電磁波により発生する重力の計量テンソルの近似解と質点の運動方程式

飯　口　真　一

Approximate Solution of Gravitational Metric Tensor Produced by Electromagnetic Wave and Equation of Motion of a Material Point

By
Shin-ichi IIGUCHI

Abstract: In this paper we obtain the approximate gravitational metric tensor produced by an electromagnetic wave and then find the equation of motion of a material point caused by the produced gravitational field.

We will enter into details in the following paragraphs.

We obtain the quasi stationary metric tensor built up in the inner part of the rectagular prism which is filled by the electromagnetic plane wave travelling in the x^1-direction. On that occasion the linearized Einstein's equation is used and the size of the prism is assumed to be much larger than the wavelength of the electromagnetic wave.

The equation of motion of a material point derived from the geodesic equation has the form of a simple harmonic motion which contains the forced vibration term having twice the frequency of the electromagnetic wave.

概　　要

この論文では，始め，電磁波に依って生ずる重力場の計量テンソル成分を近似的に求め，次にその重力場による質点の運動方程式を求める．

計量テンソル成分を求めるには，厳密解は困難である故，線形近似化したアインシュタインの方程式を用いる．

具体的には，電磁波の波長に比べて，非常に大きな直方体の内部をみたして，x^1 方向に進行する平面電磁波を想定し，その直方体の内部での計量テンソル成分を求めるのであるが，その成分は build up して準定常になったものを求める．

質点の運動方程式は，測地線の方程式より求めるが，それは，単弦振動の方程式に，電磁波の２倍の frequency の強制振動項が加わった形である．

緒　言

電磁場により発生する重力場の計量テンソル成分を厳密に求めようとしたのは Rainich に始まる［1］．その後，それを整理して説明した文献が幾つか現われている［2，3，4］．しかし，以上の文献では，静電気の場合について求めたものはあるが，電磁波の生ずる計量テンソル成分を具体的に求めたものはない．

最近になって，空胴内の電磁界により生ずる重力波を近似的に求めた論文が現われた[5]．しかし，それは，電磁界の存在する場所から遠く離れた点に於るものであり，且つ，空胴の全長が生ずる重力波の波長よりも十分に短いと云う仮定の下で行ってある．以上の仮定は，行うべき積分計算を極めて容易にするのである．

本論文は，むしろ，電磁波の存在する場所における重力場を求めるものであり，又，電磁波の存在する空間が，電磁波の波長に比べて非常に大である場合を取扱ってある．

本論文は，図1に示す様に x^1 方向に進む平面波が，有限の直方体の内部をみたして存在する場合，重力場が build up して，準定常になった後の計量テンソル成分を求め，次にこの重力場による質点の運動方程式を求める．

計量テンソル成分を求めるには，線形近似化したアインシュタインの方程式を用い，遅延ポテンシャルの形の解を求める．その後，測地線の方程式から質点の運動方程式を求める．それは，単弦振動の方程式に，電磁波の2倍の frequency の強制振動項が加わった形である．

ここで，本論文で行う理論計算の方針を，その理由と共に述べる必要がある．以下，箇条書で示すと，

（1） 無限領域にわたって存在する電磁波による重力の計量テンソルを計算すると，無限大になるので，どうしても有限領域に存在する電磁波を対象としなければならぬ．

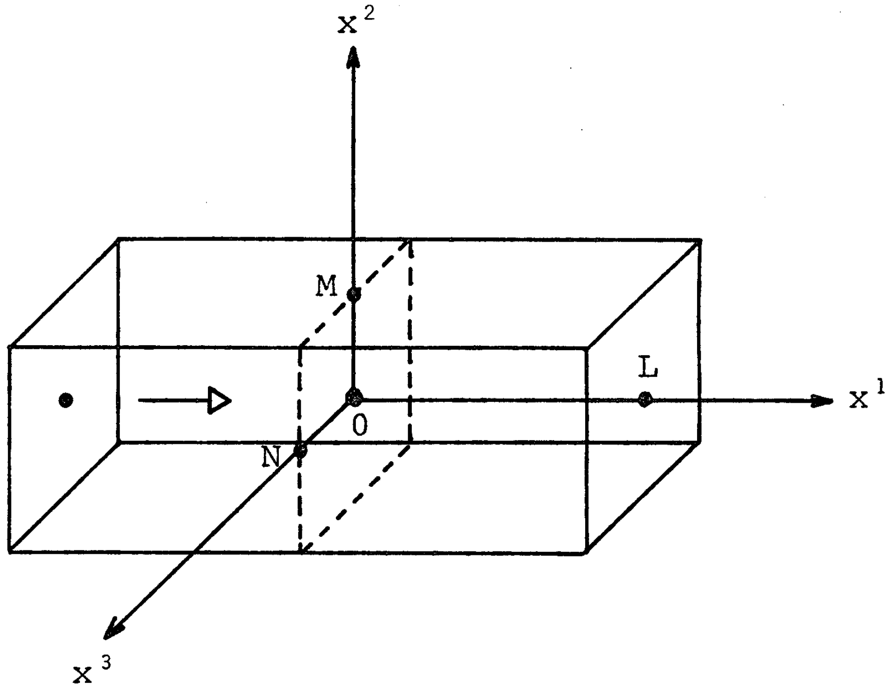

図1　x^1 方向に進む一様な平面電磁波が有限の直方体の内部をみたして存在する．

(2) 従って，この論文では，有限の直方体の内部にわたって存在する一様平面電磁波を対象に選んだ.

(3) (2)で述べた波として，ペンシルビーム波を想定しているのであるが，厳密に云えば，ビーム波は，その断面にわたって振幅は一様ではなく，又，そのビームは，進行方向に徐々に広がって行く. 一方，(2)で述べた波は，次の様にして，理論的には実現可能である.

電磁波の進行方向を x^1 とし，これに垂直な方向を x^2，x^3 とすれば，x^2 方向は2枚の electric wall でさえぎり，x^3 方向は2枚の magnetic wall でさえぎる事によって guicle をつくりうる.

(4) あと，入口と出口とが問題である. 電磁波が，$x^1=-L$ で急に現われ，$x^1=L$で急に消えると仮定すると，他の種類のエネルギ及び運動量を考えねば，入口と出口で，エネルギ及び運動量の両保存則が成立しない. 実際には，入口には，電磁波発生装置があり，静電磁界のエネルギを変換して電磁波を発生し，出口では吸収装置が存在して，電磁波を熱に変換する. 入口でも出口でも，すべての機構を考えに入れれば，即ち所謂閉ぢた系を考えれば，保存則が成立する. しかし，この閉じた系を対象とする事は，複雑で計算も容易でないので，第1段階として，本論文では，有限領域に存在している電磁波のエネルギ・運動量テンソルのみによる重力の計量テンソル成分を求める事とする.

このエネルギ・運動量テンソルは，有限領域内では，もち論，保存則をみたすが，そのテンソルのみでは，入口と出口では保存則をみたしえない.

1. 電磁波のエネルギテンソル*

1.1 電磁波のエネルギテンソル

特殊及び一般相対論を含めて，真空中の電磁波のエネルギテンソルの共変及び混合成分はMKS単位系を用いて記すと次の様になる.

$$T_{ik}=\frac{1}{\mu_0}\sum_m\sum_n\left(g^{mn}F_{im}F_{kn}-\frac{1}{4}g_{ik}F_{mn}F^{mn}\right) \tag{1}$$

$$T_i{}^k=\frac{1}{\mu_0}\sum_m\sum_n\left(F_{im}F^{km}-\frac{1}{4}\delta_i{}^kF_{mn}F^{mn}\right) \tag{2}$$

但し，μ_0 は真空の透磁率である. この記法では，T_{00} がエネルギ密度を示し，正である. (2)より，

$$T=\sum_i T_i{}^i=0 \tag{3}$$

である事が分る.

* 以下,「エネルギ・運動量テンソル」を略して,「エネルギテンソル」と記す.

1.2 特殊相対論における一様平面電磁波のエネルギテンソル

特殊相対論の場合のエネルギテンソルは，特殊相対論の計量テンソルとして，大文字の G_{ik} を用いると，(1)より

$$T_{ik}=\frac{1}{\mu_0}\left[\sum_m G^{mm}F_{im}F_{km}-\frac{1}{4}G_{ik}\left(\sum_m\sum_n F_{mn}F^{mn}\right)\right] \tag{4}$$

本論文で用いる特殊相対論の慣性系の座標について記すと，線素の2乗は，

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2 \\ &= \sum_{i,k} G_{ik}dx^i dx^k \end{aligned} \tag{5}$$

であり，

$$G_{ik}=G^{ik}=\begin{cases} 0 & (i\neq k) \\ -1 & (i=k=0) \\ 1 & (i=k=1,2,3) \end{cases} \tag{6}$$

ここで，一様平面電磁波として，E_2，H_3 成分のみを持ち，x^1 方向に進行し，x^2，x^3 方向に関しては一様なものを考えると，特殊相対論の時空では次の様になる．

$$[F_{ik}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{E_2}{c} & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ \dfrac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[F^{ik}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{E_2}{c} & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ -\dfrac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここに，

$$\begin{aligned} E_2 &= cB_3 \\ &= E\cos(\omega t-\beta x^1) \\ &= E\cos\beta(x^0-x^1) \end{aligned} \tag{9}$$

(6)，(7)，(8)，(9)を用いると，(4)より

$$\left.\begin{aligned} &T_{00}=T_{11}=-T_{01}=W\cos^2\beta(x^0-x^1) \\ &\text{その他の } T_{ik}=0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

但し，

$$W=\varepsilon_0 E^2>0 \tag{11}$$

で，W はエネルギ密度の最大値を表わす．

この論文では，x^1 方向に進行し，

$$\left.\begin{array}{l} -L\leqq x^1\leqq L \\ -M\leqq x^2\leqq M \\ -N\leqq x^3\leqq N \end{array}\right\} \tag{12}$$

で規定される直方体の内部をみたして存在する一様平面電磁波を想定している故，(12)の範囲内では T_{ik} は(10)で表わされ，それ以外では，すべての T_{ik} は零である．

2. 重力場の方程式とその線形近似

2.1 重力場の方程式

アインシュタインの重力場の方程式は次の通り．

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=-\kappa T_{ik} \tag{13}$$

但し，

$$\kappa=\frac{8\pi G}{c^4}=2.07\times10^{-43}\ \mathrm{sec^2/meter\cdot kg}$$

さて，特殊相対論の時空では，すべての R_{ik} は零であるが，この問題の場合，(13)の右辺の T_{ik} に，電磁波のエネルギテンソルが代入され，それが左辺の R_{ik} の幾つかを零でなくする．

本論文で求めようとしているのは，1次近似解である故，(13)の右辺の T_{ik} には，前節で求めた特殊相対論の時空での電磁波のエネルギテンソル(10)を代入すればよい．

2.2 線形近似

ここで，よく知られた弱い場に対する線形近似法を用いる．弱い重力場の下では，計量テンソル g_{ik} が，特殊相対論の計量テンソル G_{ik} と僅かだけ異る座標系を選ぶ事が出来る．その僅少差を h_{ik} とすれば，

$$g_{ik}=G_{ik}+h_{ik} \tag{14}$$

(13)は，g_{ik} に関する非線形方程式であるが，これを近似して h_{ik} に関する線形方程式に直すのである．以下，しばらく成書に従って，本論文に必要な部分を記述する［6］．

R_{ik} に関して，h_{ik} の1次の項のみ残すと次の様になる．

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\Box h_{ik}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\sum_r\frac{\partial\phi_k{}^r}{\partial x^r}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\sum_r\frac{\partial\phi_i{}^r}{\partial x^r} \tag{15}$$

但し,

$$\Box=-\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \tag{16}$$

$$\phi_i{}^k=h_i{}^k-\frac{1}{2}\delta_i{}^k h,\quad \phi_{ik}=h_{ik}-\frac{1}{2}G_{ik}h,\quad h=\sum_r h_r{}^r \tag{17}$$

(15)に,条件

$$\sum_k \frac{\partial \phi_i{}^k}{\partial x^k}=0 \tag{18}$$

を課すると,次の様に簡単となる.

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\Box h_{ik},\quad R=\sum_i R_i{}^i=\frac{1}{2}\Box h \tag{19}$$

(19)を用いると,(13)は次の様になる.

$$\Box\phi_{ik}=-2\kappa T_{ik} \tag{20}$$

之が線形化した方程式である.

(20)の解の中で無限の遠方で零になるものは,次の通り.

$$\phi_{ik}(x^1,x^2,x^3,t)=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T_{ik}(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3,t-r/c)}{r}d\bar{x}^1d\bar{x}^2d\bar{x}^3 \tag{21}$$

ここで,

$$r=\sqrt{(x^1-\bar{x}^1)^2+(x^2-\bar{x}^2)^2+(x^3-\bar{x}^3)^2} \tag{22}$$

なお,(3)で示した $T=0$ と(13)とより,$R=0$ が導かれるので,(20)は更に簡単に次の様になる.

$$\Box h_{ik}=-2\kappa T_{ik}$$

その解は,

$$h_{ik}(x^1,x^2,x^3,t)=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T_{ik}(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3,t-r/c)}{r}d\bar{x}^1d\bar{x}^2d\bar{x}^3$$

又,問題にしている領域に亘って,次のエネルギ・運動量保存則

$$\sum_k \frac{\partial T_i{}^k}{\partial x^k}\dot{=}0 \tag{23}$$

が成立する場合は,(21)と(23)とより,条件(18)が成立する.

次に，関連して必要な2式を書き加える．

特殊相対論の時空では，

$$\phi_i^k = G^{kk}\phi_{ik} \tag{24}$$

又，(17)より次式をうる．

$$h_{ik} = \phi_{ik} - \frac{1}{2}G_{ik}\phi \tag{25}$$

所で，緒言の後半の部分で述べた様に，本論文の設定では，電磁波の存在する領域の入口と出口，即ち $x^1=-L$ と $x^1=L$ とで，注目している電磁波のエネルギテンソルのみでは，エネルギ・運動量保存則が成立しないのである．従って，(21)を用いて，すべての ϕ_{ik} を求めた場合，それらの ϕ_{ik} の集合は(18)をみたさない．従って，その ϕ_{ik} の集合は，この問題の解ではない．

ここで，この問題の解である h_{ik} の集合を求める方針を述べる必要がある．

それは次の通りである．

（1）　零でない3成分 T_{00}, T_{11}, T_{01} に対応する $\phi_{00}, \phi_{11}, \phi_{01}$ については，(21)を用いて求め，その他の ϕ_{ik} については，$\Box\phi_{ik}=0$ と(18)とを両立せしめる様に求める事とする．

（2）　その後，(25)を用いて，ϕ_{ik} から h_{ik} を求める．

3.　計量テンソル成分の解

前述の様に x^1 方向に進む一様な平面電磁波が，(12)で規定される直方体の内部をみたして存在する場合に，電磁波がつくる重力場の計量テンソル成分 h_{ik} を求めるのであるが，h_{ik} は build up して，準定常になったものを求める．又，電磁波の波長 λ は，直方体の寸法に比べて極めて小であると仮定する．

始めに ϕ_{ik} を求める．(10)，(20)より

$$\begin{aligned}\Box\phi_{00} &= -\rho-\rho\cos 2\beta(x^0-x^1)\\ \Box\phi_{11} &= -\rho-\rho\cos 2\beta(x^0-x^1)\\ \Box\phi_{01} &= \rho+\rho\cos 2\beta(x^0-x^1)\end{aligned} \tag{26}$$

上記以外の ϕ_{ik} に対しては，

$$\Box\phi_{ik}=0 \tag{27}$$

ここに，

$$\rho=\kappa W \tag{28}$$

近似した方程式は既に線形になっており，(26)の右辺を見ると，x^0 を含まない定常部分 ρ と，x^0 を含む準定常の部分 $\rho\cos 2\beta(x^0-x^1)$ とに分ける事が出来るので，それぞれに対

する ϕ_{ik} を $\bar{\phi}_{ik}$ 及び $\tilde{\phi}_{ik}$ として，別々に解く事が可能である．ここで，

$$\phi_{ik}=\bar{\phi}_{ik}+\tilde{\phi}_{ik}$$

である．この様に2つに分けるのは，計算上の便宜の為である．

定常の方に対しては，$\partial/\partial x^0=0$ となるので，$\Box$ は ∇^2 となる．

上記の様に分離すると，

$$\nabla^2\bar{\phi}_{00}=-\rho \tag{29}$$

$$\Box\tilde{\phi}_{00}=-\rho\cos 2\beta(x^0-x^1) \tag{30}$$

の様になる．

3.1 定常の源による各成分

(1) 3成分 $\bar{\phi}_{00}, \bar{\phi}_{11}, \bar{\phi}_{01}$ の解

密度 ρ は一定である故，(29)の解は，次の積分で表わされる．

$$\bar{\phi}_{00}(x^1, x^2, x^3)=\frac{\rho}{4\pi}\int_{-L}^{L}\int_{-M}^{M}\int_{-N}^{N}\frac{1}{r}d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3 \tag{31}$$

この結果は，

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{00}=\frac{\rho}{4\pi}[\ &\psi(L-x^1, M-x^2, N-x^3)\\ +\ &\psi(L-x^1, M-x^2, N+x^3)\\ +\ &\psi(L-x^1, M+x^2, N-x^3)\\ +\ &\psi(L-x^1, M+x^2, N+x^3)\\ +\ &\psi(L+x^1, M-x^2, N-x^3)\\ +\ &\psi(L+x^1, M-x^2, N+x^3)\\ +\ &\psi(L+x^1, M+x^2, N-x^3)\\ +\ &\psi(L+x^1, M+x^2, N+x^3)]\end{aligned} \tag{32}$$

但し，

$$\begin{aligned}\psi(L, M, N)=&-\frac{L^2}{2}\ \mathrm{arc\ sin}\frac{MN}{\sqrt{L^2+M^2}\sqrt{L^2+N^2}}\\ &-\frac{M^2}{2}\ \mathrm{arc\ sin}\frac{NL}{\sqrt{M^2+N^2}\sqrt{M^2+L^2}}\\ &-\frac{N^2}{2}\ \mathrm{arc\ sin}\frac{LM}{\sqrt{N^2+L^2}\sqrt{N^2+M^2}}\\ &+MN\log\frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}+L}{\sqrt{M^2+N^2}}\end{aligned}$$

$$+NL \log \frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}+M}{\sqrt{N^2+L^2}}$$
$$+LM \log \frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}+N}{\sqrt{L^2+M^2}} \tag{33}$$

(32)をテイラー展開し，x^1, x^2, x^3 の最低次の項のみ残すと，

$$\overline{\phi}_{00} \fallingdotseq \frac{\rho}{4\pi}[\Psi - l(x^1)^2 - m(x^2)^2 - n(x^3)^2] \tag{34}$$

但し，

$$\left.\begin{aligned}
\Psi &= 8\psi(L,M,N)\\
l &= 4 \text{ arc sin} \frac{MN}{\sqrt{L^2+M^2}\sqrt{L^2+N^2}}\\
m &= 4 \text{ arc sin} \frac{NL}{\sqrt{M^2+N^2}\sqrt{M^2+L^2}}\\
n &= 4 \text{ arc sin} \frac{LM}{\sqrt{N^2+L^2}\sqrt{N^2+M^2}}\\
l+m+n &= 2\pi
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(34)は近似式であるが，x^1/L，x^2/M，x^3/N の各々の値が，0.6あたり迄，かなり良い近似値を与える．

又，$\overline{\phi}_{00}$ 以外の2成分については次の通り．

$$\overline{\phi}_{11} = -\overline{\phi}_{01} = \overline{\phi}_{00} \tag{36}$$

（2） 上記3成分以外の解

(34)，(36)で3成分を示してあるが，それ以外の $\overline{\phi}_{ik}$ については，(18)と(27) とをみたす解を求める．

$\partial/\partial x^0 = 0$ である故，(24)を用いて，(18)を展開すると，次の通り．

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\phi}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial\overline{\phi}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial\overline{\phi}_{03}}{\partial x^3} &= 0\\
\frac{\partial\overline{\phi}_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial\overline{\phi}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial\overline{\phi}_{13}}{\partial x^3} &= 0\\
\frac{\partial\overline{\phi}_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial\overline{\phi}_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial\overline{\phi}_{23}}{\partial x^3} &= 0\\
\frac{\partial\overline{\phi}_{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial\overline{\phi}_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial\overline{\phi}_{33}}{\partial x^3} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

之等の方程式の項の中，既に分っているものは次の通り．

$$\frac{\partial \bar{\phi}_{01}}{\partial x^1} = -\frac{\partial \bar{\phi}_{11}}{\partial x^1} = \frac{\rho l}{2\pi} x^1 \tag{38}$$

(37)，(38)より，各 $\bar{\phi}_{ik}$ を求めると，

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\phi}_{02} &= -\bar{\phi}_{12} = -\frac{\rho l}{4\pi} x^1 x^2 \\
\bar{\phi}_{03} &= -\bar{\phi}_{13} = -\frac{\rho l}{4\pi} x^1 x^3 \\
\bar{\phi}_{23} &= -\frac{\rho l}{4\pi} x^2 x^3 \\
\bar{\phi}_{22} &= \bar{\phi}_{33} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

(39)の $\bar{\phi}_{ik}$ は，すべて(27)をみたしている．

（3） $\bar{h}_{ik}$ の解

以上求めた値を用いると，$\dot{\bar{\phi}} = 0$ となるので，(25)より，

$$\bar{h}_{ik} = \bar{\phi}_{ik} \tag{40}$$

となる．従って，すべての $\bar{h}_{ik}$ は次の様になる．

$$\left.\begin{aligned}
\bar{h}_{00} &= \bar{h}_{11} = -\bar{h}_{01} = \frac{\rho}{4\pi}[\Psi - l(x^1)^2 - m(x^2)^2 - n(x^3)^2] \\
\bar{h}_{02} &= -\bar{h}_{12} = -\frac{\rho l}{4\pi} x^1 x^2 \\
\bar{h}_{03} &= -\bar{h}_{13} = -\frac{\rho l}{4\pi} x^1 x^3 \\
\bar{h}_{23} &= -\frac{\rho l}{4\pi} x^2 x^3 \\
\bar{h}_{22} &= \bar{h}_{33} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

3.2 準定常の源による各成分

（1） 3成分 $\tilde{\phi}_{00}, \tilde{\phi}_{11}, \tilde{\phi}_{01}$ の解

方程式(30)の近似解法は，付録に記してある．その結果は，

$$\tilde{\phi}_{00} \fallingdotseq \frac{\rho}{4\beta}(x^1 + L)\sin 2\beta(x^0 - x^1) \tag{42}$$

$\tilde{\phi}_{00}$ 以外の2成分については，

$$\tilde{\phi}_{11} = -\tilde{\phi}_{01} = \tilde{\phi}_{00} \tag{43}$$

（2）　上記3成分以外の解

(42)，(43)で3成分を示してあるが，それ以外の $\tilde{\phi}_{ik}$ については，(18)と(27)とをみたす解を求める．

(24)を用いて，(18)を展開すると，次の通り．

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial\tilde{\phi}_{00}}{\partial x^0}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{02}}{\partial x^2}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{03}}{\partial x^3}=0\\
-\frac{\partial\tilde{\phi}_{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{13}}{\partial x^3}=0\\
-\frac{\partial\tilde{\phi}_{20}}{\partial x^0}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{23}}{\partial x^3}=0\\
-\frac{\partial\tilde{\phi}_{30}}{\partial x^0}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{32}}{\partial x^2}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{33}}{\partial x^3}=0
\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

これ等の方程式の項の中，既に分っているものは次の通り．

$$-\frac{\partial\tilde{\phi}_{00}}{\partial x^0}+\frac{\partial\tilde{\phi}_{01}}{\partial x^1}=\frac{\partial\tilde{\phi}_{10}}{\partial x^0}-\frac{\partial\tilde{\phi}_{11}}{\partial x^1}=-\frac{\rho}{4\beta}\sin 2\beta(x^0-x^1)\tag{45}$$

(44)，(45)より各成分を求めると．

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_{02}=-\tilde{\phi}_{12}=\frac{\rho}{8\beta}x^2\sin 2\beta(x^0-x^1)\\
&\tilde{\phi}_{03}=-\tilde{\phi}_{13}=\frac{\rho}{8\beta}x^3\sin 2\beta(x^0-x^1)\\
&\tilde{\phi}_{22}=\tilde{\phi}_{23}=\tilde{\phi}_{33}=0
\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

(46)の $\tilde{\phi}_{ik}$ はすべて，(27)をみたしている．

（3）　$\tilde{h}_{ik}$ の値

以上求めた値を用いると，$\tilde{\phi}=0$ となるので，(25)より

$$\tilde{h}_{ik}=\tilde{\phi}_{ik}\tag{47}$$

となる．従って，すべての $\tilde{h}_{ik}$ は次の様になる．

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{h}_{00}=\tilde{h}_{11}=-\tilde{h}_{01}=\frac{\rho}{4\beta}(x^1+L)\sin 2\beta(x^0-x^1)\\
&\tilde{h}_{02}=-\tilde{h}_{12}=\frac{\rho}{8\beta}x^2\sin 2\beta(x^0-x^1)\\
&\tilde{h}_{03}=-\tilde{h}_{13}=\frac{\rho}{8\beta}x^3\sin 2\beta(x^0-x^1)\\
&\tilde{h}_{22}=\tilde{h}_{23}=\tilde{h}_{33}=0
\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

4. 計量テンソル成分の数値例

4.1 定常の源による成分

(41)にある $\overline{h}_{00}$ 及び乗数 $\rho l/4\pi$ を求める．

（a） 係数 l, m, n は電磁波の存在する領域の大いさによらず，$L:M:N$ の比で定まる．〔(35)参照〕

$$L:M:N=100:1:1$$

とすれば，

$$l\fallingdotseq 4\times 10^{-4},\quad m=n\fallingdotseq \pi$$

となる．

（b） $\Psi=8\psi$ は，L, M, N の大いさに関係する．〔(33)参照〕

$$L=10^{11}\ \text{meters},\quad M=N=10^{9}\ \text{meters}$$

とする．（L は太陽距離に近い round number とした．）

その時，Ψ は次の様になる．

$$\Psi=4.5336\times 10^{19}\ \text{meters}^2$$

（c） 密度 $\rho=\kappa W$ は，電磁波のエネルギ密度の最大値 W のみによる．今，

$$W=10^{12}\ \text{joules}\cdot\text{meter}^{-3}$$

とすれば，

$$\rho=2.07\times 10^{-31}\ \text{meter}^{-2}$$

上記（a），（b），（c）より

（d） $\overline{h}_{00}=1.65\times 10^{-32}[4.5336\times 10^{19}-4\times 10^{-4}(x^1)^2-\pi(x^2)^2-\pi(x^3)^2]$

（e） 乗数　$\rho l/4\pi=6.59\times 10^{-36}$

4.2 準定常の源による成分

(48)にある $\tilde{h}_{00}$ 及び乗数 $\rho/8\beta$ を求める．

（a） ρ は前述と同じ．

（b） β は電磁波の位相定数であるが，電磁波の周波数を 1 GHz とすれば，

$$\beta=20.9\ \text{meter}^{-1}$$

上記（a），（b）より，

（c） $\tilde{h}_{00}=2.48\times 10^{-33}(x^1+10^{11})\sin[41.8(x^0-x^1)]$

（d） 乗数　$\rho/8\beta=1.24\times 10^{-33}$

5. 質点の運動方程式

ここでは，これまで求めて来た重力場による質点の運動方程式を求める．方法は，文献[7]に依っており，ここでも質点の運動速度は，光速 c に比べて極めて小であると仮定する．即ち，

$$\frac{dx^i}{dx^0} \ll 1 \quad (i=1, 2, 3) \tag{49}$$

5.1 運動方程式の基礎式

測地線の方程式は，

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \sum_{j,k} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{50}$$

であるが，質点の世界線上では，時間的，即ち $ds^2 < 0$ である．(5)より，

$$ds^2 = -(dx^0)^2 \left[1 - \sum_i \left(\frac{dx^i}{dx^0} \right)^2 \right]$$

となるが，(49)より，

$$ds^2 \fallingdotseq -(dx^0)^2 \tag{51}$$

(51)を用いると，(50)は，次の様になる．

$$\frac{d^2x^i}{(dx^0)^2} \fallingdotseq - \sum_{j,k} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{dx^0} \frac{dx^k}{dx^0} \tag{52}$$

(49)を考慮すると，(52)の右辺は，$j=k=0$ の項だけを考えれば充分である．即ち，

$$\frac{d^2x^i}{(dx^0)^2} \fallingdotseq - \left\{ \begin{matrix} i \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{53}$$

そして，

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} \fallingdotseq \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{54}$$

(53)，(54)より

$$\frac{d^2x^i}{(dx^0)^2} \fallingdotseq \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^0} \tag{55}$$

(55)が，運動方程式の基礎式である．

5.2 質点の運動方程式

(55)に，第3節で求めた計量テンソル成分を代入すれば，各方向の運動方程式が得られる．

$$\frac{d^2x^1}{dt^2}=-\frac{c^2\rho l}{4\pi}x^1+\frac{c^2\rho}{4}(x^1+L)\cos(2\omega t-2\beta x^1)$$
$$+\frac{c^2\rho}{8\beta}\sin(2\omega t-2\beta x^1) \tag{56}$$
$$\frac{d^2x^2}{dt^2}=-\frac{c^2\rho m}{4\pi}x^2-\frac{c^2\rho}{4}x^2\cos(2\omega t-2\beta x^1) \tag{57}$$
$$\frac{d^2x^3}{dt^2}=-\frac{c^2\rho n}{4\pi}x^3-\frac{c^2\rho}{4}x^3\cos(2\omega t-2\beta x^1) \tag{58}$$

(56)，(57)，(58) の左辺は，明らかに各方向の加速度の形である故，右辺は，質点の各方向の加速度を与える．(56)，(57)，(58) の各式は，すべて単弦振動の方程式に，angular frequency 2ω の強制振動項が加わった形である．なお，(56)に関して，$L\gg$ 電磁波の波長 λ の仮定の下では，大部分の領域で，第3項は，第2項に比べて小さいので，省略してもよい．

又，実際には，表面積が零でない粒子に対しては，電磁波の輻射圧が加わるので，之を右辺に加える事となる．

第4節の数値例を用いて，右辺の各項の数値計算を行うと，次の様になる．

(56)に関して，$x^1=5\times10^{10}$ とすれば，

$$\frac{c^2\rho l}{4\pi}x^1=2.97\times10^{-8}\quad \text{meters}\cdot\text{sec}^{-2}$$
$$\frac{c^2\rho}{4}(x^1+L)=6.99\times10^{-4}\quad \text{meters}\cdot\text{sec}^{-2}$$

(57)に関して $x^2=5\times10^8$ とすれば，

$$\frac{c^2\rho m}{4\pi}x^2\fallingdotseq\frac{c^2\rho}{4}x^2=2.33\times10^{-6}\quad \text{meters}\cdot\text{sec}^{-2}$$

となる．

以上の数値は，電磁波のエネルギ密度の最大値Wを，10^{12} joules·meter^{-3} とした場合のものである．之等の数値は，Wに直接比例する．

結　　言

以上，x^1 方向に進行し，有限の直方体の内部をみたして存在する平面電磁波がつくる重力場の計量テンソルを線形近似化したアインシュタインの方程式より求め，次に，その重力場による質点の運動方程式を求めた．

ここで，全体をふりかえって，以後，考慮すべき事は次の通りである．

（1）　以上書き上げたこの論文に沿っては，解析の近似度を進める事．

（2）　この論文全体の構成についての再吟味．

(3) 一様平面電磁波以外の形の電磁波でも解析しうるかどうか.

1980年4月1日　計測部

参考文献

[1] G.Y. Rainich, "Electrodynamics in the General Relativity Theory," Trans. Am. Math. Soc., vol. 27, pp. 106–136, Jan. 1925.

[2] C.W. Misner & J.A. Wheeler, "Classical Physics as Geometry," Ann. Physics, vol. 2, pp. 525–603, 1957.

[3] J. Weber, "General Relativity and Gravitational Waves," Chap. 9, Interscience, New York, 1961.

[4] R. Adler, M. Bazin & M. Schiffer, "Introduction to General Relativity," 2nd. ed., Chap. 15, McGraw-Hill, New York, 1975.

[5] L. P. Grishchuk & M.V. Sazhin, "Emission of Gravitational Waves by an Electromagnetic Cavity," Sov. Phys. JETP, vol. 38, no. 2, pp. 215–221, Feb. 1974.

[6] C. Møller, "The Theory of Relativity, " 2nd. ed., p. 429, Oxford Univ. Press, London, 1972.

[7] A. Einstein, "Die Grundlage der Allgemeinen Relativitäts theorie", Ann. der Physik, folge 4, band 49, p. 816, 1916.

[8] G.N. Watson, "Theory of Bessel Functions", p. 229, Cambridge Univ. Press, London, 1962.

付録.　波動方程式の解

本文(30)の波動方程式を，添字等を省略して記せば次の通り.

$$\Box\phi=-\rho\cos 2\beta(x^0-x^1)$$

直方体の内部で ρ が一定である故，本文(21)を参照すると，ϕ は次の様になる.

$$\phi(x^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)=\frac{\rho}{4\pi}\int_{-L}^{L}\int_{-M}^{M}\int_{-N}^{N}\frac{\cos 2\beta(x^0-x^1-r)}{r}dx^1dx^2dx^3 \qquad (\mathrm{A}\cdot 1)$$

$$r=\sqrt{(x^1-\xi^1)^2+(x^2-\xi^2)^2+(x^3-\xi^3)^2}$$

ここで，計算の便宜上，観測点及び源の座標を夫々 (ξ^1,ξ^2,ξ^3), (x^1,x^2,x^3) とした.

(A・1)の厳密な積分は困難である故，下記の様に，stationary phase method を用いて，近似解を求める [8].

始めに stationary の点を求める. 即ち，位相項をテイラー展開し，その1回微係数の項を零にする点を求める. 先づ，

$$f(x^1,x^2,x^3)=x^0-x^1-r \qquad (\mathrm{A}\cdot 2)$$

とおく. $f(x^1,x^2,x^3)$ を点 $\mathrm{P}(A,B,C)$ の近傍で展開すると，

$$f(x^1, x^2, x^3)=f(A,B,C)$$
$$+\left[(x^1-A)\frac{\partial}{\partial x^1}+(x^2-B)\frac{\partial}{\partial x^2}+(x^3-C)\frac{\partial}{\partial x^3}\right]\cdot f(A,B,C)$$
$$+\frac{1}{2}\left[(x^1-A)\frac{\partial}{\partial x^1}+(x^2-B)\frac{\partial}{\partial x^2}+(x^3-C)\frac{\partial}{\partial x^3}\right]^2\cdot f(A,B,C)$$
$$+\cdots\cdots \qquad (\mathrm{A}\cdot 3)$$

(A・3)の中にある1回微係数は，次の様になる.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p=-1-\frac{A-\xi^1}{r_p} \qquad (\mathrm{A}\cdot 4)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^2}\right|_p=-\frac{B-\xi^2}{r_p},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x^3}\right|_p=-\frac{C-\xi^3}{r_p} \qquad (\mathrm{A}\cdot 5)$$

但し，

$$r_p=\sqrt{(A-\xi^1)^2+(B-\xi^2)^2+(C-\xi^3)^2} \qquad (\mathrm{A}\cdot 6)$$

点Pでの1回微係数の項を零にするには，先づ(A・5)より，

$$B=\xi^2,\quad C=\xi^3 \qquad (\mathrm{A}\cdot 7)$$

(A・7)を用いて，(A・4)を零にすると，

$$\frac{A-\xi^1}{|A-\xi^1|}=-1$$
$$\therefore\quad A\leqq\xi^1$$

stationary phase を与える x^1 の値 A は，1つの値として定まらず，

$$-L\leqq A\leqq\xi^1 \qquad (\mathrm{A}\cdot 8)$$

の様に，$-L$ と ξ^1 との間の任意の値で宜しい.

次に点Pに於る2回微分係数を求めるに，

$$\left.\frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2}\right|_p=\left.\frac{\partial^2 f}{(\partial x^3)^2}\right|_p=-\frac{1}{\xi^1-A} \qquad (\mathrm{A}\cdot 9)$$

となり，その他は零となる.

(A・9)を用いると位相項は次の様になる.

$$2\beta f(x^1,x^2,x^3)=2\beta(x^0-\xi^1)-D[(x^2-\xi^2)^2+(x^3-\xi^3)^2] \qquad (\mathrm{A}\cdot 10)$$

但し，

$$D=\frac{\beta}{\xi^1-A} \qquad (\mathrm{A}\cdot 11)$$

（A・1）に於て，全体の積分に大きく寄与するのは，点Pのごく近傍のみであると考え，（A・1）の分母の r には，点Pでの値を用いる事にする．即ち，

$$r \fallingdotseq r_p = \xi^1 - A \tag{A・12}$$

（A・10，12)を用いると，（A・1）は，

$$\phi=\frac{\rho}{4\pi}\int_{-L}^{\xi^1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left[2\beta(x^0-\xi^1)-D(x^2-\xi^2)^2-D(x^3-\xi^3)^2\right]}{\xi^1-A}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 \tag{A・13}$$

但し，x^1 の積分範囲を（A・13)の様に変更してある．それは，stationary phase を与える所が，x^1 に関しては，$-L$ から ξ^1 迄だからである．〔(A・8)付近参照〕

（A・13)より，stationary phase method で通常行う様に積分すればよい．

その結果，次の様になる．

$$\phi=\frac{\rho}{4\beta}(\xi^1+L)\sin 2\beta(x^0-\xi^1) \tag{A・14}$$