

円筒容器内渦崩壊現象のフル三次元シミュレーション

山田健翔, 鈴木宏二郎
東京大学

Full 3D simulation of vortex breakdown in closed cylinder with rotating bottom

by
Kento Yamada, and Kojiro Suzuki

ABSTRACT

Because of the singularity of the center axis, there is difficulty to accurately simulate a flow close to the axis. Vortex breakdown is known as a typical phenomenon, which takes place near the axis, and then, it is significantly important to resolve the flow around the axis. In this paper, a fully three-dimensional incompressible flow was simulated in a cylindrical coordinate system by a staggered mesh without artificial viscosity. In such a configuration, solving a radial momentum equation on the axis is required but it has singularity on the axis. Here, the singularity was removed by L'Hospital's rule and the radial momentum equation was solved on the axis. In order to prevent the radial velocity component on the axis from a multi-value function, single-valued-reconstruction was applied. Under these considerations, a swirling flow in a closed cylinder with a rotating bottom was numerically simulated and the flow structure of a vortex breakdown, which was a bubble type, was examined. Although our result showed non-zero velocity in the radial direction on the axis, it reduced to a machine zero as the continuity equation converges. At last, it was shown that the topology of a bubble-type vortex breakdown lead to that of an axisymmetric spherical vortex (a spheromak).

1. はじめに

渦崩壊現象は縦渦に見られる流体现象の一つであり、可視化実験の結果から崩壊にはいくつかのパターンが存在することが知られている¹⁾。その内最もシンプルなのはバブル型渦崩壊であり、その流線の構造は図1のように示され、縦渦の回転軸上に淀み点対と再循環領域(以下バブル)が形成される。近年、このバブルを介した流体のやりとりが、流体の閉じ込めへの応用といった観点から注目されている²⁾。それには再循環領域周りの流線のトポロジーを解明する必要がある。

円筒容器内に密閉された流体を考える。底面の一つを回転させると、円筒容器の中心軸に沿って縦渦が形成される。この流れ場は容器のアスペクト比(=高さと半径の比)と回転数で無次元化されたレイノルズ数によって支配され、あるパラメータの領域で渦崩壊現象が存在することが実験的に知られている³⁾。Escudierは図2に示すような渦崩壊現象の発生領域を前述のパラメータ空間にプロットしている³⁾。図に示されるように、この渦崩壊現象には定常状態が存在し、最大3個のバブルが軸に沿って現れる。その際に発生するバブルは高い軸対称性を持つことが知られている。

バブル型渦崩壊に伴う再循環領域のトポロジーの解析

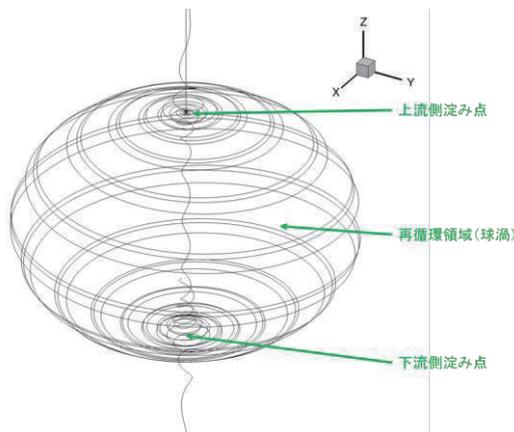


図1 バブル型渦崩壊現象の構造

はいくつかの試みがなされている。軸対称性の仮定の下では、図3に示されるように、再循環領域の内部と外部は dividing streamline によって仕切られており、球殻状の spheromak (球渦) を形成することが力学系理論の観点から示されている^{4,5)}。この球渦は非軸対称な擾乱に対して非常に敏感であることが理論的な観点から知られている⁶⁾。実験では回転軸の微小なずれなどがトポロジーを大いに乱す原因と考えられており⁷⁾、数値計算でも回転軸周りをデカルト座標で格子形成を行った場合は、球渦のトポロジーが乱される結果が得られているが⁸⁾、これに対しては回転流れをデカルト座標で解く際に周方向の変動が正確に評価されない点が指摘されている⁹⁾。

本研究では、円筒容器内の渦崩壊現象について、円筒座標表示の非圧縮ナビエ・ストークス方程式をスタガード格子において直接離散化することで離散化誤差を極力排し、また離散化手法についても中心差分法のみを適用することで人工粘性の影響も排した数値計算を行い、軸対称性を仮定しない流れ場での定常なバブルのトポロジーについて考察を行う。その際に半径方向速度について軸上の値を算出することが求められるが、本研究では軸上の運動方程式を解くことでその値を与える。

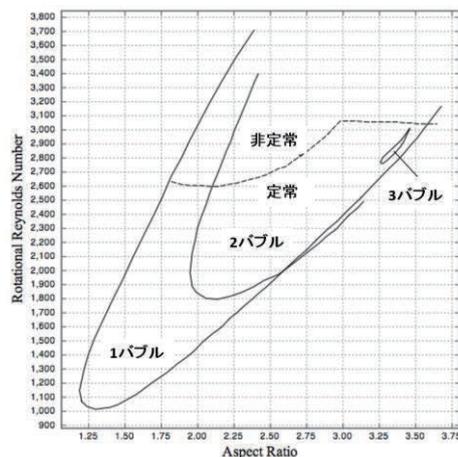


図2 円筒容器内流れのバブル発生領域

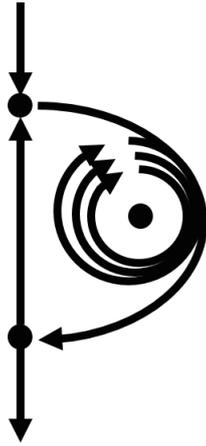


図3 軸対称バブルのトポロジー

2. 数値的解法

円筒座標表示の非圧縮性流体の支配方程式は以下のよう
に書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

これをスタガード格子で離散化することを考える。極座標を含むスタガード格子は図4のように示される。図4上部に示されるようなスタガード格子は、図4下部に示される計算空間に書くことが出来、青色で示される速度成分は周期的な条件から値を計算する必要がない場所を表している。図の配置に従って離散化を行う際に半径方向速度の軸上での値が必要となるが、軸の特異性から運動方程式をそのままの形で解くことはできないため、周辺の半径方向速度から補間を行う方法や¹⁰⁾、軸上の周方向速度から幾何学的な関係を用いて一意な半径方向速度を求める方法や¹¹⁾、ロピタルの定理などを用いて特異性を回避した運動方程式を解く方法がある¹²⁾。本研究においては、ロピタルの定理を用いて特異性を回避した以下の方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

ここで周方向の対流項には角速度が導入されている。この方程式についても他の場所と同様の離散化を施すことが可能だが、その際周方向に180度回転した場合の離散化式について元の式と整合性が保たれるよう注意する必要がある。幾何学的な条件から速度ベクトル及び圧力については次のような関係式が存在する。

$$u(-r, \theta, z) = -u(r, \theta + \pi, z) \quad (6)$$

$$v(-r, \theta, z) = -v(r, \theta + \pi, z) \quad (7)$$

$$w(-r, \theta, z) = w(r, \theta + \pi, z) \quad (8)$$

$$p(-r, \theta, z) = p(r, \theta + \pi, z) \quad (9)$$

式(6)、(7)より、式(5)を離散化する際に、整合性を保つにはもう一つ以下のような条件が必要となる。

$$r(-r, \theta, z) = -r(r, \theta + \pi, z) \quad (10)$$

この条件は一見目新しく感じられるが、式(5)で導入された角速度について同様の条件を考えると、これは自然な条件であることが判明する。周方向速度の軸をまたいだ条件式が式(7)で与えられる一方、角速度は以下のような条件式で結ばれると考えられる。

$$\omega(-r, \theta, z) = \omega(r, \theta + \pi, z) \quad (11)$$

角速度は周方向速度を半径で割ることによって得られることから式(7)と式(11)より式(10)は自然に導かれる。以上から、式(5)に対しても補間型中心差分法及び通常中心差分法が自然に適用できるとわかる。

また式(5)はそれぞれの角度について解かれるため、そのままでは半径方向速度が多価関数になってしまう。したがって、以下のように各半径方向速度について和を取り平均化する手法によって¹²⁾、軸上の値の一意性を保証している。

$$U = \frac{2}{N_\theta} \sum_{k=0}^{N_\theta-1} u(0, \theta_k, z) \cos \theta_k \quad (12)$$

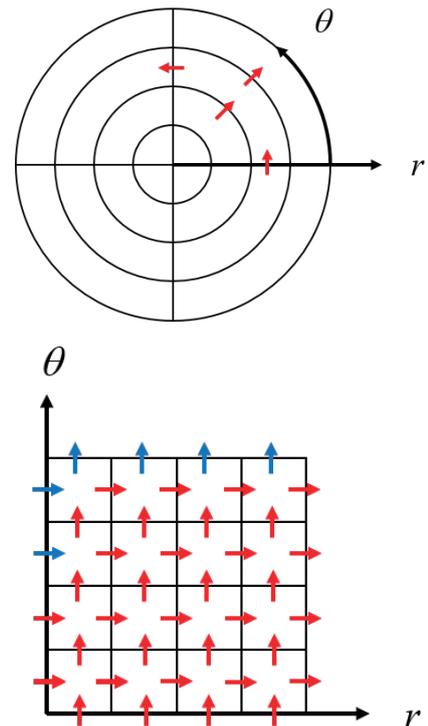


図4 極座標におけるスタガード格子

$$V = \frac{2}{N_\theta} \sum_{k=0}^{N_\theta-1} u(0, \theta_k, z) \sin \theta_k \quad (13)$$

$$u(0, \theta, z) = U \cos \theta + V \sin \theta \quad (14)$$

計算法には SMAC 法を採用した¹³⁾。時間積分法については、予測速度を導出する段階では対流項に三次精度アダムス・バッシュフォース法を、粘性項に二次精度クランク・ニコルソン法を適用し、圧力ポテンシャルを解く段階では、周方向に四次の実効波数を持つフーリエ変換を施したポアソン方程式を緩和係数 1.2 の SOR 法によって解いており、求めたポテンシャルから一次精度陽解法を用いて速度を修正している。対流項の離散化手法には二次精度補間型中心差分法を用いることでチェッカーボード不安定を防ぎつつ中心差分を維持しており¹⁴⁾、その他の項には通常の二次精度中心差分法を用いた。

境界条件については、回転壁を剛体回転として、その他の壁を滑り無し条件、軸上については周方向速度、軸方向速度、圧力ポテンシャルを、軸をまたいで反対側の値を境界値として与えている。

3. 結果および考察

前章で述べた通り、本研究では円筒容器内の渦崩壊現象を再現する。この流れは詳細な実験データが存在し、³⁾数値計算も実験結果とよく一致することが知られている。¹⁵⁾著者らも軸対称流れの数値計算において実験結果と極めて良好な一致を得ており⁵⁾、本計算は軸対称流れにおける計算結果と比較することで検証を行う。今回計算するケースはレイノルズ数 1080、アスペクト比 1.5 の場合で、ほぼ球状の再循環領域が形成される定常解が存在する。格子数は半径方向に 256 点、周方向に 64 点、高さ方向に 384 点の等間隔格子（約 600 万点）で、CFL 数は 0.8 を超えない値に設定している。

図 5 には本研究で計算された結果と、著者らが以前軸対称計算によって得た結果⁵⁾を示している。図 5 上部は中心軸に沿って形成される縦渦近傍の三次元流線と、圧力ポテンシャルの等高線図の Y=0 断面図が示されている。流線からは縦渦の回転軸に沿って球状の再循環領域が形成されている様子が見られている。一方、図 5 下部は軸対称二次元流線と圧力ポテンシャルの等高線図が示されており、同様に再循環領域が縦渦の回転軸に沿って形成されているようすが見て取れる。両者を比較すると、再循環領域の位置やサイズ、圧力ポテンシャルの値域と等高線図は良い一致を示している。計算結果の速度の発散は $O(10^{-11})$ という充分小さい値まで収束しており、その収束に伴い軸上の半径方向速度も小さくなっていくという結果が得られている。最終的な段階における速度の発散と軸上の半径方向速度の最大値を表 1 にまとめた。

この計算結果についてバブルの詳細な構造を把握するため、図 6 に速度ベクトル場を時間積分して得られた結果を示す。この曲線はバブルの上流から放たれた非拡散粒子の挙動を表しており、図に見られる通り、長時間の積分の後でも実験結果のような非軸対称的な擾乱の影響が確認されることはなく、バブルの外に流線が出てくる様子もなかった。これにはわずかながら速度の発散が真に零でないことが影響していると考えられるが、速度の発散の収束からみてその影響は非常に小さい。また、発散

表 1 無次元時間 $t=1800$ における諸量

セル当たりの速度の発散	2.00×10^{-11}
軸上の半径方向速度の最大値	1.37×10^{-12}

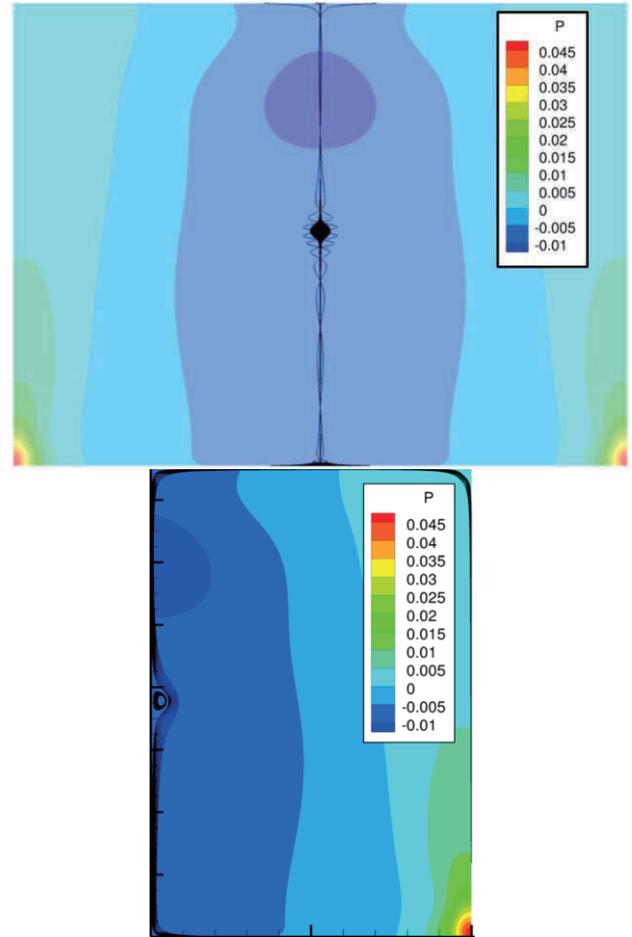
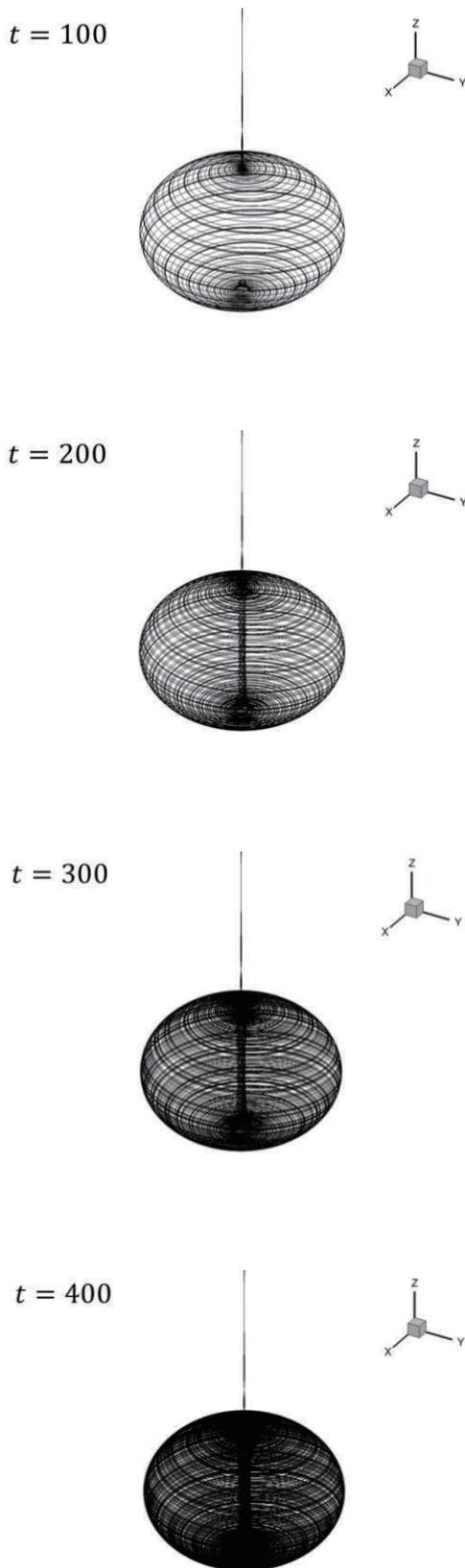


図 5 三次元計算結果と軸対称計算結果⁵⁾の比較

の収束に伴い軸上の半径方向速度の値も小さくなることから、三次元バブルのトポロジーは最終的には完全な軸対称球渦へと近づいていくと考えられる。この結果はバブルの発生直後であるため、バブルが次第に大きくなるにつれてバブルのトポロジーの軸対称性に破れが見られるかについては、今後の更なる調査が期待される。

4. 結論

円筒容器内の渦崩壊現象について、軸対称性の仮定のない流れ場に生じるバブル型渦崩壊のトポロジーを数値的に解析し、考察を行った。計算には、円筒座標表示の非圧縮性ナビエ・ストークス方程式をスタガード座標で離散化したものを用い、特異性が現れる中心軸上の半径方向運動方程式については、ロピタルの定理を用いて特異性を排除した。計算結果は著者らの軸対称計算の結果と比較・検証され、バブルの位置、大きさ共に非常に良い一致を示した。軸対称性の破れを示唆する軸上の半径方向速度については、速度の発散の収束と共に減少の傾向にあり、また、速度の発散より一桁小さい値となっていた。結果として、バブルのトポロジーに非軸対称擾乱による球渦の乱れは確認されず、最終的な状態は軸対称球渦のトポロジーが確認されると結論付けられた。本論文で計算されたケースはバブルが発生し始める領域であり、バブルのサイズも小さい。バブルが大きくなっていったときに非軸対称擾乱の影響がどのように変化していくかについては、今後の更なる調査が期待される。



参考文献

- 1) Sarpkaya, T., "On stationary and travelling vortex breakdowns," *J. Fluid Mech.*, 1971, pp. 545-559.
- 2) Ault, J. T., Fani, A., Chen, K. K., Shin, S., Gallaire, F., and Stone, H. A., "Vortex-Breakdown-Induced Particle Capture in Branching Junctions," *Phys. Rev. Letter*, 2016.
- 3) Escudier, M. P., "Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall," *Exp. Fluid*, 1984, pp. 189-196.
- 4) Brøns, M., Voigt, L. K., and Sørensen, J. N., "Streamline topology of steady axisymmetric vortex breakdown in a cylinder with co- and counter-rotating endcovers," *J. Fluid Mech.*, 1999, pp. 275-292.
- 5) Yamada, K., and Suzuki, K., "Dynamical System Analysis on the Onset of Recirculating Flow Region Associated with Vortex Breakdown," *46th AIAA Fluid Dynamics Conference*, 2016, 2016-4347, Washington, D.C.
- 6) Guckenheimer, J., and Holmes, P., "*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*," Springer-Verlag, 1983.
- 7) Spohn, A., Mory, M., and Hopfinger, E. J., "Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc," *J. Fluid Mech.*, 1998, pp. 73-99.
- 8) Sotiropoulos, F., and Ventikos, Y., "The three-dimensional structure of confined swirling flows with vortex breakdown," *J. Fluid Mech.*, 2001, pp. 155-175.
- 9) Ruith, M. R., Chen, P., and Meiburg, E., "Development of boundary conditions for direct numerical simulation of three-dimensional vortex breakdown phenomena in semi-finite domains," *Computer & Fluids*, 2004, pp. 1225-1250.
- 10) 竹内伸太郎, 三宅裕, 梶島岳夫, 青木誠司, "円形ノズルからの乱流噴流の直接シミュレーション" 日本機械学会論文集, 1999.
- 11) Fukagata, K., and Kasagi, N., "Highly energy-conservative finite difference method for the cylindrical coordinate system," *J. Comp. Phys.*, 2002, pp. 478-498.
- 12) Morinishi, Y., Vasilyev, O. V., and Ogi, T., "Fully conservative finite difference scheme in cylindrical coordinates for incompressible flow simulations," *J. Comp. Phys.*, 2004, pp. 686-710.
- 13) Chorin, A. J., "A numerical method for solving incompressible flow problems," *J. Comp. Phys.*, 1967, pp. 12-26.
- 14) 梶島岳夫, "乱流の数値シミュレーション" 養賢堂, 1999.
- 15) Lopez, J. M., "Axisymmetric vortex breakdown Part 1. Confined swirling flow," *J. Fluid Mech.*, 1990, pp. 533-552.

図6 バブル近傍の流れ場の構造