

# 面内周期性を有する 3次元構造物の均質な平板としての 等価弾性係数の決定法について

菊地文雄・谷沢一雄\*

On Determination of Elastic Coefficients of a Homogeneous  
Plate Macroscopically Equivalent to a Three-Dimensional  
Structure with In-Plane Periodicity

By

Fumio KIKUCHI and Kazuo TANIZAWA\*

**Abstract:** This paper presents a determination method of macroscopic stretching and bending stiffness coefficients of three-dimensional structures with in-plane periodicity. Namely, we discuss a calculation method of the elastic coefficient matrix of a virtual homogeneous elastic plate macroscopically equivalent to the considered three-dimensional structure. The Kirchhoff plate theory is employed as the basic theory of homogeneous plates, and the theory of homogenization is applied to obtain the calculation formulas for macroscopic coefficients. The basic idea of our theory is summarized with intuitive explanations, and some fundamental properties of the equivalent elastic coefficient matrix are derived with rigorous proofs. Our theory is applicable to the analysis of various stiffened plates and other structures with in-plane periodicity.

**Key words:** structures with in-plane periodicity, equivalent elastic coefficients, theory of homogenization, Kirchhoff's plate theory, stiffened plate, homogeneous plate

## 概 要

$x$ ,  $y$ 平面内に周期性を有する3次元構造物につき、伸びや曲げに関する巨視的な剛性係数を求める手法を論じた。すなわち、3次元構造物に巨視的に等価な仮想的均質平板を考え、その弾性係数マトリックスを算出する。均質平板の理論としては Kirchhoff の平板理論を採用した。等価弾性係数マトリックスの算出法は均質化の理論に基づいている。算出法の基礎になる考え方を直観的に整

---

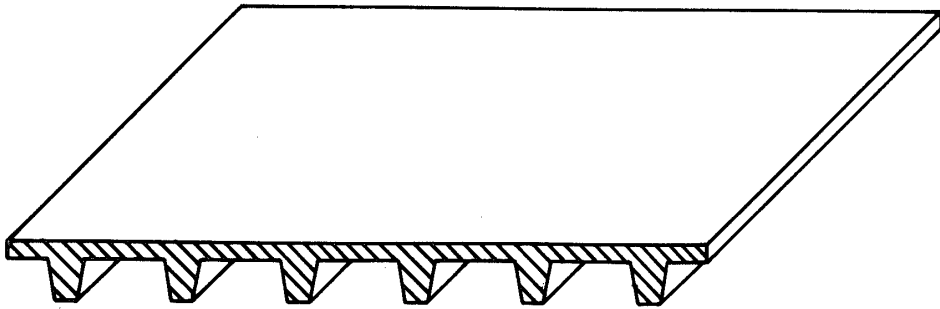
\* 三菱自動車工業 (Mitsubishi Automobile Company)

理し説明した。また等価弾性係数マトリックスが有する性質のいくつかを厳密に誘導した。本理論は各種の補強板等の等価剛性係数の決定に使用できる。

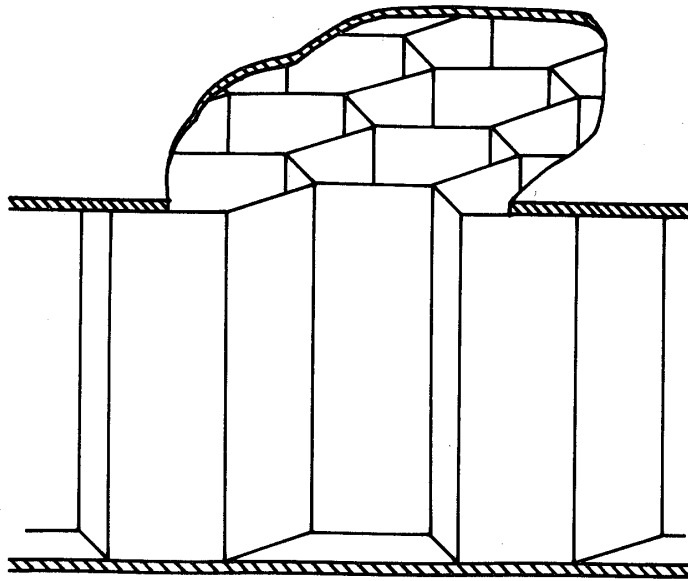
**重要語：** 周期性を有する構造，等価弾性係数，均質化の理論，Kirchhoffの平板理論，補強板，均質平板

### 1. はじめに

天然および人工の物体の中には，結晶，高分子化合物，原子炉燃料集合体などのように，周期性を有するものが少なくない。また，複合材料は一般にはランダム性を有することが多いが，しばしば周期性を持った物体としてモデル化される。このような周期性を有する物体は，



第1図 (a) 周期性を有する構造の例——リブにより補強された平板

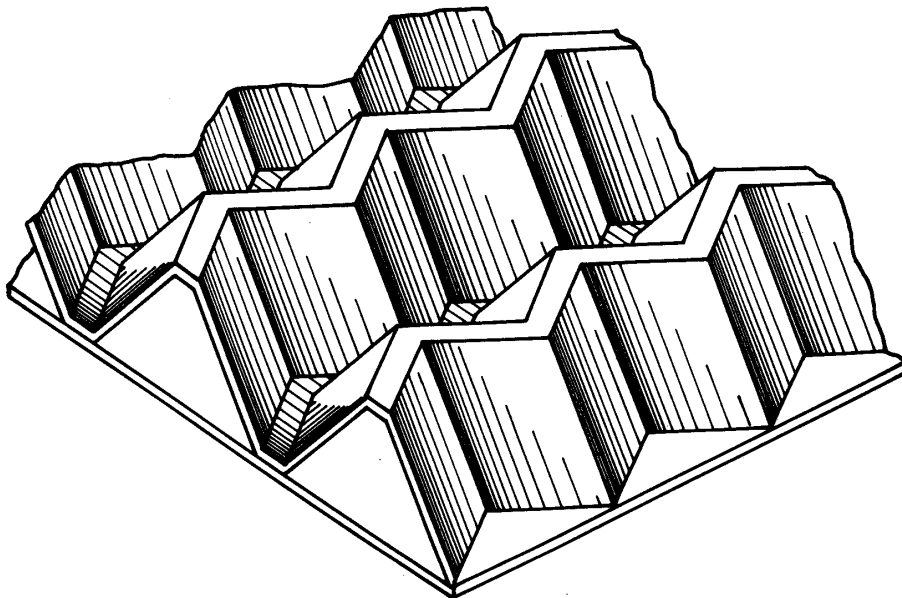


第1図 (b) 周期性を有する構造の例——ハニカム状心材を有するサンドイッチ板

応力を有効に伝達するための構造要素としても利用されており、例えばリブにより周期的に補強された平板や、ハニカム状の心材を有するサンドイッチ板などが挙げられる(図1参照)。

このような物体を構造要素として用いる際には、まず力学的な挙動を調べるのが基本である。しかしながら、この種の物体の材料的、幾何学的特性は1周期内でかなり急激に変動する場合があります、したがって変位や応力等にも1周期内でかなりの変動が見られるであろう。もしも周期内の変動まで含めて、構造全体の挙動を一度に解析しようとするならば、その作業量は莫大なものになりかねない。他方、もし周期程度のスケールの微視的変動はとりあえず無視し、より巨視的な変動にのみ注目するならば、周期的構造物はしばしば均質な構造物と類似な挙動を示すことに気付く。繊維で編まれた布の風呂敷と、ビニールの風呂敷(これも分子レベルでは複雑な変動を示すであろう)とを比較してみるとよい。実用的には、この巨視的挙動を知ることが第一に重要で、そのための解析手法が確立されれば、比較的適正な規模の作業量で近似的・巨視的な挙動が求められよう。もちろん、破壊等の解析には微視的解析が欠かせないが、その際にも、巨視的解析の結果を最初に求めてから微視的挙動の情報を得るといふ、段階的解析が実用的であると考えられる。

本小論では、 $x$ 、 $y$ 面内に周期性を有する3次元構造物の、平板としての弾性(あるいは剛性)係数を求める手法について考察する。すなわち、3次元構造物に巨視的に等価な均質平板を想定し、その伸びや曲げの剛性係数を決定する方法を確立したい。すでに述べたように、この種の構造は補強板やグリッド構造などに見出され、その巨視的な挙動の解析法、特に等価剛性係数の算出法については、例えば Troitsky [1] にかんがりの具体例が収録さ



第2図 ゼータ補強板

れている。しかしながら、その算出例の多くは近似的解析に基づくもので、実用的ではあっても一般性や厳密性の面では不十分のように思われた。

そもそも本研究の動機となったのは、三浦により考案されたゼータ補強板の等価剛性の評価にある [2], [3]。この補強板では、第2図に示すように、山と谷がジグザグ状に折れ曲がった、直角2方向に周期を有する曲面が補強材として用いられる。この補強板はかなり複雑な構造であり、先の文献 [1] に示されたような近似的な剛性評価法は特別の場合を除いて適用不可能と考えられる。そこで谷沢らが有限要素法によりゼータ補強板の等価弾性係数を求めようとする際に、より厳密で一般的な計算法を確立する必要に迫られた [4]。ここでは計算法と計算例を中心に考察してあるが、本小論ではどのような考え方に基づいて計算法が成立したかの説明に重点を置く。

本理論の展開の上で最も参考になったのは、複合材料の等価弾性係数の決定法であった。林 [5] などに要約されているように、等価弾性係数の算出法にはいくつかの近似公式も用いられているが、より厳密な手法としては周期性を有するモデルを用いたものがある (例えば小林, 石川 [6], 石川, 小林 [7] など)。この種の理論は均質化の理論と総称されており、漸近展開法に基づいた厳密な数学的考察もかなりの部分まで完成している (例えば Bensoussan, Lions, Papanicolaou [8])。その手法の概要は、基本周期領域を考えて、巨視的に見て様な変形状態を表わす変位の微視的分布を求めることにある。この変位形がわかれば、それを基礎に比較的簡単な公式を用いて、等価弾性係数を決定できる。

本理論は形式的には通常の均質化の理論と類似なものになった。ただし、平板理論と対応させるためには、若干の工夫が必要であった。本文では等価弾性係数の決定法を中心に、直観的に理論を説明していく。厳密な数学的考察のためには、均質化の理論の他に、平板理論の数学的解析 (Ciarlet, Destuynder [9]) の結果が必要であって、そのためには現段階では未だ準備不足の状態である。本小論はそのような解析のための理論の形式的整備でもあって、今後の研究のための第一ステップである。

本論文の次節以下の内容は次のとおりである。2節では3次元弾性論から必要事項を抜き出して説明する。同様に3節は平板理論の概要である。第4節が主題の等価剛性の決定法を述べた節であり、2節, 3節の内容を利用して直観的に決定法を導く。5節は得られる等価弾性係数の性質のいくつかについて述べたもので、直観的に予想される結果のいくつかを、やや厳密に導いてみたものである。

本理論の特殊な問題への応用例は、例えばすでに挙げた文献 [4] に与えられているが、他の類似な問題への適用はほとんど直接的に可能と思われる。

## 2. 3次元弾性論から

本節では3次元弾性論について、線形理論の範囲で必要な事項を整理し、同時に後で使用する記号の準備をする。座標系としてはデカルト座標系を用い、各成分を  $x$ ,  $y$ ,  $z$  で表わす。なお、弾性論とその変分原理については、Washizu [10] を参照されたい。

### 2.1 変位, ひずみ, 応力

3次元弾性論においては、まず3次元物体の変位として  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の変位成分  $u$ ,  $v$ ,

$w$  を考える。以下では、まとめて次の縦ベクトルで表わす。

$$\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T \quad (1)$$

これは  $x$ ,  $y$ ,  $z$  のベクトル関数である。また、右上に付けた記号  $T$  はマトリックスの転置を表わす。

次に局所の変形を表わす量として、ひずみを用いる。これは2階のテンソル量であるが、ここではテンソルとしての本格的な使用はしないので、形式的に次のような6成分縦ベクトルとして扱う。

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T \quad (2)$$

$\boldsymbol{\epsilon}$  の各成分は変位の1階導関数を用いて次のように表わされる。

$$\begin{cases} \epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \epsilon_z = \partial w / \partial z \\ \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x, \quad \gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{cases} \quad (3)$$

$\boldsymbol{\epsilon}$  は各  $\mathbf{u}$  に対して一つ定まるので、その依存性を明示したい場合には  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$  と書く。

さらに、3次元物体内に発生する内力を表わす量として応力を考える。これも2階のテンソル量であるが、ここでは次のようなベクトルとして扱って十分である。

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}]^T \quad (4)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  の各成分の具体的な意味については省略するが、以上の記号は、 $\boldsymbol{\epsilon}$  の場合と同様、常識的なものである。

線形弾性論の仮定として、 $\boldsymbol{\sigma}$  と  $\boldsymbol{\epsilon}$  の間に次の線形関係が成立するものとする。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

ここで  $\mathbf{E}$  は6次正方マトリックスであり、弾性係数マトリックスと呼ぼう。 $\mathbf{E}$  は場所には依存し得るが、 $\boldsymbol{\epsilon}$  には依存しない。 $\mathbf{E}$  は対称かつ正定値と仮定するのが普通である。(5)を(一般化) Hooke 則と呼ぶこともある。(5)と(3)により、 $\boldsymbol{\sigma}$  と  $\mathbf{u}$  を結びつけることができる。 $\mathbf{u}$  への依存性を明示するため、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  と書くことがあるが、このような記法は他の量に対しても使用することがある。

## 2.2 ひずみエネルギー等の定義

二つの変位場  $\mathbf{u}_1$  と  $\mathbf{u}_2$  に対し、次のスカラー量を定義する。

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &\equiv \iiint_V \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1)\}^T \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_2) dx dy dz \\ &= \iiint_V \{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_1)\}^T \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_2) dx dy dz \\ &= \iiint_V \{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_1)\}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) dx dy dz \end{aligned}$$

$$= I(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) \quad (6)$$

ここで  $\mathbf{E}$  の対称性を用いた。また、 $V$  は体積積分を実行する領域を示すが、後には  $x, y$  方向に周期性を有する物体の基本周期領域として用いることが多い。

また上記の  $I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  を用いて、変位場  $\mathbf{u}$  に対し

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (7)$$

なる量を定義する。この量は弾性体の（領域  $V$  に対する）ひずみエネルギーと呼ばれる。

さらに領域  $V$  に関する体積平均を次の記号で表わす。

$$\langle \mu \rangle = \left\{ \iiint_V \mu dx dy dz \right\} / \left\{ \iiint_V dx dy dz \right\} \quad (8)$$

$\mu$  は  $x, y, z$  に関するスカラー関数、あるいはベクトル関数などであって、必要に応じてさまざまな量が  $\mu$  の部分に代入される。

### 2.3 平衡方程式

ここで3次元弾性体が満たすべき平衡方程式について、次節以下での使用のための最小限の説明をする。

いま3次元物体に体積力や表面力等の外力が作用していないとすると、弾性体の実際の変位場  $\mathbf{u}$  は、許容し得る全変位場の中で、ひずみエネルギーを最小化するものになる。つまり

$$U(\mathbf{u}) \left[ = \frac{1}{2} I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right] \text{ の最小化}$$

$\mathbf{u}$  には必要に応じて何らかの拘束条件、例えば幾何学的境界条件、周期条件などが付加される。線形問題では拘束条件も一般に線形である。そのような場合には、許容し得る変位場の条件として、与えられた拘束条件を加える。以上の原理は最小ポテンシャルエネルギーの原理の特別な場合である。

さて、変分学の教えるところによれば、 $U(\mathbf{u})$  を最小にする  $\mathbf{u}$  の満たすべき条件は

$$I(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = 0 \quad (9)$$

である。ただし、 $\mathbf{u}$  に対する拘束条件は線形とする。上式で  $\delta\mathbf{u}$  は  $\mathbf{u}$  の許容し得る任意の変分であって、やはり変位場であるが、満たすべき拘束条件は一般に  $\mathbf{u}$  の拘束条件を斉次にしたものになる。変分原理については例えば Ciarlet [11] を参照されたい。

さて定義より、

$$I(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \iiint_V \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) dx dy dz \quad (10)$$

であるから、 $\delta\mathbf{u} = [\delta u \ \delta v \ \delta w]^T$  に対して (10) は下記のような項の和である。

$$\iiint_V \sigma_x(\mathbf{u}) \varepsilon_x(\delta\mathbf{u}) dx dy dz = \iiint_V \sigma_x(\mathbf{u}) \partial \delta u / \partial x dx dy dz \quad (11)$$

(11) 等に Green の公式を適用すると、体積積分の項からは例えば次のような項を得る。

$$-\iiint_V (\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z) \delta u \, dx \, dy \, dz \quad (12)$$

上記で  $\delta u$  等は許容し得る任意の変分であるから、 $\mathbf{u}$  に対する拘束条件が過剰でなければ、 $\sigma(\mathbf{u})$  の満たすべき条件式として通常は次式を得る。

$$\begin{cases} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z = 0 \\ \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial z = 0 \\ \partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y = 0 \end{cases} \quad (13)$$

これは体積力の存在しない場合の平衡方程式であり、 $\mathbf{u}$  を完全に規定するには、さらに境界条件等が必要になる。拘束条件が複雑な場合には平衡方程式も複雑になる可能性があるが、そのような場合には、むしろ(9)のままで扱った方が便利である。(9)を近似的に解く際には、変分原理に基づく解法、例えば有限要素法が直接的に使用できる。具体的な計算例については、例えば文献[4]を参照されたい。

### 3. 平板理論から

#### 3.1 理論の概要

3次元弾性体の  $z$  方向に占める大きさが小さく(すなわち薄く)、ほとんど  $x, y$  面に平行な平面とみなせる場合には、3次元弾性論を簡略化した平板理論を用いることができる。ここでは3次元物体が高さの非常に小さい柱状領域  $V$  を占めているとする。すなわち、まず平面  $z=0$  上のある領域  $S$  を考え、 $S$  の点を  $(\bar{x}, \bar{y})$  とする。すると  $V$  の点  $(x, y, z)$  は、すべて次のように表わされる。

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad z_1 \leq z \leq z_2 \quad (14)$$

$V$  は  $z$  方向に最小値  $z_1$  から最大値  $z_2$  までの間を占める。次の量

$$h = z_2 - z_1 > 0 \quad (15)$$

を板厚と呼ぶ。 $h$  は物体の  $x, y$  面内の広がり寸法に比較してかなり小さいと仮定する。なお、通常は  $z_1 \leq 0 \leq z_2$  のように  $z$  座標を選び、 $z=0$  を基準面と呼ぶ。基準面の選び方は一意ではないが、物体の占める平均的な平面として扱うことが多い。平板理論については Washizu [10] を参照されたい。

なお、 $S$  での2次元的平均量を表わす記号として  $[ \ ]$  を用いる：

$$[ \mu ] = \iint_S \mu \, dx \, dy / \iint_S \, dx \, dy \quad (16)$$

平板理論においては、まず  $z$  方向の垂直応力  $\sigma_z$  は他の応力成分に比較して小さいとして無視する：

$$\sigma_z = 0 \quad (17)$$

応力-ひずみ関係式 (5) に上式を代入し、 $\mathbf{E}$  の正值性を利用すれば、 $\boldsymbol{\epsilon}$  中の  $z$  方向垂直ひずみ成分  $\epsilon_z$  を消去できる。すなわち、 $\epsilon_z$  は他のひずみ成分に対する従属量として扱え、陽には必要でなくなる。このようにして、 $\boldsymbol{\sigma}$  から  $\sigma_z$  を除いた5成分縦ベクトル  $\boldsymbol{\sigma}^*$  と、 $\boldsymbol{\epsilon}$  から  $\epsilon_z$  を除いた5成分縦ベクトル  $\boldsymbol{\epsilon}^*$  の間に、次の関係式を確立できる。

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{E}^* \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (18)$$

ここで  $\mathbf{E}^*$  は上記のように  $\mathbf{E}$  を変形・縮小して得られる5次正方マトリックスで、 $\mathbf{E}$  同様、場所のみの関数で、しかも対称で正定値である。 $\mathbf{E}^*$  の成分を  $E_{11}^* \cdots E_{55}^*$  と書く。

次に弾性体の変位  $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T$  は下記の形をしていると仮定する。

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta(x, y), & v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi(x, y), \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (19)$$

したがって  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  は  $z$  方向に1次式と仮定したことになる。(19)を(3)に代入すれば、 $\boldsymbol{\epsilon}^* = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$  の各成分は次のようになる。

$$\begin{cases} \epsilon_x = \partial u_0 / \partial x + z \partial \theta / \partial x, & \epsilon_y = \partial v_0 / \partial y + z \partial \phi / \partial y \\ \gamma_{xy} = \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x + z (\partial \theta / \partial y + \partial \phi / \partial x) \\ \gamma_{xz} = \theta + \partial w_0 / \partial x, & \gamma_{yz} = \phi + \partial w_0 / \partial y \end{cases} \quad (20)$$

なお(3)を直接用いると、(19)の仮定変位場に対しては  $\epsilon_z = 0$  となる。他方、(17)により  $\sigma_z = 0$  であるから、3次元弾性体の変形としては矛盾が生じ得ることになる。しかし、3次元弾性体の変形状態の漸近展開の意味での支配項を見出すという意味では、(17)と(19)の間には何ら矛盾のないことが数学的に示されている(例えば Ciarlet and Destuynder [9] 参照)。

通常の平板理論においては、(20)において、さらに  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  を仮定する。この仮定を Kirchhoff の仮定と呼ぶ。したがって、

$$\theta = -\partial w_0 / \partial x, \quad \phi = -\partial w_0 / \partial y \quad (21)$$

が成立し、変位場は次のように書ける。

$$u = u_0 - z \partial w_0 / \partial x, \quad v = v_0 - z \partial w_0 / \partial y, \quad w = w_0 \quad (22)$$

また、ひずみとして必要な成分は次のように書ける。

$$\epsilon_x = e_x + z k_x, \quad \epsilon_y = e_y + z k_y, \quad \gamma_{xy} = e_{xy} + z k_{xy} \quad (23)$$

ただし、

$$\begin{cases} e_x = \partial u_0 / \partial x, & e_y = \partial v_0 / \partial y, & e_{xy} = \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \\ k_x = -\partial^2 w_0 / \partial x^2, & k_y = -\partial^2 w_0 / \partial y^2, & k_{xy} = -2 \partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{cases} \quad (24)$$



(23) 以外のひずみ成分は零もしくは不要なものとなる。

(23) により、ひずみが定まったので、(18) を用いれば応力  $\sigma^*$  も定められることになる。ただし  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  と仮定してあるので、ひずみエネルギー等の計算では  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  を用いる必要はないし、しかも (18) を用いて得られる  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  は必ずしも適切な近似とは言えないことが知られている。結局、応力として必要なのは  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  のみであって、ひずみとの関係は次のように書ける。

$$\sigma^{**} = E^{**} \epsilon^{**} \quad (25)$$

ここに、

$$E^{**} = \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* & E_{13}^* \\ E_{21}^* & E_{22}^* & E_{23}^* \\ E_{31}^* & E_{32}^* & E_{33}^* \end{bmatrix}, \quad \sigma^{**} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon^{**} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

また、平板理論においては、応力そのものよりも、次式によって定義される  $z$  方向の積分量を基本量として扱うのが普通である。

$$N = \int_{z_1}^{z_2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad M = \int_{z_1}^{z_2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (27)$$

ここで  $N, M$  はともに 3 成分縦ベクトルであるが、成分表示が必要であれば次のように書く。

$$N = [N_x \ N_y \ N_{xy}]^T, \quad M = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T \quad (28)$$

$N$  は面内合応力、 $M$  はモーメントと呼ぶことがある。

さらに次の記号を定義しておく。

$$e = [e_x \ e_y \ e_{xy} \ k_x \ k_y \ k_{xy}]^T, \quad e_0 = [e_x \ e_y \ e_{xy}]^T, \quad k = [k_x \ k_y \ k_{xy}]^T \\ s = [N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy}]^T = [N^T \ M^T]^T \quad (29)$$

さて平板に対して (22) の形の 2 つの変位場  $u_1, u_2$  を考えると、 $\epsilon_z(u_1) = \epsilon_z(u_2) = 0$ ,  $\gamma_{xz}(u_1) = \gamma_{xz}(u_2) = \gamma_{yz}(u_1) = \gamma_{yz}(u_2) = 0$  より

$$I(u_1, u_2) = \iiint_V \{\sigma^{**}(u_1)\}^T \epsilon^{**}(u_2) dx dy dz \quad (30)$$

であるが、(30) 中に現れる項で

$$\int_{z_1}^{z_2} \sigma_x(u_1) \epsilon_x(u_2) dz = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_x(u_1) \{e_x(u_2) + z k_x(u_2)\} dz$$

$$= N_x(\mathbf{u}_1) e_x(\mathbf{u}_2) + M_x(\mathbf{u}_1) k_x(\mathbf{u}_2) \quad (31)$$

等に注意すれば,

$$I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \iint_S \{\mathbf{s}(\mathbf{u}_1)\}^T \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) dx dy \quad (32)$$

が成立する.  $S$  はすでに説明した  $x, y$  平面上の領域である. このようにして得られる, 平板での仮定変位場に対する特別な形の  $I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  を次の記号で示す.

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \iint_S \{\mathbf{s}(\mathbf{u}_1)\}^T \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) dx dy \quad (33)$$

また,  $U(\mathbf{u})$  に対応して次の量を定義する.

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (34)$$

この量を平板理論における (平板の) ひずみエネルギーと呼ぶ. 体積力や表面力等の外力が存在しない場合の平衡条件は, 許容し得る  $\mathbf{u}$  の範囲で  $W(\mathbf{u})$  を最小にすること, すなわち (9) に対応する次式で与えられる.

$$J(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (35)$$

ただし,  $\mathbf{u}$  とその変分  $\delta \mathbf{u}$  は平板理論で仮定された変位場に制限される.

ここで  $\mathbf{s}$  と  $\mathbf{e}$  との関係を求めておこう. まず (25) の  $\boldsymbol{\sigma}^{**} = \mathbf{E}^{**} \boldsymbol{\epsilon}^{**}$  および (23), (27) に注意すれば,  $\mathbf{s}$  と  $\mathbf{e}$  の関係は次のように整理できる.

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_{NN} & \mathbf{D}_{NM} \\ \mathbf{D}_{MN} & \mathbf{D}_{MM} \end{Bmatrix} \mathbf{e} (= \mathbf{D}\mathbf{e} \text{ と記す}) \quad (36)$$

ここに,

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{NN} = \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{E}^{**} dz, & \mathbf{D}_{NM} = \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{E}^{**} z dz \\ \mathbf{D}_{MN} = \mathbf{D}_{NM}^T = \mathbf{D}_{NM}, & \mathbf{D}_{MM} = \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{E}^{**} z^2 dz \end{cases} \quad (37)$$

$\mathbf{D}$  は (36) 中に現れた小マトリックスをまとめた 6 次正方マトリックスであるが, 対称かつ正定値である. また, (37) の諸マトリックスも対称であり, 特に  $\mathbf{D}_{NN}$  と  $\mathbf{D}_{MM}$  は正定値である.  $\mathbf{D}$  を平板の弾性係数マトリックスと呼ぼう. (36) の関係式は, 例えば次式等より導くことができる.

$$N_x = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_x dz = \int_{z_1}^{z_2} \{E_{11}^* (e_x + zk_x) + \dots\} dz \quad (38)$$

なお、 $\mathbf{D}$  を用いれば、 $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  は次のようにも書ける。

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \iint_S \{\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)\}^T \mathbf{D} \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) dx dy \quad (39)$$

さて、 $\mathbf{e}_c = [e_x^c \ e_y^c \ e_{xy}^c \ k_x^c \ k_y^c \ k_{xy}^c]^T$  を場所的に定数としたとき、これらの定数ひずみ成分を実現し、しかも(22)と整合する変位場  $\mathbf{u}_c = [u_c \ v_c \ w_c]^T$  は(24)より次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_c &= \alpha_1 + \alpha_2 y + e_x^c \cdot x + (1 - \bar{\theta}) e_{xy}^c \cdot y + z(-\alpha_5 + k_x^c \cdot x + \frac{1}{2} k_{xy}^c \cdot y) \\ v_c &= \alpha_3 - \alpha_2 x + e_y^c \cdot y + \bar{\theta} e_{xy}^c \cdot x + z(-\alpha_6 + k_y^c \cdot y + \frac{1}{2} k_{xy}^c \cdot x) \\ w_c &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y - \frac{1}{2} (k_x^c \cdot x^2 + k_y^c \cdot y^2 + k_{xy}^c \cdot xy) \end{aligned} \quad (40)$$

$\bar{\theta}$ ,  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) は任意の定数である。 $\bar{\theta}$  の入った項は  $(\alpha_2 - \bar{\theta} e_{xy}^c)$  を新たに  $\alpha_2$  と見ることにより、省略することもできる。なお  $e_x^c$ ,  $e_y^c$ ,  $e_{xy}^c$  は平板の基準面での  $x$ ,  $y$  面内方向ひずみ、 $k_x^c$ ,  $k_y^c$ ,  $k_{xy}^c$  は基準面での変形後の曲率あるいは捩り率とみなせる。

**注意** ここでは板厚方向のせん断ひずみが零、すなわち(21)なる仮定を用いた。この条件を外した、より一般的な理論も提案されているが、必ずしも確定的なものは存在しない。したがって、そのような理論における弾性定数マトリックスにも確定的なものは存在しない。ただし、どの理論でも  $\mathbf{D}$  の部分については一致しているようであり、変更せずに使用することができる。例えば Washizu [10] を参照。

なお、 $\mathbf{s}$  を与えるような応力場は、応力場の形が単純でないかぎり一意には定まらない。しかし、ひずみエネルギーにおいて用いる際には、同一の結果を与える。

### 3.2 基準面の変更に対する $\mathbf{D}$ と $\mathbf{D}^{-1}$ の変換則について

3.1において導いた弾性係数マトリックス  $\mathbf{D}$  は、基準面を  $z=0$  とした場合のものであるから、 $z=z_0$  を基準面にとり直し、 $z^\dagger = z - z_0$  なる座標変換を実行すると、新しい弾性定数マトリックス  $\mathbf{D}^\dagger$  は数値的に  $\mathbf{D}$  とは異なる。両者の間に成立すべき変換則を求めよう。以下、変換後の諸量を  $\dagger$  により識別する。

まず、変位に関する変換則  $u^\dagger = u_0 - z_0 \partial w_0 / \partial x - z^\dagger \partial w_0 / \partial x$  等から次式を得る。

$$\mathbf{e}_0^\dagger = \mathbf{e}_0 + z_0 \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}^\dagger = \mathbf{k} \quad (41)$$

また、(27) を新しい座標  $z^\dagger = z - z_0$  について計算し、応力の不変性に注意しながら  $z$  での積分に戻すならば下記の式が導かれる。ただし、下記では  $z_i^\dagger = z_i - z_0$  ( $i=1, 2$ ) である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}^\dagger = \int_{z_1}^{z_2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^\dagger \\ \sigma_y^\dagger \\ \tau_{xy}^\dagger \end{Bmatrix} dz^\dagger = \int_{z_1}^{z_2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \mathbf{N} \\ \\ \mathbf{M}^\dagger = \int_{z_1}^{z_2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^\dagger \\ \sigma_y^\dagger \\ \tau_{xy}^\dagger \end{Bmatrix} z^\dagger dz^\dagger = \int_{z_1}^{z_2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} (z - z_0) dz = \mathbf{M} - z_0 \mathbf{N} \end{array} \right. \quad (42)$$

(41), (42) により  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$  を  $\mathbf{e}^\dagger$ ,  $\mathbf{s}^\dagger$  で表示し, (36) に代入すれば, 次の関係式を得る.

$$\mathbf{s}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{NN}^\dagger & \mathbf{D}_{NM}^\dagger \\ \mathbf{D}_{MN}^\dagger & \mathbf{D}_{MM}^\dagger \end{bmatrix} \mathbf{e}^\dagger (= \mathbf{D}^\dagger \mathbf{e}^\dagger) \quad (43)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{NN}^\dagger &= \mathbf{D}_{NN}, \quad \mathbf{D}_{NM}^\dagger = \mathbf{D}_{NM} - z_0 \mathbf{D}_{NN} \\ \mathbf{D}_{MN}^\dagger &= (\mathbf{D}_{NM}^\dagger)^T, \quad \mathbf{D}_{MM}^\dagger = \mathbf{D}_{MM} - z_0 (\mathbf{D}_{NM} + \mathbf{D}_{MN}) + z_0^2 \mathbf{D}_{MM} \end{aligned} \quad (44)$$

(43) 中に現れた6次正方マトリックスが  $\mathbf{D}^\dagger$  である. また, (37) を新しい座標で計算し, 後で元の座標での積分に戻すことによっても, (44) と同一の結果を得る. 上記において,  $\mathbf{D}_{MN}$  の部分は基準面の変更に対して不変なことに注意しよう.

次にコンプライアンス・マトリックス  $\mathbf{C}$  を,  $\mathbf{D}$  の逆マトリックスによって定義する:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \quad (45)$$

基準面の変更に対する  $\mathbf{C}$  の変換則を求めておこう. まず,  $\mathbf{C}$  を次のように3次正方マトリックスに分割しておく.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{NN} & \mathbf{C}_{NM} \\ \mathbf{C}_{MN} & \mathbf{C}_{MM} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$\mathbf{C}$  は対称で正定値であるが,  $\mathbf{C}_{NN}$ ,  $\mathbf{C}_{MM}$  も対称かつ正定値であることに注意しておこう.

(43), (44) を求めたときと同様, (41), (42) により  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$  を  $\mathbf{e}^\dagger$ ,  $\mathbf{s}^\dagger$  で表わし, 関係式

$$\mathbf{e} = \mathbf{C} \mathbf{s} \quad (47)$$

に代入し整理する。すると次の結果が求められる。

$$e^\dagger = \begin{bmatrix} C_{NN}^\dagger & C_{NM}^\dagger \\ C_{MN}^\dagger & C_{MM}^\dagger \end{bmatrix} s^\dagger (=C^\dagger s^\dagger) \quad (48)$$

ただし、

$$\begin{cases} C_{NN}^\dagger = C_{NN} + z_0(C_{NM} + C_{MN}) + z_0^2 C_{MM} \\ C_{NM}^\dagger = C_{NM} + z_0 C_{MM}, \quad C_{MN}^\dagger = (C_{NM}^\dagger)^T, \quad C_{MM}^\dagger = C_{MM} \end{cases} \quad (49)$$

今度は  $C_{MM}$  が不変なことに注意しよう。

以上により  $D$  と  $C$  の変換則が確立された。一般の平板では基準面として固有なものが存在するわけではないから、 $D$  と  $C$  の数値も絶対的なものではない。ただし、 $D_{NN}$  と  $C_{MM}$  については、基準面の変更に関する限りは、不変であることが示された。

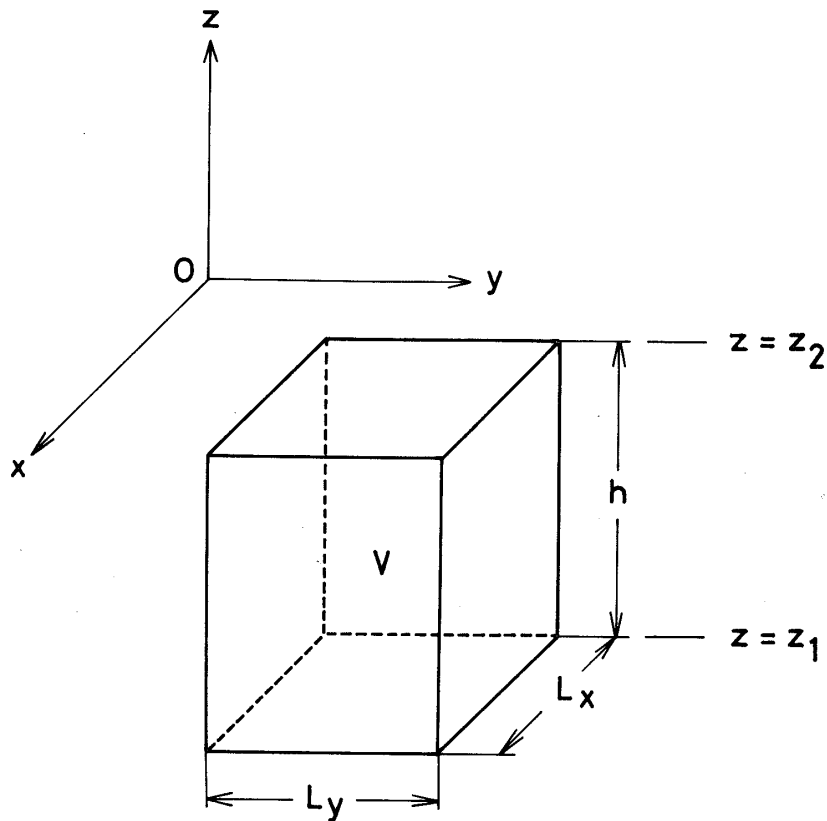
#### 4. 周期構造物に等価な平板の弾性係数マトリックスの決定法

前節で概観した平板理論では、暗に平板の  $x$ ,  $y$  方向の特性が均質に近いものと仮定していた。しかし現実には、 $x$ ,  $y$  方向の材料的あるいは幾何学的性質が平板の板厚  $h$  程度以下のスケールで急変する場合も少なくない。そのような場合には、前節の理論そのままでは満足すべき結果は期待できないであろう。本節ではそのような場合の一例として、材料的、幾何学的性質が  $x$ ,  $y$  面内に  $h$  程度の共通の基本周期をもって変化する場合を考える。このような構造物の変位やひずみ、応力は、おそらく周期程度のスケールで急変するであろう。しかしながら、周期スケールの変化を無視し、より巨視的な変化のみに注目するならば、そのような巨視的、平均的な変位、ひずみ、応力の挙動は、前節で考えた均質な平板の挙動に類似したものになると予想される。そこで、周期的構造物に巨視的に見て等価な均質平板の弾性係数マトリックスを算出する手法を考察する。そのような手法が妥当なためには、構造物の  $x$ ,  $y$  方向の全体的寸法が基本周期よりかなり大きい必要がある。なお、基本周期領域を第3図に示す。また、 $x$ ,  $y$  面内での基本周期領域を  $S$  で、対応する3次元領域を  $V$  で記す。

我々の目的は巨視的に見て (36) に対応する式を求めることであるが、そのためには  $e$  が巨視的に一様 (定数関数) の場合に、対応する (巨視的な)  $s$  がどのように定まることがわかればよい。  $s$  も巨視的には一様になろう。  $e$  が一様の場合には、前節同様、 $e_c$  と書く。対応する  $u$  は (40) で与えられる。この場合、ひずみは微視的に一様でないと考えられるが、特に理由がない限り、ひずみは考えている基本周期と同一の周期を有する周期関数になろう。その時の変位  $u$  は、(40) の  $u_c$  に周期関数  $u_p$  をたしたものになる：

$$u = u_c + u_p \quad (50)$$

なお、各  $e_c$  に対して  $u_c$  は一意には定まらないが、その不定性は剛体変位分 (式 (40) で  $\alpha_i (1 \leq i \leq 6)$  が現れる形の項) だけである。

第 3 図 基本周期領域  $V$ 

よって問題は、まず上記の  $\mathbf{u}$  をいかに決定すべきかということになる。ここでは  $\mathbf{u}$  は (50) の形に制限されてはいるが、外荷重は作用していないと考えてよかろう。すると一様ひずみ  $\mathbf{e}_c$  を指定したとき、巨視的にみて  $\mathbf{e}_c$  を実現するような最も自然な変位  $\mathbf{u}$  とは、ひずみエネルギー  $U(\mathbf{u})$  を (50) の形の関数の範囲で最小にするものであろう。すなわち、 $\mathbf{u}_c$  (あるいは  $\mathbf{e}_c$ ) を与えたとき、次式を満たす  $\mathbf{u}$  を見出せばよい。

$$I(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}_p) = 0 \quad (51)$$

ただし、 $\delta\mathbf{u}_c = \mathbf{0}$  ゆえ、 $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}_p$  であることを用いた。 $\delta\mathbf{u}_p$  は具体的には任意の周期関数である。(51) により記述される問題の解  $\mathbf{u}$  は剛体変位分を除いて一意に決定される。したがって、ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  あるいは応力  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  は一意に定まる。 $\mathbf{u}_c$  に対する  $\mathbf{u}$  を  $\mathbf{u}(\mathbf{u}_c)$  と書くことがある。

次に必要なのは弾性係数マトリックスの決定法である。その考え方として二つの方法を説明する。

第 1 の手法は、等価な均質平板のひずみエネルギーが適当な定数マトリックス  $\mathbf{D}$  を導入することにより次の形に書けるとする：

$$W(\mathbf{u}_c) = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{e}_c^T \mathbf{D} \mathbf{e}_c \, dx \, dy$$

$$= \frac{L_x L_y}{2} \mathbf{e}_c^T \mathbf{D} \mathbf{e}_c \quad (52)$$

ただし、 $L_x, L_y$  はそれぞれ  $x, y$  方向の基本周期である。そして、このひずみエネルギーは、 $\mathbf{e}_c$  をどのように選んでも、対応する3次元のひずみエネルギー  $U(\mathbf{u})$  に等しくなることを要請する：

$$W(\mathbf{u}_c) = U(\mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}_c)) \quad (53)$$

すなわち、

$$\mathbf{e}_c^T \mathbf{D} \mathbf{e}_c = \frac{2}{L_x L_y} U(\mathbf{u}) \quad (54)$$

$\mathbf{e}_c$  を変化させながら上式の右辺を計算すれば、 $\mathbf{D}$  の全成分が決定される。 $\mathbf{D}$  を等価弾性係数マトリックスと呼ぼう。

なお(53)の条件は、任意の2つの一様ひずみ状態  $\mathbf{e}_{c1}, \mathbf{e}_{c2}$  を考え、対応する  $\mathbf{u}_c$  をそれぞれ  $\mathbf{u}_{c1}, \mathbf{u}_{c2}$ 、また  $\mathbf{u}(\mathbf{u}_c)$  を  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  と書くととき、次式が成立することと一致する。

$$J(\mathbf{u}_{c1}, \mathbf{u}_{c2}) = I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \quad (55)$$

ここに、

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_{c1}, \mathbf{u}_{c2}) &= \iint_S \mathbf{e}_{c1}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_{c2} dx dy \\ &= L_x L_y \mathbf{e}_{c1}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_{c2} \end{aligned} \quad (56)$$

よって、

$$\mathbf{e}_{c1}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_{c2} = \frac{1}{L_x L_y} I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \quad (57)$$

上式で  $\mathbf{e}_{c1}, \mathbf{e}_{c2}$  を様々な単位ベクトルに選んで右辺を計算すれば、 $\mathbf{D}$  が決定される。 $\mathbf{D}$  は対称で正定値である。

第2の手法では、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}_c)$  について2節の3次元弾性論に従って  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  を求め、その上で(27)、(28)により  $\mathbf{s}(\mathbf{u})$  を計算する。さらに周期平均  $[\mathbf{s}(\mathbf{u})]$  を計算し、この量と  $\mathbf{e}_c$  とが、ある定数マトリックス  $\mathbf{D}'$  により次のように関連付けられることを要請する：

$$[\mathbf{s}(\mathbf{u})] = \mathbf{D}' \mathbf{e}_c \quad (58)$$

$\mathbf{e}_c$  を単位ベクトルに選べば、 $\mathbf{D}'$  の各成分を決定できる。

ここで第1の方法と第2の方法が同等、すなわち次式が成立することを示す。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' \quad (59)$$

そのために  $I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  を計算する. (51) より次式を得る ( $\mathbf{u}_{p2}$  は  $\mathbf{u}_2$  の周期部分である).

$$I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{c2} + \mathbf{u}_{p2}) = I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{c2}) \quad (60)$$

まず  $\mathbf{D}$  の定義により,

$$I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = L_x L_y \mathbf{e}_{c1}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_{c2} \quad (61)$$

他方  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{c2})$  を具体的に計算してみると次式を得る.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{c2}) = [e_x^{c2} + zk_x^{c2} \quad e_y^{c2} + zk_y^{c2} \quad 0 \quad e_{xy}^{c2} + zk_{xy}^{c2} \quad 0 \quad 0]^T \quad (62)$$

上式で  $e_x^{c2}$  等は,  $\mathbf{u}_{c2}$  に対応する  $e_x^c$  等を示す. 上式を利用すると,  $I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{c2})$  の計算では, (30) から (32) で成立したのと同様な式の変形が可能になり, 結局, 次式が導かれる.

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{c2}) &= \iiint_V \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1)\}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{c2}) dx dy dz \\ &= \iint_S \{\mathbf{s}(\mathbf{u}_1)\}^T \mathbf{e}_{c2} dx dy \\ &= L_x L_y [\mathbf{s}(\mathbf{u}_1)]^T \mathbf{e}_{c2} \\ &= L_x L_y \mathbf{e}_{c1}^T (\mathbf{D}')^T \mathbf{e}_{c2} \end{aligned} \quad (63)$$

$\mathbf{D}$  は対称ゆえ, (60), (61), (63) より (59) が得られる.

以上により等価な均質平板の弾性係数マトリックスの算出法が得られた. 実際の計算には第 2 の方法の方が便利であろう. また  $\mathbf{u}(\mathbf{u}_c)$  を近似的に求めるには有限要素法が便利であるが, 周期条件を処理するためには, 何らかの反復法で連立 1 次方程式を解く方が容易と思われる.

**注意**  $\mathbf{D}$  の正定値性は  $I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  の性質から従う. また  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{u}_c))$  は  $\mathbf{e}_c$  に関して線形になる. 本節では,  $\mathbf{e}$  が一様なことを, 一様ひずみ状態と便宜的に呼ぶことがあった.

## 5. 等価弾性係数マトリックスの性質

前節において, 周期構造物に巨視的に等価な均質平板の弾性係数マトリックスの算出法を示した. 本節では, このマトリックスが有する性質のいくつかについて述べる.

### 5.1 基準面の変更に対する等価弾性係数マトリックスの変換則

3.2 では均質な平板について, マトリックス  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{C}$  の基準面の変更に対する変換則を求めた. 周期構造物の等価弾性係数マトリックスとその逆マトリックス (コンプライアンス・マトリックス) について, 同様な変換則が成立するかどうか調べよう.

3.2 と同様に,  $z^\dagger = z - z_0$  なる座標変換を考える. 一様ひずみ成分  $\mathbf{e}_c$  に対しては, (41) と同様, 次式が成立する.



$$\mathbf{e}_{c_0}^\dagger = \mathbf{e}_{c_0} + z_0 \mathbf{k}_c^\dagger, \quad \mathbf{k}_c^\dagger = \mathbf{k}_c \quad (64)$$

上式で†は変換後の量を, また例えば  $\mathbf{e}_{c_0}$  は  $\mathbf{e}_c$  に対する  $\mathbf{e}_0$  を示す.  
他方,  $[\mathbf{s}(\mathbf{u}(\mathbf{u}_c))]$  に対しては, (42) と同様に次式が成立する.

$$[\mathbf{N}^\dagger] = [\mathbf{N}], \quad [\mathbf{M}^\dagger] = [\mathbf{M}] - z_0 [\mathbf{N}] \quad (65)$$

上式では  $\mathbf{u}(\mathbf{u}_c)$  に対する依存性は明示しなかった.

3.2 節と同様, (64) と (65) を (58) に代入すれば, 形式的には (44) と全く同じ変換則を得る. したがって前節で得た等価弾性係数マトリックスは, ある意味で仮想的な非実在の均質平板の弾性係数マトリックスであるが, 基準面の変更に関する限り, 実在の均質平板と同一の変換則が成立する.

まったく同様に, コンプライアンス・マトリックス  $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$  についても, 形式的に (49) と同様な変換則を得る.

ただし, すべての面で等価な均質平板が存在するわけではない. 例えば等価な  $\mathbf{E}$  マトリックスを見出すことは一般には不可能であると考えられ, 従って均質平板では成立した関係式  $\mathbf{D}_{NM} = \mathbf{D}_{MN}$  (式 (37) 参照) も一般には成立しないと思われる.

また最も単純な均質, 等方性の平板では基準面を中央面を選ぶことにより, 伸びと曲げを分離できる (すなわち  $\mathbf{D}_{NM} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{C}_{NM} = \mathbf{0}$ ) が, 一般にはこのような面は存在しないのが普通である.

## 5.2 巨視的な一様ひずみ状態における応力, ひずみの諸性質

4 節では,  $\mathbf{e}$  が巨視的に一様な場合の変位を考え, それを用いて等価弾性係数マトリックスを決定した. このときの微視的なひずみ, 応力の状態は一般には一様ではないが, その平均的な量については何らかの性質が成立すると思われる.

まず (51) において,  $\delta \mathbf{u}_p$  を次のように選んでみよう.

$$[u \ v \ w] = [z \ 0 \ 0], \quad [0 \ z \ 0], \quad [0 \ 0 \ z] \quad (66)$$

例えば第 1 の場合には, ひずみ成分の非零成分は

$$\gamma_{xz} = 1 \quad (67)$$

のみとなる. したがって, この場合には次式を得る.

$$I(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}_p) = \iiint_V \tau_{xz} dx dy dz = 0 \quad (68)$$

あるいは,

$$\langle \tau_{xz} \rangle = 0 \quad (69)$$

第 2, 第 3 の場合にも同様な計算により次式を得る.

$$\langle \tau_{yz} \rangle = 0, \quad \langle \sigma_z \rangle = 0 \quad (70)$$

すなわち、 $\mathbf{e}$  が巨視的一様な状態では、 $z$  方向の垂直応力  $\sigma_z$ 、剪断応力  $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yz}$  は平均的には零となる。これと (17) を比較してみよう。ただし剪断ひずみが平均的に零、すなわち  $\langle \gamma_{xz} \rangle = \langle \gamma_{yz} \rangle = 0$  とは一般にはならないようである。

次にひずみ成分について考える。いま  $x$  方向の垂直ひずみ成分  $\varepsilon_x$ 、さらに定数  $e_x^c$ 、 $k_x^c$  を考える。次の量を定義する。

$$K = \iiint_V (\varepsilon_x - e_x^c - zk_x^c)^2 dx dy dz \quad (71)$$

これは  $\varepsilon_x$  を  $e_x^c + zk_x^c$  で近似したときの誤差の分散量とみなせる。 $K$  が最小になるように  $e_x^c$ 、 $k_x^c$  を選ぶことを考える。この条件は

$$\partial K / \partial e_x^c = \partial K / \partial k_x^c = 0 \quad (72)$$

で与えられ、具体的には次のように書くことができる。

$$\langle \varepsilon_x - e_x^c - zk_x^c \rangle = 0, \quad \langle z(\varepsilon_x - e_x^c - zk_x^c) \rangle = 0 \quad (73)$$

上記の第1式は、 $e_x^c + zk_x^c$  の平均値が  $\langle \varepsilon_x \rangle$  に等しいことを示し、第2式は  $e_x^c + zk_x^c$  の  $z$  に関する1次モーメントの平均値が  $\langle z\varepsilon_x \rangle$  に等しいことを意味している。

いま  $\mathbf{e}_c$  を与え、対応する  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{u}_c))$  を考える。このとき  $\varepsilon_x$  について (73) が成立していることを示そう。

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{u}_c + \mathbf{u}_p) = \mathbf{e}(\mathbf{u}_c) + \mathbf{e}(\mathbf{u}_p) \quad (74)$$

ゆえ、 $\varepsilon_x$  は次のようになる。

$$\varepsilon_x = e_x^c + zk_x^c + \varepsilon_x^p \quad (75)$$

ただし  $\varepsilon_x^p$  は  $\mathbf{e}(\mathbf{u}_p)$  の第1成分である。よって、

$$\langle \varepsilon_x - e_x^c - zk_x^c \rangle = \langle \varepsilon_x^p \rangle, \quad \langle z(\varepsilon_x - e_x^c - zk_x^c) \rangle = \langle z\varepsilon_x^p \rangle \quad (76)$$

さて  $\mathbf{u}_p$  の第1成分を  $u_p$  と書くと、

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_x^p \rangle h L_x L_y &= \iiint_V \partial u_p / \partial x dx dy dz, \\ \langle z\varepsilon_x^p \rangle h L_x L_y &= \iiint_V z \partial u_p / \partial x dx dy dz, \end{aligned} \quad (77)$$

であるが、 $u_p$  が  $x$  方向に周期  $L_x$  の周期関数であることから

$$\iiint_V \partial u_p / \partial x dx dy dz = \iiint_V z \partial u_p / \partial x dx dy dz = 0 \quad (78)$$

となる。すなわち (73) が成立している。

同様な結果は  $\epsilon_y, \gamma_{xy}$  についても得られる。すなわち、巨視的に一様なひずみ状態  $e_c$  においては、 $e_x^c + zk_x^c, e_y^c + zk_y^c, e_{xy}^c + zk_{xy}^c$  はそれぞれ  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  に対する平均二乗的な意味での最良近似になっていることがわかる。これで巨視的に一様なひずみの意味がより明確になった。

同様に次式が成立することも注意しておく。ただし  $w$  が2回微分可能とする。

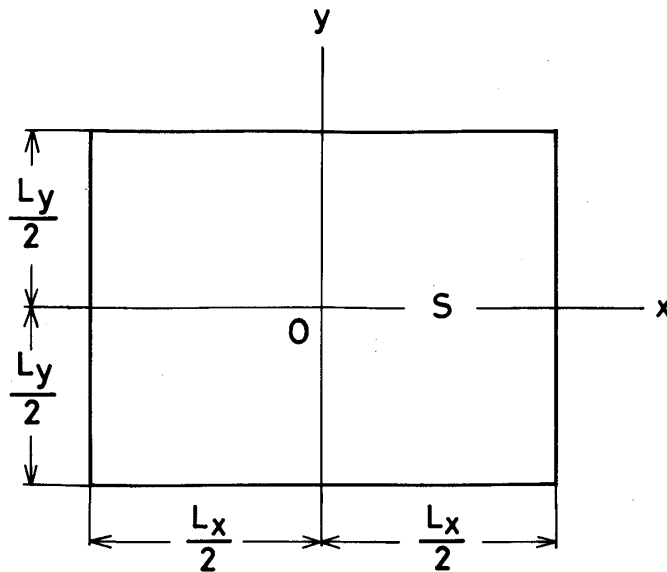
$$k_x^c = -\langle \partial^2 w / \partial x^2 \rangle, k_y^c = -\langle \partial^2 w / \partial y^2 \rangle, k_{xy}^c = -2\langle \partial^2 w / \partial x \partial y \rangle \quad (79)$$

**注意** 本節では領域  $V$  は高さ  $h$ ,  $x$  方向の長さ  $L_x$ ,  $y$  方向の長さ  $L_y$  の直方体領域と考えている。実際には穴が存在するような場合も考えられるが、その場合には、穴の部分には適当な変位を補外し、また応力はそこで零であると考えれば、上記と同じ結果を導くことができる。その場合には、平均量といっても実質的でない部分の寄与も含むことになる。

### 5.3 基本周期領域の対称性と等価均質平板の直交異方性

$x, y$  面内での基本周期領域  $S$  として長方形を考えてよいが、さらに  $x, y$  座標軸がその中心線になるように選んでおく(第4図参照)。基本周期領域において、周期構造物の幾何学および材料的性質が  $yz$  面もしくは  $xz$  面に関して対称性を有することがある。そのような場合には、4節で考えた等価均質平板は、直交異方性平板と類似な性質を有することを示そう。 $yz$  面に関する対称性のことを、 $x$  に関する対称性と呼ぼう。以下では  $x$  に関する対称性のみを扱う。 $y$  に関する対称性も同様に解析できる。

材料的な対称性については、単にマトリックス  $\mathbf{E}$  の各成分が  $x$  に関して対称な関数であるばかりでなく、 $\mathbf{E}$  中の  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  に関する部分と残りの部分とが完全に分離していることを要請する。すなわち、 $\mathbf{E}$  の各成分を  $E_{ij}$  と書いたとき、次の形になる。



第4図  $xy$  面内の基本周期領域  $S$  と座標軸

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & E_{36} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{54} & E_{55} & 0 \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (80)$$

$V$ における任意の関数  $f$  は、 $x$ に関する対称部分  $f_s$  と逆対称部分  $f_a$  の和に一意に表わせる：

$$f = f_s + f_a \quad (81)$$

また  $x$  に関して対称な関数  $f$  と逆対称な関数  $g$  の積の  $V$  での積分は零になる：

$$\iiint_V fg dx dy dz = 0 \quad (82)$$

変位  $\mathbf{u} = [uvw]^T$  と対応するひずみ  $\boldsymbol{\epsilon}$  を考える。その  $x$  に関する対称性の関係を第 1 表に示す。表で  $s$  は対称、 $a$  は逆対称を意味する。表の読み方は、例えば  $u$  が  $a$ 、 $v$  が  $s$ 、 $w$  が  $s$  であれば、 $\epsilon_x$  は  $s$ 、 $\epsilon_y$  は  $s$ 、 $\dots$  となる。同様に  $\mathbf{E}$  が (80) を満足し、しかも各成分が  $x$  に関して対称の場合には、 $u$ 、 $v$ 、 $w$  の対称性と応力  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  の対称性の関係は第 2 表のようになる。簡単のため、第 1 表で 1 行目の系列を対称な変位、ひずみ、2 行目の系列を逆対称な変位、ひずみと呼ぼう。同様に応力については、第 2 表の 1 行目の系列を対称な

第 1 表 変位とひずみの  $x$  方向 ( $yz$  面) に関する対称性の対応

$u$	$v$	$w$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_z$	$\gamma_{xy}$	$\gamma_{xz}$	$\gamma_{yz}$	系 列
$a$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$a$	$a$	$s$	対 称
$s$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$	$s$	$s$	$a$	逆 対 称

( $s$  : 対称,  $a$  : 逆対称)

第 2 表 変位と応力の  $x$  方向 ( $yz$  面) に関する対称性の対応

$u$	$v$	$w$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	系 列
$a$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$a$	$a$	$s$	対 称
$s$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$	$s$	$s$	$a$	逆 対 称

( $s$  : 対称,  $a$  : 逆対称)

応力，2行目を逆対称な応力と呼ぶ。

(81)と同様に，任意の変位  $\mathbf{u}$  は対称部分と逆対称部分に分解できる（この対称，逆対称は第1表，第2表の規約に従う）：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_a \quad (83)$$

ここで (51) を考え，各変位を対称部分と逆対称部分に分解して表示する。

$$I(\mathbf{u}_{cs} + \mathbf{u}_{ca} + \mathbf{u}_{ps} + \mathbf{u}_{pa}, \delta\mathbf{u}_{ps} + \delta\mathbf{u}_{pa}) = 0 \quad (84)$$

(82)と同様に  $I(\mathbf{u}_{cs}, \delta\mathbf{u}_{pa}) = 0$  等が成立することに注意すれば，上式は次式と同等である。

$$\begin{cases} I(\mathbf{u}_{cs} + \mathbf{u}_{ps}, \delta\mathbf{u}_{ps}) = 0 \\ I(\mathbf{u}_{ca} + \mathbf{u}_{pa}, \delta\mathbf{u}_{pa}) = 0 \end{cases} \quad (85)$$

(85) からわかるように， $\mathbf{u}_c$  が対称変位であれば，第2式で  $\delta\mathbf{u}_{pa} = \mathbf{u}_{pa}$  と置くことにより  $I(\mathbf{u}_{pa}, \mathbf{u}_{pa}) = 0$  を得るから， $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_p$  も剛体変位分を適切に除去すれば対称変位となる。 $\mathbf{u}_c$  が逆対称変位ならば， $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_p$  も本質的に逆対称変位である。

ここで (57) を考え， $\mathbf{e}_{c1}$ ， $\mathbf{e}_{c2}$  を次のように選んでみる。

$$\mathbf{e}_{c1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{e}_{c2} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (86)$$

このとき  $\mathbf{e}_{c1}$  は対称なひずみであって， $\mathbf{u}_1$  は剛体変位分を除けば対称変位になる。また  $\mathbf{e}_{c2}$  は逆対称ひずみであり， $\mathbf{u}_2$  は逆対称変位と考えてよい。よって (86) に対しては次式を得る。

$$D_{13} = \mathbf{e}_{c1}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_{c2} = \frac{1}{L_x L_y} I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0 \quad (87)$$

ただし  $\mathbf{D}$  の成分を  $D_{ij}$  で表わす。全く同様にして，次の結果を得る。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & D_{14} & D_{15} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & D_{24} & D_{25} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ D_{51} & D_{52} & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & D_{63} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (88)$$

上式は等価弾性係数マトリックスが， $x$  軸， $y$  軸を直交異方性軸とする均質な直交異方性平板の弾性係数マトリックスと同様な性質を有することを示している。なお本節の議論は，群論を用いて整理すると，より見通しが良くなる。

#### 5.4 通常の平板理論との無矛盾性

通常の平板理論では,  $x$ ,  $y$  方向の幾何学的, 材料的性質が一様 (均質) の場合を基本として扱っている. したがって, 本小論で述べた理論をこのような場合に適用した場合に, 等価弾性係数マトリックスが通常の平板理論によるものと同一の結果を与えるか否かは, 一応は確認しておくべき事項である.

ここでは 3 次元物体は  $z$  方向には  $z_1 \leq z \leq z_2$  の位置全体を占め,  $x$ ,  $y$  方向には十分に大きく広がっているものとする. また材料特性を表わす  $\mathbf{E}$  は  $z$  のみの関数であって,  $z$  方向の剪断成分に関する部分は残りの部分と分離しているものとする. すなわち  $\mathbf{E}$  の形は次のようであるとする.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & 0 & 0 \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & E_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{65} & E_{66} \end{pmatrix} \quad (89)$$

なお注意すべきことは, このような物体では基本周期領域として  $x$ ,  $y$  方向の辺長が任意の直方体 (高さは  $h = z_2 - z_1$ ) を考えてよいことである. このときに, 一様なひずみ場を実現する変位場や, 対応するひずみ, 応力場等を考えてみる.

$x$ ,  $y$  方向の一様性と周期の任意性から, 4 節の (50) で考えた変位場  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_p$  中の  $\mathbf{u}_p$  は  $z$  のみの関数になる. すなわち,

$$u = u_c(x, y, z) + u_p(z), \quad v = v_c(x, y, z) + v_p(z), \quad w = w_c(x, y) + w_p(z) \quad (90)$$

$\mathbf{u}_c = [u_c \ v_c \ w_c]^T$  は (40) で定義した変位で, 定数ベクトル  $\mathbf{e}_c$  に対応するものである. このとき, (3) を用いればひずみは次の形になることがわかる.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x(z) = e_x^c + zk_x^c, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(z) = e_y^c + zk_y^c, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(z) \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(z) = e_{xy}^c + zk_{xy}^c, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}(z), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(z) \end{cases} \quad (91)$$

よって, ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は  $z$  のみの関数である. また (5) を用いれば, 応力  $\boldsymbol{\sigma}$  も  $z$  のみの関数であることがわかる.

$\mathbf{u}$  の満たすべき平衡方程式は (13) で与えられているが, まず第 1 式と第 2 式に注目する:

$$\begin{cases} \partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z = 0 \\ \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial z = 0 \end{cases} \quad (92)$$

応力が  $z$  のみの関数であることから、 $\partial\sigma_x/\partial x=0$  等が成立し、したがって  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  は定数関数となる。さらに  $z=z_1, z_2$  においては表面力が作用していないと考えられるから、結局、次式がいたるところで成立する。

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (93)$$

次に (13) の第3式に注目する。

$$\partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y = 0 \quad (94)$$

同様の考察により  $\sigma_z$  は定数関数となるが、 $z=z_1, z_2$  での境界条件を考慮すれば、次式がいたるところで成立することがわかる。

$$\sigma_z = 0 \quad (95)$$

(95) により、考えている応力、ひずみに対しては、(18) を用いてよいことがわかる。さらに (89) を考慮すれば次式が成立していることもわかる。

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (96)$$

よって (25) の関係式をそのまま使うことができ、この式を  $z$  方向に積分することにより、(36) と全く同一の式が得られる。(91) からわかるように、考えている応力、ひずみ場は  $x, y$  方向に完全に一樣ゆえ、ここでの計算は (58) を求めたことにもなっている。すなわち、本理論で求めた等価弾性係数マトリックスと、通常の平板理論による弾性係数マトリックスは一致する。したがって本小論の理論は、通常の平板理論の拡張になっていることがわかる。**注意** 一般には  $w_p(z) \neq 0$  と考えられるが、この項は 3.1 節で触れた平板理論の矛盾を補正する項ともみなせる。また (96) が成立していれば、 $u_p(z), v_p(z)$  は考えなくてよい。しかし (89) が仮定されていないと、(96) は一般には不成立であって、(93) のみが成立する。この場合には  $\mathbf{E}^{**}$  を修正する必要があると思われ、そうであれば (36) の  $\mathbf{D}$  も修正される。通常の Kirchhoff の平板理論では、暗に (89) に相当する仮定が含まれているのではなかろうか？

## 6. 結 言、補 足

$x, y$  面内に周期性を有する 3 次元的構造物について、均質な平板としての等価弾性係数マトリックスの算出法を直観的に考察した。まず 3 次元理論、通常の均質平板の理論について整理した後で、巨視的に一樣な伸びと曲げのひずみ状態とは何かを考えることにより、等価弾性係数マトリックスを導いた。巨視的に一樣とは、ひずみでは基本周期と同じ周期で変動する状態であり、変位で見れば均質平板の一樣ひずみ状態を表わす変位に周期変位を重ね合わせたものと考えられる。等価弾性係数マトリックスを導くに当たっては、ひずみエネルギーが等しいという要請に基づくか、合応力の周期平均を用いるかの二つの方法が直ちに思い付くが、両者は同等であることが証明される。さらに等価弾性係数マトリックスの基準面の変更に関する変換則、巨視的に一樣ひずみ状態の検討、巨視的に直交異方性になるための十分

条件, 通常の平板理論と本理論との関係についても論じた.

本理論により等価弾性係数マトリックスが求められれば, それを用いて, 静的なつり合い状態を計算でき, 巨視的な変位, ひずみ, 合応力等が決定される. さらに巨視的諸量を用いて微視的諸量を推定することも, ある程度は可能である. また, 動的な解析のためにも, ここで用いた等価弾性係数マトリックスを使用できる (文献[1]).

本理論では板厚方向のせん断変形を無視した Kirchhoff の平板理論を基本にした. 実際にはサンドイッチ板などではせん断変形の効果が大きい, 対応する均質平板の理論が確定していない現状では, これ以上の結果を一般的に導くことには無理がある. また本論文の考察は数学的には全く厳密性を欠いているが, 漸近展開に基づく厳密な理論解析については今後の課題としたい.

### 謝 辞

本研究の動機となる話題を提供して頂き, また, ゼータ補強板の図面 (第2図) の転載を許可して頂いた東京大学宇宙航空研究所三浦研究室に謝意を表します.

1979年11月16日 航空力学部

### 参 考 文 献

- [1] M.S. Troitsky: Stiffened Plates: Bending, Stability and Vibrations, Elsevier (1976).
- [2] K. Miura: Zeta-core sandwich—its concept and realization, ISAS Report No. 480, University of Tokyo (1972).
- [3] K. Miura: New structural form of sandwich core, J. Aircraft, 12 (1975) 437–441.
- [4] K. Tanizawa, F. Kikuchi and K. Miura: Determination of equivalent rigidities of zeta-stiffened panel, Theoretical and Applied Mechanics, 28 (1980) 85–93.
- [5] 林 (編): 複合材料工学, 日科技連 (1971).
- [6] 小林, 石川: 一方向繊維強化複合材料の弾性係数, 日本航空宇宙学会誌, 23巻256号 (1975) 319–326.
- [7] 石川, 小林: 一方向繊維強化複合材料の弾性係数 (第2報) 日本航空宇宙学会誌, 23巻260号 (1975) 516–525.
- [8] A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolaou: Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland (1978).
- [9] P.G. Ciarlet and P. Destuynder: A justification of the two-dimensional linear plate model, Journal de Mécanique, 18 (1979) 315–344.
- [10] K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd edition, Pergamon (1974).
- [11] P.G. Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland (1978).