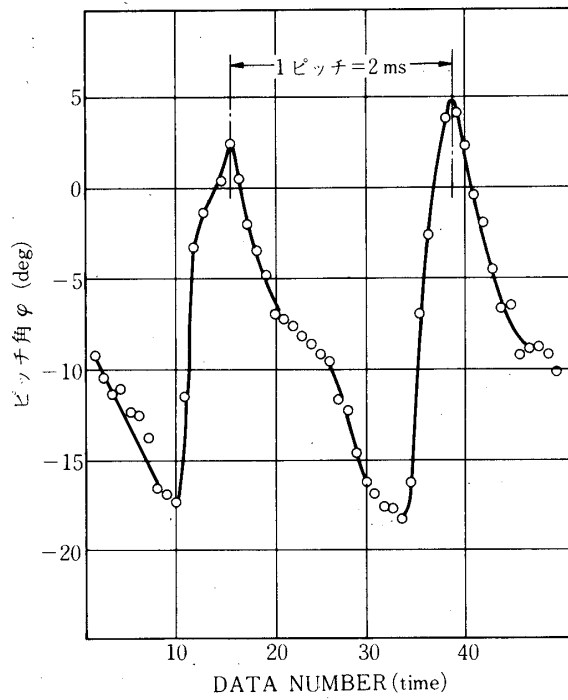
第11-a 図は V_z の分布図である。巨視的には第10-a 図に示す V_y の変化傾向に似ているが、 V_z の変化は V_y のみの影響ではなく、回転翼列の境界層の三次元流れをも含めて検討すべき現象と推測される。

第11-b 図はピッチ角 ϕ の変化図であるが、傾向は V_z と同じである。

4.3 後流の軸方向距離 L に対する減衰と拡散

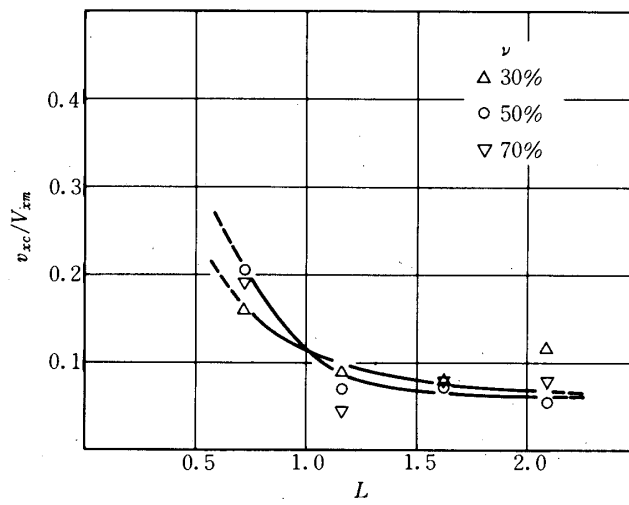
前4.2 節で動翼後流の流れの様相が明らかになったので本節では軸方向距離 L に対する後流の速度成分 V_x 、 V_y 及び V_z の減衰と拡散の様相について検討する。第6～11 図で示すよう

第11-a 図後流の半径方向速度 V_z の変化 ($L = 0.71$)

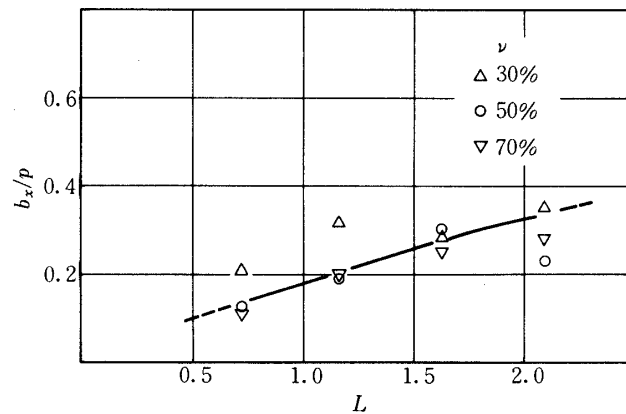


第11-b 図 後流のピッチ角 ϕ の変化 ($L = 0.71$)

に静止座標系での動翼近傍の後流の流れの方向は、主流の方向とは大きく異なっている。

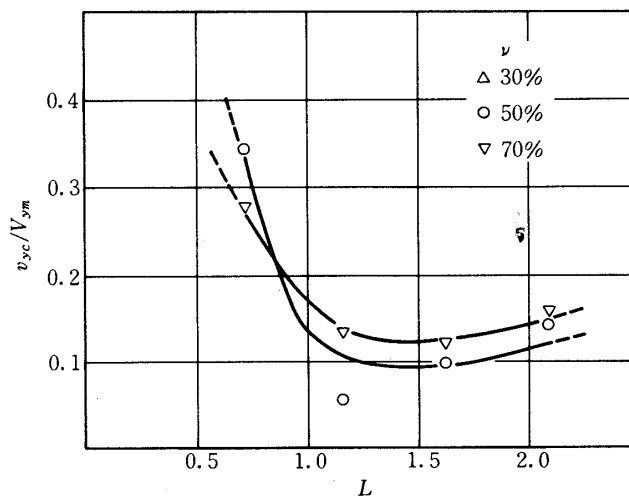


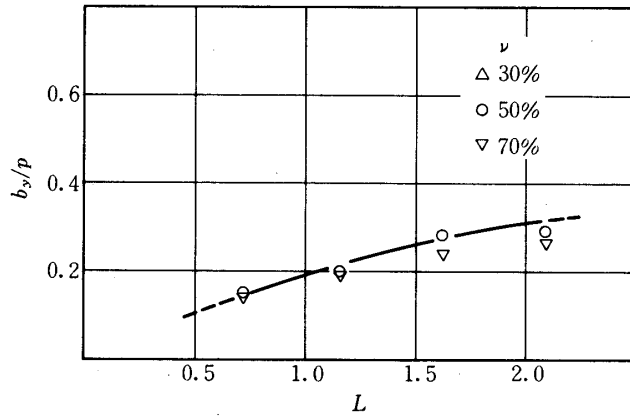
第12-a 図 v_{xc}/V_{xm} の L に対する減衰

第12-b図 b_x/p の L に対する拡散

第12-a, b図は後流の軸方向速度成分 V_x の軸方向距離 L に対する減衰及び拡散の様相を示している。横軸は L であり, a及びb図の縦軸は後流の無次元速度欠損 v_{xc}/V_{xm} (V_{xm} : 主流の平均軸流速度, $v_{xc}: V_{xm} -$ (後流の最小速度)) 及び後流の無次元半値幅 b_x/p (p : 翼列のピッチ幅, $b_x: v_{xc}/2$ 点の後流の幅) をそれぞれ表わしている。

a図の動翼近傍の v_{xc}/V_{xm} は動翼後縁では1.0近くであり, L の増加とともに v_{xc}/V_{xm} は急激に減少して $L=0.71$ では主流の軸流速度に対して20%程に減衰し, 更に大きい $L=1.2$ では8%程度となり, それより大きい L に対しては減衰が非常に緩やかになっている。

第13-a図 v_{yc}/V_{ym} の L に対する減衰

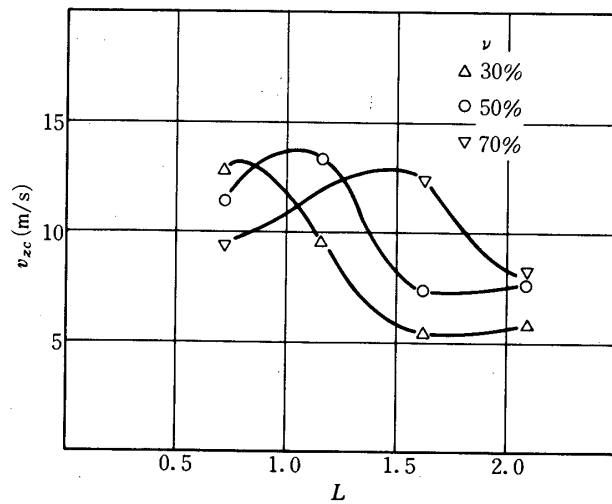


第13-b図 b_y/pのLに対する拡散

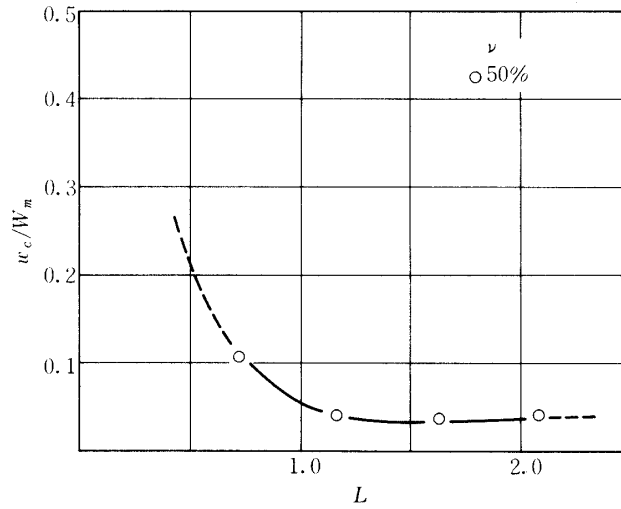
第12-b図の後流の半値幅 b_x/p は動翼後縁の近傍ではほぼ零であり、Lの増加とともに乱流混合過程により拡散が進み後流の幅 b_x/p も大きくなり、測定点 $L = 1.2$ では翼列のピッチ幅の20%に達し、更にLの増加とともに滑らかに b_x/p が大きくなっている。

第13-a, b図は後流の周方向速度成分 V_y のLに対する減衰と拡散の様相を示している。横軸はLであり、a及びb図の縦軸は後流の無次元周方向速度 v_{yc}/V_{xm} (V_{xm} : 主流の平均周方向速度, v_{yc} : (後流の最大周方速度) - V_{ym}) 及び後流の無次元半値幅 b_y/p (b_y : v_{yc}/V_{ym} 点の後流の幅) を表している。

a図の動翼近傍の v_{yc}/V_{ym} は、後縁の $L = 0$ では $v_{yc} \approx U$ で v_{yc}/V_{ym} はかなり大きな



第14図 v_{zc}のLに対する減衰

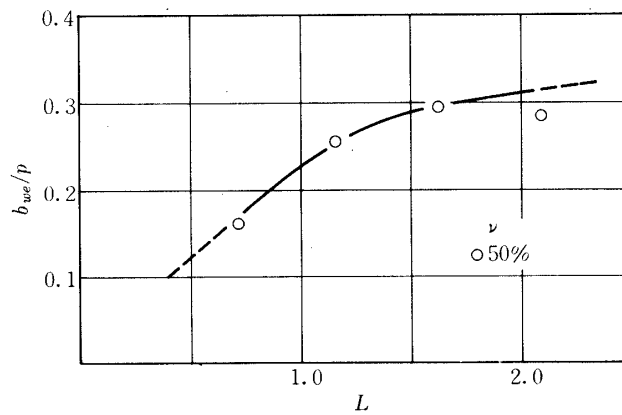
第15-a図 w_c/W_m の L に対する減衰

値となっていると考えられる。 L が増すとともに急激に減少して測定点 $L=0.71$ では平均主流の32%になり、 $L=1.2$ では13%となっている。更に L の大きな下流側では、徐々に平均主流速度に近づくものと推測できるが、本実験データでは流れの三次元性のためか僅かに v_{yc}/V_{ym} が大きくなっている。

第13-b図に示す b_y/p の軸方向に対する拡散傾向は、ほぼ b_x/p と同様な拡散を示している。

第14図は、半径方向速度成分 V_z の両振幅をとり L に対して変化する傾向を示している。 v_{zc} の軸方向に対する変化の様相は V_x や V_y の減衰の様相とはやや異なっているように見えるが、今回のデータのみではその詳細を論ずることはできないので今後の課題としておく。

第15-a及びb図は、動翼と共に回転する相対座標系での動翼後流の軸方向の変化の様相

第15-b図 b_{wc}/p の L に対する拡散

を示している。横軸はLであり、縦軸は後流の無次元速度欠損 w_c/W_m (W_m : 主流の平均相対流出速度, w_c : W_m - (後流の最小相対速度)) 及び後流の無次元半値幅 b_{wc}/p (b_{wc} : $w_c/2$ 点の後流の幅) をそれぞれ示している。

a図の動翼近傍の w_c/W_m は後線では1.0に近い値であり、Lが増すとともに急激に減少してL=0.71で主流の相対流出速度 W_m の10%程度まで減衰し、L=1.2では4%程度に達している。そしてそれより下流領域(Lの大きい領域)では w_c/W_m の減衰は非常に緩やかになっている。

このように、動翼後流の減衰の様相は相対座標系で見ても、動翼近傍の領域での減衰が比較的急でその後の減衰は緩やかな特徴を示しているように思われるが、その詳細は三次元性の影響も含め今後の研究課題である。

4. む す び

上流側動翼の粘性後流と下流側静翼列との干渉により生ずる騒音の発生機構を解明する手始めとして、回転する動翼列の三次元後流の構造を解明するために、Whitfieldの手法にならない、一本の傾斜形ホットワイヤを利用して、周期的に変動する三次元流れを計測するオンライン計測システムを完成した。

この計測システムを用い、動翼列単独の軸流ファンを使用し、動翼列後流について計測を行い、その減衰・拡散の様相について解析を行った。動翼後流は動翼下流側の静止空間においては後流内部の流れは主流に比して大きな周方向速度成分を持ち、且つ主流よりも大きな外向きの半径方向速度を持つことが明らかになり、その結果動翼後流の減衰過程は動翼近傍領域での減衰が比較的急で、その後、減衰はゆるやかになるなど今後の研究への示唆が得られた。

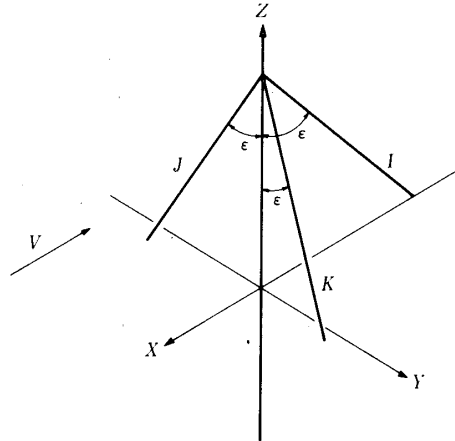
1979年1月17日 原動機部

参 考 文 献

- [1] 田中他4名: 試作軸流ターボファン騒音の発生とダクト内伝播, 東京大学宇宙航空研究所報告, 14-1(C), 1978年3月.
- [2] N. H. Kemp and W. R. Sears: The Unsteady Forces Due to Viscous Wakes in Turbomachines., Journal of the Aeronautical Sciences, 22, July 1955.
- [3] 梶, 岡崎: 翼列干渉に基づく発生音波の理論解析, 日本機械学会論文集, 37, 293, 昭和46年1月.
- [4] A. Silverstein, S. Katzoff and W. K. Bullivant: Downwash and Wake Behind Plain and Flapped Airfoils, NACA Rept. 651, 1939.
- [5] C. E. Whitfield, J. C. Kelly and B. Barry: A Three-Dimensional Analysis of Rotor Wakes., Aeronautical Quarterly 23, Part 4, November 1972.
- [6] J. Colpin and p. Kool: Experimental Study of an Axial Compressor Rotor Transfer Function with Non-Uniblow Inlet Flow., ASME publication, 78-GT-69, 1978.

[7] 安達, 村上: 翼列を通過する後流の速度分布とそれによる非定常力の研究, 日本機械学会論文集, 44, 388, 昭和53年12月.

付 録



付図A 風速に対するホットワイヤのI, J, K方向

付図Aは、傾斜形ホットワイヤと流速の相対位置を直角座標系X, Y, Zを用いて示している。ホットワイヤは回転支持軸中心線に対して傾斜角 $\epsilon = 54.7^\circ$ に長短両極針の先端部に張ってある。いま流れ方向と反対方向にX軸をとり、Z軸上に支持軸の軸心を一致させ、図示するように傾斜ホットワイヤを流れに向けてその位置をホットワイヤのI方向（上向きが正）とする。そのI位置を起点にして、反時計方向（負）に 120° 間隔で回転させそれぞれの位置をJ, K方向とすると、I, J, Kは互いに直交する。この幾何学的関係より、流速VのI, J, K方向の速度成分を V_i, V_j, V_k , それぞれに垂直方向の速度成分 v_i, v_j, v_k とすれば、

$$\vec{V} = \vec{V}_i + \vec{V}_j + \vec{V}_k \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{V}_j + \vec{V}_k \\ \vec{v}_j &= \vec{V}_k + \vec{V}_i \\ \vec{v}_k &= \vec{V}_i + \vec{V}_j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。(1), (2) 式より、

$$V^2 = \frac{1}{2} (v_i^2 + v_j^2 + v_k^2) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} V_i^2 &= \frac{1}{2}(-v_i^2 + v_j^2 + v_k^2) \\ V_j^2 &= \frac{1}{2}(v_i^2 - v_j^2 + v_k^2) \\ V_k^2 &= \frac{1}{2}(v_i^2 + v_j^2 - v_k^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。(3), (4)よりI, J, Kに対する流速Vの方向余弦をそれぞれ H_i, H_j, H_k とすれば,

$$\left. \begin{aligned} H_i &= -\left[\frac{1}{2}(-v_i^2 + v_j^2 + v_k^2)/V^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ H_j &= \left[\frac{1}{2}(v_i^2 - v_j^2 + v_k^2)/V^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ H_k &= \left[\frac{1}{2}(v_i^2 + v_j^2 - v_k^2)/V^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。X, Y, Z軸に対するI, J, Kの方向余弦をそれぞれ $(\beta_{xi}, \beta_{xj}, \beta_{xk}), (\beta_{yi}, \beta_{yj}, \beta_{yk}), (\beta_{zi}, \beta_{zj}, \beta_{zk})$ とすると, 流速VのX, Y, Z方向の速度成分 V_x, V_y 及び V_z は,

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \beta_{xi} & \beta_{xj} & \beta_{xk} \\ \beta_{yi} & \beta_{yj} & \beta_{yk} \\ \beta_{zi} & \beta_{zj} & \beta_{zk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。従ってI, J, Kの垂直方向速度成分 v_i, v_j, v_k が検出されれば三次元流れの計測が可能となる。