

Hadamard Transform X-ray Telescope*

宮 本 重 徳**・常 深 博**・津 野 克 彦**

Hadamard Transform X-ray Telescope*

By

Sigenori MIYAMOTO, Hiroshi TSUNEMI
and Katsuhiko TSUNO

Abstract: The characteristics of the Hadamard transform x-ray telescope (HTXT) are investigated theoretically and experimentally. Comparing its characteristics with a pin hole camera with the same detector area, the signal to noise ratio is better in the case that spurious counts are predominant over the counts due to x-ray image. If the positional resolution of the position sensitive detector is poor, the reconstructed image is obscured by just the same amount as the image that would be obtained by the pin hole camera with the same position sensitive detector. In the case that some parts of the detector malfunctioned and some data are lost, X-ray image can be reconstructed by substituting the mean value of the observed data to the lost data. Even if an x-ray image can not be seen by some part of the detector, the x-ray image can be reconstructed by usual Hadamard transformation method.

An Hadamard transform x-ray telescope is constructed and its operational features are investigated experimentally. The Hadamard mask is made by the photo etching technique. The rise time method proposed by Borkowski and Kopp is employed to get the positional information from the multiwire proportional counter. The HTXT functioned well and the results show the validity of this telescope in x-ray astronomy.

序 論

X線天文学はロケットによるおおざっぱな観測から、衛星などを中心とした精密観測の時代に入った。X線天文学での重要な精密観測のテーマは、高精度のX線エネルギースペクト

* 宇宙研特別事業費による研究論文

** 大阪大学理学部

ル及びその時間変化の観測，ならびに高分解能空間構造の観測であろう．X線エネルギースペクトルの観測装置は従来の比例計数管（PC）から蛍光比例計数管（SPC）へと発展し，そのエネルギー分解能は約2倍程度改善された[1]．さらに半導体検出器，ブラッグ結晶などを利用した装置も実用化しはじめている．一方，高分解能空間構造の観測は，ミラーによって数分角から数秒角の精度で行なわれるようになった．ミラー系ではその臨界角が高エネルギーX線で大変小さくなるため，低エネルギーX線領域（ $\lesssim 3$ keV）に使用が限られる．高エネルギー領域では著しく有効面積が小さくなり，実用には向かないであろう．又，X線のエネルギーとX線のミラーへの入射角によって反射率が異なるため，広視野にわたりエネルギースペクトルに偏りのないX線像を得ることは困難であろう．ここで述べる Hadamard Transform X-ray Telescope（HTXTと略す）は特殊なマスクと位置検出型比例計数管を用いてX線像を求める装置で，前述したミラー系での欠点はない．又，広視野で同時に多くのX線源の時間変動を観測できるという利点をもっている．この性質は，X線バースト源の発見とその時間変動の観測に適していると考えられる．以下で，現在我々のグループが開発を進めているHTXTについてその原理・現状を述べる．

HTXTの原理

ミラーの使えないようなX線のエネルギー領域で空間像を得る方法として，Dicke [2] の提唱したランダム ホール カメラがある．HTXTとは，このランダム ホール カメラを理想化したものといえる．以下では，このランダム ホール カメラに代表されるマスクを使った望遠鏡について説明し，一次元のHTXTの原理を述べる．

マスクを使った望遠鏡とは図1に見られるようにX線の空間像をあるマスクを通して，位

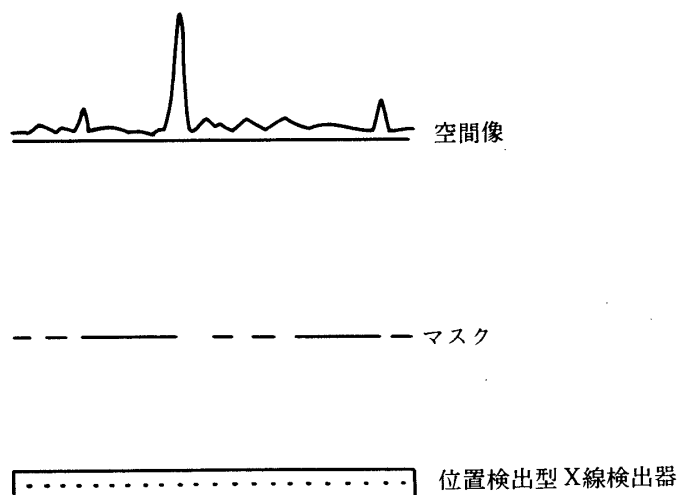


図1 HTXTとは位置検出型X線検出器の前にHadamardマスクをおき，これを通してX線の空間像を観測し，得られたデータを処理してもとの空間像を再現するものである．

置検出型検出器で観測し，得られたデータから空間像を推定するものである．このとき，種々のマスクが考えられるが，検出器の有効面積，全視野及び空間分解能，観測時間を決めたときにどのマスクが最良であるかを以下で述べる．いまもとの一次元像を \mathbf{X} ，観測データの期待値を \mathbf{Y} ， \mathbf{X} と \mathbf{Y} とを結ぶマスクを行列 M で表す．

$$\mathbf{Y} = M\mathbf{X} \quad (0 \leq M_{ij} \leq 1) \quad (1)$$

即ち与えられた視野を N コの部分に分け，空間像を N 次元ベクトル \mathbf{X} で表す．これを観測するため位置検出型X線検出器も N コの部分に分け，得られる N コの独立なデータを N 次元ベクトル \mathbf{Y} で表す．ここで \mathbf{Y} の各要素はデータの光子数そのものを表し $*$ ，実際に得られるデータはPoisson分布に従うものとする．即ち，実際に得られるデータは fluctuation \mathbf{N} を含んだ $\mathbf{Y} + \mathbf{N}$ であり， $\langle n_i^2 \rangle = y_i$ ， $\langle n_i \rangle = 0$ とする．マスクを使った望遠鏡は $\mathbf{Y} + \mathbf{N}$ から \mathbf{X} の推定像 \mathbf{Z} を得ようとするものである．ここでは \mathbf{Z} を $\mathbf{Y} + \mathbf{N}$ の一次形式で推定すること限定する（線形推定，重ね合せの原理のなりたつことを考えれば当然であろう）．つまり $\mathbf{Z} = H(\mathbf{Y} + \mathbf{N})$ と考える．又，十分多数回の観測によれば， $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}$ になるべきことも当然であろう（不偏性）．

これらの条件を満たすものとしては， H として M の逆行列を採用すればよい．これだけの条件からでは M を決定することはできない．例えばピンホールカメラ，波数をまびかないMPMC [3]などもこの条件を満たす．以上の条件の他に \mathbf{Z} の分散を最小にするという条件（最適性）を考えよう． \mathbf{Z} の分散を $\text{Var}(\mathbf{Z})$ とすると

$$\text{Var}(\mathbf{Z}) = \langle (\mathbf{Z} - \mathbf{X})(\mathbf{Z} - \mathbf{X})^t \rangle = \langle H\mathbf{X}\mathbf{X}^t H^t \rangle$$

となり $\langle \mathbf{X}\mathbf{X}^t \rangle$ が H によらず一定であるならば

$$\text{Var}(\mathbf{Z}) \sim HH^t = (M^t M)^{-1} \text{ となる.} \quad (2)$$

さらに $0 \leq M_{ij} \leq 1$ のもとに $(M^t M)^{-1}$ を最小にする M があれば，最適マスクであると言える．以上，最適性，線形性及び不偏性を兼ねそなえた推定の方法をBest Linear Unbiased Estimate (BLUE) という [4]．

ここで行列 $\text{Var}(\mathbf{Z})$ を最小にするというにはいくつかの方法が考えられる． Z_i の各誤差の平方和，即ち $\text{Var}(\mathbf{Z})$ の対角成分の和を最小にする方法， $\det |\text{Var}(\mathbf{Z})|$ を最小にする方法， $\text{Var}(\mathbf{Z})$ の対角成分中の最大要素を最小にする方法などが考えられるが，どの場合も同じ結果を与える [4]．もちろん Hadamard Matrix からつくられる Hadamard - mask がここでいうBLUEになっており，このマスクを使ってHTXTが作られるわけである．

Hadamard mask の具体例

いま n 次の正方行列で，i) 各要素は+1又は-1であり，ii) $H_n^t H_n = H_n H_n^t = n I_n$

*このとき \mathbf{X}_i は位置検出型X線検出器の有効面積を A としたとき A/N の面積に入射するX線源 \mathbf{X}_i よりのX線のカウント数に相当する．

(I_n は n 次の単位行列)であるならばこれを Hadamard matrix という [4]. このうち第1行, 第1列がすべて+1であるような行列を normal form の Hadamard matrix, 第1行, 第1列を除いた $n-1$ 次の正方行列 H_c を Hadamard matrix の core という. この H_c が cyclic になっているものを cyclic Hadamard matrix というが, この行列を用いて HTXT で使用するマスクをつくる. $M=M_H=-\frac{1}{2}(H_c-U)$, (U はすべての元が1である $n-1$ 次の行列)とすれば M_H は1と0とからなる $n-1$ 次の行列である.

$M_H H_c = -\frac{n}{2} I_{n-1}$ であるから M_H の逆行列は H_c 自身であると考えてよい. M_H の一行をとりその要素が1であれば穴をあけ, 0であれば穴をあけないようにマスクを作り2組並べると HTXT のマスクが作られる. (実際には2組-1コでよい). 検出器は $n-1$ コの要素に分け, 各要素はスラツ コリメーターなどで視野を制限し, マスクのうち1サイクル分($n-1$ コ)の要素を通して空を見るようにする. こうすれば, 検出器上の各要素は, 式(1)に従ったマスクを通して空を見ることになる(但し, $N=n-1$ である) [5].

二次元の HTXT のマスクを作るには図2のように二次元位置検出器の前に一次元と同様にマスクをおく. 但し, マスクのパターン配列は図2に示すように二次元的 cyclic になるように配置する. 検出器は各々小さい部分に分け, 各部分からデータ Y の1要素が得られることになる. つまり Y の要素は二次元的におりたたまれて検出器上に配置される. 次に, 各部分はスラツ コリメーターなどでマスクのうち1サイクル分($n-1$ コ)の要素だけを通して空を見るようにする. 検出器の各部分は, 一要素分だけがずれた一サイクル分のマスクを通して同じ空を見ることになる. こうして二次元の HTXT が可能になる [6].

Hadamard mask の作り方

H_c はその一つの行又は列さえ求めれば, これを cyclic に並べることにより作ることができる. この一つの行の大きさが 2^p-1 のとき, この行は+1, -1の PN sequence になっており, この 2^p-1 次の PN sequence は P 次の原始多項式から容易に作ることができる [7]. P 次の原始多項式から 2^p-1 次の PN sequence を作る方法を図3に示す. 一般に原始多項式を求めるのは難しいが, 文献 [8]には127次までの原始多項式が示されている.

$2^{2p}-1=(2^p-1)(2^p+1)$ であるから 2^p 次の原始多項式からつくられる PN sequence はほとんど正方形の二次元 Hadamard mask に並べることができる. 一連の PN sequence を二次元的に並べるには, 縦から並べるか, 横から並べるかの方法が考えられるが, そのどちらがよいかは結果から判断する. 一般に, 二次元配置にするとほぼでたらめに穴があくのでマスクの機械的強度が弱くなるが, 並べ方を選べば図4にみられるように一方向に穴の全くあいていないサポートのできることが多い. 我々はこのようにして作ったマスク(0.1 mm 厚ステンレス)を使って振動試験を行い, ロケットの飛翔に耐えることを確かめた. このようなサポート(一種の周期性と考えられる)は PN sequence のもつある規則性と考えられる. このサポートは, 原始多項式のえらび方やならべ方でできることが多い.

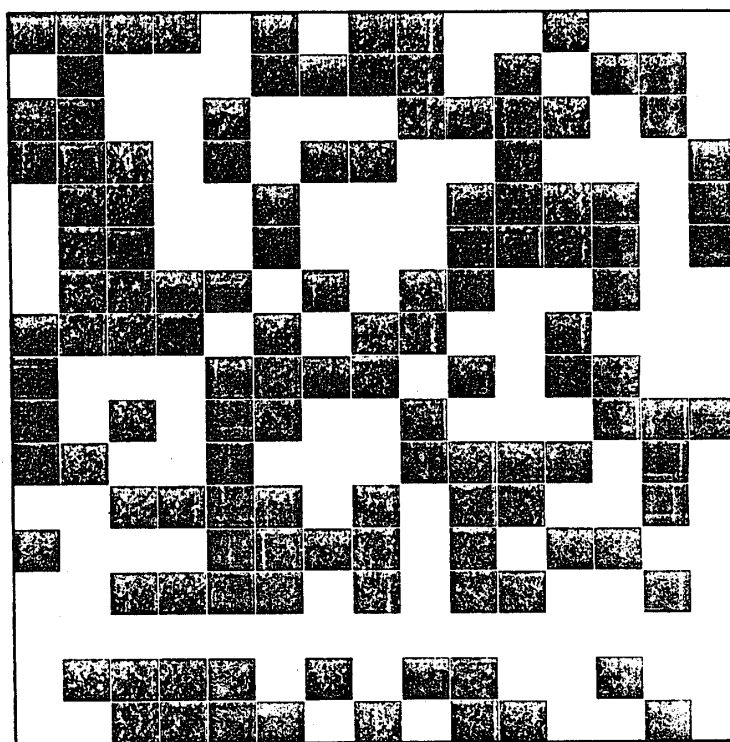


図4 8次の原始多項式から図3に示した方法で作ったPN sequence (255次)に従って作った Hadamard マスク. 255コの要素は15×17の二次元的配列に並べてある. 穴(黒い部分)はほぼでたらめに全体に散らばるが左から3列目は全く穴のないサポートとなっている. 二次元的配列をうまくすればこのようにサポートのできることが多い.

HTXTの特徴

以下では, マスクを使った望遠鏡としてのHTXTをピンホールカメラと適宜対比させその特徴を調べよう.

HTXTは前述のように $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ のときデータ $\mathbf{Y} + \mathbf{N}$ から \mathbf{X} の推定像 \mathbf{Z} を $\mathbf{Z} = \mathbf{H}(\mathbf{Y} + \mathbf{N})$ と推定するものの一つである. ここでHTXTの場合には $\mathbf{M} = \mathbf{M}_H$ であり

$$\mathbf{H} = -\frac{2}{n} \mathbf{H}_c, (N = n - 1) \text{ である.}$$

・誤差の評価

推定像 \mathbf{Z} の分散は

$$\mathbf{Z}_i - \mathbf{x}_i = \sum_j (\mathbf{H})_{ij} \mathbf{n}_j \quad (3)$$

より $\langle (\mathbf{Z}_i - \mathbf{x}_i)^2 \rangle = \langle \sum_{j,l} (\mathbf{H})_{ij} \mathbf{n}_j (\mathbf{H})_{il} \mathbf{n}_l \rangle$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_j (H_c)_{ij}^2 \langle n_j^2 \rangle \quad (\because \langle n_i n_j \rangle = \langle n_i^2 \rangle \delta_{ij}) \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_j y_j \quad (\because (H_c)_{ij} = \pm 1, \text{ Poisson を仮定すれば } \langle n_j^2 \rangle = y_j) \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{j,k} M_{jk} x_k \\
&= \frac{2}{n} \sum_k x_k \equiv 2X \tag{4}
\end{aligned}$$

となる。但し、 $X \equiv \frac{1}{n} \sum_k x_k$ とする。このことから第 i 番目の要素につく誤差の平方は X の各要素の平均 (の 2 倍) であることがわかる。特に各要素につく誤差の大きさは各要素の値を直接反映することはないということに注意しよう。さらに、各要素の誤差の平方の総和は $\sum_i \langle (x_i - Z_i)^2 \rangle = 2 \sum_k x_k$ となるから、Poisson 統計に従う限り、誤差の平方の総和は HTXT もピンホールカメラも (2 倍の差はあるが) 同程度になる。ピンホールカメラの場合 M は単位行列であるので、入射光子数についていえば HTXT の方がはるかに多いことになる。それにもかかわらず両者の誤差の総和がほとんど等しくなるので、HTXT で得た多数の光子が統計にどう反映しているかを以下で述べる。

得られた推定像 Z のうち統計をよくするためなどで、 P コの要素をまとめる。このときまとめた要素につく誤差の平方は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\langle \left(\sum_i^p Z_i - \sum_i^p x_i \right)^2 \rangle &= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \langle \left(\sum_{ij} (H_c)_{ij} n_{ji} \right)^2 \rangle \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \langle \sum_m \sum_{jm} (H_c)_{im} n_{jm} \sum_l \sum_{kl} (H_c)_{il} n_{kl} \rangle \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{m,l} \sum_{jm} (H_c)_{il} n_{jm} n_0^2 \quad (\text{但し } \langle n_i n_j \rangle = n_0^2 \delta_{ij} \text{ とした}) \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \left(\sum_{m=l} + \sum_{m \neq l} \right) (H_c)_{im} n_{jm} (H_c)_{il} n_{jm} n_0^2 \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \{ PN - (p^2 - p) \} n_0^2 \\
&= \frac{2p(N-p+1)}{N+1} X \quad (\text{但し } n_0^2 = \langle y_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_k x_k = \frac{n}{2} X \text{ とした}) \\
&= \frac{N-p+1}{N+1} \cdot 2pX \tag{5}
\end{aligned}$$

つまり Z_i は互いに独立ではないので、そのうちの P コを加えあわせてもその誤差は平方和で大きくならないことがわかる。ピンホールカメラの場合には Z_i は各々独立であるから、上述の場合誤差は平方和で大きくなる。この差がファクター $(N-P+1)/N$ である。 P

$= 1$ なら (各要素をまとめない) H T X T もピンホールカメラも S/N の点では同等と考えられる. H T X T で大変興味深いのは $P = 1$, N の場合に同じ誤差を与えるということである.

次に S/N 比について考えよう. このとき x_i の値によって S/N 比は変化するであろうから $x_i \equiv X$ と見なそう. P コの要素をまとめたときの S/N 比 $(S/N)_P$ は次のようになる.

$$(S/N)_P = PX / \sqrt{\frac{N-P+1}{N+1} \cdot 2PX} = \sqrt{\frac{(N+1)PX}{2(N-P+1)}} \quad (6)$$

$P = 1$ なら $(S/N) = \sqrt{X/2}$ となりピンホールカメラの場合と ($\sqrt{2}$ を除いて) 同じになる. 一方 $P = N$ で $(S/N) = \sqrt{X/2}$ となり N 倍よくなるが, ピンホールカメラで \sqrt{N} 倍しかよくならない. これらが各々の全カウント数の Poisson 統計になっていることはいうまでもない.

以上のことから与えられた面積の検出器で, 与えられた視野を, 与えられた空間分解能で観測する方法としては次の二つの方法が考えられる. a) 与えられた分解能になるようにマスクをつくり観測する. b) 与えられた分解能より P 倍細かい分解能で観測し, 得られたデータを P コずつまとめる. b) の場合のデータの数 $N (= PN')$ (N' は a) の場合のデータの数) とし, これに対応する空の像を \mathbf{X} (但し $x_i \equiv X$ とする) とする. これらを P コずつまとめたデータの (S/N) 比 $(S/N)_b$ は

$$(S/N)_b = \sqrt{\frac{PX(N+1)}{2(N+1-P)}}$$

となる. 一方, a) の場合に得られる (S/N) 比 $(S/N)_a$ は

$$(S/N)_a = \sqrt{\frac{P^2 X}{2}}$$

$$\text{となる. } (S/N)_a / (S/N)_b = \sqrt{\frac{P(N+1-P)}{N+1}} \geq 1 \quad (7)$$

だから, $P \neq 1$, N なら a) の場合の方が b) の場合よりもすぐれていることになる. 但し, a) の場合は精度はよいが空間分解能のあらい像しか得られないが, b) の場合には精度は悪いが空間分解能のよい像もあわせて得られることになる. どちらがよいかは場合によって決まることでありいちは決められない.

。データが欠けた場合

H T X T の場合 M はでたらめにはほぼ半分穴のあいたマスクになっている. 従って, このマスクを通して得られたデータの各要素は \mathbf{X} の要素の総和の約半分になっている. つまり \mathbf{X} の各要素はいろいろな値をとりうるが, \mathbf{X} の構造が M のそれを強く相関していなければ, データの各要素はどれもほぼ等しくなる (これは Hadamard 変換の大きな特徴である). 今, 位置検出器の不具合などにより, データ $\mathbf{Y} + \mathbf{N}$ のうち r コの要素が得られなかったとしよう.

この欠けたデータ要素を添字 $k_1 \dots k_r$ で表す. この場合データの各要素はほぼすべて等しいことを考えれば, この欠けたデータ部分には他のデータの平均値を代入することが考えられる. この操作は M の第 $k_1 \dots k_r$ 行目の各要素をすべて $1/2$ におきかえたものと考えてよい [5]. この新たな行列を M^* とする. これに H をかけて Z を推定するわけである.

$$(HM^*)_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=k_1}^{k_r} H_{ik} \left(\frac{1}{2} - M_{kj} \right) \quad (8)$$

ここで $k_1 \dots k_r$ がいろいろな値をとるとき上式の第2項の平均は0であると考えられる. その二乗平均は $r/(N+1)^2$ になるから次のように考えてさしつかえない.

$$(HM^*)_{ij} = \begin{cases} 1 - r/N + 1 & \dots\dots\dots i = j \\ \pm \sqrt{r}/N + 1 & \dots\dots\dots i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

即ち, 空の構造と Hadamard mask に強い相関がなければ, いくつかのデータが欠落した場合, そこに他のデータの平均値を入れても ($N \gg r$ なら) ほとんどさしつかえないことがわかる. 図5には, データ欠落のない時とある時との再生像についての計算機シミュレーションの結果を示す.

◦ 検出器の視野を制限しない場合

HTXT の検出器の各要素はスラツ コリメータなどで, きめられた N コのマスキ要素だけを通して空を見るようにしておけば問題はない. しかし, スラツ コリメータをはずして空の各部分に対する有効面積を減らさないようにした時には, 検出器の各要素は N コより多くのマスキ要素を通して与えられた視野以外の空も見ることになる. この影響を以下で考えよう.

今一次元の例について考える. 図6に示すようにX線の像 X', X, X'' のうちスラツ コリメータにより視野を X だけが見えるように制限すれば, X については検出器のすべての要素から観測できる. ここでスラツ コリメータをはずすと, 検出器の各要素はさらに X', X'' の一部が見えることになる. X だけはすべての検出器の要素から見えるのでHTXTの像処理の手続きに従えば正しく像が再現されるが, X', X'' については正しく再現されるわけではない. このとき X', X'' の部分からくる光子により得られるデータ Y', Y'' は次のような関係で得られることになる.

$$Y' = M', X' \quad (10)$$

$$Y'' = (M''^t) \cdot X'' \quad (11)$$

$$\text{但し } M^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ M_{21} & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ M_{31} & M_{32} & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & & & \\ M_{N1} & M_{N2} & M_{N3} & \dots\dots 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

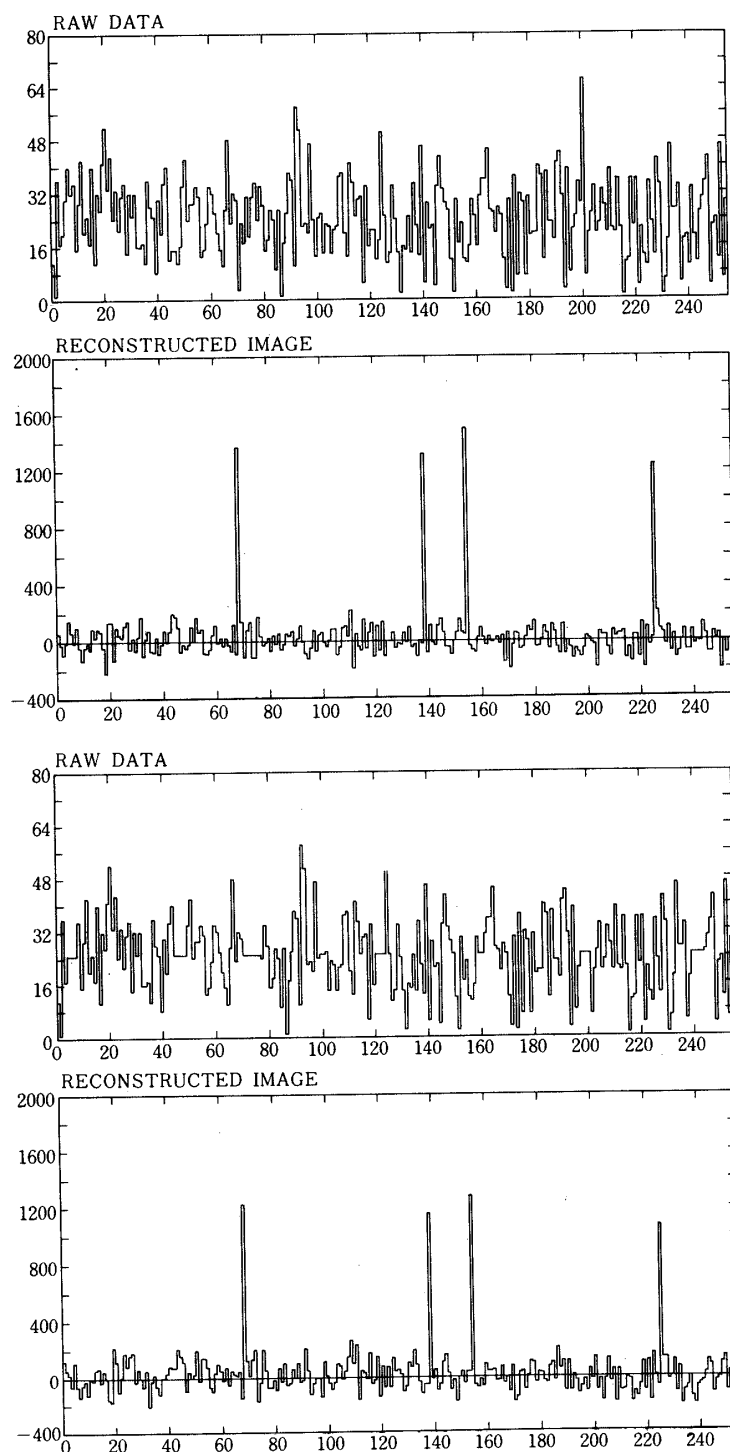


図5 a) 255 次のH T X Tで4コと同じ強さの点源のある空を観測したときのデータ(上)及び再現像(下)の計算機によるシュミレーション.

b) a) の生データのうち32コの要素が失われたとして失われた部分には他の要素の平均値を代入する. このときのデータ(上)とそれによる再現像(下)の計算機によるシュミレーション. データが約1/8失われたにもかかわらず再現像はa) のそれとよく似ていることがわかる.

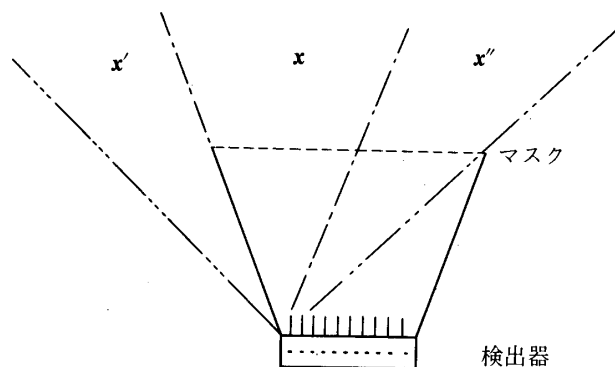


図6 HTXTの検出器の前にスラツコリメータをつけることにより、検出器の各要素は空の X で示される方向だけを見るようにできる。ここでスラツコリメータをはずしてしまうと X 以外に検出器の左側は X'' を、右側は X' を見ることになる。このとき得られるデータから像を再現するとはば X, X', X'' の3つの部分が重なって見えることになる。

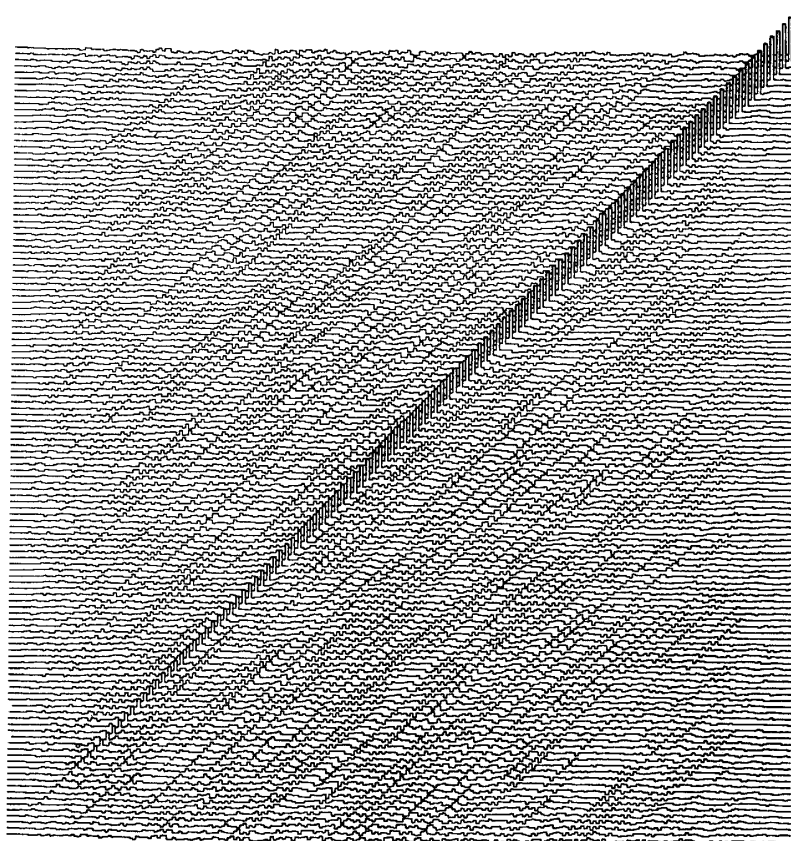


図7 255 次の行列 H 及び M' の積を図に表したもの。この図で右上から左下への対角線上の成分だけがとくに大きい。これはほぼ式(15)に一致している。

Y', Y'' が X に対するデータ Y とともに重なって得られるので, 前の手続きに従い推定像 Z を求めると次のようになる.

$$Z = X + HM' \cdot X' + H(M'')X'' \quad (13)$$

ここで $HM', H(M'')$ がどのようなものになるか考えてみる. これらはマスクを決めれば決定されてしまうものであるので, $N = 255$ の場合について計算機による結果を図7に示す. これからわかるように HM' は対角成分だけが大きく, 非対角成分はたいへん小さくなっていることがわかる. これは次のように示される.

$$(HM')_{ij} = \sum_{k=j+1}^N H_{ik} M_{kj} = \frac{2}{n} \sum_{k=j+1}^N (H_c)_{ik} M_{kj} \quad (14)$$

ここで $(H_c)_{ik} = \pm 1$ で, $(H_c)_{ik} = 1 (M_{ki} = 0)$, $(H_c)_{ik} = -1 (M_{ki} = 1)$ であるから, $(HM')_{ii} \simeq \frac{2}{n} (N - j)$ である. 又, $i \neq j$ なら $(H_c)_{ik}$ の符号は M_{ki} の値によらずほぼでたらめになるから, $(HM')_{ij} \simeq 0$ と考えられる. 即ち

$$(HM')_{ij} \simeq \frac{2(N-j)}{n} \delta_{ij} = \frac{2(N-j)}{N+1} \delta_{ij} \quad (15)$$

と近似できる. (HM'') についてもほぼ同様であるから, 視野を制限しない場合得られる推定像 Z は X 及び, X', X'' に式 (15) によるフィルターのなかったものとなる.

一方 (HM') の非対角成分については次のように評価できる.

$$(HM')_{ij} = \sum_{k=j+1}^N H_{ik} M_{kj} = \sum_{k=1}^j H_{ik} M_{kj} \quad (\because \sum_{k=1}^N H_{ik} M_{kj} = 0, i \neq j) \quad (16)$$

ここで $j \ll N$ なら上式の第三式はほとんどでたらめに符号が異なり絶対値が $2/n$ 又は 0 である j コの和であるからその平均値は 0, 分散は $\sim j/2$ 程度と考えられる.

$$|(HM')_{ij}| \sim \frac{2}{n} \cdot \sqrt{j/2} \quad i \neq j \ll N$$

$$\text{同様に} \quad |(HM')_{ij}| \sim \frac{2}{n} \sqrt{\frac{N-j}{N}} \quad i \neq j \gg 1$$

と考えてよい. 計算機の結果などからだいたい

$$|(HM')_{ij}| \sim \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{j(N-j)}{N}} \quad i \neq j \quad (17)$$

と近似できることがわかり, たしかに (HM') の非対角成分は対角成分のほとんどの値より小さくなる.

以上によりスラッツコリメータを使わずに HTXT を作ると, 本来の視野にある X 線像 X 以外に, それに隣接する X 線像 X', X'' が式 (15) で示されるフィルターを通して, 重なっ

て得られることがわかる．つまりスラッツコリメータで視野を制限しない時，隣りあう部分にX線源があっても式(15)に従うフィルターを通してあたかも視野内にX線源があるかのように見えることになる．この状況についての計算機シュミレーションの結果を図8に示す．

。検出器の位置分解能の影響

以上述べたことは，検出器の位置分解能が検出器の各要素に比べて十分よい場合である．その場合には N を大きくすることができるが，あまり N を大きくすると検出器の位置分解能が無視できなくなる．この影響を以下で考えよう．この場合HTXTにより得られるデータ Y^* は次のようになる．

$$Y^* = B_L Y = B_L M X \quad (18)$$

ここで B_L は検出器の位置分解能によるデータの広がりを示す行列で，対角成分が大きく，非対角成分はほとんど0となるものである． Y^* はマスクを通して得たデータが B_L によりさらに散らばることを示している．この場合 Y^* から得られる推定像 $Z^* = H Y^*$ については次のようになる．もし B_L が対角線に関してほぼ対称であり，対角線から離れた要素がほぼ

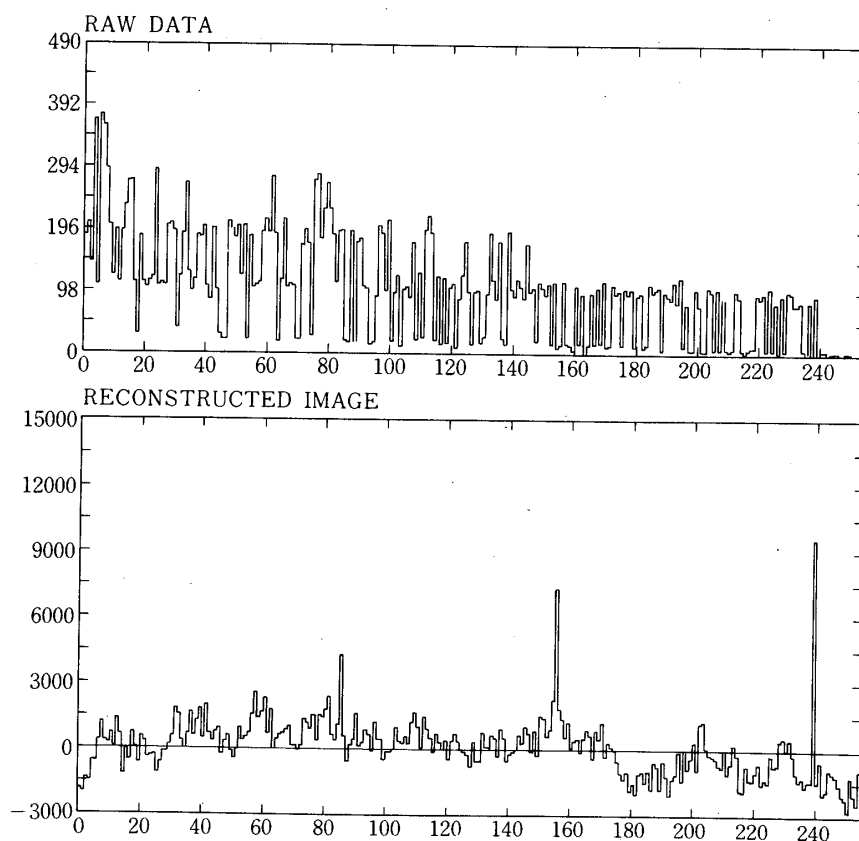


図8 図6)において X' に4コの点源がある場合，これをスラッツコリメータなしのHTXTで見たデータ(上)と再現像(下)．4コの点源は同じ強さであるが，式(15)に従うフィルターがかかっているため左の方の1コはほとんど見えなくなっている．

0 であるならば B_L と H とはほぼ交換可能になる。即ちこの場合

$$\mathbf{Z}^* = H B_L M \mathbf{X} \simeq B_L H M \mathbf{X} = B_L \mathbf{X} \text{ となる [13].}$$

この場合についての計算機によるシュミレーションを図9に示す。つまり検出器の位置分解能の悪いことの影響は H T X T の場合もピンホールカメラの場合もほぼ同じであると考えてよい。

バックグラウンドを含めた場合

さらに、検出器の spurious background を含めたもう少し实际的な考察を行おう。前述した \mathbf{X} の第 i 要素 x_i は次のようになる。

$$x_i = x_d + x^s \delta_{is} + x_{sp} \quad i = 1, \dots, N \quad (19)$$

但し, x_d : uniform diffuse X-ray component

x^s : 第 s bin にある point source intensity

x_{sp} : 検出器の spurious background に起因する部分

ここで検出器による spurious background は一定と考え、 \mathbf{X} の各要素からの一様な flux と

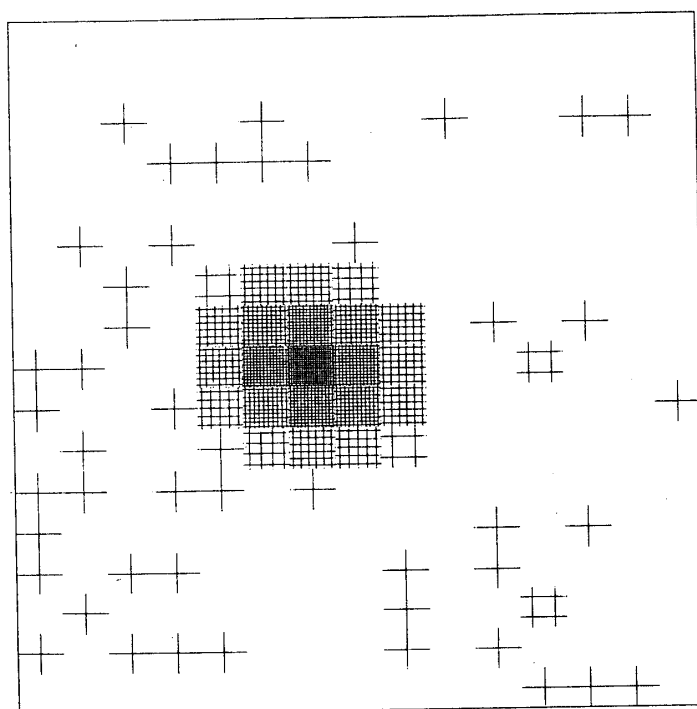


図9 255次 (15×17) の二次元的 H T X T で1コの点源を観測した場合の再現像。但し検出器の位置分解能は3×3要素 (FWHM) で、ぼやけているのがよくわかる。これは Hadamard マスクを pin hole におきかえたときのものとほとんど一致する。

見なせることに留意しよう. いま検出器全体で spurious background が $N \cdot B_{sp}$ あるとすれば HTXT に対して $x_i = x_d + x^s \delta_{is} + \frac{2}{N} B_{sp}$ となる. これに対してピンホールカメラの場合には $x_i = x_d + x^s \delta_{is} + B_{sp}$ となる. 検出器の各要素で発生する spurious background B_{sp} はピンホールカメラの場合空の特定の要素から発生すると見なすのに対して, HTXT の場合には空の $N/2$ コの要素から発生すると見なせるからである. HTXT の方が同じ spurious background に対し空から $N/2$ 倍の光子を得ることを考えれば当然であろう. ここで各変数と実際の検出器の大きさなどとの関係を示しておく.

$$x_d = D \Omega A \tau / N$$

$$x^s = I \cdot A \cdot \tau / N$$

$$B_{sp} = B \cdot A \cdot \tau / N$$

但し, D : diffuse X-ray background counts/sec · str · cm²

Ω : spatial resolution str

A : total detector area cm²

τ : observing time sec

N : size of mask M; number of detector cell

I : point source intensity counts/sec · cm²

B : spurious background counts/sec

$N\Omega$: total field of view str

ここで S/N 比を $(S/N)_i^2 \equiv (x_d + x^s \delta_{is})^2 / \langle (Z_i - x_i)^2 \rangle$ と定義する. HTXT の場合の S/N 比 $(S/N)_{iH}^2$ は

$$(S/N)_{iH}^2 = \frac{(x_d + x^s \delta_{is})^2}{2x_d + \frac{4}{N} B_{sp} + \frac{2}{N} \sum_s x^s}, \quad (\sum_s \text{は point source についての和}) \quad (20)$$

となる. 一方, 同様にしてピンホールカメラの場合の S/N 比を $(S/N)_{ip}^2$ とすると

$$\frac{(S/N)_{iH}^2}{(S/N)_{ip}^2} = \frac{x_d + B_{sp} + x^s \delta_{is}}{2x_d + \frac{4}{N} B_{sp} + \frac{2}{N} \sum_s x^s} \quad (21)$$

となる. $B_{sp} \gg x_d, x^s$ の場合にはよく知られたように HTXT の方がピンホールカメラよりもはるかにすぐれていることがわかる[5][9]. これは HTXT の方がピンホールカメラより多くの光子をうけることから明らかである. 又, $B_{sp} \ll x_d, x^s$ の場合には HTXT とピンホールカメラとは i によりその優劣がきまる. 特に point source の存在するな場所においては, HTXT の方がよい S/N 比を示すことになる. つまり特定の少数要素だけが強い変動を示すような場合, 例えば X-ray burst, point source の時間変動などに対して HTXT の方がピンホールカメラより優れていることになる.

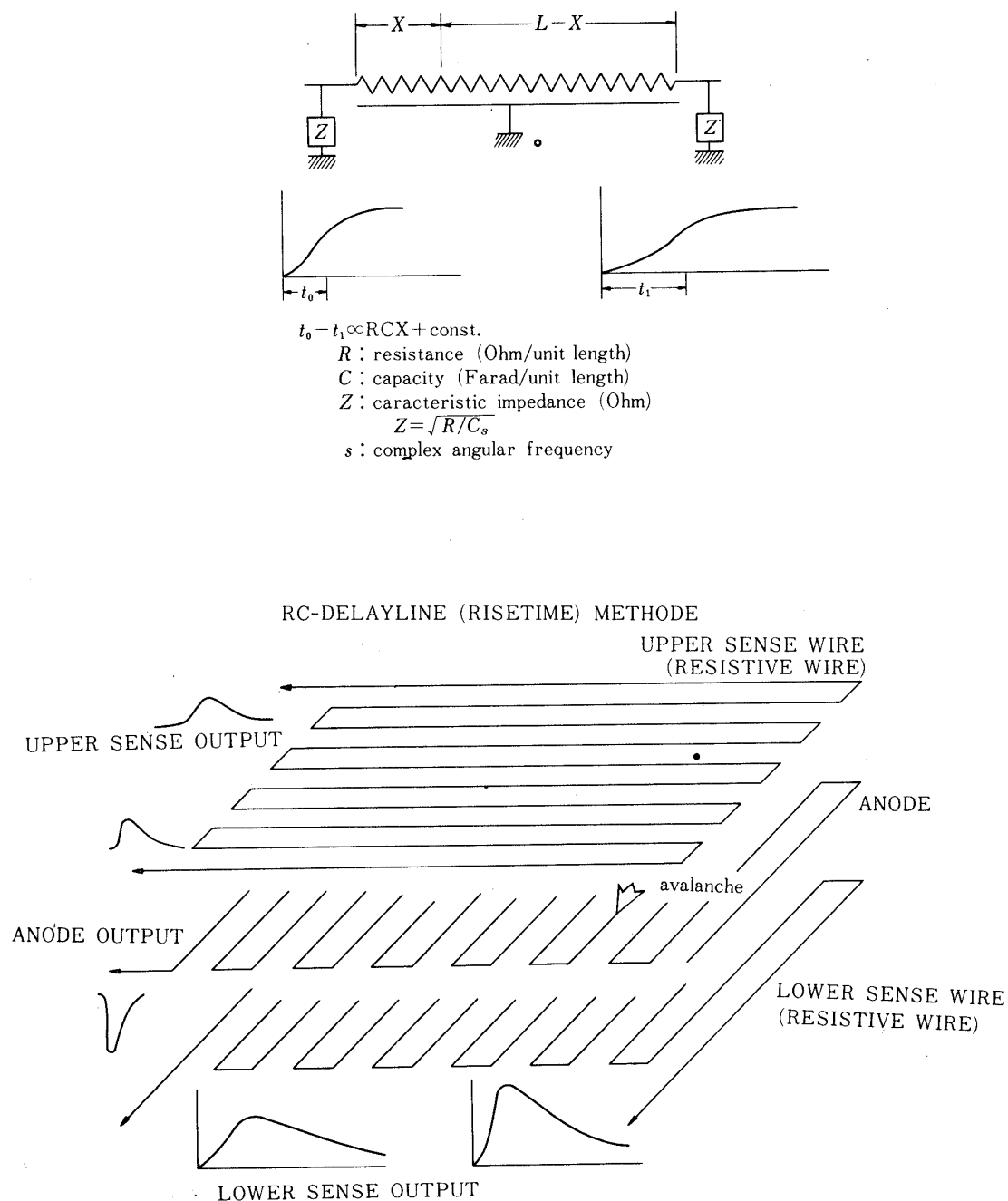


図10 図11 位置検出型比例計数管の構造

アノードは、 $20\mu\text{m}$ 金メッキタングステン線、センス・ワイヤーには $50\mu\text{m}$ の抵抗線 ($677\Omega/\text{m}$) をそれぞれ 3mm 間隔で張っている。アノードとセンスワイヤーの間隔は 4mm である。これらの電極は、金属の箱に入れられ、センス・ワイヤーと浮遊容量とで分布定数回路を作る。

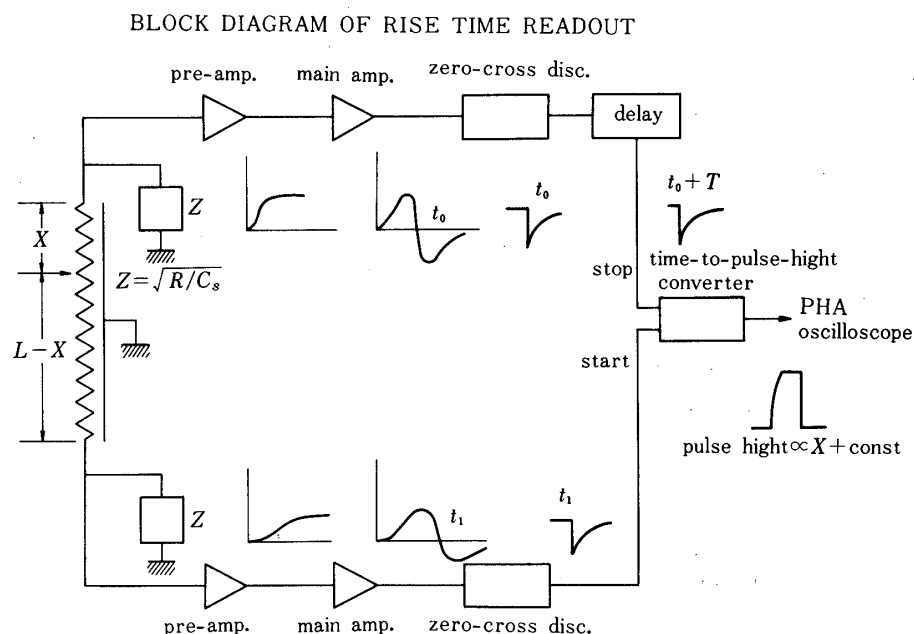


図12 1次元の位置検出回路

センス・ワイヤーから得られる位置信号は、R-C伝送線の特性インピーダンスで終端され電圧感应型のプリアンプで増幅される。その立ち上がり時間は、次のメインアンプで2回微分された後、零交差ディスクリミネーター（ZCD）で検出され、時間波高変換器（TPHC）でパルス波高に直される。

位置検出型比例計数管

現在、我々が実験を行っている検出器は、R-C分布定数回路を利用したものである[10]。つまり、検出器を一種の1次元分布を持つR-C伝送線と見なし、X線によってつくられ、電子なだれにより増幅された電荷が伝送線に広がり、その結果生ずる芯線末端の電圧の立ち上がり時間が、X線の入射位置の関数になっている事を利用したものである。図10にその概念図を示す。いま、検出器の左端から x の位置に入射したX線によってつくられた電子がアノードのまわりでなだれを起し、ここに生じた正イオンによってセンスワイヤー（抵抗線）に誘起された電荷を考える。ここで検出器の芯線が、単位長当り抵抗 R と容量 C を持つ伝送線と考えると、芯線両端における電圧の立ち上がり時間

$$t_a \simeq \frac{RC}{2} (L-x)^2 \quad (22)$$

$$t_b \simeq \frac{RC}{2} x^2 \quad (23)$$

となる[11]。実際には、入射位置 x 関数である立ち上がり時間の差 $\Delta t = t_a - t_b$ を測定

し、入射X線の位置を求める。

実験に使った検出器の構造を図11に示す。計数管は一面が開いた金属の箱からなり、この開口部にはX線入射窓として20 μ mのアルミナイズドマイラーが付けられている。その下13 mmには一方向(X方向)に抵抗線(ニューマ線, 50 μ , 677 Ω /m)が3 mm間隔で張りめぐらされており上段のセンスワイヤーをなしている。その下4 mmには20 μ mの金メッキタングステン線が、やはり3 mm間隔で張りめぐらされて、アノードをつくっている。さらにその下4 mmには上段のセンスワイヤーと直交する方向(Y方向)に同じく抵抗線が張りめぐらされて、下段のセンスワイヤーをなしている。これらアノードとセンスワイヤーの端は、テフロンで作った櫛状のフックでとめていて、全体の有感面積は230 \times 250 mm²となっている。

アノードからは、X線のエネルギーを測定し、上下のセンス・ワイヤーをそれぞれの両端から立ち上がり時間の差をとり、入射X線の座標を決めることができる。そのパルス処理系のブロックダイアグラムを図12に示す。検出器に使用するガスは、PRガスでフロー型となっている。アノードには約2.7 kVの電圧を、センスワイヤーには100～300 Vの電圧をかける。入射X線は一次電子をつくった後、アノードへドリフトしていく。このとき、一次電子の拡散による広がりが入射X線の位置決定精度に影響するが、このことについては、次節で詳しく述べる。

現在のところ、⁵⁵Fe (5.9 keV) X線を用いた測定で、検出器中央付近で1 mm以下、周辺部分で2 mm程度の位置分解能が得られている。

ドリフト領域についての考察

アノード線と直交する方向の入射X線の位置は、一次電子がアノードのごく周辺でなだれをおこしガス増幅するので、アノード線の間隔で量子化されてしまう。このため、その方向では入射X線の位置を精度よく測定することが難しい。このとき一次電子雲をドリフトさせ、アノードの近くでなだれがおきる前に少し拡散させておいた方が位置の精度をよくできることがわかった。以下にその考察を述べる。

いま一次元的な場合を考える。 m の位置に入射したX線によりつくられた一次電子が、拡散により x の位置にきてなだれをおこすとするときの確率を $f(x)$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (24)$$

となる。ここで σ は電子がアノードまでドリフトしたとき、拡散により拡がる量を表す。 m , x , σ はいずれもアノード間隔を単位として測り、アノードは x が整数の位置にあるとする。電子が k 番目($x=k$)のアノードに入りここに電子なだれのおこったことを示すパルスがセンスワイヤーから出てくる確率 $F(k)$ は

$$F(k) = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx \equiv g\left(k + \frac{1}{2}\right) - g\left(k - \frac{1}{2}\right) \quad (25)$$

である。但し、 $g(x) \equiv \int f(x) dx$ とおく。この確率分布に従う k の平均値 $\langle k \rangle$ が、一次電子のはじめの位置 m に一致しないのは物理的に考えて当然である。即ち、センスワイヤからの出力を見て入射 X 線の位置を推定するときの誤差 R は $m - \langle k \rangle$ 、 σ_k 、及び一次電子数 q によることがわかる。ここで $\sigma_k^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle$ である。

$$\text{このとき } R(m, \sigma_k, q) = \sqrt{(m - \langle k \rangle)^2 + \frac{1}{q} \sigma_k^2} \quad (26)$$

と定義しよう。 R が m により変化するのにはアノードが一定間隔だけ離れて存在するからである。そこで R を最大にする $m = m^*$ に対して $R - \sigma$ の関係を求め R を最小にする σ を計算すればよい。このとき $0 \leq m^* \leq \frac{1}{2}$ として十分であるので適当に大きな整数 P に対して、

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq P \\ 0 & x \leq -P \end{cases}$$

と考えるとさしつかえない。これを使うと、

$$\langle k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k F(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ N + 1 - \sum_{-N}^N g(n + \frac{1}{2}) \} = P - \sum_{n=-P}^{P-1} g(n + \frac{1}{2})$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum k^2 F(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ N^2 - 2 \sum_{-N}^N (n - \frac{1}{2}) g(n - \frac{1}{2}) \}$$

$$= P^2 - 2 \sum_{n=-P}^{P-1} (n + \frac{1}{2}) g(n + \frac{1}{2})$$

$$\therefore \sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \sum_{n=-P}^{P-1} \{ -2n - 1 + 2P - \sum_{n'=-P}^{P-1} g(n' + \frac{1}{2}) \} g(n + \frac{1}{2}) \quad (27)$$

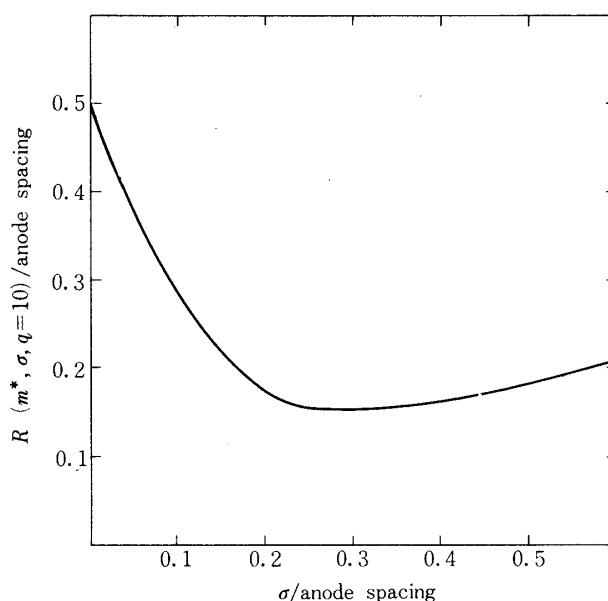
となる。この式に従い $R(m^*, \sigma, q)$ と σ との関係を求めた。このうち特に $q = 10$ の場合 (PR ガスに対して C-K X 線に相当する)、 $R - \sigma$ の関係を図13に示す。

このことから、ドリフト領域をつくり、電子雲を少し広げた方が位置の精度が良くなることがわかる。これは次の様に考えられる。即ち、 $\sigma = 0$ なら $\frac{1}{q} \sigma_k = 0$ とできるが $m^* - \langle k \rangle$ は $\frac{1}{2}$ にまでなりうる。一方 $\sigma > 0$ としてやれば、 $m^* - \langle k \rangle$ は急速に小さくなりうる。ところが、 $\frac{1}{q} \sigma_k$ は q がある程度大きいので、そう大きな値とはならない。このことから R を最少にするには、 σ を少し大きくしてやればよいことになる。

結局一次電子雲はなだれを起こす前に、芯線間隔の 0.3 倍程度 ($\sim 1 \text{ mm}$) に広げておくのがよい。

ガス中での電子雲の広がり大きさ σ は

$$\sigma = \sqrt{2D \frac{l}{\mu E}} \quad (28)$$

図13 R- σ の関係

位置の誤差 R は、電子雲の拡がり σ の関数である。

電子雲が10個の電子からできているとき(P Rガスを使用した場合、C-K X線に相当する)

アノード間隔の0.3倍程度に拡げれば良いことがわかる。

l : ドリフト領域の長さ

E : 電場の強さ

μ : 易動度

D : 拡散系数

である。 E は、センスワイヤーにかかる電圧によって決まり、我々の場合、約100 V/cmである。このときP Rガスに対して $D/\mu \sim 3$ Vとなる[12]。ここで $\sigma \sim 1$ mmとするには $l \sim 1.6$ mmのドリフト領域をつくればよいことになる。これより大きい値に対しては、 σ が大きくなり過ぎるが、図13に見られる様に、位置分解能にあまり悪影響を及ぼさない。ドリフト領域としては、この値より大きくしておけばよいことがわかる。今回の実験では、 F_e -K X線を使っているので、この影響はほとんどない(1平均自由行程 ~ 3.3 cmであるため)が、もっと低エネルギー(C-K X線など)に対しては、1 mm以下になるので、ドリフト領域を考慮しておかなければならない。

実験方法概要

H T X Tの実験装置全体の概要を図14に示す。X線発生装置は、理学電機製のR U-200型で、最高出力60 kV, 200 mAである。これよりCu-K X線を出し、数m離れた鉄板にあてる。これから F_e -K X線を出す。この鉄板の前に、すだれコリメータを重ね合わせたも

のを置き、擬似平行X線源をつくった。すだれコリメータは、2層使用しており、縦縞の平行X線が、図15のような像として観測することができる。この後に、アダマール・マスクを通して位置検出型比例計数管がある。アダマール・マスクは1セルが $1.5 \times 1.5 \text{ mm}^2$ の255次のアダマール行列で、これを 15×17 の2次元配列にしたものを、多数並べている。この配置で、HTXTの全視野は、 $4.1^\circ \times 3.7^\circ$ であり、その分解能は約 $20'$ 程度である。比例計数管からの出力は、図16に示した様に処理される。即ち、アノード・パルスでゲートをかけ、これを通過した2次元の位置が、計算機（Nova-3）を通してMTに書き込まれる。この後、各種ソフト・ウェアで処理を行っている。

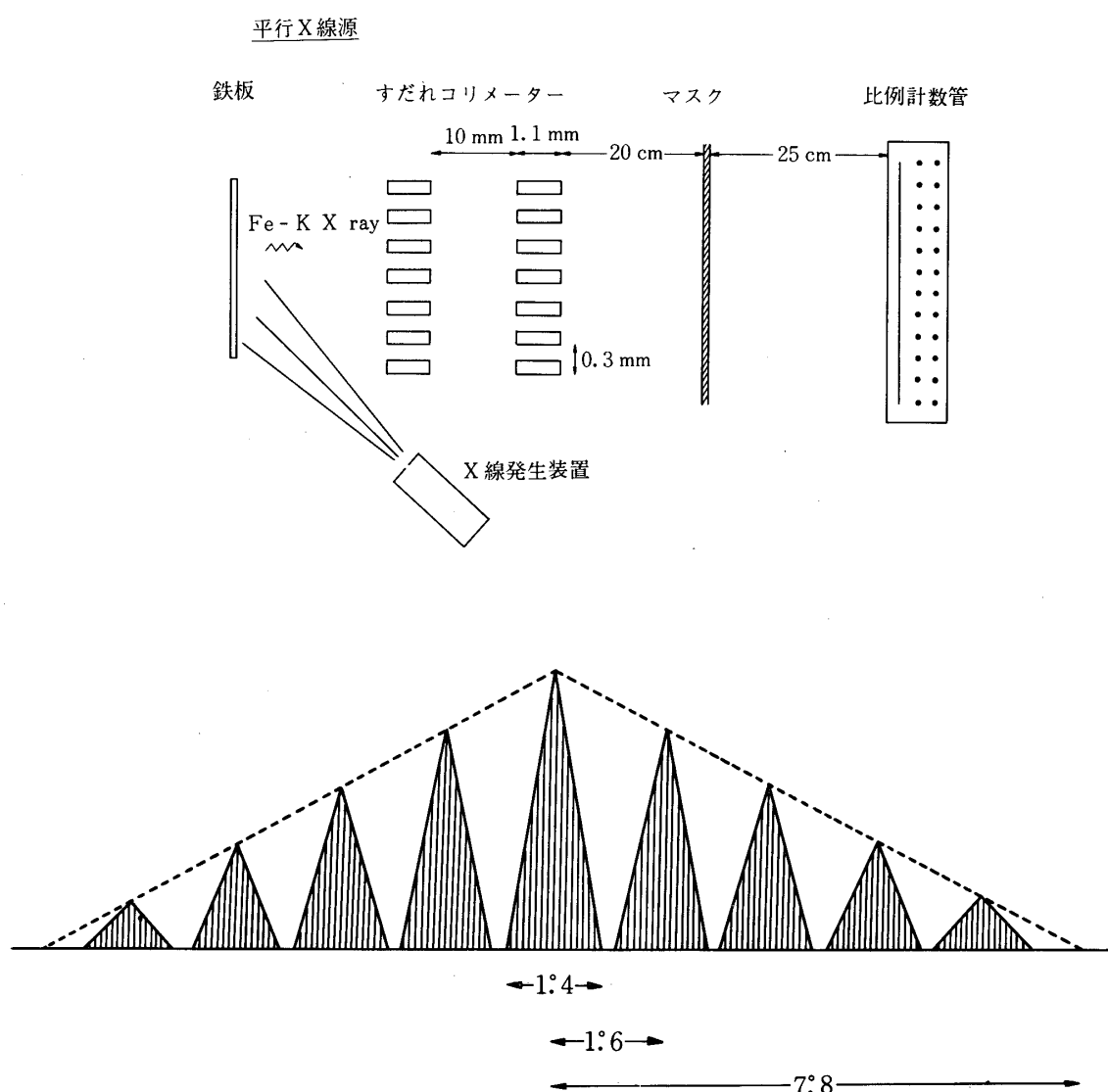


図14 図15 X線発生装置からのCu-K X線を蛍光板に当てて様なFe-K X線を発生させる。その後、すだれコリメータを通し図15の様な構造を持った平行X線を得る。

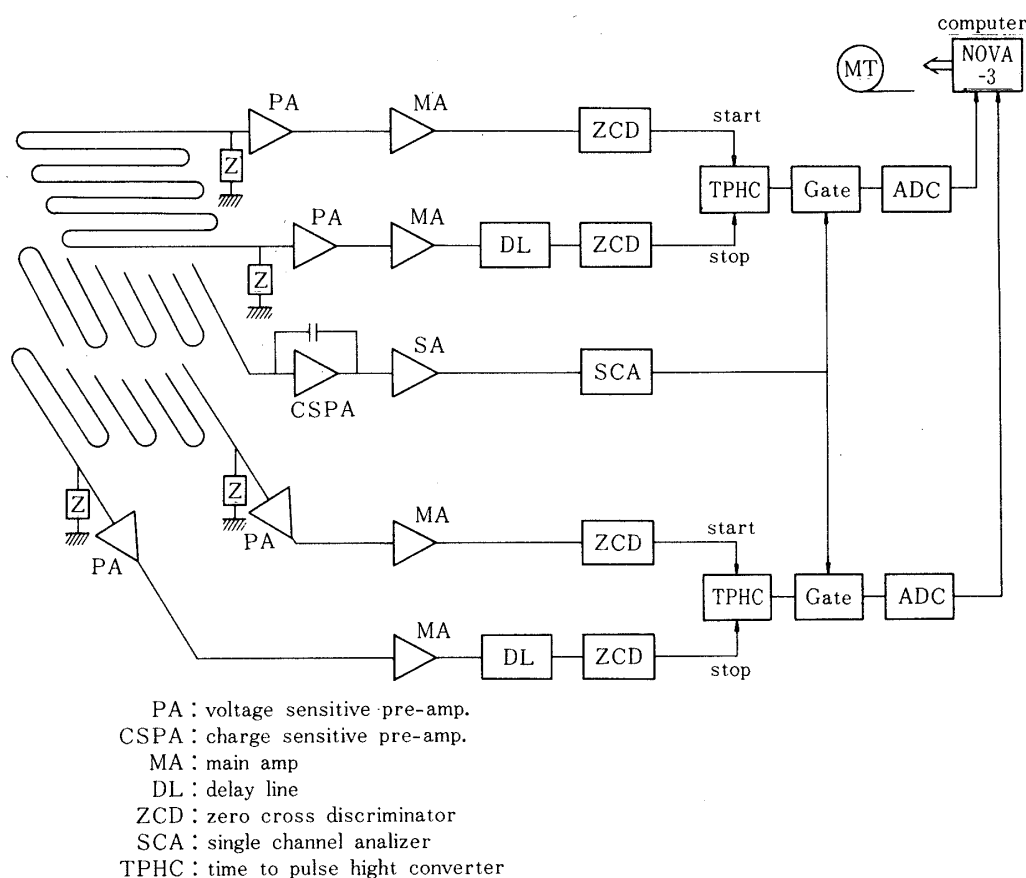


図16 二次元位置検出型比例計数管のパルス処理

ピン・ホール・カメラによる結果

前述のようなすだれコリメータ系で平行X線がつくられていることを確かめるため、ピンホール ($1.5 \times 1.5 \text{ mm}^2$ 正方形) を開けたマスクを置いて実験した。

すだれコリメータによるフラックスの減少及びピン・ホールのため、フラックスは、最大 20 photon/sec 程度にしかならなかった。この結果を図17に示す。これに見られるように、縦縞の平行X線源が得られているのが良くわかる。場所によって強度が異なるのは、すだれコリメータの枠の影響であろう。この図でアノード・ワイヤは、X線像と直交する様に張られているので、わずかにその影響が見られる。

HTXTによる結果

ピン・ホール・カメラの場合と全く同じ装置で、ピン・ホール・マスクをマルチプルタイプのアダマル・マスクに取り換えて実験した。

アダマル・マスクは、 $22.5 \times 25.5 \text{ mm}^2$ で1サイクルをなすので、検出器上のデータもこの大きさで1つのデータ・セットとなる。この場合、最も大切なことは、位置読み出しの

ための出力（チャンネル数）と、実際の長さやどう対応するかであろう。今回は検出器の直前に $100 \times 100 \text{ mm}^2$ の鉛のマスクを置き、そのまわりに 20 mm 間隔で、直径 1.5 mm の穴を開け、位置とチャンネル数との較正に使用した。これにより、 $22.5 \times 25.5 \text{ mm}^2$ のアダマール・データ・セットを決定した。さらに、検出器に張った 3 mm 間隔のアノードのため、直接得たデータには、 3 mm 間隔で縞紋様が見られる。これを補正するため、アノードと直角方向に並ぶアダマール・データ・セットを2組加え合わせて、アダマール逆変換を行った。

図18に、HTXTで得た生データからとったアダマール・データ・セット（ 15×17 の配列）を示す。これからわかるように、生データそのものには、ほとんど何の構造も認められないことがわかり、アダマール変換の特徴をよく示している。次にこれをアダマール逆変換した例を図19に示す。この図でアノードは、横方向に並んでいることから、縦方向の縞紋様は、もとの像を反映しているものと考えられる。この視野は、 $4.1^\circ \times 3.7^\circ$ であるので、図15に見られる像が全て見えるわけではない。検出器の前には、スラッツ・コリメータを付けていないので、以前の考察より、 $4.1^\circ \times 3.7^\circ$ の視野毎に重なった像が見えることになる。このため図19に見える像は、図15の像を 4.1° ごとに重ねたものと考えられる。

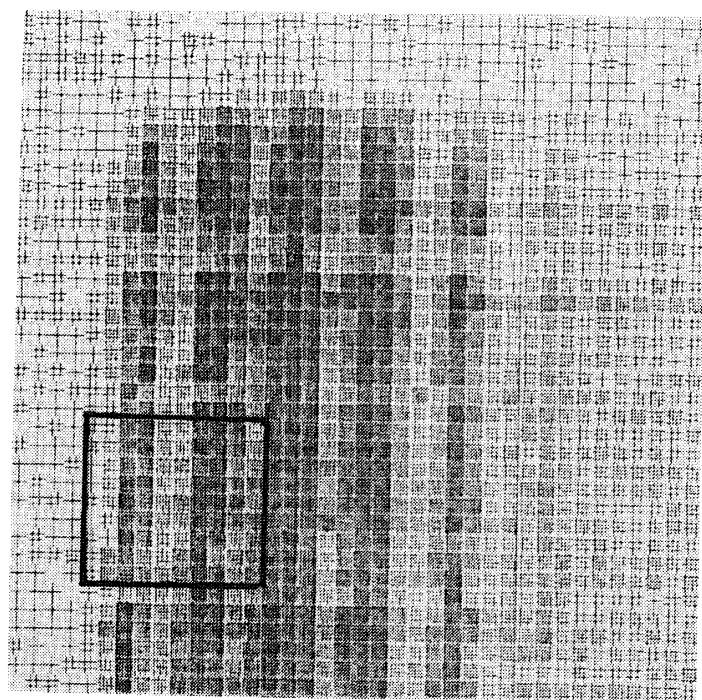


図17 ピンホールカメラで得られた結果。図15の像を反映した縞紋様が見られる。

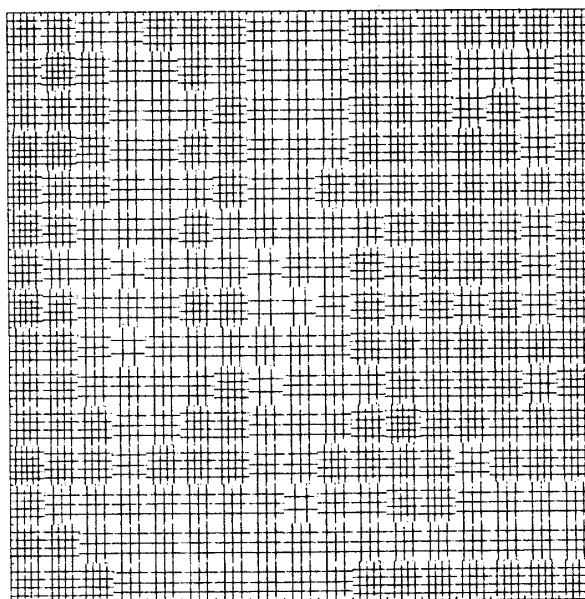


図18 HTXTで得られた生データ
 十字1個は185個のX線光子を表わす．ほとんど一样的なデータは，HTXTの特徴である．

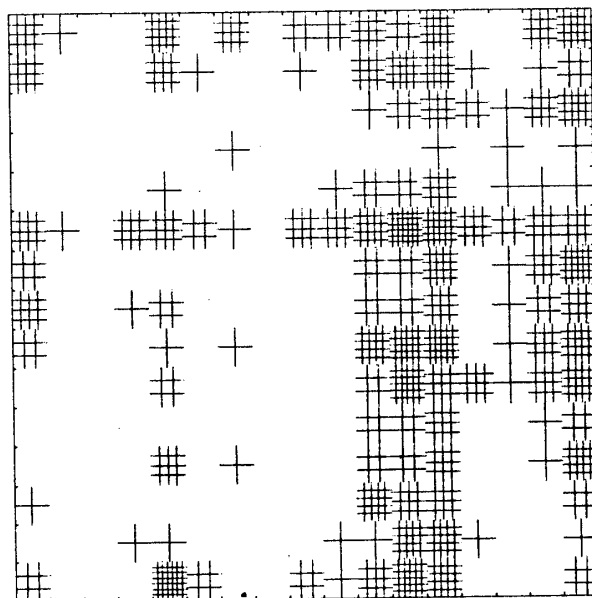


図19 HTXTで得られた像
 図18のデータを逆変換して得られた像．縦の縞はピンホールカメラで得られた像に対応している．かすかに見られる横の縞はアノード線の影響によるものである．
 図17の四角く囲んだ部分が見えている．

今後の問題点

H T X Tをテストする際、最も問題になる点は、いかにして広い平行X線源をつくるかである。これは、X線ミラーの開発に際しても問題にになるところであろう。

我々は、これに対し、すだれコリメータを使って擬似平行X線源を作った。この場合蛍光板（鉄板）が一様にX線で光ることが大事であるが、数m離れた点から強力なX線発生装置でX線を照射することにより、これを作ることができた。

又、すだれコリメータを使った場合には、フラックスが弱くなることが問題になる。今回作った一次元的な縞模様は、比較的簡単に作ることができるが、点源にするには、さらに、直角方向にすだれコリメータを置かなければならない。その場合には、いっそうフラックスが弱くなってしまう。

又、X線として、 $F_{\alpha}-K$ X線を使ったが、さらに低いエネルギー（ $C-K$ X線など）でテストするためには、全体を真空中に保たねばならない。今のところ、このための真空装置がほぼでき上がったところである。

次に、低エネルギー領域で検出器をテストする必要がある。このためには、薄膜ポリプロピレンを使った、位置検出型検出器にしなければならない。これは現在準備中である。

結 び

以上述べた内容は、現在までのH T X T開発の経過である。H T X Tはミラーとは異った結像系であり、高エネルギー領域、広視野の結像など、ミラーにはできない特徴をもっている。今後ともミラーは多用されていくであろうが、ミラーを補完していく装置としてH T X Tは重要な位置を占めるであろう。現在、X線天文学は、質的变化をとげようとしている。この時期に、今までにない観測手段を開発することは、我々の大きな課題である。

H T X Tは、1980年に第1回のロケット実験により、その有効性を検証しようとしている。X線天文学では、X線バースト、X線新星など、短時間変動現象が多い、これらを、いち速くとらえるための広視野で、位置精度のよいH T X Tは、たいへん有効な観測装置となるであろう。

H T X Tの製作及びテストに関して、市原敏雄・佐藤安榮・川端彰氏の協力を得ました。ここに深く感謝いたします。

この研究は、科学研究費（研究課題、広がった宇宙高温プラズマよりのX線放射に関する研究）及び宇宙研基礎開発費により行ったものである。

1979 年 10 月 1 日

参 考 文 献

- [1] Inoue, H., Koyama. K., Matsuoka. M., Ohashi. T., Tanaka. Y. and Tsunemi. H.
1979, Ap. J. 227. L85.
- [2] Dicke, R.H. 1968, Ap. J. 153. L101.
- [3] 井上一, 小山勝二, 牧島一夫, 松岡勝, 宮本重徳, 村上敏夫, 西村純, 小田稔, 小川原嘉明,
田中靖郎, 常深博 1977, 東大宇宙航空研究所報告 13, 3号C, 1029
- [4] 増山元三郎 実験計画法
- [5] 宮本重徳, 常深 博, 津野克彦 1978, 宇宙観測シンポジウム 474
- [6] Miyamoto. S. 1977 Space Science Inst. 3. 473
- [7] 佐藤 洋 情報理論
- [8] Watson. E.J. 1962 Math. Comp. 16. 368.
- [9] 土井恒成 1977 宇宙圏, 宇宙放射線合同シンポジウム 47
- [10] Borkowski, C.J. and Kopp, M.K. 1968, Rev. Sci. Instrum. 39, 1515.
- [11] Borkowski, C.J. and Kopp, M.K. 1970, IEEE Trans. NS-17, 340.
- [12] Dutton, J. 1975, J. Phys. Chem, Ref. Data 4. 577.
- [13] 常深 博, 宮本重徳, 津野克彦 1979, 科学衛星シンポジウム