

円筒殻の動的挫屈に於るエネルギー 的考察と単純化モデル

木 部 勢至朗 *・砂 川 恵

Dynamic Buckling of Cylindrical Shells:
Energy Approach and Simplified Models
By
Seishiro KIBE and Megumi SUNAKAWA

Abstract: The aim of the present paper is to clarify the mechanism of dynamic buckling through analysing the behavior of cylindrical shells under axial impulsive loading. An energy approach is used to derive the critical value of the dynamic buckling load. The physical meaning of this bound is clarified and illustrated through numerical integration of the equations of motion and comparison of the results. On the basis of this analysis, the authors construct two simplified models and analyse their behavior. One of these models uses only linear springs, each of which provides for one corresponding mechanical property a simple and clear representation which is not available from the customary nonlinear-spring models.

概 要

本研究は、衝撃軸圧縮荷重を受ける円筒殻を例題として、動的挫屈現象の機構を解明しようとするものである。エネルギー的考察により、「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」の概念を導入し、それと運動方程式の数値積分により得られる動的挫屈荷重とを比較検討する事により、エネルギー的限界値の持つ意味を明確にする。更に上述の解析結果を基礎として、質量-ばね-リンクからなる二種類の単純化モデルを考案し、その挙動を解析する。特に線形ばねのみを用いた単純化モデルに於ては、モデル構成要素の持つ物理的意味が従来のモデルに比して極めて明確となる事を示す。

記 号

$a_i(t)$ 各モードの時間係数

a, b 非線形ばね定数

* 東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程

| | |
|---------------------|-----------------------------------|
| D | 曲げ剛材 |
| d_1 | 初期形状不整量 |
| E | 縦弾性係数 |
| F | Airy の応力関数 |
| g | 式 (2.5) |
| \bar{g} | $Rg / (Eh)$ |
| \tilde{H} | 無次元 Hamiltonian |
| h | 板厚 |
| K_i | k_i / k_1 |
| k_i | ばね定数 |
| L | リンク長, 円筒殻長 |
| M | M_0 / M_1 |
| M_i | 集中質量 |
| m, n | 軸方向及び周方向波数 |
| P | 外力 |
| R | 半径 |
| T | 運動エネルギー |
| \tilde{T} | 無次元運動エネルギー |
| t | 時間 |
| w | 半径方向変位 |
| \bar{w} | 半径方向形状初期不整 |
| w^* | $w + \bar{w}$ |
| x | 円筒殻軸方向座標 |
| x_i | 節点変位 |
| \bar{x} | 初期不整量 |
| y | 円筒殻周方向座標 |
| Z_i | x_i / L |
| \bar{Z} | \bar{x} / L |
| α | $\lambda_y^2 / (\pi^2 R h)$ |
| β | λ_y / λ_x |
| $\bar{\varepsilon}$ | 無次元平均軸方向縮み量 |
| θ | $\sin^{-1}(Z_1 + Z_0) - \theta_0$ |
| θ_0 | $\sin^{-1} \bar{Z}$ |
| λ_x | $L / (2m)$ |
| λ_y | $2\pi R / (2n)$ |
| ρ | 質量密度 |
| σ | 式 (2.5) |
| $\bar{\sigma}$ | $R\sigma / (Eh)$ |

| | |
|---------------|------------------|
| τ | 無次元時間 |
| ω_1 | $\sqrt{k_1/M_1}$ |
| π | ポテンシャルエネルギー |
| $\tilde{\pi}$ | 無次元ポテンシャルエネルギー |

1. はじめに

殻構造に於る安定問題は実用上極めて重要であり且つ学問的にも興味深い領域である。それ故古来多くの研究者により優れた研究がなされて来たが、それらの多くは静的な負荷条件のもとでの研究であった。近年、飛翔体の高速化等の理由により、構造物を取りまく諸環境がより一層苛酷なものとなり、軽量化の要求と相俟って、動的な負荷条件のもとでの安定問題 [1, 2] が注目される様になって来た。

筆者等は、種々の殻構造の動的安定問題に関して継続的に研究を行って来た。本報告に於ては、ステップ状衝撃軸圧縮荷重を受ける円筒殻を例題として、動的挫屈現象の機構を明確にすると共に、筆者等の考案した単純化モデルがその挙動を十分良く表し得るのみでなくモデル要素の持つ物理的意味が従来の単純化モデルに比して非常に明確となる事を示す。

2. ポテンシャル面上に於る動的挫屈の考察

2.1 あらまし

本節は、衝撃軸圧縮荷重を受ける円筒殻を例題として動的挫屈機構の本質を究明し、従来の静的挫屈の概念との相違点を明確にする事を目的としている。

その為に円筒殻の変形を挫屈前の変形を表す一様膨張型と挫屈後の変形を表す所謂ダイヤモンド型変形波形とに限定して定式化を行う。

静的負荷を受ける場合に変形は荷重に応じたポテンシャル面上の停留点（安定平衡点）に留るが、動的負荷を受ける場合には、ポテンシャル面が急激に変化する為に負荷後に停留点回りの振動を生ずる。従って静的負荷の場合は平衡点自身の安定性が問題となり、動的負荷の場合には、それによって引起される振動の安定性が問題となってくる。この様子を明確にする為に先ずポテンシャル面上に於て考察を行い、「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」の概念を導入する。これは要するに、動的負荷によって引起された振動がエネルギー的見地から大変形（挫屈変形）領域に到達する事が可能となる様な荷重の限界値の事である。次に、実際に引起される運動を上述の定式化により得られた運動方程式を直接数値積分する事によって追跡し、微小な荷重の増加によって各波形の最大変位が急激に増加する荷重が存在する事を示す。

これらの計算結果より、運動方程式を直接数値積分して得られる安定臨界値は、上述の「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」に較べてかなり高い事が示され、この差異に関連して各臨界値の持つ実際的な意味について考察を加える。

更に本章は、第3節で述べる単純化モデルと実際の円筒殻との対応を明確にする為の準備としての意味をも持つ事を付言しておく。

2.2. 定格式

図 2.1 に示す円筒殻がステップ状の衝撃軸圧縮荷重を受ける場合の変形を、一様膨張型とダイヤモンド型変形波形とに限定して定式化を行う。尚、基礎方程式には所謂 Kármán-Tsien 型の非線形方程式を用いる。

1) 基礎方程式

Kármán-Tsien 型の平衡方程式及び適合条件式を以下に示す。

平衡方程式

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = -\rho w_{,tt} + F_{,yy} w_{,xx} - 2F_{,xy} w_{,xy} + F_{,xx} w_{,yy} + \frac{1}{R} F_{,xx}, \quad (2.1)$$

適合条件式

$$\nabla^4 F = E \left[(w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} - \frac{1}{R} w_{,xx} + 2\bar{w}_{,xy} w_{,xy} - \bar{w}_{,yy} w_{,xx} - \bar{w}_{,xx} w_{,yy} \right] \quad (2.2)$$

2) 変位及び形状初期不整

本定式化に於ては、2.1 で述べた様に変形を一様膨張型 ($a_1 = 0, a_4 \neq 0$) とダイヤモンド型変形波形 ($a_4 = \frac{1}{4} a_1$) とに限定する為に、次式の様に仮定する。

$$w = h \left[a_1(t) \left(\cos \frac{\pi x}{\lambda_x} \cos \frac{\pi y}{\lambda_y} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_y} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_x} \right) + a_4(t) \right]. \quad (2.3)$$

又、形状初期不整は次式の様に仮定する。

$$w = h d_1 \cos \frac{\pi x}{\lambda_x} \cos \frac{\pi y}{\lambda_y} \quad (2.4)$$

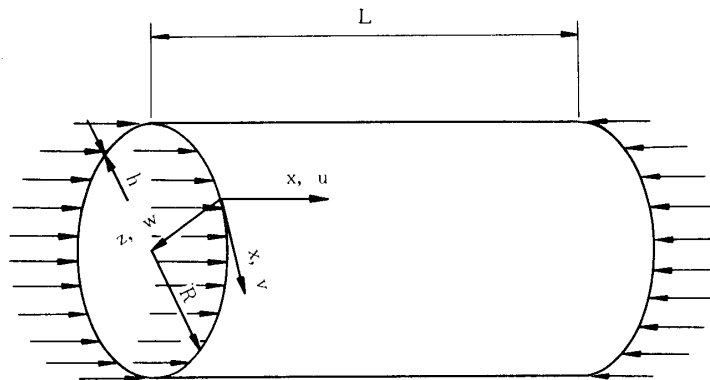


図 2.1 円筒殻

3) 応力関数

式(2.3), (2.4)を適合条件式(2.2)の右辺に代入して応力関数の特解 F_p を求め、斉次解 F_h として

$$F_h = -\frac{1}{2}\sigma y^2 + \frac{1}{2}gx^2 \quad (2.5)$$

を採用すると、応力関数 F は次式の様に与えられる。

$$\begin{aligned} F &= F_p + F_h \\ &= b_1 \cos \frac{3\pi x}{\lambda_x} \cos \frac{\pi y}{\lambda_y} + b_2 \cos \frac{\pi x}{\lambda_x} \cos \frac{3\pi y}{\lambda_y} + b_3 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_x} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_y} \\ &\quad + b_4 \cos \frac{\pi x}{\lambda_x} \cos \frac{\pi y}{\lambda_y} + b_5 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_y} + b_6 \cos \frac{2\pi y}{\lambda_y} - \frac{1}{2}\sigma y^2 + \frac{1}{2}gx^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここに、

$$b_1 = - \left[\frac{2h^2 E \beta^2}{(9\beta^2 + 1)^2} \right] \left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{4}a_1 d_1 \right), \quad (2.7)$$

$$b_2 = - \left[\frac{2h^2 E \beta^2}{(\beta^2 + 9)^2} \right] \left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{4}a_1 d_1 \right), \quad (2.8)$$

$$b_3 = - \left[\frac{h^2 E \beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \right] \frac{1}{16} a_1^2, \quad (2.9)$$

$$b_4 = - \left[\frac{2h^2 E \beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \right] \left(\frac{1}{2}a_1^2 - \frac{\alpha}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_1 d_1 \right), \quad (2.10)$$

$$b_5 = - \left(\frac{h^2 E}{16\beta^2} \right) \left(\frac{1}{2}a_1^2 + a_1 b_1 - \alpha a_1 \right), \quad (2.11)$$

$$b_6 = - \left(\frac{h^2 E \beta^2}{32} \right) (a_1^2 + 2a_1 d_1). \quad (2.12)$$

4) 周方向変位連続条件

周方向変位 v の連続条件

$$\int_0^{2\pi R} v_{,y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{E} (F_{,xx} - \nu F_{,yy}) + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} (w_{,y})^2 - \bar{w}_{,y} w_{,y} \right] dy = 0$$

に式 (2.3), (2.4), (2.6) を代入し, 両辺を軸方向 $[0, L]$ に平均をとると以下の様になる.

$$\frac{R}{Eh} g = \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{3}{4} a_1^2 + a_1 d_1 \right) - a_4 - \frac{\nu R}{Eh} \sigma. \quad (2.14)$$

5) 平均端末縮み量

軸方向単位長さ当りの端末縮み量 ε は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{1}{L} \int_0^L u_{,x} dx \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{E} (F_{,yy} - \nu F_{,xx}) - \frac{1}{2} (w_{,x})^2 - \bar{w}_{,x} w_{,x} \right] dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

上式に式 (2.3), (2.4), (2.6) を代入し, 両辺を周方向 $[0, 2\pi R]$ で平均をとると以下の様になる.

$$\frac{R}{h} \bar{\varepsilon} = \frac{R}{h} \left[\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \varepsilon dy \right] = \frac{R}{Eh} \sigma + \frac{\nu R}{Eh} g + \frac{\beta^2}{8\alpha} \left(\frac{3}{2} a_1^2 + 2a_1 d_1 \right). \quad (2.16)$$

6) 全ポテンシャルエネルギー

系の全ポテンシャルエネルギー π は, 半径方向変位 w , 軸方向変位 u , 応力関数 F を用いて次式の様に書ける.

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{h}{2E} \int_0^L \int_0^{2\pi R} [(F_{,yy} + F_{,xx})^2 - 2(1+\nu)(F_{,yy} F_{,xx} - F_{,xy}^2)] dx dy \\ &\quad + \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} [(w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2)] dx dy \\ &\quad - h \int_0^{2\pi R} F_{,yy} |_{x=L} dy \int_0^L u_{,x} dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

上式の第一項は面内伸縮歪エネルギー, 第二項は曲げ歪エネルギー, 第三項は外力のポテンシャルエネルギーを表す. 式 (2.3), (2.6), (2.15) を式 (2.17) に代入して積分を実行し, 両辺に $R/(2\pi L h^3 E)$ を乗じて無次元化すると, 無次元全ポテンシャルエネルギー $\tilde{\pi}$ は以下の様になる.

$$\tilde{\pi} = \frac{R}{2\pi L h^3 E} \pi = \frac{\beta^4}{2\alpha^2 (9\beta^2 + 1)^2} \left(\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} a_1 d_1 \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta^4}{2\alpha^2(\beta^2+9)^2} \left(\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} a_1 d_1 \right)^2 + \frac{\beta^4}{8\alpha^2(\beta^2+1)^2} \left(\frac{1}{16} a_1^2 \right)^2 \\
& + \frac{\beta^4}{2\alpha^2(\beta^2+1)^2} \left(\frac{1}{2} a_1^2 - \frac{\alpha}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_1 d_1 \right)^2 \\
& + \frac{1}{64\alpha^2} \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_1 d_1 - \alpha a_1 \right)^2 + \frac{\beta^4}{256\alpha^2} (a_1^2 + 2a_1 d_1)^2 \\
& + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \bar{g}^2 + \nu \bar{\sigma} \bar{g} + \frac{1}{96(1-\nu^2)} \left[3 \left(\frac{\beta^4+1}{\alpha^2} \right) + 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right] a_1^2 \\
& - \bar{\sigma} \left[\bar{\sigma} + \nu \bar{g} + \frac{\beta^2}{8\alpha} \left(\frac{3}{2} a_1^2 + 2a_1 d_1 \right) \right]. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

7) 平衡方程式

式(2.18)を a_1 及び a_4 で偏微分する事により、以下の様な平衡方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_1} &= \frac{\beta^4}{\alpha^2(9\beta^2+1)^2} \left(\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} a_1 d_1 \right) \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} d_1 \right) \\
& + \frac{\beta^4}{\alpha^2(\beta^2+9)^2} \left(\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} a_1 d_1 \right) \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} d_1 \right) \\
& + \frac{\beta^4}{4\alpha^2(\beta^2+1)^2} \frac{1}{16} a_1^2 \frac{1}{8} a_1 \\
& + \frac{\beta^4}{\alpha^2(\beta^2+1)^2} \left(\frac{1}{2} a_1^2 - \frac{\alpha}{2} a_1 d_1 + \frac{1}{2} a_1 d_1 \right) \left(a_1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} d_1 \right) \\
& + \frac{1}{32\alpha^2} \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_1 d_1 - \alpha a_1 \right) (a_1 + d_1 - \alpha) \\
& + \frac{\beta^4}{128\alpha^2} (a_1^2 + 2a_1 d_1) (2a_1 + 2d_1) + \bar{g} \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{3}{2} a_1 + d_1 \right) \\
& + \frac{1}{48(1-\nu^2)} \left[3 \left(\frac{\beta^4+1}{\alpha^2} \right) + 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right] a_1
\end{aligned}$$

$$-\bar{\sigma} \frac{\beta^2}{8\alpha} (3a_1 + 2d_1) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_4} = -\frac{1}{4\alpha} \left(\frac{3}{4} a_1^2 + a_1 d_1 \right) + a_4 + \nu \bar{\sigma} = 0. \quad (2.20)$$

式 (2.19) は軸方向の力の釣合いを表し, 式 (2.20) は式 (2.14) から分る様に周方向の力の釣合いを表している.

8) 運動方程式

殻体の運動エネルギー T は次式の様に与えられる.

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy = \frac{\pi L h^3 \rho R}{2} \left[\frac{5}{8} \left(\frac{da_1}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{da_4}{dt} \right)^2 \right]. \quad (2.21)$$

ここで無次元時間 τ を次式の様に定義する.

$$\tau = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t. \quad (2.22)$$

$\tilde{\pi}$ と同様にして T を無次元化すると, 無次元運動エネルギー \tilde{T} は次式の様に与えられる.

$$T = \frac{R}{2\pi L h^3 E} \tilde{T} = \frac{5}{32} \left(\frac{da_1}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{da_4}{d\tau} \right)^2. \quad (2.23)$$

式 (2.18), (2.23) より無次元 Hamiltonian は次式で与えられる.

$$\tilde{H} = \tilde{\pi} - \tilde{T}. \quad (2.24)$$

式 (2.24) を用いて Hamilton の原理を適用すると,

$$\begin{aligned} \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{H} d\tau &= \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tilde{\pi} - \tilde{T}) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left(\frac{5}{16} \frac{d^2 a_1}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_1} \right) \delta a_1 + \left(\frac{d^2 a_4}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_4} \right) \delta a_4 \right] d\tau \\ &\quad - \frac{5}{16} \frac{da_1}{d\tau} \delta a_1 \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \frac{da_4}{d\tau} \delta a_4 \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

となり運動方程式は次式の様に与えられる.

$$\frac{5}{16} \frac{d^2 a_1}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_1} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2 a_1}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_4} = 0. \tag{2.27}$$

2.3 数値計算例及び考察

2.2項の結果を用いて数値計算を行い、その結果を図2.2～2.19に示す。その際用いたパラメタは表2.1に示してある。

表2.1 2節の数値計算に用いたパラメタ

| 図番 | α | β | d_1 | $\bar{\sigma}$ | ν |
|------|----------|-------------------|------------|--------------------------|-------|
| 2.2 | 3.0 | 0.6 | 0.0 0.4 | | 1/3 |
| 2.3 | 3.0 | 0.6 | 0.0 0.4 | | 1/3 |
| 2.4 | 3.0 | 0.6 | 0.0 0.4 | | 1/3 |
| 2.5 | 3.0 | 0.6 | 1.0 | 0.7 0.8 0.9 1.0 | 1/3 |
| 2.6 | 3.0 | 1.0 | 0.1 | 0.5 0.6 0.7 | 1/3 |
| 2.7 | 3.0 | 1.4 | 0.1 | 0.4 0.5 0.6 | 1/3 |
| 2.8 | 3.0 | 0.6 1.0 1.4 | 0.1 | | 1/3 |
| 2.9 | 3.0 | 0.6 1.0 1.4 | 0.1 | | 1/3 |
| 2.10 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | | 1/3 |
| 2.11 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | | 1/3 |
| 2.12 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | | 1/3 |
| 2.13 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | 0.0 | 1/3 |
| 2.14 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | 0.1 | 1/3 |
| 2.15 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | 0.3 | 1/3 |
| 2.16 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | 0.4 | 1/3 |
| 2.17 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | 0.5 | 1/3 |
| 2.18 | 3.0 | 0.6 | 0.1 | 0.7 | 1/3 |
| 2.19 | 3.0 | 0.6 | | | |

静的平衡方程式 (2.19), (2.20) により, $\alpha = 3.0$, $\beta = 0.6$, $\nu = 1/3$ の場合に対して, 完全系 $d_1 = 0.0$ と不完全系 $d_1 = 0.4$ の平衡曲線を求めると図 2.2 ~ 2.4 となる. 図 2.2 は $\bar{\sigma} \sim a_1$, 図 2.3 は $\bar{\sigma} \sim a_4$, 図 2.4 は $a_1 \sim a_4$ の関係を示す. 図 2.2, 2.3 から分る様に, 荷重が小さい場合は平衡点は 1 個であるが, 荷重が或る値を越えると 3 個の平衡点が生ずる. 後述するポテンシャル面上での考察より, その中の 2 個は極小点で安定平衡点であり, 残りの 1 個は鞍形点であって不安定平衡点となっている.

完全系の場合は, 安定平衡点 2 個のうち 1 個は $a_1 = 0$, $a_4 \neq 0$ であって所謂基本径路

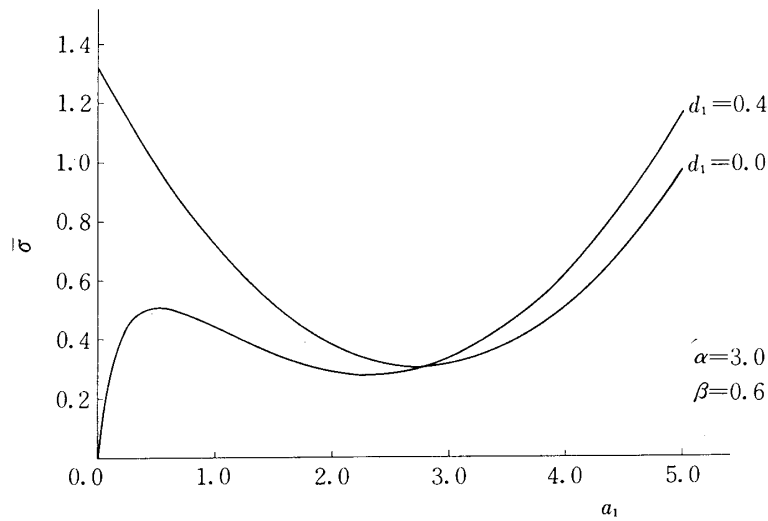


図 2.2 平衡曲線 ($\bar{\sigma} - a_1$)

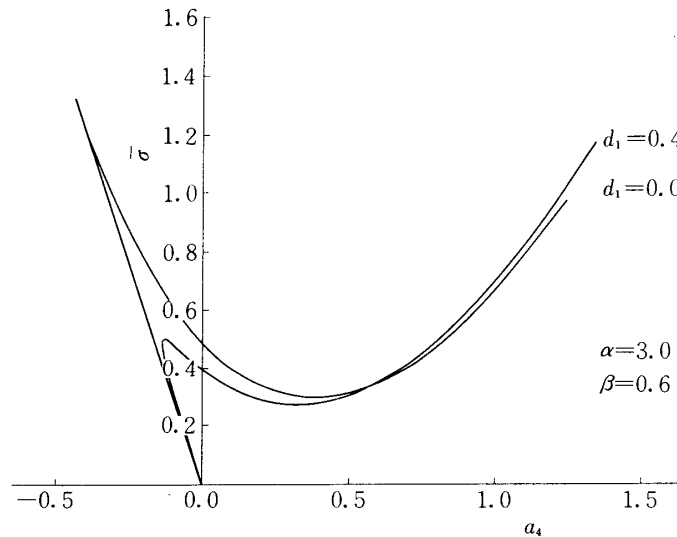
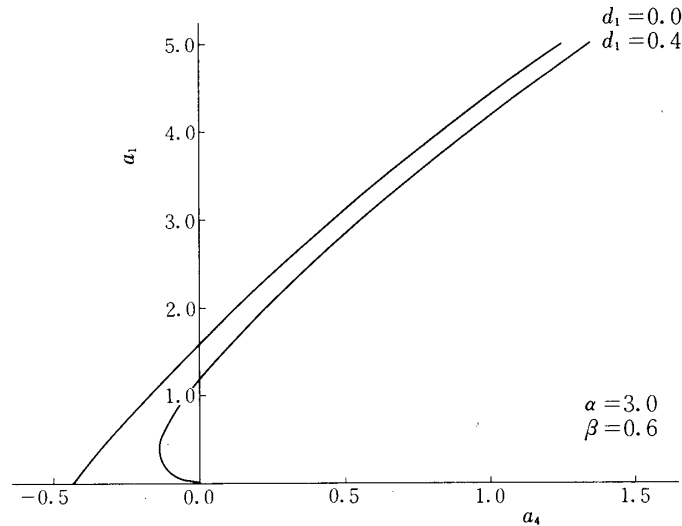


図 2.3 平衡曲線 ($\bar{\sigma} - a_4$)

図 2.4 平衡曲線 ($a_1 - a_4$)

(fundamental path) 上の平衡点であり、いま 1 個は $a_1 \neq 0$, $a_4 \neq 0$ の挫屈後の平衡点である。荷重が増すと、基本径路上の安定平衡点に不安定平衡点が近づき、遂には一致してしまう。その荷重が所謂静的挫屈荷重であって、変形は急激に増大して静的挫屈現象が生じ、挫屈後の安定平衡点に飛移る。

不完全系の場合に於ても状況はほぼ同じであるが、初期不整の存在によって挫屈前に於ても a_1 は零ではなく、荷重の増加とともに微小ではあるが徐々に大きくなっている。又基本径路上の安定平衡点と不安定平衡点とが一致する静的挫屈荷重は、完全系に較べて非常に低下している事が分る。

平衡方程式に慣性項を加えた運動方程式 (2.26), (2.27) を用いて、ステップ状の衝撃軸圧縮荷重が負荷された場合の応答を RKG 法を用いて直接数値積分した結果が図 2.5 ~ 2.7 で、 a_1 の時間による変化が示してある。パラメタの値は、 $\alpha = 3.0$, $\nu = 1/3$, $d_1 = 0.1$ であり、 β は 0.6 (図 2.5), 1.0 (図 2.6), 1.4 (図 2.7) である。

各図について共通して言える事は、各パラメタに対応する或る荷重を境にして応答が急激に変化しているという事である。即ち、低い荷重に対して生ずる微小振動が或る荷重値を境に急に大振幅振動へと変化する。そこで、無次元時間 $\tau = 0 \sim 100$ の間に実現される a_1 及び a_4 の最大値の $\bar{\sigma}$ による変化を示すと図 2.8, 2.9 となる。何れの場合にも或る臨界値に於て最大振幅が急激に増加している。この変化の鋭敏さは動的挫屈臨界値 (荷重) を定義するのに十分である。即ち動的挫屈臨界値 (荷重) は、“微小の荷重増分に対して応答の大きさが急激に増加する荷重”として定義する事ができる。

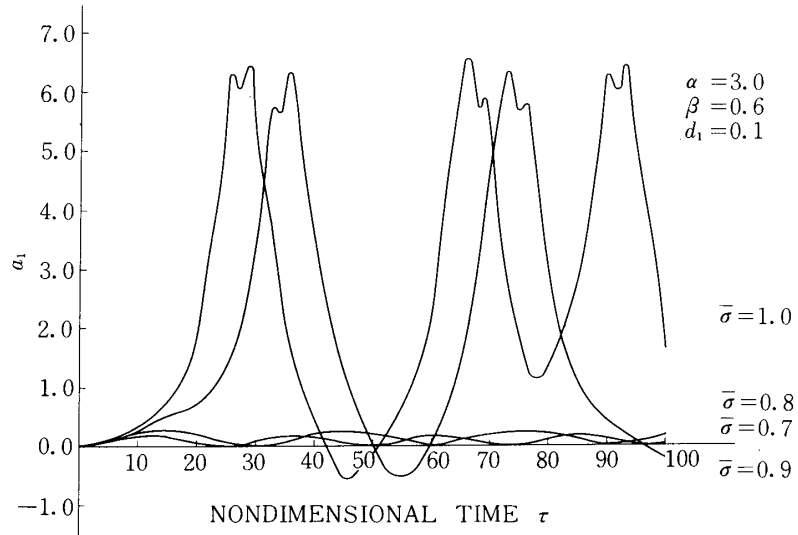


図 2.5 ステップ荷重に対する a_1 の応答 ($\beta = 0.6$)

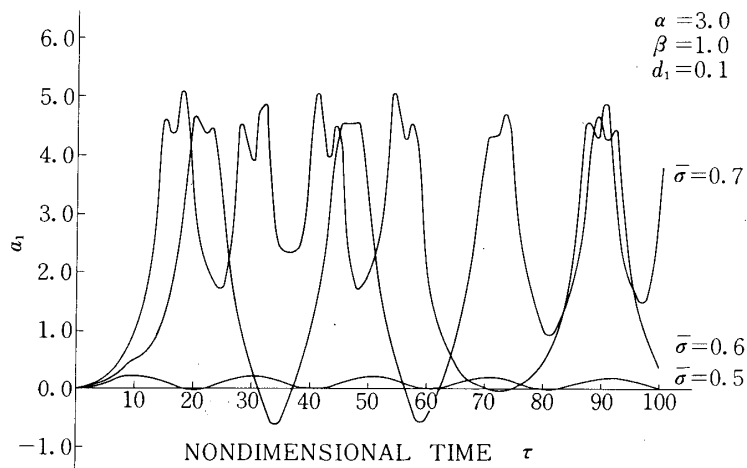


図 2.6 ステップ荷重に対する a_1 の応答 ($\beta = 1.0$)

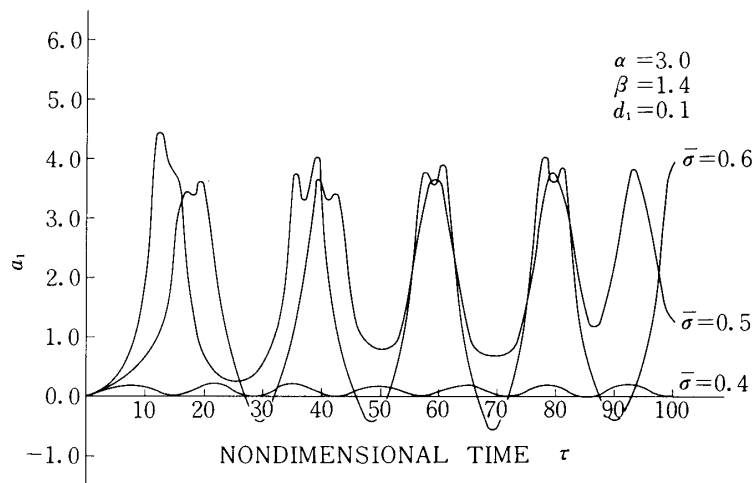


図 2.7 ステップ荷重に対する a_1 の応答 ($\beta = 1.4$)

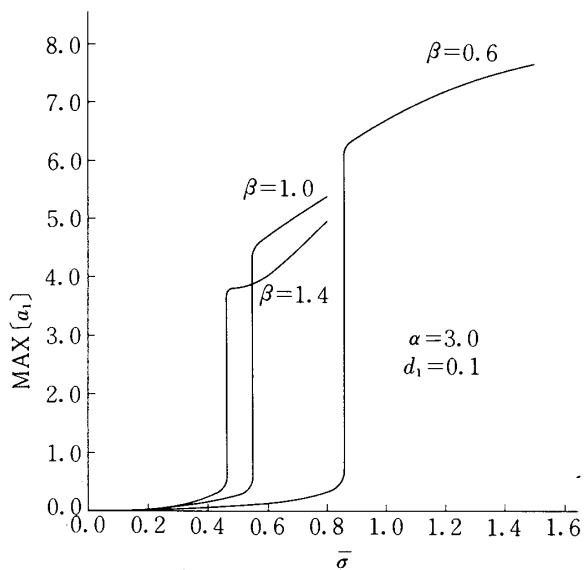


図 2.8 $\text{MAX}(a_1)$ の荷重値による変化

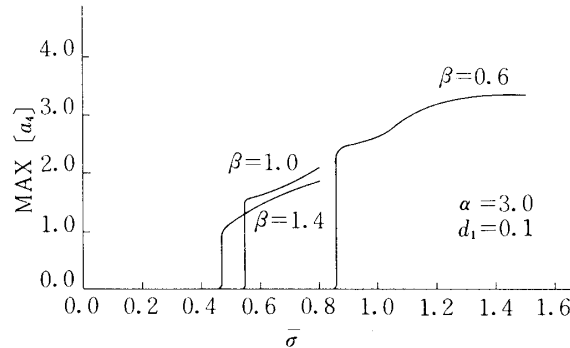


図2.9 $\text{Max}[a_4]$ の荷重値による変化

$\beta = 0.6$ の場合について更に考察を進める. この場合の静的釣合位置を示す平衡曲線を図 2.10 ~ 2.12 に示す. 又, (a) $\bar{\sigma} = 0.0$, (b) $\bar{\sigma} = 0.1$, (c) $\bar{\sigma} = 0.3$, (d) $\bar{\sigma} = 0.4$, (e) $\bar{\sigma} = 0.5$, (f) $\bar{\sigma} = 0.7$ の場合のポテンシャル面を図 2.13 ~ 2.18 に示す.

荷重が負荷される前は図 2.13 に示される様に, $a_1 = 0$, $a_4 = 0$ なる点が唯一の平衡点であり且つ安定であるが, ステップ状の衝撃軸圧縮荷重が負荷されると, それぞれの荷重に対応してポテンシャル面は瞬間的に図 2.14 ~ 2.18 の様に変化する. 最早 $a_1 = 0$, $a_4 = 0$ なる点は平衡点ではなく, ポテンシャルエネルギーは運動エネルギーへと変換されて, 負荷に対応する新しい平衡点周りの運動が励起される. 尚, $\tau = 0$ に於ては変位及び速度が零であるので, その後励起される運動は, エネルギー的見地から考えると, $a_1 = 0$, $a_4 = 0$ なる点を通るポテンシャル等高線の内部に限られる事になる.

$a_1 = 0$, $a_4 = 0$ なる点を通るポテンシャル等高線が囲む領域に着目して図 2.13 ~ 2.18 を見ると, $\bar{\sigma} = 0.3$ と $\bar{\sigma} = 0.4$ との間で領域の大きさに急激な変化がある事が分る. $\bar{\sigma}$ が 0.3 以下では, $a_1 = 0$, $a_4 = 0$ なる点を通るポテンシャル等高線は内部に原点付近の安定平衡点

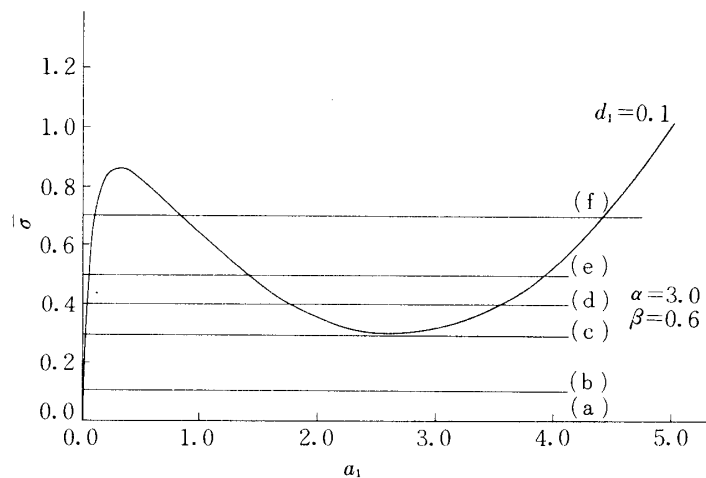


図2.10 平衡曲線 ($\bar{\sigma} - a_1$)

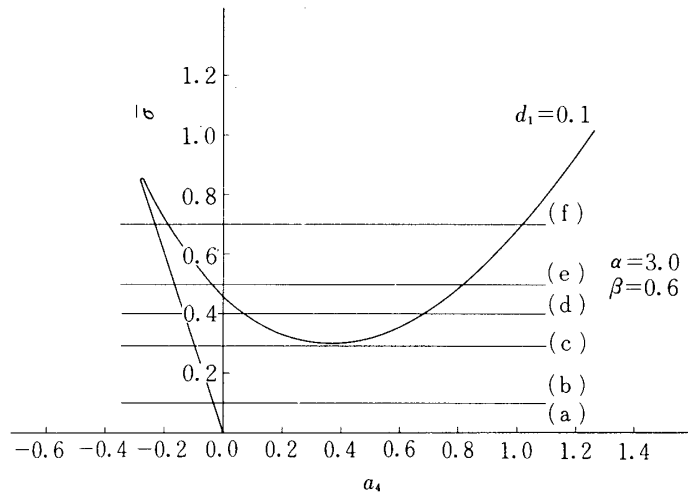


図 2.11 平衡曲線 ($\bar{\sigma} - a_4$)

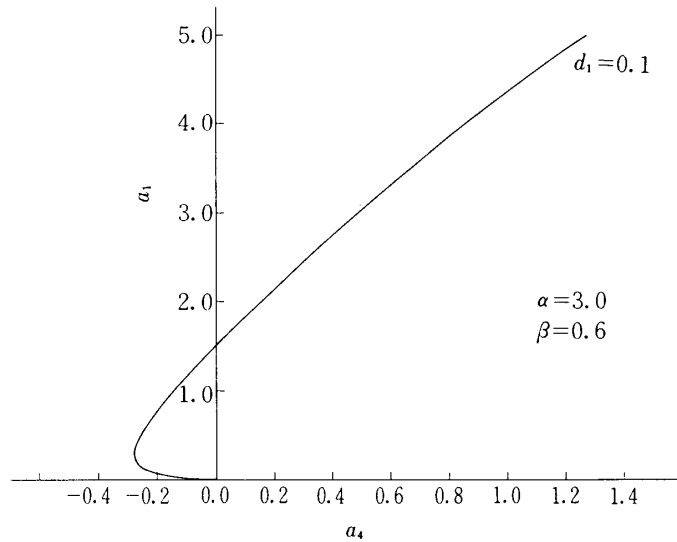


図 2.12 平衡曲線 ($a_1 - a_4$)

を1個しか含まないが、 $\bar{\sigma}$ が0.4以上では、その内部に原点付近の安定平衡点及び原点から離れて存在する安定な挫屈平衡点、更に2個の安定平衡点の中間に存在する不安定平衡点（鞍形点）の3個を含む様になり、ポテンシャル等高線の囲む領域が急増する。換言すれば、ステップ荷重が負荷された後に励起される運動の（エネルギー的に可能な）範囲が飛躍的に増加するという事であり、この様な変化は原点に於る全ポテンシャルエネルギーと鞍形点に

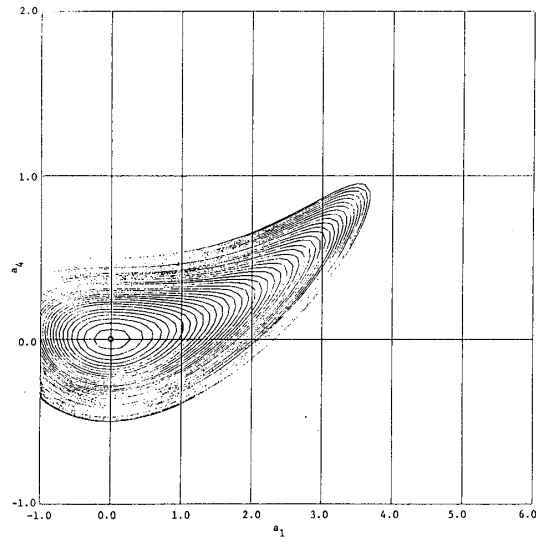


図 2.13 ポテンシャル面 (a)

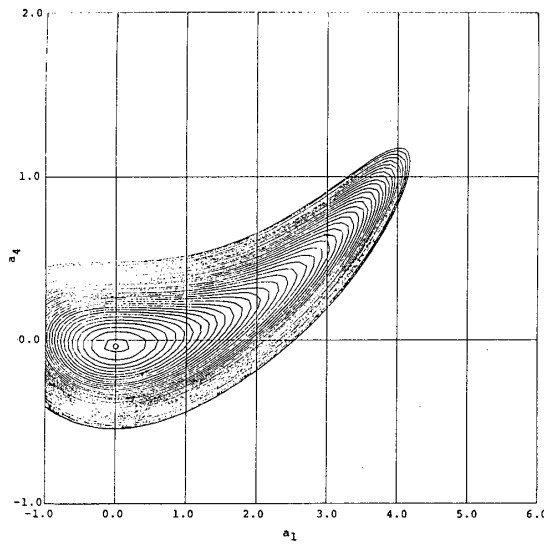


図 2.14 ポテンシャル面 (b)

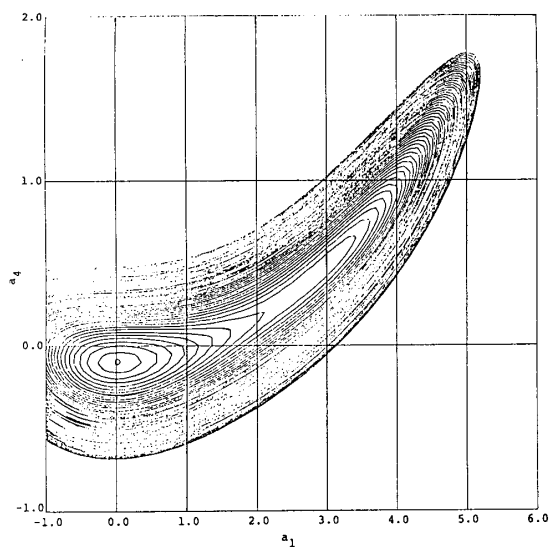


図 2.15 ポテンシャル面 (c)

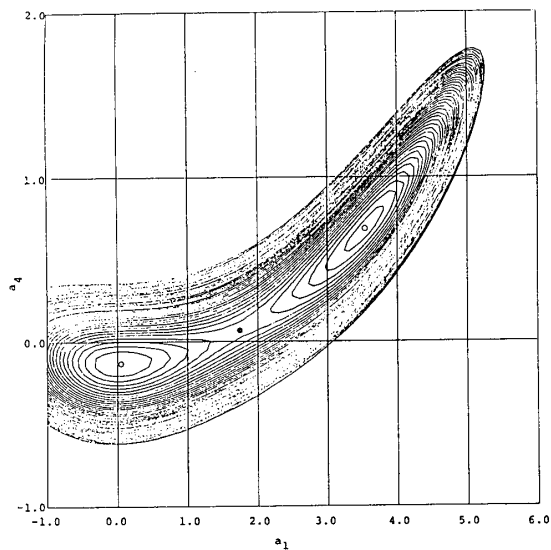


図 2.16 ポテンシャル面 (d)

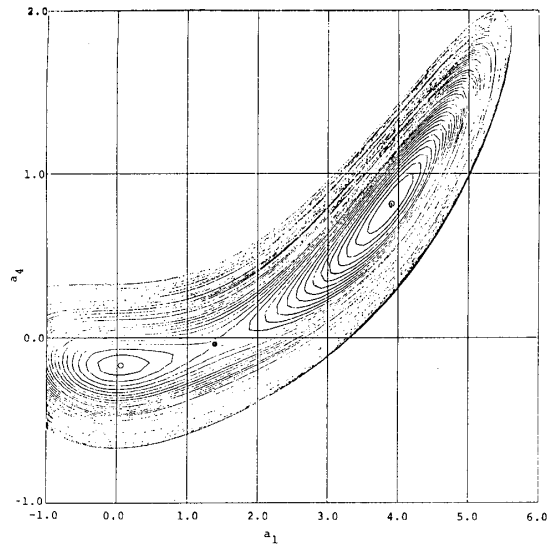


図 2.17 . ポテンシャル面 (e)

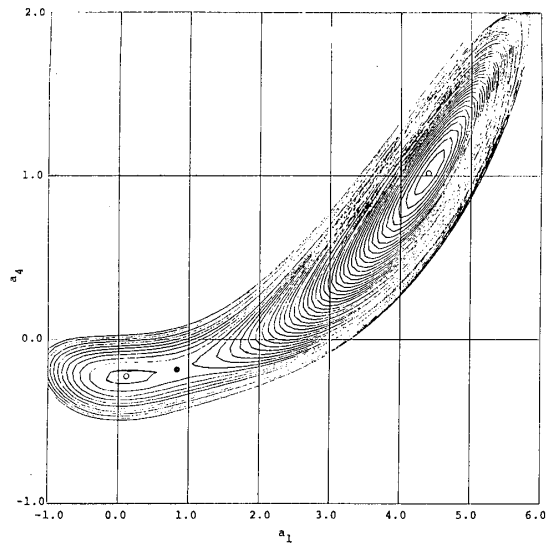


図 2.18 . ポテンシャル面 (f)

於る全ポテンシャルエネルギーとが等しくなる荷重を境にして起る。この荷重を「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」と名付ける。つまりこの荷重以下では動的挫屈は絶対に起り得ないのである。図 2.19 にはこのエネルギー的限界値の初期不整 d_1 による変化が示してある。

ただ注意すべき事は、エネルギー的に動的挫屈を起し得る場合でも、換言すれば荷重がそのエネルギー限界値以上であっても、必ずしも動的挫屈が起るとは限らない事である。つまり負荷後に励起される運動が有限時間内に鞍形点またはその近傍を通過する様なものでなければ、荷重がエネルギー的限界値以上であっても動的挫屈は起らないのである。事実、図 2.19 に同時に示されている運動方程式 (2.26), (2.27) の直接数値積分による臨界値は、エネルギー的限界値に較べてかなり高い。これは、ポテンシャル面の様子 (最急降下方向が a_4 軸にほぼ平行である。) から分る様に、原点から始る運動が主に a_4 軸方向に偏っている為である。

しかしこの事は、エネルギー的限界値の概念の持つ価値を損うものではない。それは、実際の現象に於てはエネルギー的には無視できる程度のランダムな不整 (定式化で考慮した形状初期不整を除く他の不整) が数多く存在し、それらによって運動が鞍形点またはその近傍を通過する確率が非常に高くなると予想されるからで、実際の設計基準としてはむしろエネルギー的限界値の方が推奨されると考えられる。

図 2.19 には、Roth & Klosner [3] によって与えられている運動方程式の直接数値積分による動的挫屈臨界値も示してある。筆者等の結果がそれに較べてかなり高いのは、Roth & Klosner の場合とは違って、 α , β の値に関する最小化を行っていない為であるが、本節の目的から言って最小化はあまり重要な意味がないので割愛する。

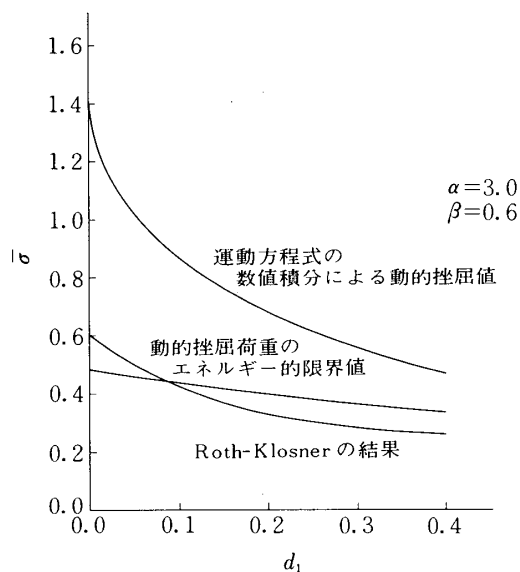


図 2.19 動的挫屈のエネルギー的限界値と数値積分による動的挫屈点

2.4 むすび

本節に於ては、衝撃軸圧縮荷重を受ける円筒殻の動的挫屈の本質を明確にする為に、自由度を2個に限定して解析を行い、平衡曲線の観察、運動方程式の数値積分、ポテンシャル面に於る検討の三方法を用いてその挙動について考察を加えた。

運動方程式を直接数値積分する事により得られた解より、“微小な荷重増分に対して応答の大きさが急激に増加する荷重”として一つの安定臨界値を定義した。

又、平衡曲線及びポテンシャル面を用いて動的挫屈現象をエネルギー的な見地から考察した。即ち動的挫屈現象は負荷によって励起される運動が、鞍形点もしくはその近傍を通過して大変形（挫屈変形）領域に到る現象であると考え、それから「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」の概念を導入した。

更に上述の二種の臨界値に大きな差異のある事を指摘し、その概念の相違を明確にすると共に、実際の構造物に於てはその設計基準として「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」を用いなければならない事を指摘しその概念の重要性を示した。

3. 単純化モデル

3.1 あらまし

構造の挙動を解析するに際して、直接その構造を取扱おうとすると非常に煩雑となって挙動の本質を理解する事が困難となる場合がある。その様な場合には、構造を単純化したモデルに置き換えて考察する事が有効である。その際に構造の挙動の本質を見失わない様に注意すべき事は言うまでもないが、採用するモデルには、要素数が少ない事、簡単（実現可能）な要素で出来ている事、各要素と実際の構造との物理的対応が明確な事等が要求される。

本章に於ては、衝撃軸圧縮荷重を受ける円筒殻の単純化モデルとして二種類の質量一ばね一リンク系を考案し、それらについて解析を進める。一つは非線形ばね要素を用いたモデルであって、所謂 Danielson モデル[5]に類似しており、このモデルでは二次及び三次非線形性を同時に考慮している点に特徴がある。いま一つのモデルはばね要素として線形ばねのみを用いたものである。線形ばねのみを用いる事により、第一のモデルに較べて各ばね要素の持つ物理的意味が非常に明確となる。

この第二のモデルは、電気工学に於る回路学がそうである様に、一般の非線形特性を有する構造を簡単な線形要素を組合せる事によって表し、その挙動の本質を表示し得る可能性をも示唆していると思われる。

解析は前節と同様に、平衡曲線、ポテンシャル面、及び運動方程式の数値積分の三方法によって行い、得られた結果を前節の結果と比較、検討して、本モデルの妥当性を検証する。

3.2 非線形ばねを用いた単純化モデル

1960年代後半に、Budiansky & Hutchinson [4]は、図3.1に示す様な一自由度の質量一ばね一リンク系がステップ荷重を受ける場合をエネルギー積分を用い解析した。更に、Koiterの一般理論を動的な問題に拡張して円筒殻に適用したが、それは挫屈前の振動を無視した軸対称曲げ変形及び非対称曲げ変形の二自由度解析であって、上述のモデルとの比較、

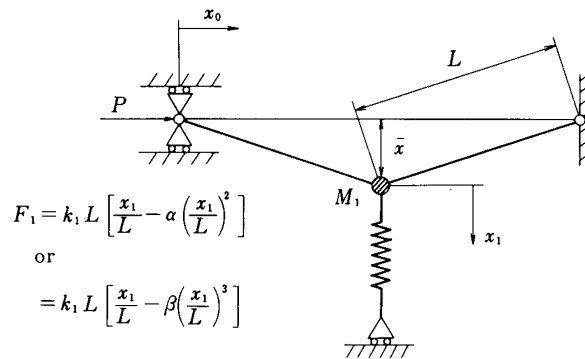


図 3.1 Budiansky Model

検討が加えられている。Danielson [5] は図 3.2 に示す様な二自由度の質量—ばね—リンク系を考え、摂動法を用いて解析した。更に球形殻の変形を挫屈前の対称変形、挫屈後の対称変形及び非対称変形として三自由度解析を行い、上述の系が球形殻の単純化モデルとして妥当である事を示した。又、Croll & Walker [6] の著書に於ても、単純なモデルを解析する事によって、構造安定の基礎が説明されている。

本節に於ては、図 3.3 に示す様な二自由度の質量—ばね—リンク系を考察する。このモデルは Danielson 型に類似しているが、二次及び三次の非線形性を同時に考慮するのが特徴である。

1) 定式化

図 3.3 に示す様な質量—ばね—リンク系を考える。左端の質量 M_0 に荷重 P が作用し、線形ばね k_0 を介してリンクに力が伝達される。リンク中央部には質量 M_1 があり、二次及び三次

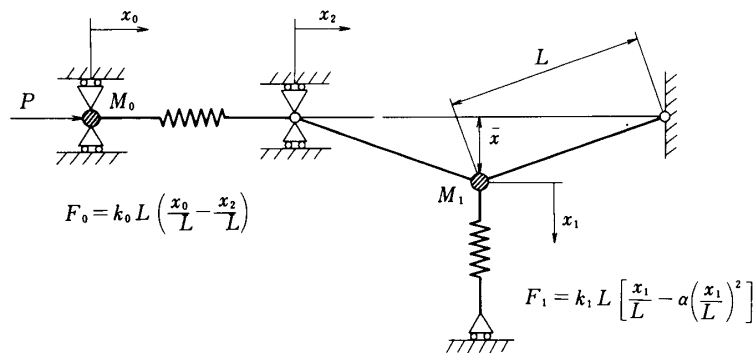


図 3.2 Danielson Model

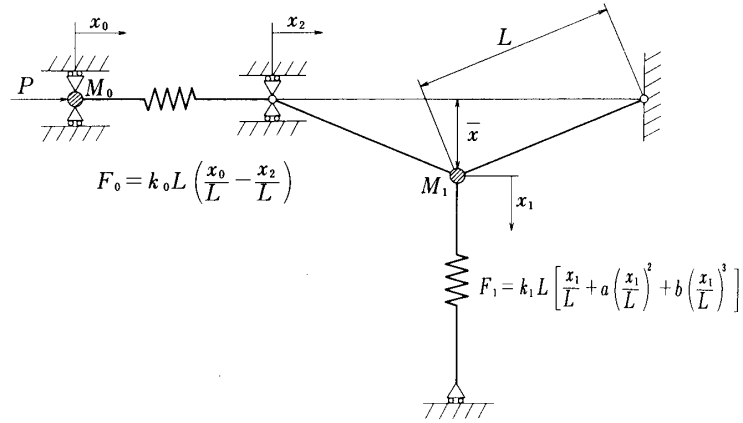


図 3.3 非線形ばねを用いた単純化モデル

非線形性を有するばねによって、その横変位が拘束されている。 x_0 , x_1 , x_2 は各節点の変位であり、 \bar{x} は初期不整を表す。

定式化に際しては、ポテンシャルエネルギーの表示に於て 4 次の微小項まで考慮し（4 次整合）、 $0(x_0/L) = 0(x_1/L) = 0(\bar{x}/L)$ と仮定する。

幾何学的関係より、 x_2 は以下の様になる。

$$x_2 = 2(\sqrt{L^2 - \bar{x}^2} - \sqrt{L^2 - (x_1 + \bar{x})^2}). \quad (3.1)$$

上式をマクローリン展開し、4 次以下の項を全て書き下すと次式を得る。

$$x_2 = L \left[\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)\left(\frac{x_1}{L}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{L}\right)^4 + \left(\frac{\bar{x}}{L}\right)\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3\left(\frac{x_1}{L}\right) \right]. \quad (3.2)$$

この系が軸力 P を受けた場合の全ポテンシャルエネルギー π は以下の様になる。

$$\pi = \frac{1}{2}k_0(x_0 - x_2)^2 + k_1L \left(\frac{x_1^2}{2L} + \frac{ax_1^3}{3L^2} + \frac{bx_1^4}{4L^3} \right) - Px_0. \quad (3.3)$$

式 (3.2) を上式に代入し、両辺を $k_1L^2/2$ で除して無次元化すると、無次元ポテンシャルエネルギー $\tilde{\pi}$ は次式の様に与えられる。

$$\tilde{\pi} = \frac{\pi}{k_1L^2/2}$$

$$= K_0(Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}Z_1^2 + \frac{a}{3}Z_1^3 + \frac{b}{4}Z_1^4\right) - \lambda Z_0. \quad (3.4)$$

静的負荷を受ける場合の釣合位置を定める平衡方程式は、式(3.4)を Z_0 及び Z_1 で偏微分する事により以下の様に与えられる。

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_0} = 2K_0(Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1) - \lambda = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_1} &= -4K_0(Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1)(Z_1 + Z) + 2(Z_1 + aZ_1^2 + bZ_1^3) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

式(3.5)は質量 M_0 に働く力の水平方向の釣合を表し、式(3.6)は質量 M_1 に働く力の鉛直方向の釣合を表している。尚、完全系に対する平衡方程式は、上式に於て $\bar{Z} = 0$ として、次式で与えられる。

$$2K_0(Z_0 - Z_1^2) - \lambda = 0, \quad (3.7)$$

$$-4K_0(Z_0 - Z_1^2)Z_1 + 2(Z_1 + aZ_1^2 + bZ_1^3) = 0. \quad (3.8)$$

動的負荷を受ける場合の運動方程式は以下の様に求める事ができる。
運動エネルギー T は次式で与えられ、

$$T = \frac{1}{2}M_0\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}M_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2. \quad (3.9)$$

無次元化すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{T}{k_1 L^2 / 2} \\ &= \frac{M_0}{k_1 L^2} \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \frac{M_1}{k_1 L^2} \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{M_0}{k_1} \left(\frac{dZ_0}{dt}\right)^2 + \frac{M_1}{k_1} \left(\frac{dZ_1}{dt}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

無次元時間 τ を以下の様に定義すると、

$$\tau = \omega_1 t, \quad (3.11)$$

ここに,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}}. \quad (3.12)$$

無次元運動エネルギー \tilde{T} は次式の様になる.

$$T = \frac{M_0}{M_1} \left(\frac{dZ_0}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dZ_1}{d\tau} \right)^2 = M \left(\frac{dZ_0}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dZ_1}{d\tau} \right)^2. \quad (3.13)$$

ここに,

$$M = \frac{M_0}{M_1}. \quad (3.14)$$

式 (3.13) を式 (3.4) と共に用いて, 無次元 Hamiltonian \tilde{H} は次式の様になり,

$$\tilde{H} = \tilde{\pi} - \tilde{T}, \quad (3.15)$$

Hamilton の原理を適用して次式を得る.

$$\begin{aligned} \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{H} d\tau &= \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tilde{\pi} - \tilde{T}) d\tau \\ &= \left[-2M \frac{dZ_0}{d\tau} \delta Z_0 - 2 \frac{dZ_1}{d\tau} \delta Z_1 \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left(2M \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_0} \right) \delta Z_0 + \left(2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_1} \right) \delta Z_1 \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

従って, 求める運動方程式は以下の様に与えられる.

$$2M \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_0} = 0, \quad (3.17)$$

$$2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_1} = 0. \quad (3.18)$$

上式に式 (3.5), (3.6) を代入すると, 以下の様になる.

$$2M \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + 2K_0 (Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1) - \lambda = 0, \quad (3.19)$$

$$2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} - 4K_0(Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1)(Z_1 + \bar{Z}) + 2(Z_1 + aZ_1^2 + bZ_1^3) = 0. \quad (3.20)$$

式(3.24)は質量 M_0 に働く力の慣性力を含んだ水平方向の釣合を表し、式(3.20)は質量 M_1 に働く力の慣性力を含んだ鉛直方向の釣合を表している。

2) 数値計算例及び考察

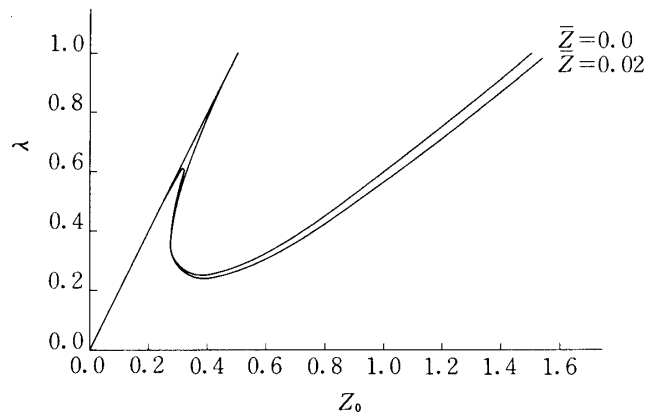
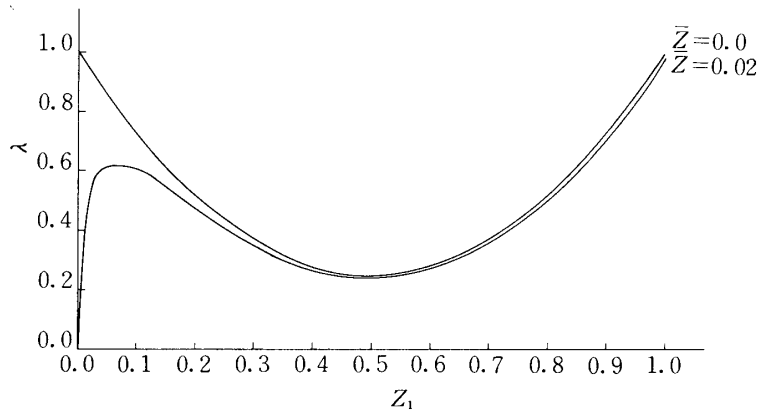
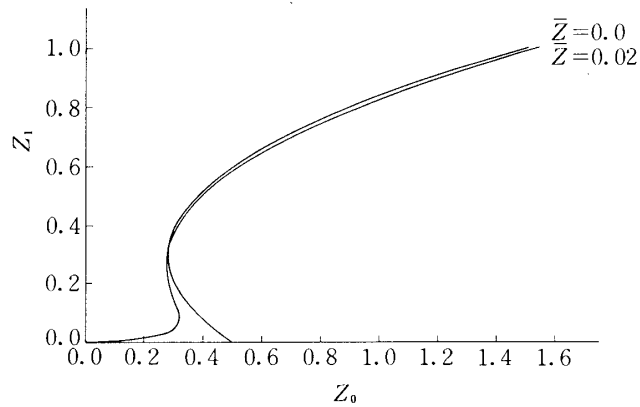
1) の定式化で得られた結果を用いて数値計算を行い、その結果を図3.4～3.18に示す。又その際に用いたパラメタを表3.1に示す。

平衡方程式(3.5)、(3.6)を用いて $a = -3.0$ 、 $b = 3.0$ 、 $\bar{Z} = 0.0$ 、 0.02 の場合の平衡曲線を図3.4～3.6に示す。図3.4は無次元荷重 λ と Z_0 との関係を、図3.5は λ と Z_1 との関係を示しており、図3.6は Z_0 と Z_1 との関係を示している。前節の図2.2～2.4と同様に、荷重が小さい場合は平衡点は1個しか存在せず、後述のポテンシャル面上に於る考察より分る様に安定平衡点となっている。又、荷重が小さいうちは Z_1 に較べて Z_0 が大きく、歪エネルギーは主としてばね k_0 に蓄えられる。荷重が或る値を越えると平衡点は3個となる。上と同様の考察により、そのうちの2個は安定平衡点であり、1個は不安定平衡点(鞍形点)

表3.1 3.2項の数値計算に用いたパラメタ

| 図番 | a | b | \bar{Z} | λ |
|-----------|------|-----|-----------|-----------|
| 3.4 | -3.0 | 3.0 | 0.0 | |
| | | | 0.02 | |
| 3.5 | -3.0 | 3.0 | 0.0 | |
| | | | 0.02 | |
| 3.6 | -3.0 | 3.0 | 0.0 | |
| | | | 0.02 | |
| 3.7 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | |
| 3.8 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | |
| 3.9 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | |
| 3.10 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.0 |
| 3.11 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.20 |
| 3.12 3.12 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.26 |
| 3.13 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.28 |
| 3.14 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.30 |
| 3.15 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.40 |
| | | | | 0.46 |
| | | | | 0.52 |
| | | | | |
| 3.16 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | 0.40 |
| | | | | 0.46 |
| | | | | 0.52 |
| 3.17 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | |
| 3.18 | -3.0 | 3.0 | 0.02 | |

$$K_0 = 1.0, M = 1.0$$

図 3.4 平衡曲線 ($\lambda - Z_0$)図 3.5 平衡曲線 ($\lambda - Z_1$)図 3.6 平衡曲線 ($Z_1 - Z_0$)

となっている。更に荷重が増加し或る値に達すると、 Z_1 が急激に増加して分岐挫屈（完全系）又は極限点挫屈（不完全系）を起す。図3.4からは Z_0 も急増してばね k_0 の縮み量も急増する様に見えるが、 Z_1 が増加するので挫屈平衡位置でのばね k_0 の縮み量は、挫屈直前のそれと同じであり、挫屈過程に於て外荷重 P により成された仕事は、主としてばね k_1 に歪エネルギーとして蓄えられる。この間の状況は、軸圧縮荷重を受ける円筒殻が、挫屈前は面内歪エネルギーとして、挫屈後は面外曲げ歪エネルギーとして主としてエネルギーを蓄えと言う状況と非常に似通っている。

図3.7～3.9には $a = -3.0$ 、 $b = 3.0$ 、 $Z = 0.02$ の場合の平衡曲線が再録してあり、図中に示した(a)～(e)の各荷重に対するポテンシャル面を式(3.4)を用いて計算し、図3.10～3.14に示す。定性的には前節の図2.13～2.18と全く同様である事が分る。

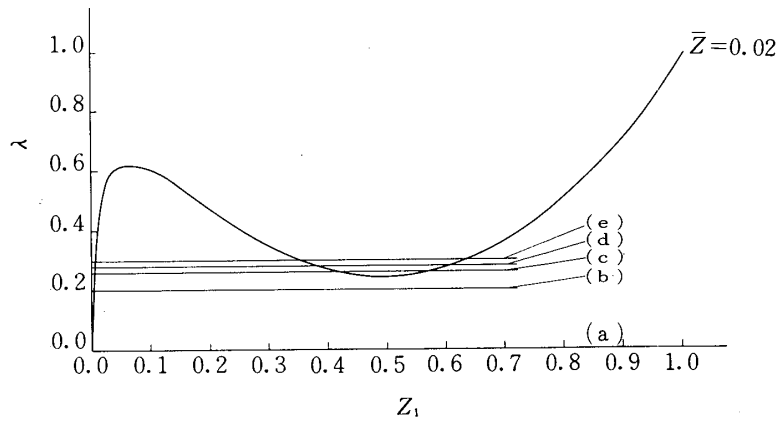


図3.7 平衡曲線 ($\lambda - Z_0$)

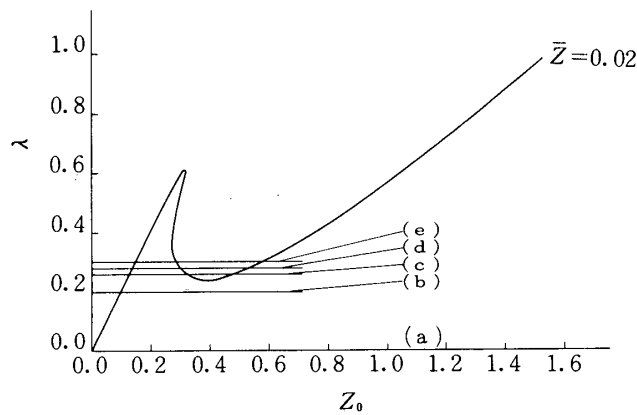
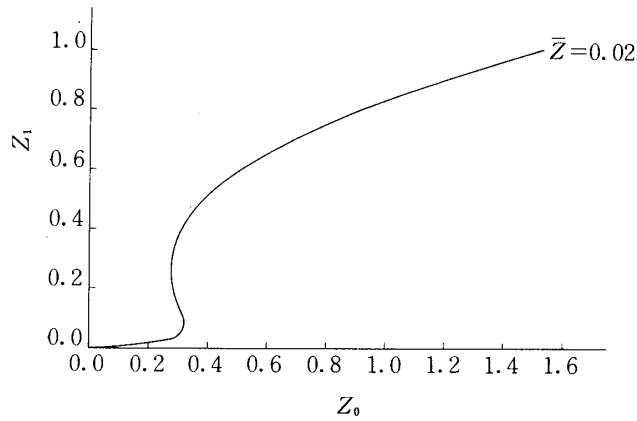


図3.8 平衡曲線 ($\lambda - Z_1$)

図3.9 平衡曲線 ($Z_1 - Z_0$)

ステップ状の衝撃荷重が負荷されると、その荷重に応じてポテンシャル面は図3.10の状態から図3.11～3.14の様な状態へと急変する。原点は最早安定な平衡点ではなくなって運動が励起されるが、エネルギー的見地から見ると、その運動は原点を通るポテンシャル等高線の内部に限られる事になる。そこでポテンシャル等高線の囲む面積に注目して図3.12～3.14を検討すると、 $\lambda = 0.27$ の前後でポテンシャル等高線の囲む面積が急激に増加している事が分る。この荷重値は、前節に於て定義された「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」に他ならない。

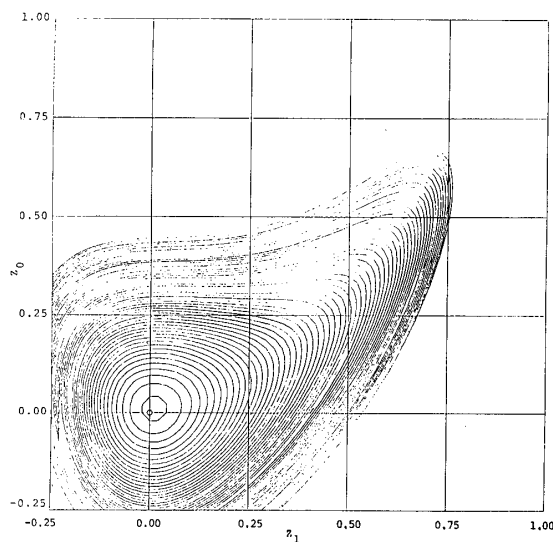


図3.10 ポテンシャル面 (a)

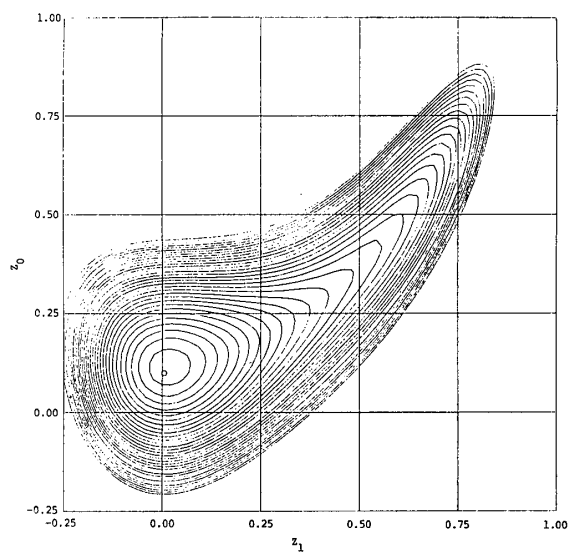


図 3.11 ポテンシャル面 (b)

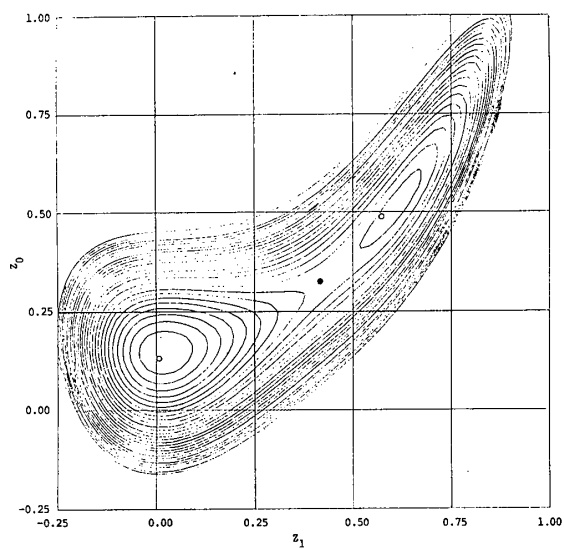


図 3.12 ポテンシャル面 (c)

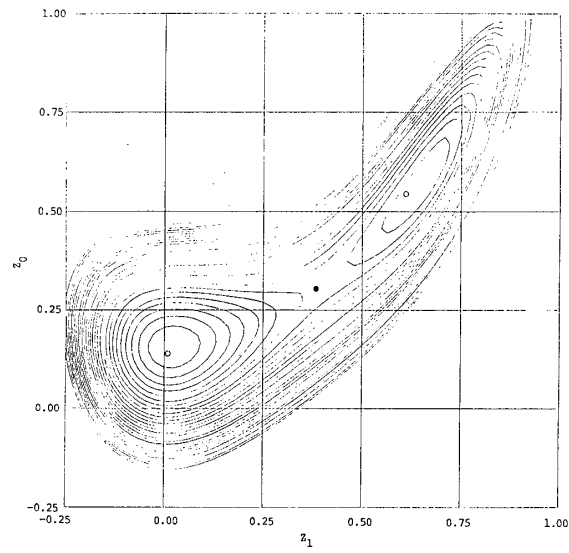


図 3.13 ポテンシャル面 (d)

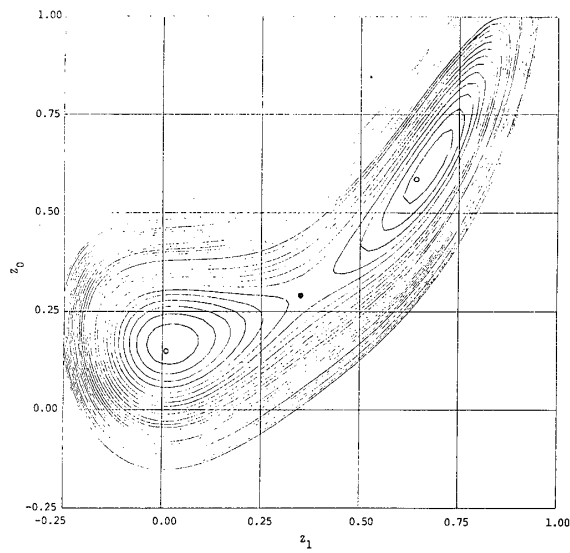
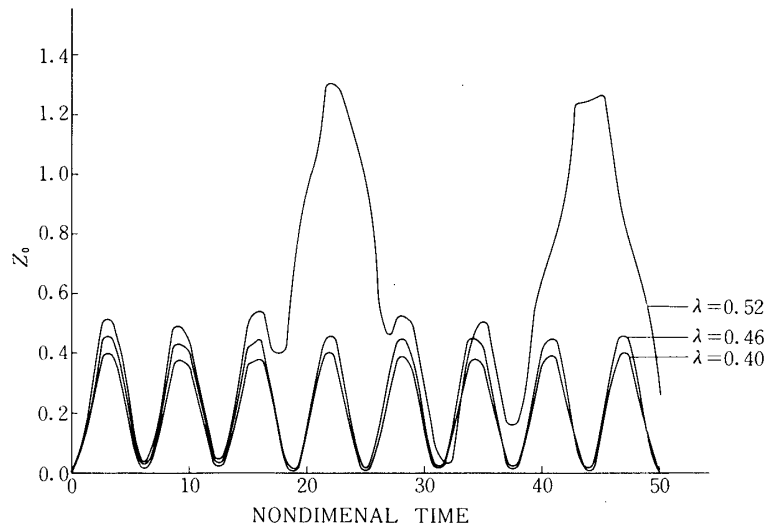
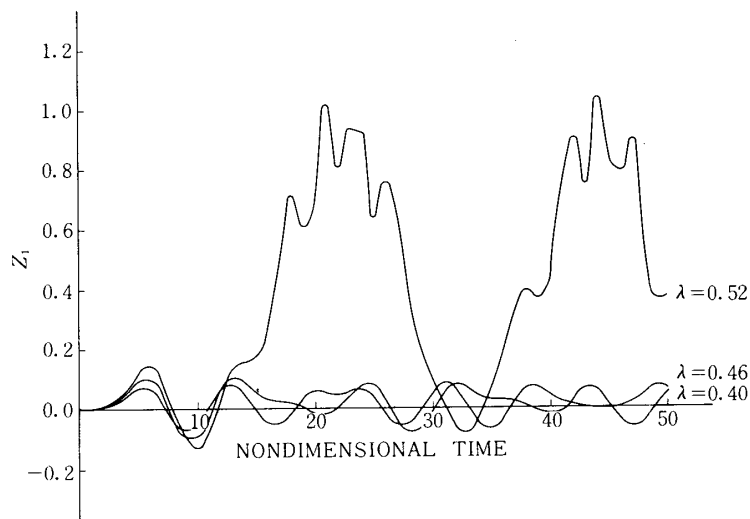
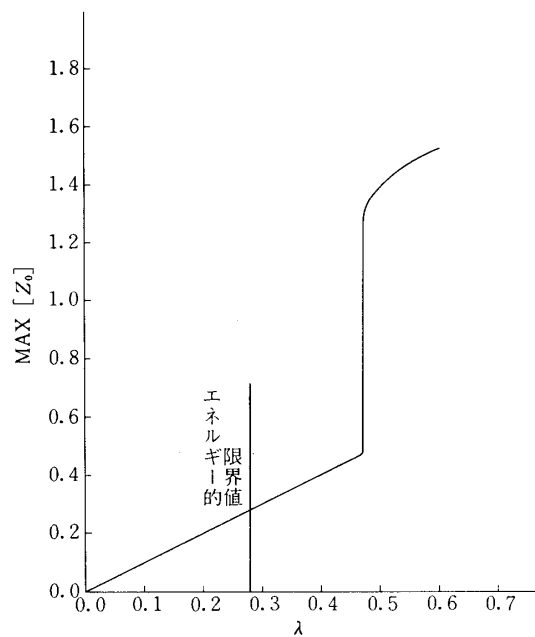
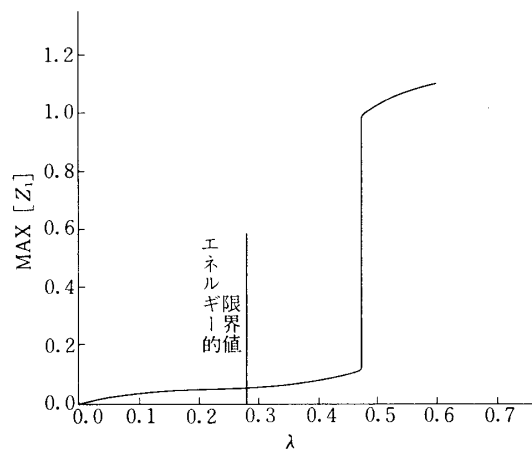


図 3.14 ポテンシャル面 (e)

図 3.15 ステップ荷重に対する Z_0 の応答図 3.16 ステップ荷重に対する Z_1 の応答

更に、実際に励起される運動を追跡する為に、運動方程式 (3.19), (3.20) をRKG法を用いて数値積分を実行し、その結果を図 3.15, 3.16 に示す。これらの図より、 Z_0 及び Z_1 の応答が $\lambda = 0.46$ と $\lambda = 0.50$ との間で急激に大きくなっている事が分る。その様子を明らかにする為に、ステップ荷重値と無次元時間 $\tau = 50$ までに実現された応答の最大値との関係を図 3.17, 3.18 に示す。 $\lambda = 0.47$ に於て明確な動的座屈現象が観察される。又前節と同様に、図中に同時に示された「動的座屈荷重のエネルギー的限界値」に較べて数値積分による安定臨界値はかなり高い事が分る。

図 3.17 Max [Z_0] の荷重値による変化図 3.18 Max [Z_1] の荷重値による変化

平衡曲線，ポテンシャル面，及び運動方程式の直接数値積分による以上の考察により，図 3.3 に示すモデルは軸圧縮荷重を受ける円筒殻の挙動を良く説明し，その単純化モデルとして妥当であると思われる。

3.3 線形ばねを用いた単純化

前項に於ては非線形ばねを含んだ単純化モデルについて解析を行ったが、本項では図3.19に示す様な、線形ばねのみを用いた単純化モデルについて解析を行う。

筆者の考案したこのモデルを用いる事により、系の構成要素が極めて簡明になるばかりでなく、実際の円筒殻との物理的対応が前述のモデルに較べて非常に明確となる事を示す。

1) 定式化

図3.19に示す様な質量—ばね—リンク系を考える。左端の質量 M_0 に荷重 P が作用し、線形ばね k_0 を介してリンクに力が伝達される。リンクの中央には質量 M_1 があり、線形ばね k_1 及び k_4 によって拘束されている。更にリンクの両端は線形ばね k_2 によって結ばれている。 x_0 , x_1 , x_2 は各節点の変位を、 \bar{x} は初期不整を表している。

定式化に際しては、前項と同様にポテンシャルエネルギーの表示に於て4次の微小項まで考慮し(4次整合), $0\left(\frac{x_0}{L}\right) = 0\left(\frac{x_1}{L}\right) = 0\left(\frac{\bar{Z}}{L}\right)$ と仮定する。

先づ、ばね k_4 の縮み量 Δ を x_1 , \bar{x} で表す。 θ_0 , θ を図3.19の様にとると次式を得る。

$$\Delta^2 = \left[\sqrt{\{2L \cos \theta_0 - L \cos(\theta + \theta_0)\}^2 + \{nL - L \sin(\theta + \theta_0)\}^2} - \sqrt{(L \cos \theta_0)^2 + (nL - L \sin \theta_0)^2} \right]^2 \quad (3.21)$$

又、 θ 及び θ_0 は x_1 , \bar{x} と以下の様な関係がある。

$$\sin \theta_0 = \frac{\bar{x}}{L} \equiv \bar{Z}, \quad (3.22)$$

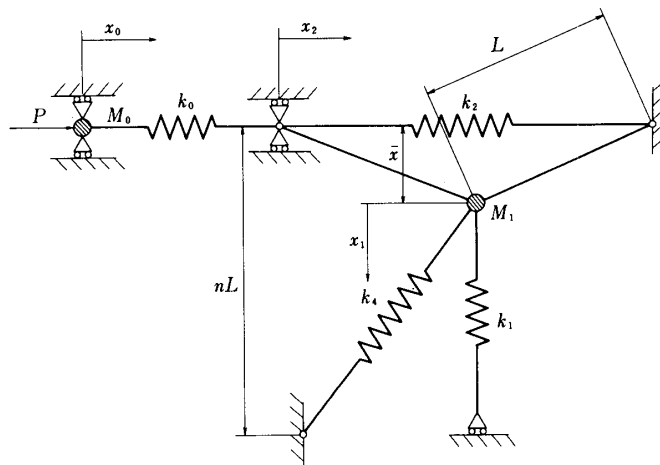


図3.19 線形ばねのみを用いた単純化モデル

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0} = 1 - \frac{1}{2} \bar{Z}^2 - \frac{1}{8} \bar{Z}^4 - \dots, \quad (3.23)$$

$$\sin(\theta + \theta_0) = \frac{\bar{x} + x_1}{L} = \bar{Z} + Z_1, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta_0) &= \sqrt{1 - \sin^2(\theta + \theta_0)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\bar{Z} + Z_1)^2 - \frac{1}{8} (\bar{Z} + Z_1)^4 - \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

式(3.22)~(3.25)を式(3.21)に代入し、マクローリン展開を用いて冪級数に展開し、4次整合性を考慮すると Δ^2 は次式の様に与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (n^2 + 1)L^2 \left[\frac{n^2}{(n^2 + 1)^2} Z_1^2 + \frac{(n^2 + 2)^2}{4(n^2 + 1)^4} (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1)^2 \right. \\ &\quad - \frac{n^3 + 2n}{(n^2 + 1)^3} Z_1 (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1) - \frac{2n^2}{(n^2 + 1)^3} Z_1 (Z_1^3 + 3\bar{Z}Z_1^2 + 2\bar{Z}^2Z_1) \\ &\quad \left. + \frac{n^4}{(n^2 + 1)^4} Z_1 (Z_1^3 + 3\bar{Z}Z_1^2 + 3\bar{Z}^2Z_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

系の全ポテンシャルエネルギー π は次式の様に表示する事ができる。

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} k_0 (x_0 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} k_4 \Delta^2 - P x_0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

上式の両辺を $k_1 L^2 / 2$ で割り無次元化し、 x_2 に関して式(3.2)の關係を用いると、無次元全ポテンシャルエネルギー $\tilde{\pi}$ は次式の様になる。

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} &= \frac{\pi}{k_1 L^2 / 2} = K_0 (Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1)^2 + Z_1^2 + K_2 (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1)^2 \\ &\quad + K_4 \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 1} Z_1^2 + \frac{(n^2 + 2)^2}{4(n^2 + 1)^3} (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n^3 + 2n}{(n^2 + 1)^2} Z_1 (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1) - \frac{2n^2}{(n^2 + 1)^2} Z_1 (Z_1^3 + 3\bar{Z}Z_1^2 + 2\bar{Z}^2Z_1) \\
& + \frac{n^4}{(n^2 + 1)^3} Z_1 (Z_1^3 + 3\bar{Z}Z_1^2 + 3\bar{Z}^2Z_1) \} - \lambda Z_0. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

静的負荷の場合に於る釣合位置を定める平衡方程式は、式(3.28)を Z_0 及び Z_1 で偏微分する事により以下の様に与えられる。

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_0} = 2K_0(Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1) - \lambda = 0, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_1} = & -4K_0(Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1)(Z_1 + \bar{Z}) + 2Z_1 \\
& + 4K_2(Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1)(Z_1 + \bar{Z}) + K_4 \left\{ \frac{2n^2}{n^2 + 1} Z_1 \right. \\
& + \frac{(n^2 + 2)^2}{(n^2 + 1)^3} (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1)(Z_1 + \bar{Z}) \\
& - \frac{n^3 + 2n}{(n^2 + 1)^2} (3Z_1^2 + 4\bar{Z}Z_1) - \frac{2n^2}{(n^2 + 1)^2} (4Z_1^3 + 9\bar{Z}Z_1^2 + 4\bar{Z}^2Z_1) \\
& \left. + \frac{n^4}{(n^2 + 1)^3} (4Z_1^3 + 9\bar{Z}Z_1^2 + 6\bar{Z}^2Z_1) \right\} = 0. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

ここで、式(3.29)は質量 M_0 に働く力の水平方向の釣合を表し、式(3.30)は質量 M_1 に働く力の鉛直方向の釣合を表している。

尚、完全系に対する平衡方程式は、式(3.29)、(3.30)に於て $\bar{Z} = 0$ を代入する事により、次式の様にと与えられる。

$$2K_0(Z_0 - Z_1^2) - \lambda = 0, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
& -4K_0(Z_0 - Z_1^2)Z_1 + 2Z_1 + 4K_2Z_1^3 \\
& + K_4 \left[\frac{2n^2}{n^2 + 1} Z_1 - \frac{n^3 + 2n}{(n^2 + 1)^2} \cdot 3Z_1^2 \right]
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{(n^2 + 2)^2}{(n^2 + 1)^3} - \frac{8n^2}{(n^2 + 1)^2} + \frac{4n^4}{(n^2 + 1)^3} \right\} Z_1^3 \Big] = 0 \quad (3.32)$$

動的負荷の場合の運動方程式は、Hamilton の原理を用いて以下の様に求められる。

運動エネルギー T は次式で与えられ、

$$T = \frac{1}{2} M_0 \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2, \quad (3.33)$$

無次元化すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= T / (k_1 L^2 / 2) \\ &= \frac{M_0}{k_1 L^2} \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \frac{M_1}{k_1 L^2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 = \frac{M_0}{k_1} \left(\frac{dZ_0}{dt} \right)^2 + \frac{M_1}{k_1} \left(\frac{dZ_1}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

前節と同様に無次元時間 τ を以下の様に定義すると、

$$\tau = \omega_1 t, \quad (3.35)$$

ここに、

$$\omega_1 = \sqrt{k_1 / M_1}, \quad (3.36)$$

無次元運動エネルギー \tilde{T} は次式の様になる。

$$\tilde{T} = M \left(\frac{dZ_0}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dZ_1}{d\tau} \right)^2. \quad (3.37)$$

ここに、

$$M = M_0 / M_1. \quad (3.38)$$

式 (3.28), (3.38) を用い、Hamilton の原理を適用する事により次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{H} d\tau &= \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tilde{\pi} - \tilde{T}) d\tau \\ &= \left[-2M \frac{dZ_0}{d\tau} \delta Z_0 - 2 \frac{dZ_1}{d\tau} \delta Z_0 \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left\{ 2M \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_0} \right\} \delta Z_0 + \left\{ 2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial Z_1} \right\} \delta Z_1 \right] d\tau \end{aligned}$$

$$= 0. \quad (3.39)$$

これより求める運動方程式は、以下の様に与えられる。

$$2M \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + 2K_0 (Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1) - \lambda = 0, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} - 4K_0 (Z_0 - Z_1^2 - 2\bar{Z}Z_1) (Z_1 + \bar{Z}) + 2Z_1 \\ & + 4K_2 (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1) (Z_1 + \bar{Z}) + K_4 \left\{ \frac{2n^2}{n^2+1} Z_1 \right. \\ & + \frac{(n^2+2)^2}{(n^2+1)^3} (Z_1^2 + 2\bar{Z}Z_1) (Z_1 + \bar{Z}) \\ & - \frac{n^3+2n}{(n^2+1)^2} (3Z_1^2 + 4\bar{Z}Z_1) - \frac{2n^2}{(n^2+1)^2} (4Z_1^3 + 9\bar{Z}Z_1^2 + 4\bar{Z}^2 Z_1) \\ & \left. + \frac{n^4}{(n^2+1)^3} (4Z_1^3 + 9\bar{Z}Z_1^2 + 6\bar{Z}^2 Z_1) \right\} = 0. \quad (3.41) \end{aligned}$$

2) 数値計算例及び考察

1) の定式化により得られた結果を用いて数値計算を行い、その計算結果を図3.20～3.35に示す。又、その際に用いたパラメータを表3.2に示す。

図3.20～3.22には式(3.29)、(3.30)を用いて平衡曲線が示してあり、図3.23、3.24に示された(a)～(f)の荷重に対するポテンシャル面が式(3.28)を用いて等高線の形で図3.26～3.31に示してある。これらの図から分る系の静的な性質(平衡点の安定性等)は前節及び前項に於る結果と全く同様であるのでここでは述べず、円筒殻との対応及び動的な応答に重点を置いて考察を加える。

先ず、Kármán-Tsien型の基礎方程式(2.1)、(2.2)を考察する。適合条件式(2.2)から分る様に、完全系に対しては応力関数 F は基本的に w に関して二次であり、曲率半径 R が有限である事により w に関して一次の項が出て来ている。従って、平衡方程式に於ては基本的に一次及び三次の項が存在し、曲率の影響により一次及び二次の項が現れる事が分る。

表3.2 3.3項の数値計算に用いたパラメータ

| k_0 | k_2 | k_4 | n | M |
|-------|-------|-------|-----|-----|
| 4.0 | 1.125 | 6.25 | 0.5 | 1.0 |

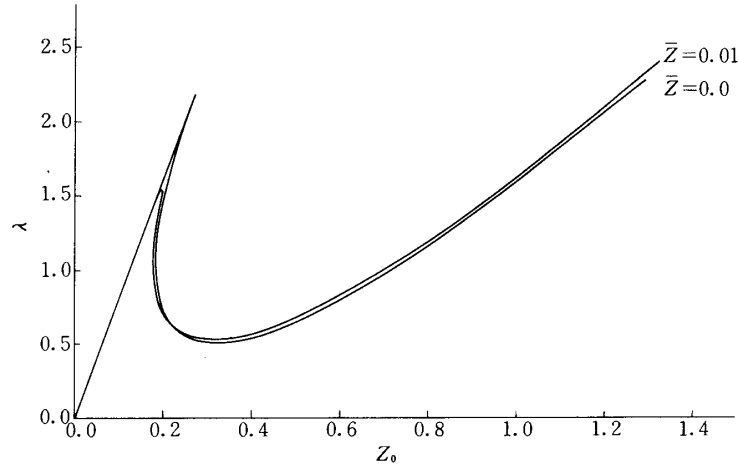


図 3.20 平衡曲線 ($\lambda - Z_0$)

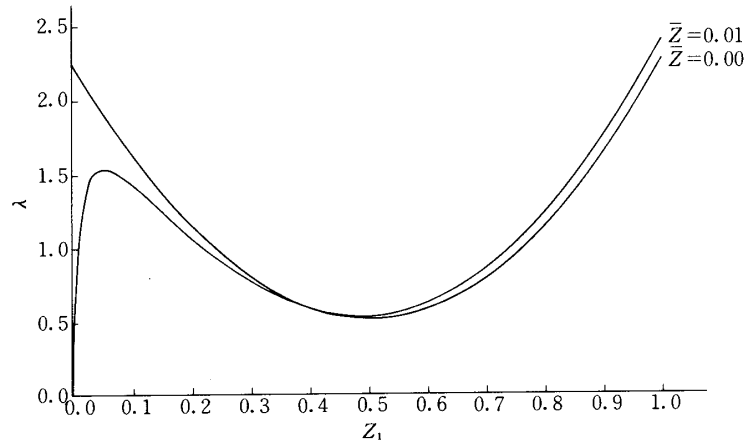


図 3.21 平衡曲線 ($\lambda - Z_1$)

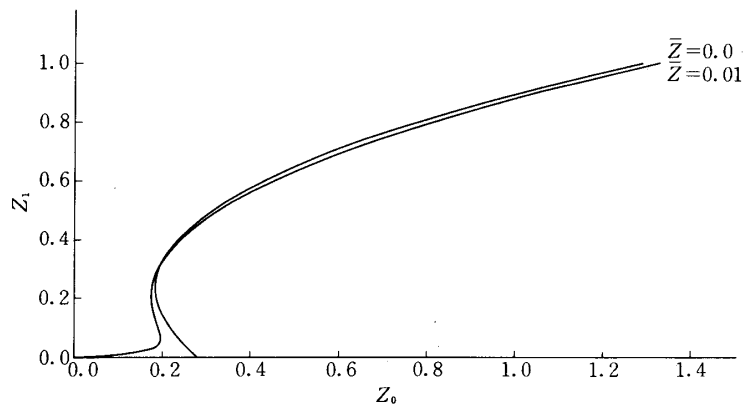


図 3.22 平衡曲線 ($Z_1 - Z_0$)

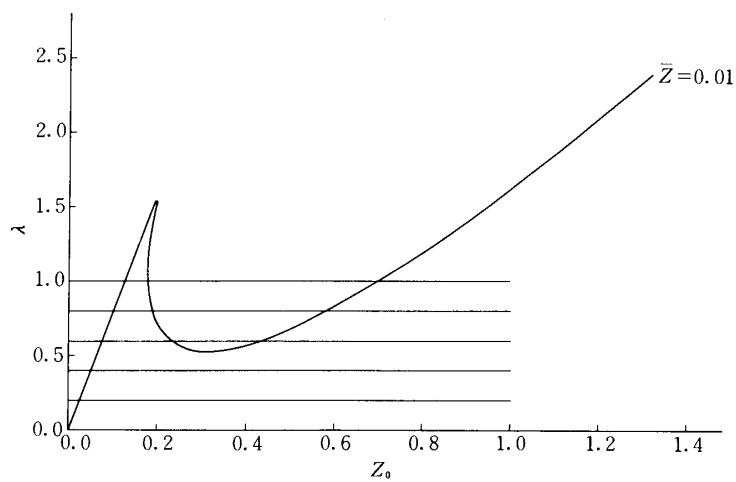


図 3.23 平衡曲線 ($\lambda - Z_0$)

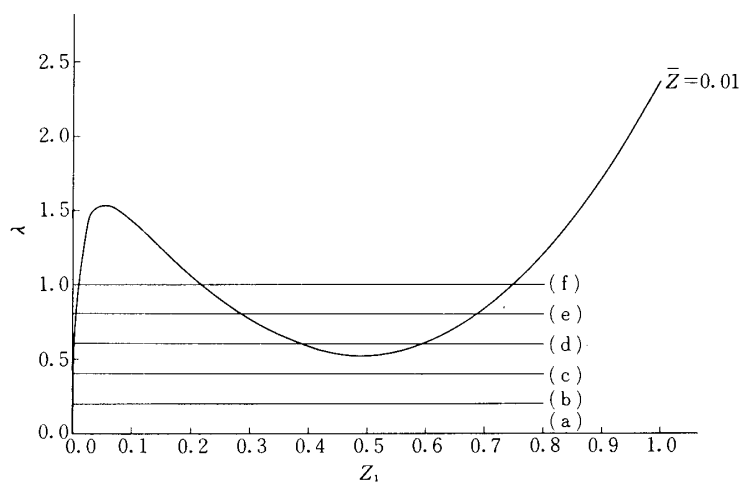


図 3.24 平衡曲線 ($\lambda - Z_1$)

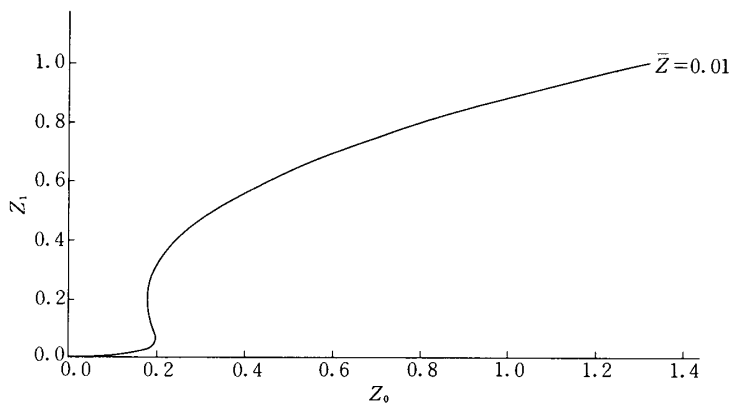


図 3.25 平衡曲線 ($Z_1 - Z_0$)

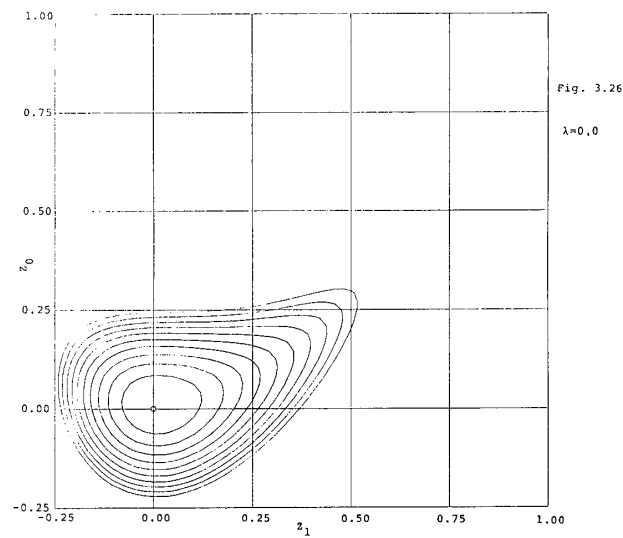


図 3.26 ポテンシャル面 (a)

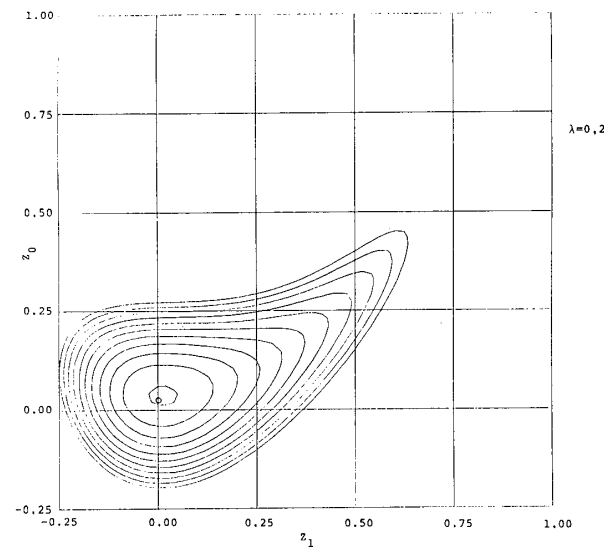


図 3.27 ポテンシャル面 (b)

円筒殻と本モデルとの対応を明確にする為に、モデル（完全系）に対する平衡方程式を以下に示す。

$$2K_0(Z_0 - Z_1^2) - \lambda = 0, \quad (3.31)$$

$$-4K_0(Z_0 - Z_1^2)Z_1 + \underline{\underline{2Z_1}} + \underline{\underline{4K_2Z_1^3}}$$

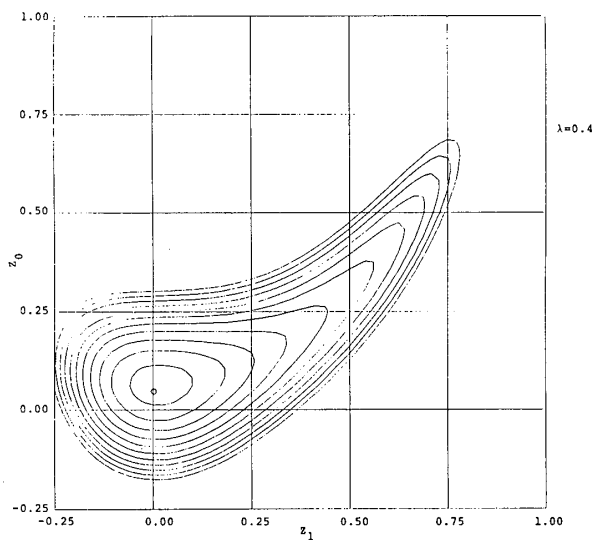


図 3.28 ポテンシャル面 (c)

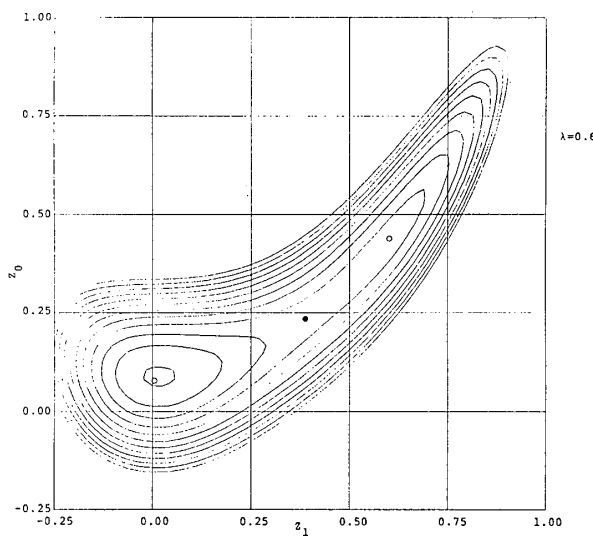


図 3.29 ポテンシャル面 (d)

$$\begin{aligned}
 &+ K_4 \left[\frac{2n^2}{n^2+1} Z_1 - \frac{n^3+2n}{(n^2+1)^2} \cdot 3Z_1^2 \right. \\
 &+ \left. \left\{ \frac{(n^2+2)^2}{(n^2+1)^3} - \frac{8n^2}{(n^2+1)^2} + \frac{4n^4}{(n^2+1)^3} \right\} Z_1^3 \right] = 0. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

上式から分る様に、ばね k_1 は一次、ばね k_2 は三次、ばね k_4 は一次、二次及び三次の項を

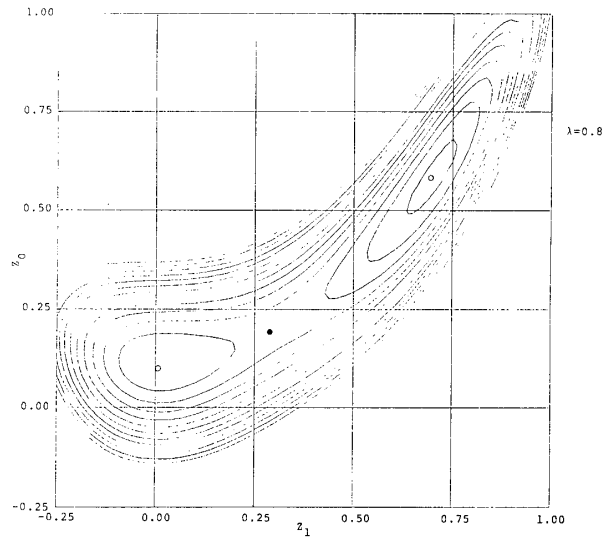


図 3.30 ポテンシャル面 (e)

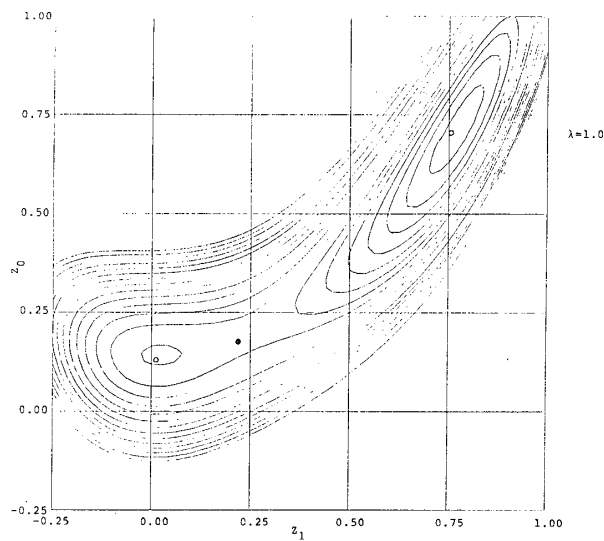


図 3.31 ポテンシャル面 (f)

生じている。そこで、

$$4K_2 + K_4 \left\{ \frac{(n^2 + 2)^2}{(n^2 + 1)^3} - \frac{8n^2}{(n^2 + 1)^2} + \frac{4n^4}{(n^2 + 1)^3} \right\}$$

の値を変えない様にパラメタ K_0 , K_2 , K_4 , n を変化させると考えると、ばね k_4 の影響は一次及び二次項に限られる事になる。従って上述の Kármán-Tsien 型の基礎式に対する考察から、ばね k_4 は曲率の影響を表している事が分る。他のばね k_0 , k_1 , k_2 の物理的対応

は比較的明瞭であり、まとめて以下に示す。

- ばね k_0 : 面内変形,
- ばね k_1 : 曲げによる線形項,
- ばね k_2 : 曲げによる非線形項 (3次),
- ばね k_4 : 曲率による影響.

本節 3.2 で解析した非線形ばねを用いたモデルは前述の様に定性的には良く円筒殻の挙動を表し得たが、有限変形による非線形性を非線形ばねと言う非現実的な要素を用いて表していた為に、各要素の持つ物理的意味は明確とは言えなかった。しかしそれに較べて、本項に於て取扱った線形ばねのみによるモデルは、線形ばねと言う極めて現実的な要素のみから出きているばかりでなく、上述の様に各要素の持つ物理的意味が非常に明確となっており、より優れた単純化モデルであると考えられる。

ステップ状の外力が負荷されると、ポテンシャル面は荷重の値に応じて図 3.26 の状態から図 3.27～3.31 の状態へと急変する。その変化により原点からの運動が励起されるのであるが、前項と同様に原点を通るポテンシャル等高線が囲む領域に着目する事により、「動的挫屈荷重のエネルギーの限界値」が定義される。

更に、実際に励起される運動を運動方程式 (3.40), (3.41) を直接数値積分する事により追跡し、図 3.32, 3.33 に示す。 $\lambda = 0.7$ と 0.8 の間でその応答に変化が見られ、その様子を明確にする為に、無次元時間 $\tau = 0 \sim 50$ までに実現された最大変位と荷重値の関係を図 3.34, 3.35 に示す。これらの図から、数値積分法による動的挫屈荷重が明確に定義される事が分る。

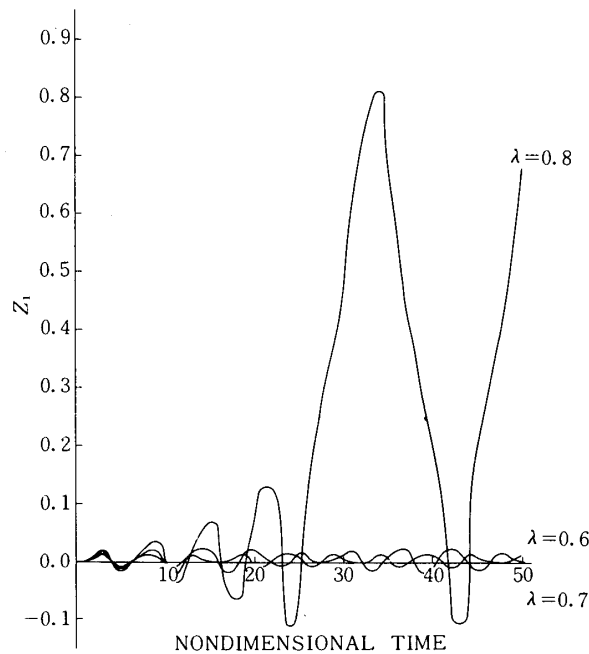


図 3.32 ステップ荷重に対する Z_1 の応答

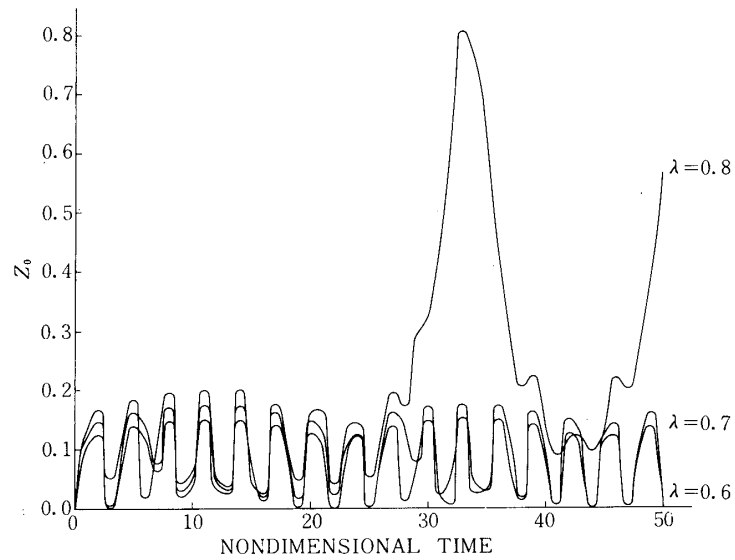


図 3.33 ステップ荷重に対する Z_0 の応答

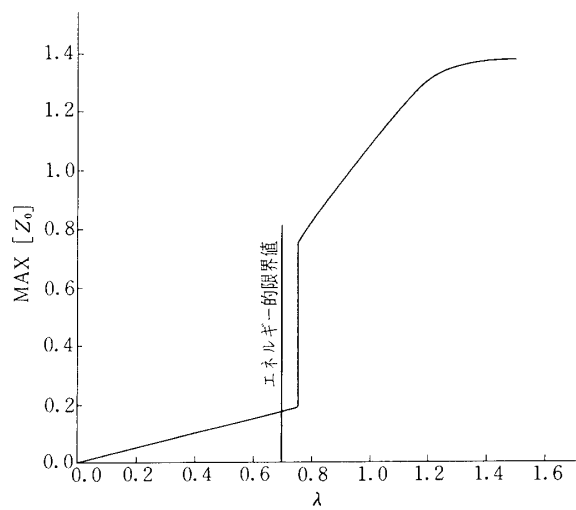


図 3.34 $\text{Max} \{ Z_0 \}$ の荷重値による変化

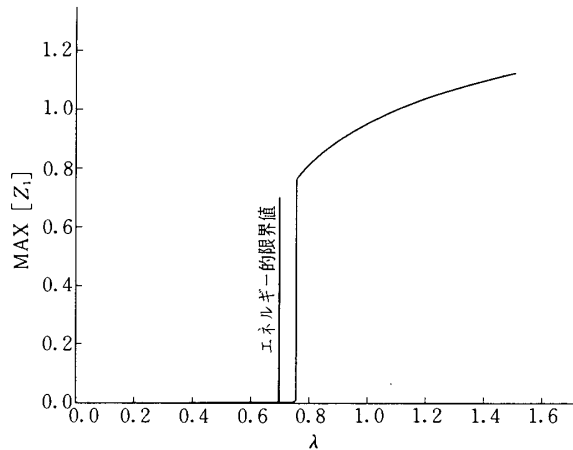


図 3.35 Max $[Z_1]$ の荷重値による変化

3.4 むすび

本節に於ては、円筒殻の単純化モデルとして、非線形ばねを用いたモデル及び線形ばねのみを用いたモデルを考案し、第2節に於る解析結果との比較により、単純化モデルとしての妥当性を検討した。

それによって、両モデルとも定性的には円筒殻の挙動を良く表し得るが、非線形ばねを用いたモデルは、要素が非現実的である事、要素の物理的意味が明確ではない事等の欠点を持っている事を明らかにした。又線形ばねのみを用いたモデルについて、Kármán-Tsien型の基礎方程を考察する事により、曲率の影響が平衡方程式中の一次及び二次の項に現れる事を示し、パラメタ k_2 , k_4 , n に或る拘束を加える事により、ばね k_4 が曲率の影響を表し得る事を示した。更に、ばね k_0 , k_1 , k_2 の持つ物理的意味も明らかにした。

これらの系にステップ状の衝撃荷重が負荷された場合を、ポテンシャル面及び運動方程式の数値積分を用いて解析を行い、原点を通過するポテンシャル等高線の囲む領域に着目する事により、「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」が、又 $\tau = 0 \sim 50$ の間に実現される最大変位に着目して数値積分による動的挫屈荷重が、それぞれ前節と同様に定義し得る事を示した。

以上の考察により、本節で取扱った二種類の単純化モデルが円筒殻のモデルとして妥当なものである事、及び特に線形ばねを用いたモデルは各要素の持つ物理的な意味が明確でありモデルとしてより優れている事を示した。

4. おわりに

衝撃軸圧縮荷重を受ける円筒殻の変形を挫屈前の変形を表す一様膨張型と挫屈後の変形を

表す所謂ダイヤモンド型変形波形とに限定して定式化した。エネルギーの見地から運動の可能な領域が急激に増加する荷重として「動的挫屈荷重のエネルギー的限界値」の概念を導き、それと運動方程式の数値積分により得られる動的挫屈値とを比較検討する事により、その値の持つ意味を明確にした。

更に二種類の単純化モデルを考案し、その挙動を解析する事により、それらが円筒殻のモデルとして妥当である事を示した。特に線形ばねのみを用いた単純化モデルは、各要素の持つ物理的意味が従来の非線形ばねを用いたモデルに較べて極めて明確となる事を示した。

上述のエネルギー的考察を一般多自由度系に拡張する事は、エネルギー面が超空間に於る多様体となる為に数学的に極めて困難となるであろう。今後の研究課題としたい。

本研究に際し有益な示唆を寄せられた熊井 規氏に謝意を表する。

1980年11月18日 航空力学部

参考文献

- [1] David B. Grenier: Dynamic Buckling of Cylindrical Shells, NSWC TR 79-447 (1979).
- [2] 砂川 恵：殻体の動的安定・衝撃挫屈，日本機械学会 衝撃と破壊研究分科会報告，昭55．
- [3] Roth, R.S. and Klosner, J.M.: Nonlinear Response of Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Axial Load, AIAA J., 2 (1964), 1788.
- [4] Hutchinson, J.W. and Budiansky, B.: Dynamic Buckling Estimates, AIAA J., 4 (1966), 525.
- [5] Danielson, D.A.: Dynamic Buckling Loads of Imperfection Sensitive Structure from Perturbation Procedures, AIAA J., 7 (1969), 1506.
- [6] Croll, J.G.A. and Walker, A.C.: Elements of Structural Stability, The Macmillan Press, (1972).