

弾性振動に起因する Viper ロケットの軌道分散

竹 内 伸 介*・小野田 淳次郎**・峯 杉 賢 治**

橋 元 保 雄**・富 沢 利 夫**・下 瀬 滋**

(1998 年 1 月 23 日受理)

Trajectory dispersion of the Viper caused by the elastic vibration

By

Shinsuke TAKEUCHI*, Junjiro ONODA**, Kenji MINESUGI**,

Yasuo HASHIMOTO**, Toshio TOMIZAWA** and Shigeru SHIMOSE**

Abstract: In this paper, the trajectory dispersion of the Viper rocket caused by the elastic vibration of the vehicle and rocket launcher is investigated. In order to estimate the trajectory dispersion, a three dimensional numerical simulation of the launch was carried out considering the elastical effect of the vehicle and rocket launcher. The accuracy of the numerical simulation was validated first by the comparison with the vibration data measured on actual launch, and after that the trajectory dispersion was estimated by the simulation. As the result, it is confirmed that the trajectory dispersion caused by the elastic vibration is no matter on actual launch mission.

概 要

本報告では、発射時に生じるロケット本体及びランチャーの弾性振動に起因する Viper ロケットの軌道分散について報告する。軌道分散の推定のために、ロケット及びランチャーの弾性を考慮した発射の三次元数値シミュレーションを行なった。実際の発射時に計測された振動データとの比較によりシミュレーションの精度を確認した後に、シミュレーションを用いて軌道分散の推定を行なった。その結果、弾性振動に起因する軌道分散は実際の打ち上げミッションにおいて問題にならない値であることが確認された。

*東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

**宇宙科学研究所

記 号

A	レールの捻り率
\vec{C}_{ij}	(20) 式参照
$C_{N\alpha}$	ロケット法線力傾斜
I_{ij}	$i, j = x, y, z$, ロケット慣性乗積
m	ロケット質量
m_{Ri}, m_{Li}	ロケット, ランチャー i 次モード質量
N_R, N_L	ロケット, ランチャーで計算に用いるモード数
$r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi}, \mathbf{r}_i$	($i = 1, 2$) (5), (10), (18) 式参照
$R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ}, R_{i\Psi}, R_{i\Theta}, R_{i\Phi}, \mathbf{R}_i$	($i = 1, 2$) ロケットとランチャーの接触により生じる力, 及びその6成分からなるベクトル, 図6 及び (22) 式参照
\mathbf{R}_f	ロケット排気によりランチャーに及ぼされる力, Appendix C 参照
S_D	ロケット基準断面積
T	座標系変換行列, 式 (6) 参照
Th	ロケット推力
$\vec{v}, v, v_x, v_y, v_z$	ロケット重心速度ベクトル, 及びその絶対値と x, y, z 成分
X_{CG}, Y_{CG}, Z_{CG}	ロケット重心位置の X, Y, Z 成分
$X_{CG0}, Y_{CG0}, Z_{CG0}$	2-2. 節参照
X_{RCG1}, X_{RCG2}	前後部バネの離脱位置の X 座標
X_{Rf}, Y_{Rf}, Z_{Rf}	力 \mathbf{R}_f 作用点の座標, Appendix C 参照
x_1, x_2, x_{Th}	力の作用点の x 座標, 図6 参照
$\Delta\psi, \Delta\theta$	方位角, 迎角方向の軌道分散
ζ_{Ri}, ζ_{Li}	ロケット, ランチャー i 次モード減衰比
$\eta_{Rix}, \eta_{Riy}, \eta_{Riz}, \eta_{Ri\psi}, \eta_{Ri\theta}, \eta_{Ri\phi}, \boldsymbol{\eta}_{Ri}$	ロケットの x, y, z 方向及び x, y, z 軸回り i 次モード形状, 及びその6成分からなるベクトル, (19) 式参照
$\eta_{LiX}, \eta_{LiY}, \eta_{LiZ}, \eta_{Li\Psi}, \eta_{Li\Theta}, \eta_{Li\Phi}, \boldsymbol{\eta}_{Li}$	ランチャーの X, Y, Z 方向及び X, Y, Z 軸回り i 次モード形状, 及びその6成分からなるベクトル, (23) 式参照
ξ_{Ri}, ξ_{Li}	ロケット, ランチャー i 次モード変位量
$\vec{\omega}, p, q, r$	ロケット重心回り角速度ベクトル及びその x, y, z 軸回り成分
ω_{Ri}, ω_{Li}	ロケット, ランチャー i 次モード角振動数
Φ, Θ, Ψ	ロケットの姿勢を表すオイラー角
Θ_{LI}	X 軸と水平面のなす角度
ρ_a	空気密度
μ_R, μ_L	ロケット, ランチャー線密度
$[[\cdots]]_R, [[\cdots]]_L$	ロケット, ランチャー上での積分

1. は じ め に

1-1. 研究背景

Viper ロケットは高度 $100km$ 付近の風を観測するための米国製小型観測ロケットである。Viper ロケット本体及びランチャーの写真を図 1 及び図 2 に示す。ロケットにはチャフと呼ばれる約 5000 枚のアルミ蒸着フィルム細片が搭載されており、これが観測高度付近で放出される。風に流されながら緩やかにおりてくるチャフ群を地上のトラッキングレーダーで追跡し、その動きから上空の風向・風速を推定する。ロケットは Fin による空力静安定が図られているが、慣性航法装置・姿勢制御装置などにより予め定められた地点にチャフを投入する能力を持たない。ロケットには発信機が搭載されておらず、また初期加速度が $40g$ と大きいため飛翔中の追尾も困難である。これらの理由により、観測はロケットの予想到達位置周辺をレーダーで搜索し、チャフのエコーを捕捉することから始まる。そのため、打ち上げ前にロケットの予想到達位置及び分散の範囲を精度良く推定することが重要となる。

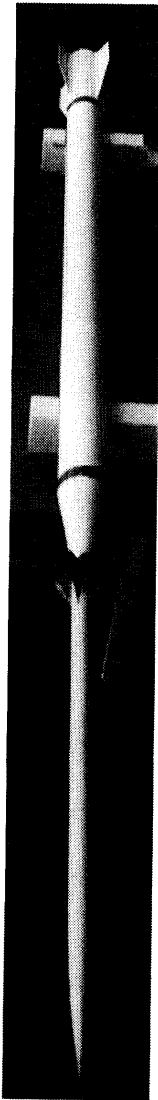


図 1: Viper ロケット本体

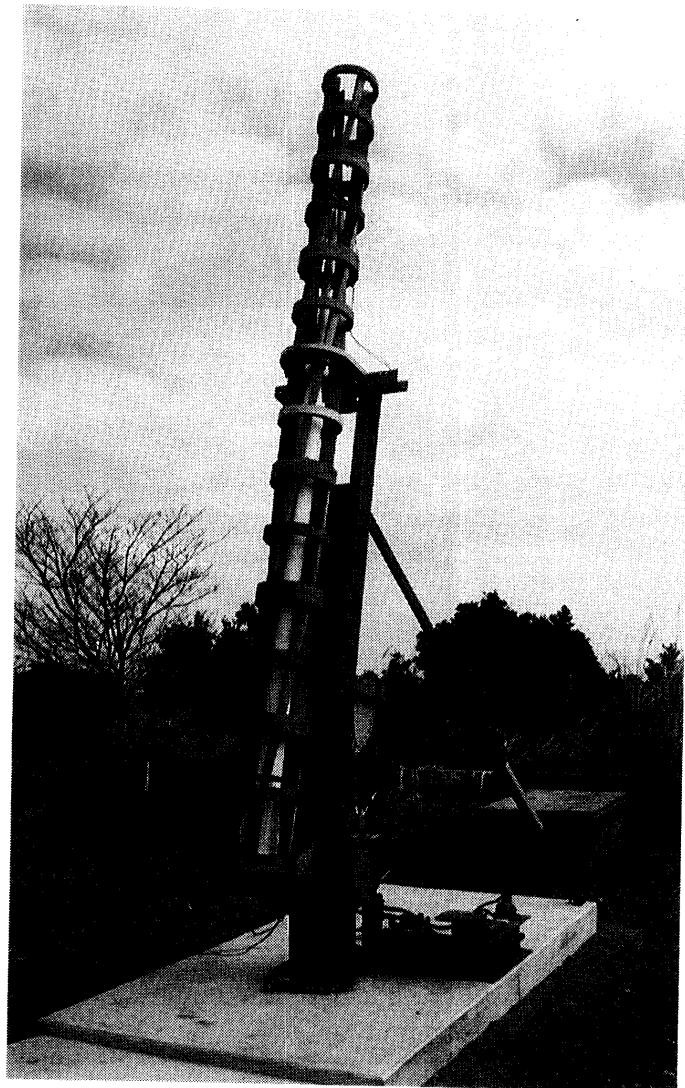


図 2: Viper ランチャー

1996年2月8日に打ち上げられた Viper 1号機では、打ち上げ後チャフを捕捉することができなかった。この原因としていくつかの理由があげられたが、そのうちのひとつとしてランチャーの剛性の不足による弾性変形、弾性振動に起因する軌道分散が考えられた。そのため、ロケット及びランチャーの弾性を考慮した発射の数値シミュレーションを行ない、Viper 2号機の発射に際して計測した振動データとの比較でシミュレーションの精度を検討した後に、シミュレーションを用いて軌道分散の予測を行なった。

1-2. Viper の特徴

Viper ロケットは PWN-12A Dart (上段) と VIPER III A Motor (下段) の2段で構成される、全長 3.5m、モーター直径 11.4cm の小型ロケットである。両段は専用の段間接手を用いてテーパはめ合いで結合される。結合後二本の剪断ピンで両段を拘束するが、接手にはピンの部分に機首方向にスリットが切られており、両段の分離は拘束されていない。モーターは点火後約 2.5s 燃焼し、燃焼終了後、両段に作用する空気抵抗の差により両段は分離する。上段は慣性で飛行を続け観測高度付近で火薬により開頭、チャフを放出する。

Viper ロケットの発射には専用のレールを使用する。レールの写真を図3(側面)及び図4(正面)に示す。レールは螺旋をなす四本の副レールを円環で固定した円筒構造をしており、ロケットは円筒内より発射される。



図 3: レール側面

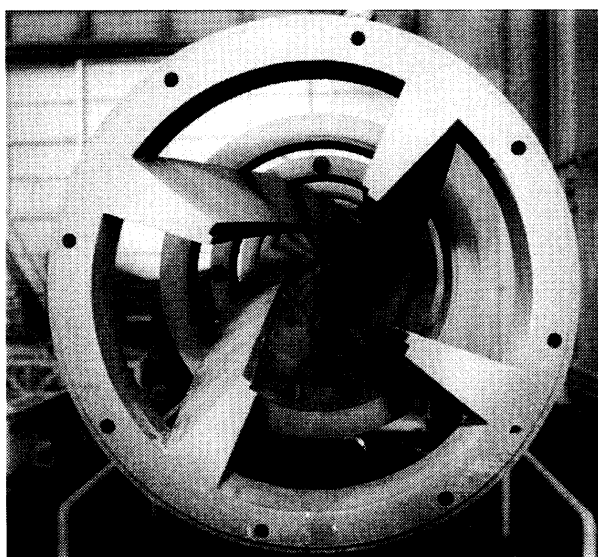


図 4: レール正面

四本の副レールの内面には長手方向にレールに沿って溝があり、発射時には上段部の翼端がこの溝にはめ込まれる。下段部はモーターの最後部が少し太くなっており、その部分と副レール内面が接触する。またレール最後部には落下防止用金具があり、発射前のロケットは胴体最後部をこの金具により支えられている。このとき下段部の翼は四本の副レールの間を通して外に出ており、発射時にはレールと干渉しないようになっている。発射時には上段の翼が螺旋状の溝に沿って運動するため、ロケット全体にスピンの与えられる。

宇宙研のM型ロケットなど発射にランチャーを用いるロケットの大半は、発射時のロケット及びランチャーの運動が発射方向と鉛直方向で決定される平面内にほぼ拘束され、二次元問題として扱うことができる。それに対して Viper ロケットの場合、ロケットにスピンを与える反力としてレールに中心軸回りのトルクが作用し、レールと地面との間の梁が横方向に曲げられるため、ランチャーは迎角方向だけでなく、方位角方向にも運動する。またロケット自身もスピンするため機体側でもピッチ、ヨーのカップリングが生ずる。このため三次元問題として数値シミュレーションを行なう必要がある。

2. 数値シミュレーション

2-1. 数学モデルの作成

数値シミュレーションを行なうにあたり、実際のロケット及びランチャーの数学モデルを作成する。参考文献 [1], [2] には、有限要素モデルを用いたロケット及びランチャーのモデル化及び有限要素モデルから導かれる固有振動モードを用いたモデルの低次元化により、発射方向と鉛直方向とで決定される平面内に限定された二次元問題において発射時の加速度及び荷重を比較的精度良く予想できることが示されている。本報告でも同様に有限要素モデルを用いたモデル化及び固有振動モードを用いた低次元化を行なう。

具体的には、図 5 に示されるような梁要素の組合せでモデル化を行なう。ロケットとランチャーはそれぞれ全く独立した有限要素モデルで表現する。ロケットの固有振動モードは自由境界、ランチャーの固有振動モードは地面固定の境界条件下で求めたものを用いる。

ロケット及びランチャーは上段部の翼や下段部最後部胴体などで互いに接触し力を及ぼしあっているが、接触部分は仮想的な質量を持たないバネであると考え、この力はそのバネを介して伝達されるとする。またこのバネは機体に固定されており、バネを介した力は機体中心軸上に作用し着力点の位置は機体上では不変であるとする。

2-2. 座標系の定義

シミュレーションには、図 6 に示されるようなランチャーを基準とする静止座標系 (X, Y, Z) と、ロケットに固定されロケットと共に運動する運動座標系 (x, y, z) を用いる。両者はともに直交座標系とする。

座標系 (X, Y, Z) の原点はランチャー上のある代表点にとる。本報告では、重力を含む一切の力が作用していない状態のレール後端より 800mm の位置のレール中心を代表点とする。この位置はランチャーの迎角・方位角を変更する場合の回転中心に相当する位置である。原点からロケットを発射する方向に発射方向を正として X 軸をとる。 Z 軸は XZ 平面内に鉛直方向を含み、重力の Z 方向成分が負となるようにとる。 Y 軸はそれらに直交するようにとる。

座標系 (x, y, z) の原点はロケットの重心にとる。機体中心軸に沿って前方が正になるように x 軸をとる。 y 軸、 z 軸はロケットの慣性主軸にとるが、軸の取り方に任意性があるため、発射前の状態でそれぞれが Y 軸、 Z 軸の方向に最も近くなるものを選ぶ。重力が作用していない状態でロケットがランチャーに装着された状態にある時の座標系 (x, y, z) の原点位置を $(X_{CG0}, Y_{CG0}, Z_{CG0})$ とする。

両座標系の相対的な関係は、原点の相対位置とオイラー角を用いて表す。オイラー角 (Φ, Θ, Ψ) の定義につ

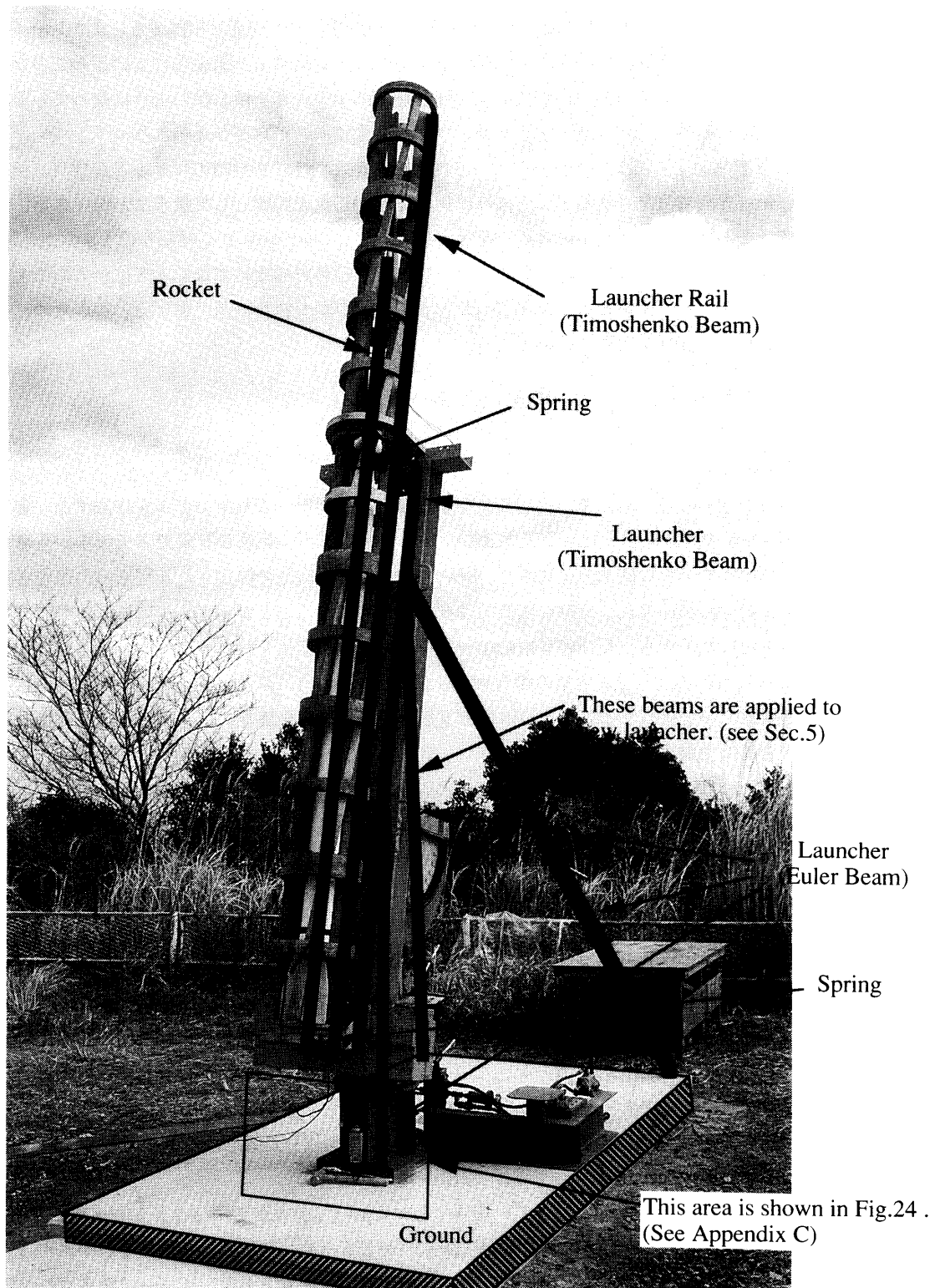


図 5: ロケット及びランチャーのモデル化

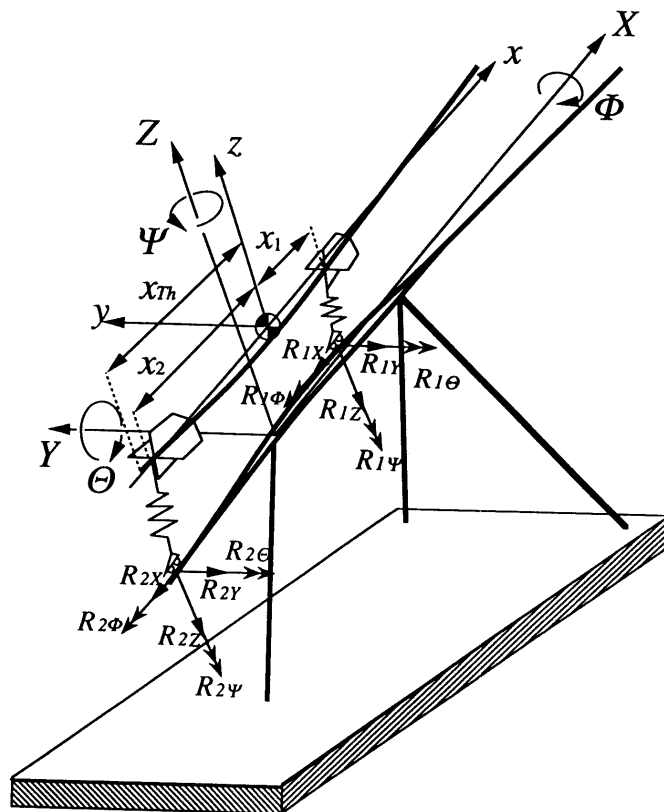


図 6: 座標系の定義

いては Appendix A を参照. 姿勢表現にオイラー角を用いた場合には, ある特定の姿勢の時に同じ姿勢に対し 2 通りの表現が可能な特異点が存在する. Appendix A の取り方をした場合, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ の時が特異点である. しかし実際の発射時にはピッチ, ヨー方向にはそれほど大きな角度変化はないので, それぞれに相当するオイラー角 $\Theta, \Psi \ll 1$ であると考え, 特異点については考慮しなくて良いものとする.

2-3. 運動方程式

ロケットの剛体自由度は弾性振動モードと同等に取り扱うことも可能であるが, 現実に対応する物理量がわかり難くなるため, ロケットの剛体自由度は弾性モードとは別に運動方程式を立てる. 剛体自由度で定義される重心位置, 姿勢に, 弾性モード変形を加えてロケットの弾性変形を含めた姿勢を表現する.

また, ロケット固定の座標系 (x, y, z) は角速度 $\vec{\omega} = (p, q, r)$ で回転しているため, (x, y, z) 座標系での見かけの時間微分を $\frac{\delta}{\delta t} \equiv ()$ と書くことにすると, あるベクトル量 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ に対する時間微分は次のようになる.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1)$$

このことを考慮すると, 次のような運動方程式が導かれる.

ロケット重心運動方程式

ロケットに作用する力は, 推力, 重力, ランチャーとの接触により及ぼされる力及び空気力 (揚力) であると

考える．推力は作用点の接線方向に，また空気力は局所迎角に比例し x 軸に対して垂直に作用すると考えると，ロケット重心の運動方程式は次のようになる．

$$m(\dot{v}_x + qv_z - rv_y) = Th - mg \sin(\Theta_{LI} - \Theta) + r_{1x} + r_{2x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_y + rv_x - pv_z) = & - \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\psi}(x_{Th}) \xi_{Ri} \right] Th - mg \cos(\Theta_{LI} - \Theta) \sin \Phi + r_{1y} + r_{2y} \\ & + \left[\left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 S_D C_{N\alpha} \left\{ \arctan \left(\frac{v_y + xr + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Ryj} \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{R\psi j} \xi_{Rj} \right\} \right] \right] R \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_z + pv_y - qv_x) = & \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\theta}(x_{Th}) \xi_{Ri} \right] Th - mg \cos(\Theta_{LI} - \Theta) \cos \Phi + r_{1z} + r_{2z} \\ & + \left[\left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 S_D C_{N\alpha} \left\{ \arctan \left(\frac{v_z - xq + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rzj} \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) - \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{R\theta j} \xi_{Rj} \right\} \right] \right] R \end{aligned} \quad (4)$$

ここで r_{ix}, r_{iy}, r_{iz} ($i = 1, 2$) は，次のように表される．

$$(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})^t = -T(R_{ix}, R_{iy}, R_{iz})^t \quad (5)$$

ただし T はオイラー角 (Φ, Θ, Ψ) を用いて次のように表される (X, Y, Z) 座標系から (x, y, z) 座標系への変換行列である．変換行列の導出は Appendix A を参照．

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \Psi & -\Theta \\ \Theta \sin \Phi - \Psi \cos \Phi & \Theta \Psi \sin \Phi + \cos \Phi & \sin \Phi \\ \Theta \cos \Phi + \Psi \sin \Phi & \Theta \Psi \cos \Phi - \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (6)$$

ロケット剛体回転運動方程式

ロケットの剛体回転に寄与する力は前出のうち，ランチャーとの接触により及ぼされる力，推力及び空気力である． x, y, z 軸は慣性主軸であるので， $I_{ij} = 0$ ($i, j = x, y, z$; $i \neq j$)であることを考慮すると，ロケット剛体回転の運動方程式は次のようになる．

$$I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr = r_{1\phi} + r_{2\phi} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp = & r_{1\theta} + r_{2\theta} - x_1 r_{1z} - x_2 r_{2z} \\ - & x_{Th} \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\theta}(x_{Th}) \xi_{Ri} \right] Th \end{aligned}$$

$$- \left[\left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 S_D C_{N\alpha} x \left\{ \arctan \left(\frac{v_z - xq + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rzj} \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) - \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{R\theta j} \xi_{Rj} \right\} \right] \right]_R \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & I_{zz} \dot{r} + (I_{yy} - I_{xx}) pq = r_{1\psi} + r_{2\psi} + x_1 r_{1y} + x_2 r_{2y} \\ & - x_{Th} \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\psi}(x_{Th}) \xi_{Ri} \right] Th \\ & + \left[\left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 S_D C_{N\alpha} x \left\{ \arctan \left(\frac{v_y + xr + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Ryj} \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{R\psi j} \xi_{Rj} \right\} \right] \right]_R \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi}$ ($i = 1, 2$) は、次のように表される.

$$(r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi})^t = -T(R_{i\Phi}, R_{i\Theta}, R_{i\Psi})^t \quad (10)$$

オイラー角及びロケット重心位置時間微分

オイラー角の時間微分及びロケット重心位置の時間微分は次のようになる. 導出は Appendix A を参照.

$$\dot{\Phi} = p + q\Theta \sin \Phi + r\Theta \cos \Phi \quad (11)$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (12)$$

$$\dot{\Psi} = q \sin \Phi + r \cos \Phi \quad (13)$$

$$\dot{X}_{CG} = v_x + v_y(\Theta \sin \Phi - \Psi \cos \Phi) + v_z(\Theta \cos \Phi + \Psi \sin \Phi) \quad (14)$$

$$\dot{Y}_{CG} = v_x \Psi + v_y(\Theta \Psi \sin \Phi - \cos \Phi) + v_z(\Theta \Psi \cos \Phi - \sin \Phi) \quad (15)$$

$$\dot{Z}_{CG} = -v_x \Theta + v_y \sin \Phi + v_z \cos \Phi \quad (16)$$

ロケット振動モード運動方程式

ロケットの固有振動モードは自由境界の条件で求めたものであるので、重力の効果はロケット上で積分すると 0 になる. ロケット上の座標系 (x, y, z) は角速度 $\vec{\omega} = (p, q, r)$ で回転しているため式 (1) を考慮すると、ロケットの弾性振動モードの運動方程式は次のようになる. 方程式の導出は Appendix B 参照.

$$\begin{aligned} & m_{ri}(\ddot{\xi}_{Ri} + 2\zeta_{ri}\omega_{ri}\dot{\xi}_{Ri} + \omega_{rj}^2 \xi_{Ri}) = \sum_{j=1}^{N_R} \{m_{ri}\vec{C}_{ji} \cdot \dot{\vec{\omega}} \xi_{rj} + 2m_{ri}\vec{C}_{ji} \cdot \vec{\omega} \dot{\xi}_{rj}\} \\ & + m_{ri}\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \xi_{Ri} + \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_{ri}(x_1) + \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{ri}(x_2) \\ & + Th \left[\sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rj\psi}(x_{Th}) \xi_{Rj} \right] \eta_{Riy}(x_{th}) - Th \left[\sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rj\theta}(x_{Th}) \xi_{Rj} \right] \eta_{Riz}(x_{th}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 S_D C_{N\alpha} \eta_{Riz}(x) \left\{ \arctan \left(\frac{v_z - xq + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rzj} \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) - \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{R\theta j} \xi_{Rj} \right\} \right] \right]_R \\
& + \left[\left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 S_D C_{N\alpha} \eta_{Riy}(x) \left\{ \arctan \left(\frac{v_y + xr + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Ryj} \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{R\psi j} \xi_{Rj} \right\} \right] \right]_R \quad (17)
\end{aligned}$$

ここで \mathbf{r}_i ($i = 1, 2$) は、次のように定義される6次元のベクトルである。

$$\mathbf{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi}) \quad (18)$$

また $\boldsymbol{\eta}_{Ri}$ ($i = 1$ to N_L) は、次のように定義される6次元のベクトルである。

$$\boldsymbol{\eta}_{Ri} = (\eta_{Rix}, \eta_{Riy}, \eta_{Riz}, \eta_{Ri\phi}, \eta_{Ri\theta}, \eta_{Ri\psi}) \quad (19)$$

また \vec{C}_{ji} は、ベクトル $\vec{\eta}_{ri} = (\eta_{rix}, \eta_{riy}, \eta_{riz})$ を用いて次のように定義される量である。

$$m_{rj} \vec{C}_{ji} \equiv [[\mu(\vec{\eta}_{ri} \times \vec{\eta}_{rj})]]_R = -m_{rj} \vec{C}_{ij} \quad (20)$$

ランチャー振動モード運動方程式

ランチャーに作用する力として重力、ロケットとの接触による力及びロケットの排気により及ぼされる力 \mathbf{R}_f を考える。このとき、ランチャーの弾性振動モードの運動方程式は次のようになる。 \mathbf{R}_f の導出については Appendix C を参照。

$$\begin{aligned}
m_{Li}(\ddot{\xi}_{Li} + 2\zeta_{Li}\omega_{Li}\dot{\xi}_{Li} + \omega_{Li}^2\xi_{Li}) &= -\mathbf{R}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(x_{r1} + X_{CG} + X_{CG0}, 0, 0) \\
&- \mathbf{R}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(x_{r2} + X_{CG} + X_{CG0}, 0, 0) \\
&+ [[\mu_L\{-g \sin \Theta_{Li}, 0, -g \cos \Theta_{Li}, 0, 0, 0\} \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(X, Y, Z)]]_L \\
&+ \mathbf{R}_f \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(X_{Rf}, Y_{Rf}, Z_{Rf}) \quad (21)
\end{aligned}$$

ここで \mathbf{R}_i ($i = 1, 2$) は、次のように定義される6次元のベクトルである。

$$\mathbf{R}_i = (R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ}, R_{i\Phi}, R_{i\Theta}, R_{i\Psi}) \quad (22)$$

また $\boldsymbol{\eta}_{Li}$ ($i = 1$ to N_L) は、次のように定義される6次元のベクトルである。

$$\boldsymbol{\eta}_{Li} = (\eta_{LiX}, \eta_{LiY}, \eta_{LiZ}, \eta_{Li\Phi}, \eta_{Li\Theta}, \eta_{Li\Psi}) \quad (23)$$

ロケット、ランチャーの接触により生じる力

上段部翼とレールの接触により生じる力 \mathbf{R}_1 について考える。 \mathbf{R}_1 は等価バネ定数 K_1 のバネを用いてモデル化される Y, Z 方向の成分 R_{1Y}, R_{1Z} と等価バネ定数 $K_1^* \propto K_1$ の回転バネを用いてモデル化される Φ 方向成分

$R_{1\Phi}$ を持ち、それ以外の成分は $R_{1X} = R_{1\Theta} = R_{1\Psi} = 0$ とする. $X_{CG} < X_{RCG1}$ のとき, \mathbf{R}_1 は以下のようになる.

$$R_{1Y} = K_1 D_{1Y} \quad (24)$$

$$R_{1Z} = K_1 D_{1Z} \quad (25)$$

$$R_{1\Phi} = -K_1^* D_{1\Phi} \quad (26)$$

ここで $D_{1Y}, D_{1Z}, D_{1\Phi}$ はロケット, ランチャー間の相対変位量であり, 次のように書ける.

$$D_{1Y} = Y_{CG0} - Y_{CG} - \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{LiY}(X_{CG0} + X_{CG} + x_{r1}, 0, 0) \xi_{Li} + \Psi x_{r1} + d_{1Y} \quad (27)$$

$$D_{1Z} = Z_{CG0} - Z_{CG} - \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{LiZ}(X_{CG0} + X_{CG} + x_{r1}, 0, 0) \xi_{Li} - \Theta x_{r1} + d_{1Z} \quad (28)$$

またレールの溝の形状 (図 4 参照) から, レールには正方向のトルクしか作用しないことを考慮すると, $D_{1\Phi}$ は次のように書ける.

$\Phi - \Phi_0 \leq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} D_{1\Phi} &= \Phi - \Phi_0 + \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{Li\Phi}(X_{CG0} + X_{CG} + x_{r1}, 0, 0) \\ &= \Phi - A[X_{CG} - X_{CG0}] + \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{Li\Phi}(X_{CG0} + X_{CG} + x_{r1}, 0, 0) \end{aligned} \quad (29)$$

$\Phi - \Phi_0 > 0$ のとき,

$$D_{1\Phi} = 0 \quad (30)$$

ここに Φ_0 はレールの回転角で次のように書ける.

$$\Phi_0 = A[X_{CG} - X_{CG0}] \quad (31)$$

また (d_{1X}, d_{1Y}, d_{1Z}) はロケットの弾性変形による変位量であり, 次のように書ける.

$$(d_{1X}, d_{1Y}, d_{1Z}) = T^{-1}(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z})^t \quad (32)$$

$$d_{1j} = \sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Rij}(x_{r1}) \xi_{Ri} \quad (j = x, y, z) \quad (33)$$

また $X_{CG} \geq X_{RCG1}$ のとき, $\mathbf{R}_1 = 0$ である.

次に最後部胴体とレールの接触により生じる力 \mathbf{R}_2 について考える. \mathbf{R}_2 は等価バネ定数 K_2 のバネを用いてモデル化される Y, Z 方向の成分 R_{2Y}, R_{2Z} と等価バネ定数 K_2^* のバネを用いてモデル化される X 方向成分 R_{2X} (落下防止金具による力) を持ち, それ以外の成分は $R_{2\Phi} = R_{2\Theta} = R_{2\Psi} = 0$ とする. $X_{CG} < X_{RCG2}$ のとき, \mathbf{R}_2 は以下のようになる.

$$R_{2X} = K_2^* D_{2X} \quad (34)$$

$$R_{2Y} = K_2 D_{2Y} \quad (35)$$

$$R_{2Z} = K_2 D_{2Z} \quad (36)$$

ここで D_{2X}, D_{2Y}, D_{2Z} はロケット, ランチャー間の相対変位量であり, 落下防止金具による力は負方向にしか作用しないことを考慮すると次のように書ける.

$$D_{2Y} = Y_{CG0} - Y_{CG} - \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{LiY} (X_{CG0} + X_{CG} + x_{r2}, 0, 0) \xi_{Li} + \Psi x_{r2} + d_{2Y} \quad (37)$$

$$D_{2Z} = Z_{CG0} - Z_{CG} - \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{LiZ} (X_{CG0} + X_{CG} + x_{r2}, 0, 0) \xi_{Li} - \Theta x_{r2} + d_{2Z} \quad (38)$$

$X_{CG} < X_{CG0}$ のとき,

$$D_{2X} = X_{CG0} - X_{CG} - \sum_{i=1}^{N_L} \eta_{LiX} (X_{CG0} + X_{CG} + x_{r2}, 0, 0) \xi_{Li} + d_{2X} \quad (39)$$

$X_{CG} \geq X_{CG0}$ のとき,

$$D_{2X} = 0 \quad (40)$$

ここで (d_{2X}, d_{2Y}, d_{2Z}) はロケットの弾性変形による変位量であり, 次のように書ける.

$$(d_{2X}, d_{2Y}, d_{2Z}) = T^{-1} (d_{2x}, d_{2y}, d_{2z})^t \quad (41)$$

$$d_{2j} = \sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Rij} (x_{r2}) \xi_{Ri} \quad (j = x, y, z) \quad (42)$$

また $X_{CG} \geq X_{RCG2}$ のとき, $R_2 = 0$ である.

以上の式を数値積分することにより, シミュレーションを行なう.

3. 計測データと数値シミュレーションとの比較

3-1. 固有振動モード推定

数値シミュレーションを行なうためには, ロケット, ランチャーそれぞれについて, 固有角振動数 ω 及びモード形状 η を求める必要がある. ロケットに関しては図面から作成した有限要素モデルにより, またランチャーに関してはハンマリング加振による振動試験を行ない, 図面から作成した有限要素モデルに修正を加えた上で固有角振動数及びモード形状を求めた.

シミュレーションでは 60 Hz までのロケットの振動モード全てと, 同じく 60 Hz までのランチャーの振動モードのうちレールの変形をとまなうモードを考慮し, ロケットについては 6 次 (3 次 \times 2), ランチャーについては 10 次 (縦方向, 横方向それぞれ 5 次ずつ) までのモードを用いた.

ロケットは機体中心軸に関して対称であるので, 固有振動モードの取り方には任意性があり, yz 平面上で直行する任意の 2 方向に変形する組合せを固有振動モードとしてとることができる. 本報告では y, z 軸方向にそれぞれ変形する組合せを固有振動モードにとった. 図 7 にモード変位を示す. シミュレーションに用いる振動モードは yz 方向にそれぞれ 3 次ずつ計 6 次であり, 図には y 方向への固有振動モードの 3 次までを示す. z 方向の固有振動モードは周波数・モード形状・モーダルマス共に y 方向へのものと同じである. 図中にはそれぞれの次数での固有振動数及びモーダルマスの値を併記してある.

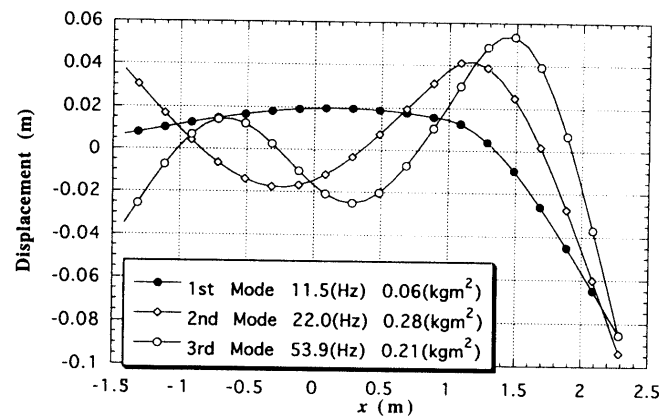


図 7: ロケットのモード形状

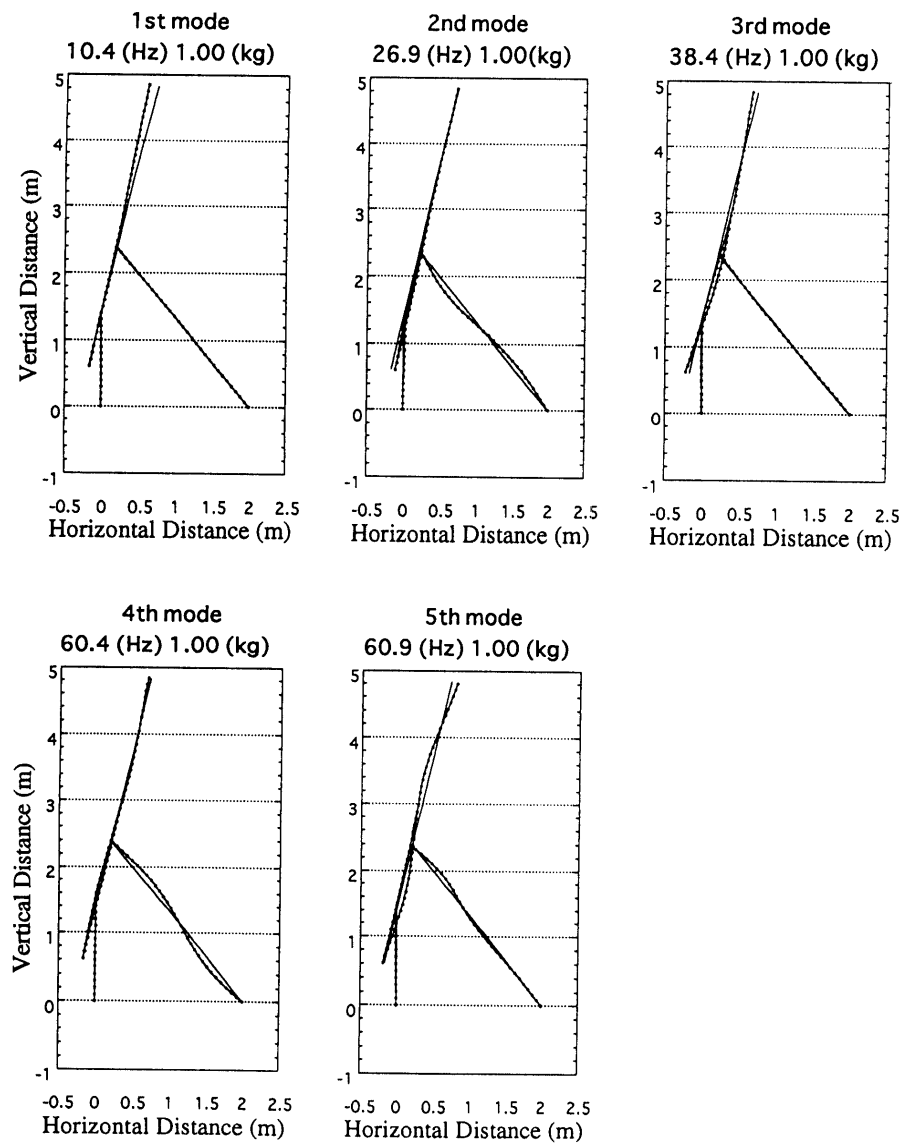


図 8: ランチャーのモード形状 : Z 方向

またランチャーにおいては振動モードは X, Z, Θ 方向変位が連成したもの（以後縦方向の固有振動と呼ぶ）と、 Y, Ψ, Φ 方向変位が連成したもの（以後横方向の固有振動と呼ぶ）の2つに大きくわかれる。図8に縦の固有振動モードを示す。図はシミュレーションに用いる5次迄の縦方向の固有振動モード変位を示し、図中には固有振動数及びモーダルマスの値を併記してある。図はランチャー全体を $-Y$ 方向から見て鉛直面内で変形前後のランチャーを描いたものであり、図の縦軸・横軸はそれぞれ地表での垂直・水平距離に相当する。変形前のランチャー形状は図中に無印実線で示されている。

図9及び図10に横の固有振動モードを示す。図9は Z 方向から見たレール及びランチャーの変形を示したものである。図はシミュレーションに用いる5次迄の横方向の固有振動モードの Y 方向変位を示している。横の固有振動モードはレールの Y 方向変位にレールの回転を共なう。図10に図9に対応する次数のモードでのレールの Φ 方向回転変形成分を示す。図中には固有振動数及びモーダルマスの値を併記してある。

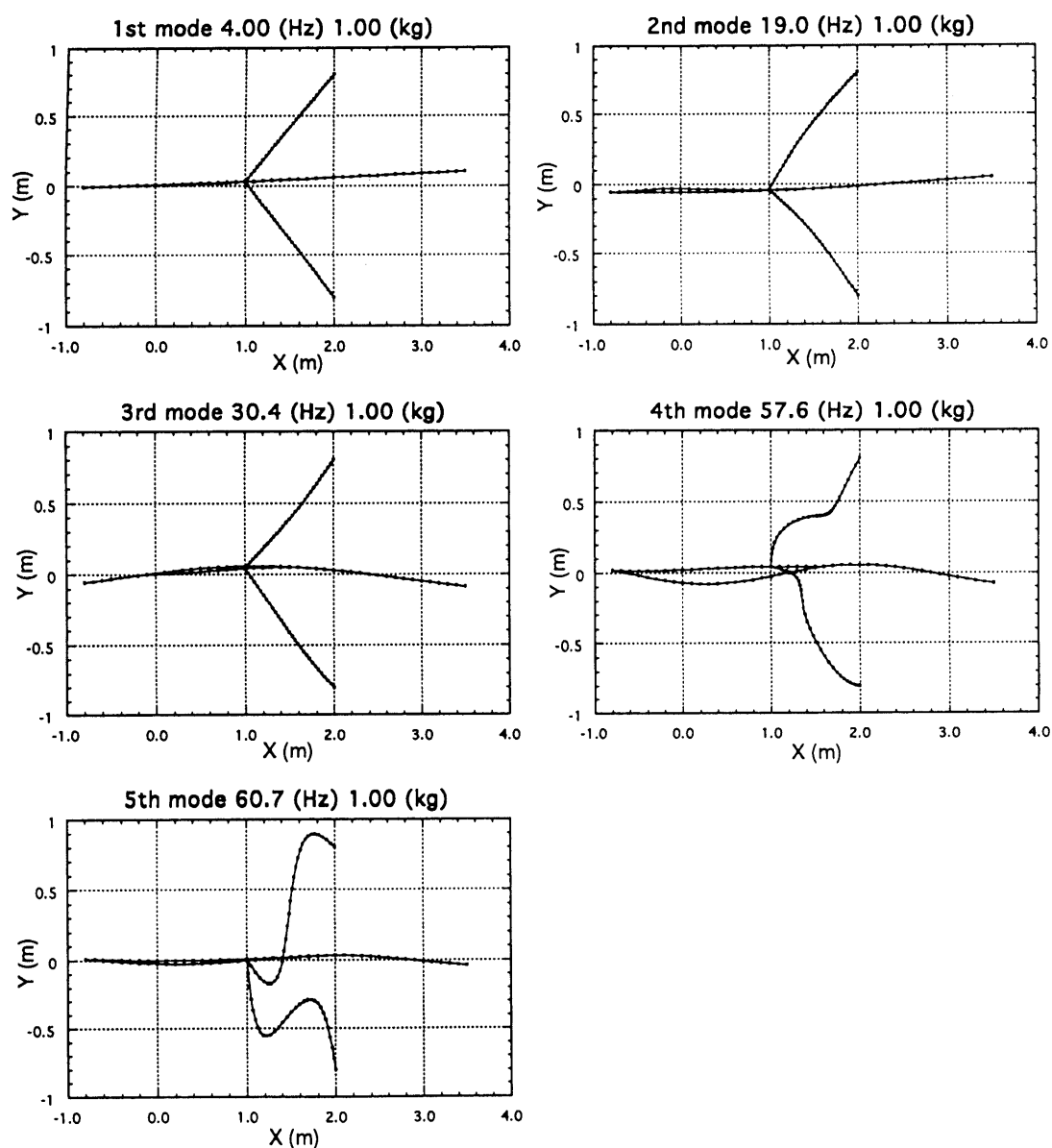
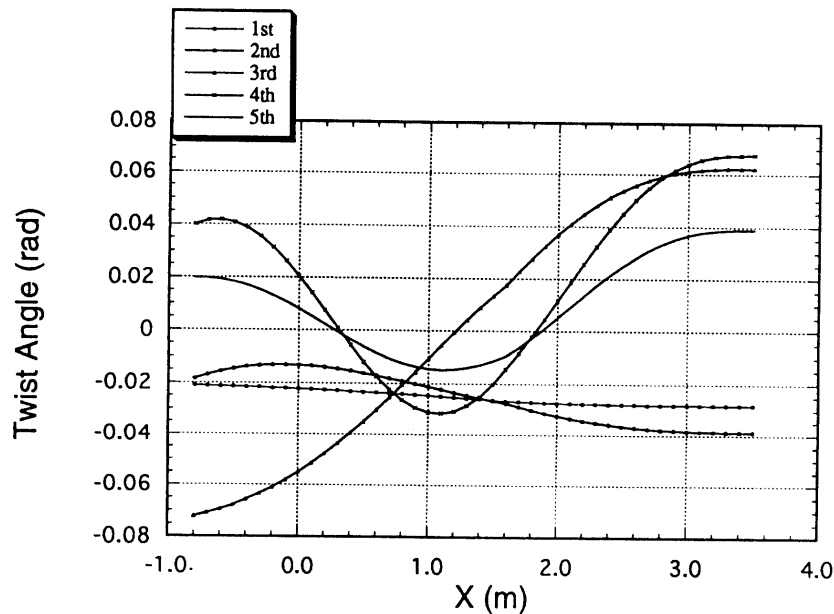


図9: ランチャーのモード形状: Y方向

図 10: ランチャーのモード形状: ϕ 方向

3-2. 実飛翔時のデータとの比較

Viper 2号機の打ち上げ時に、ランチャーレール上の3点での X, Y, Z 方向加速度及び1点での Y, Z 方向変位を計測した。計測には加速度は抵抗線型加速度計、 Y 方向変位は高速度ビデオカメラ、 Z 方向変位は非接触光学変位計を用いた。図 11 に計測系の概略を示す。これらのデータの内、同じ点での Y, Z 方向加速度及び変位の4つのデータと数値シミュレーション結果の比較を行なった。図 12～図 15 に比較の結果を示す。比較のために実際に計測されたデータには 60Hz ローパスフィルタ処理を施し、シミュレーションには含まれていない高周波成分を取り除いてある。

図中 $t = 0\text{s}$ がロケット点火時である。 $t = 0.101\text{s}$ で後部のバネが、 $t = 0.102\text{s}$ で前部のバネが外れる。また、 $t = 0.165\text{s}$ でロケットの後端がレール先端から離脱する。図 13 では $t = 0.15\text{s}$ 付近で非接触光学変位計の視野にロケットの光が入り、正常な計測ができなくなっている。

図 12, 13 を見ると、変位については実際に計測されたデータとシミュレーションとは比較的一致を見せている。それに対して図 14, 15 を見ると、加速度については大体のオーダーこそあっているものの、全体的な傾向は一致しているとは言えない。この原因について考察する。

まず実際の飛翔ではシミュレーションでは理想化されていて考慮されていない擾乱成分が存在する。一例として実際の推力履歴と計算に用いるために理想化された推力履歴との差や、振動モードの運動方程式では省略されている高次振動などがあげられる。またシミュレーションに用いるパラメータのうち、系に与える影響が大きく且つ値を推定するのが困難であるものがいくつかある。例えば等価バネ定数 K_1, K_2 などは、ロケット、ランチャー間の接触を模擬している等価バネとロケット質量とで構成されるバネ・マス質量系の固有振動数に直接関係する値であり系全体の振動に与える影響が大きい。実際にはロケットの翼或いは胴体が直接レール内面と接触しており、接触面積・接触角度などにより値が変化することが予想され精密な推定は困難である。加速度データではこれらの力の擾乱成分の影響が直接現れるのに対し、変位データではこれらの擾乱のうち高周波数の振動成分が時間積分により平均化されるため、擾乱の影響を受け難いことが予想される。これが変位データの一致と加速度データの不一致の原因であると考えられる。

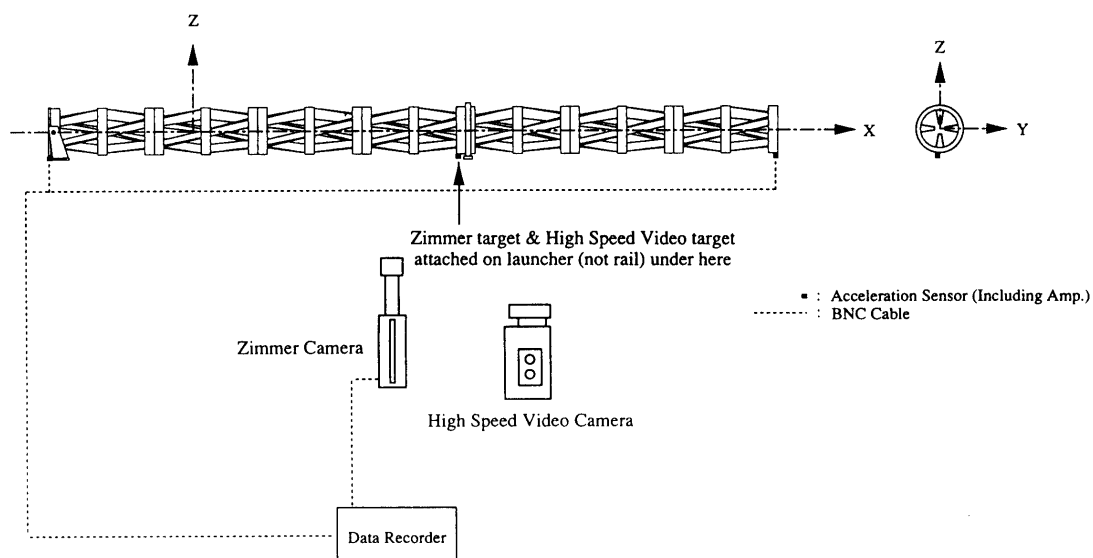


図 11: 計測系の構成

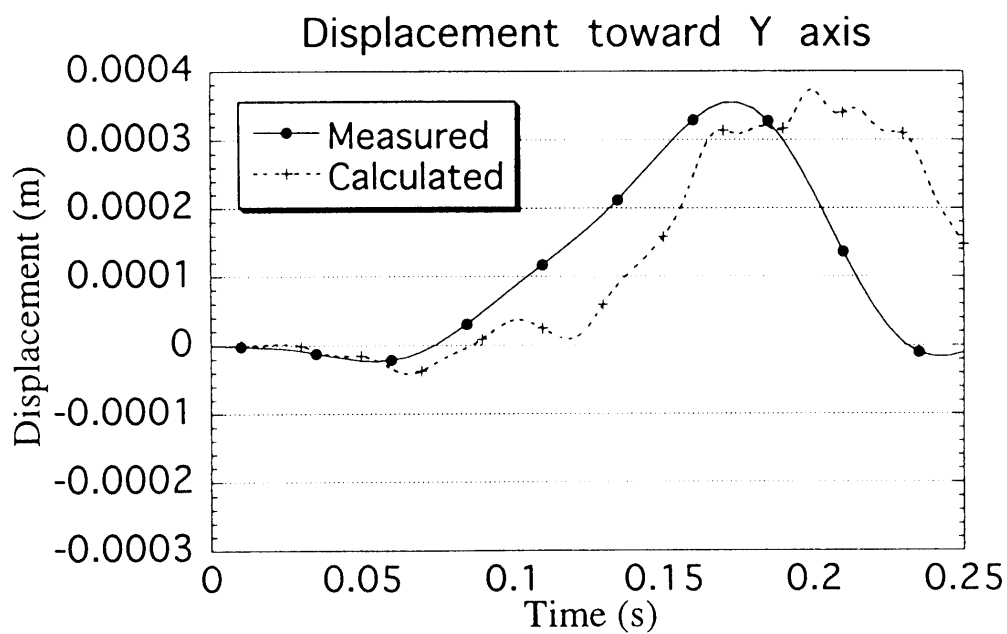


図 12: ランチャー変位 : Y方向

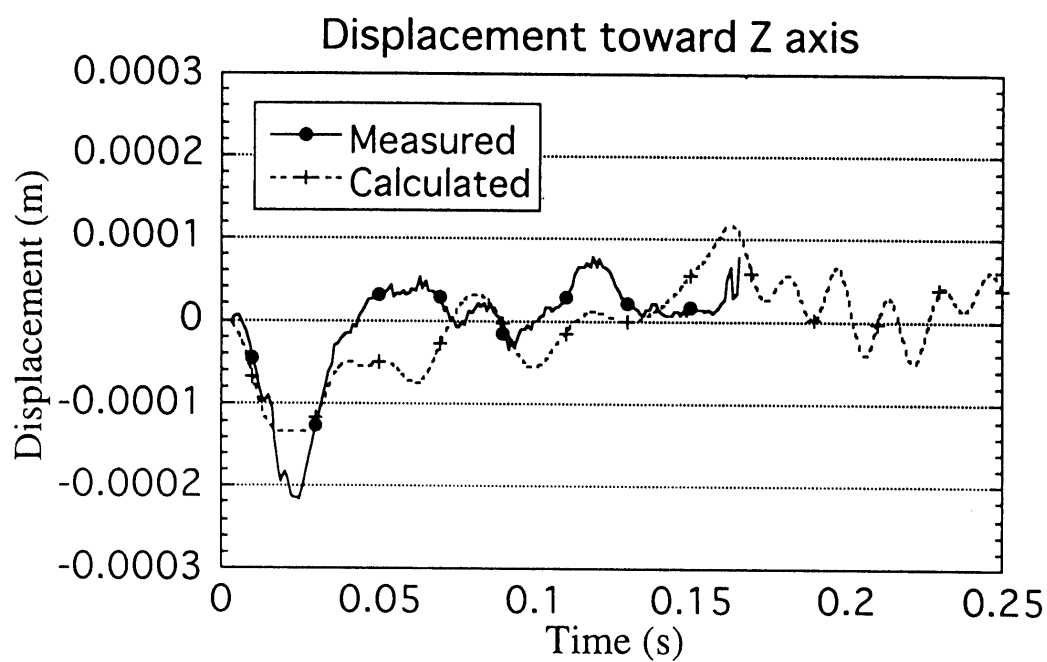


図 13: ランチャー変位 : Z 方向

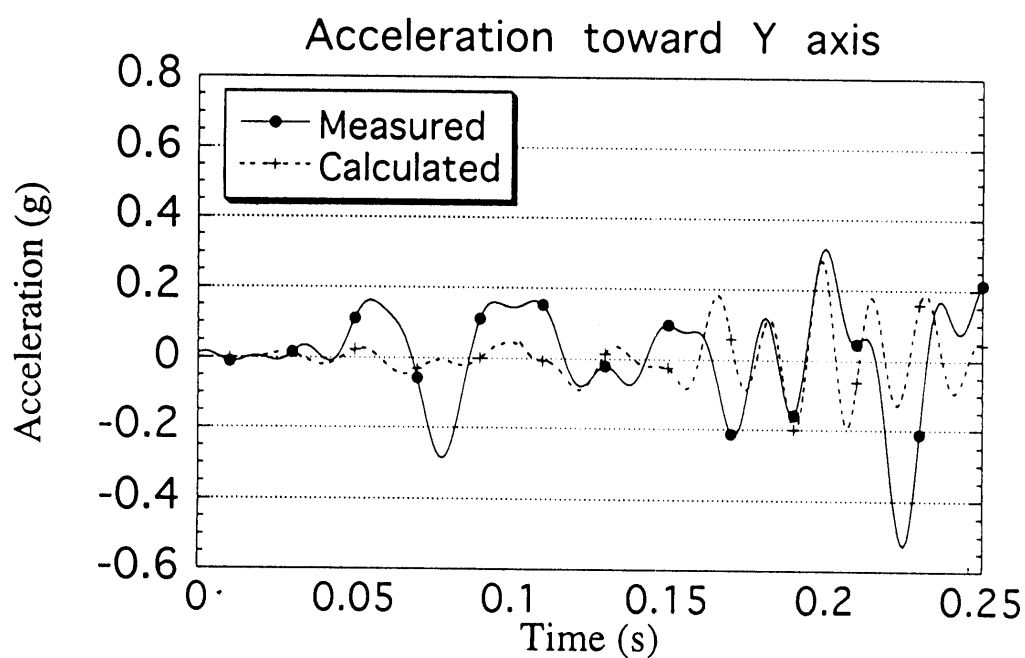


図 14: ランチャー加速度 : Y 方向

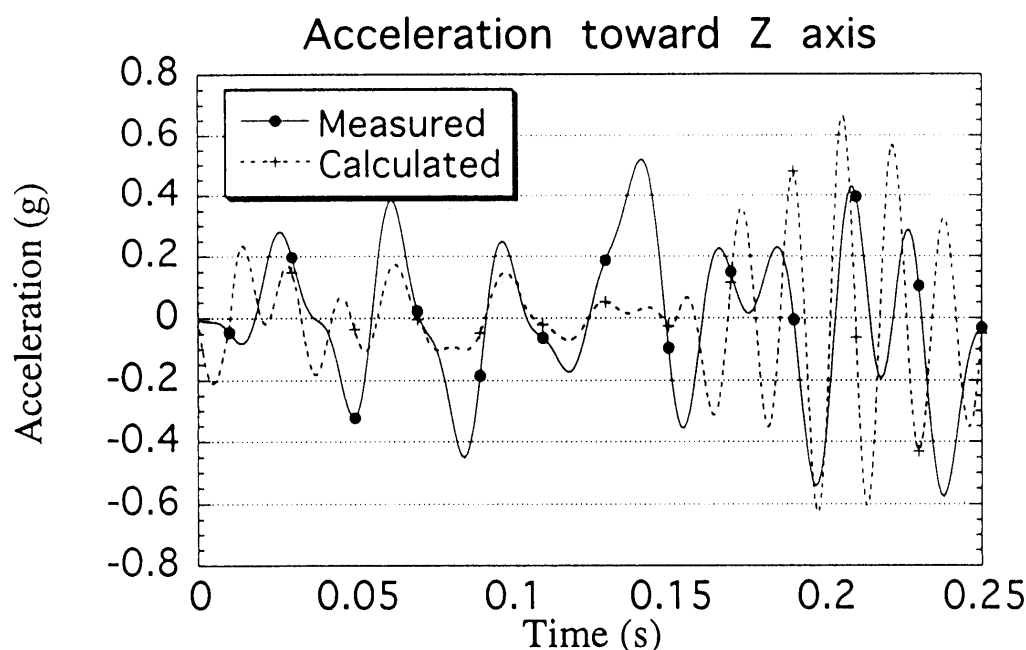


図 15: ランチャー加速度：Z方向

3-3. 軌道分散推定の精度

この数値シミュレーションを用いて軌道分散の予測が可能であるか考える。軌道分散を決定づける要素は、ランチャー離脱時のロケットの重心速度、姿勢角及び角速度である。姿勢角はランチャー変位と関係する量であり、これは比較的精度良く予想されている。重心速度及び角速度はランチャー速度と関連する量であるが、速度のデータは計測されていないので予想精度は不明である。そのためシミュレーションによる軌道分散の推定精度も不明である。

しかし速度は加速度を1回時間積分したものであり、ランチャー加速度はオーダーが一致する程度の精度で予測できていること、さらに速度を1回時間積分した変位は比較的精度良く予測できていることから、速度もオーダーが一致する程度の精度で予測できることは期待できる。軌道分散の最大値は重心速度及び角速度の振幅が最大の時に生じると考えられるので、このシミュレーションを用いて軌道分散の最大値の予測が可能であると期待できる。実際のミッションにおいても軌道分散の最大値を規定すると実用上安全側の規定となるため、軌道分散の最大値を知ることは有益である。

またシミュレーションに用いている物理量の中には、3-2. 節で述べたように系全体の振動に与える影響が大きい精密な推定が困難であると考えられるパラメータが存在する。このようなパラメータに対しては値をある範囲で変化させて計算するパラメータスタディを行なう必要がある。軌道分散の最大値を求めるためにも重心速度及び角速度の振幅が最大の時にロケットがランチャーから離脱するようなパラメータの組合せを探す必要があるが、パラメータスタディと組み合わせることによりその手間は軽減される。

以上の議論から、パラメータスタディを行ない軌道分散の最大値を求める場合に限ればこのシミュレーションを用いた軌道分散予測は可能であると考え、以下軌道分散の推定を行なう。

4. 数値シミュレーションによる軌道分散推定

4-1. 軌道分散の評価法

軌道分散の評価は、仮想的な剛体ロケット・剛体ランチャーを用いて打ち上げた場合の予想軌跡との比較により行なう。実際の打ち上げにおいて分かり易い指標とするために飛翔軌跡を鉛直面及び水平面に投影し、打ち上げ時のランチャー角度 (Azimuth, Elevation) に換算して軌道分散を定量的に評価する。本報告では前節で述べたように予想される最大の軌道分散がミッション遂行に問題ない値であることを確認することを第一目的とし、いくつかのパラメータを変化させて軌道分散の推定を行ない、それらを包括する最大・最小値もしくは最大の絶対値をもって目的の推定量とする。

次に変化させるパラメータを選択する。パラメータには様々なものが考えられる。一例を挙げると、推力のミスアライメントやロケット・ランチャー間の接触を模擬するバネの等価バネ剛性 K_1, K_2 などである。ここで前者は仮想的な剛体ロケットにおいても存在するパラメータであり、後者は弾性を考慮した場合にのみ存在するパラメータである。本報告の主旨は弾性変形・弾性振動による軌道分散の推定であるので、後者のような弾性を考慮した場合にのみ存在する値が変化させるパラメータとして適切であると考えられる。このことを考慮し、変化させるパラメータは以下のものを選択した。

1. 等価バネ剛性 K_1, K_2
2. ロケットのランチャーからの離脱点
3. ランチャーの剛性, 密度
4. ロケットの剛性

4-2. 等価バネ剛性の影響

等価バネ剛性 K_1, K_2 は、実際のランチャー・翼間或はランチャー・胴体間の接触を等価的にバネとみなした場合のバネ剛性であるので、厳密に決定することは困難である。そこで実際に接触している翼／胴体全体がレールに垂直に全面で接触した場合のバネ剛性 $K_1 = 5.0 \times 10^5 N/m$, $K_2 = 5.0 \times 10^6 N/m$ を基準とし、接触角度や接触面積の変化などによるバネ剛性の変化が不明瞭であるので変化範囲を大きくとり基準値の 0.1 倍から 10 倍の範囲でバネ剛性を変化させ軌道分散の評価を行なった。図 16 及び図 17 に方位角方向及び迎角方向の軌道分散の計算結果を示す。図から方位角方向の軌道分散 ($\Delta\psi$) の最大値は $\Delta\psi = 1.1deg.$, また迎角方向の軌道分散 ($\Delta\theta$) の最大値は $\Delta\theta = 0.28deg.$ である。

4-3. ランチャー離脱点の影響

前後のバネは、それぞれ $X > X_{RCG1}, X > X_{RCG2}$ でレールから離脱し、ロケットとランチャーの間の力を伝達しなくなる。実際のロケットとランチャーの接触は点ではなく、ある広がりを持った面でなされているため、その点の座標を厳密に決定することは困難である。そこで実際に接触している翼／胴体の幅を考えこの点の座標を $\pm 10cm$ 変化させた場合に軌道分散の計算を行なった。図 18 及び図 19 に計算結果を示す。図を見ると、ランチャー離脱点を連続的に変化させることで離脱時の振動の位相が変化し、軌道分散も連続的に変化することがわかる。

4-4. ランチャー剛性, 密度の影響

ランチャー剛性及び密度の変化はランチャーの固有振動数を変化させ、系全体の振動に影響を与える。ランチャー剛性及び密度は振動試験を行なった結果より求めたものであるが、ある程度の誤差が含まれていることが

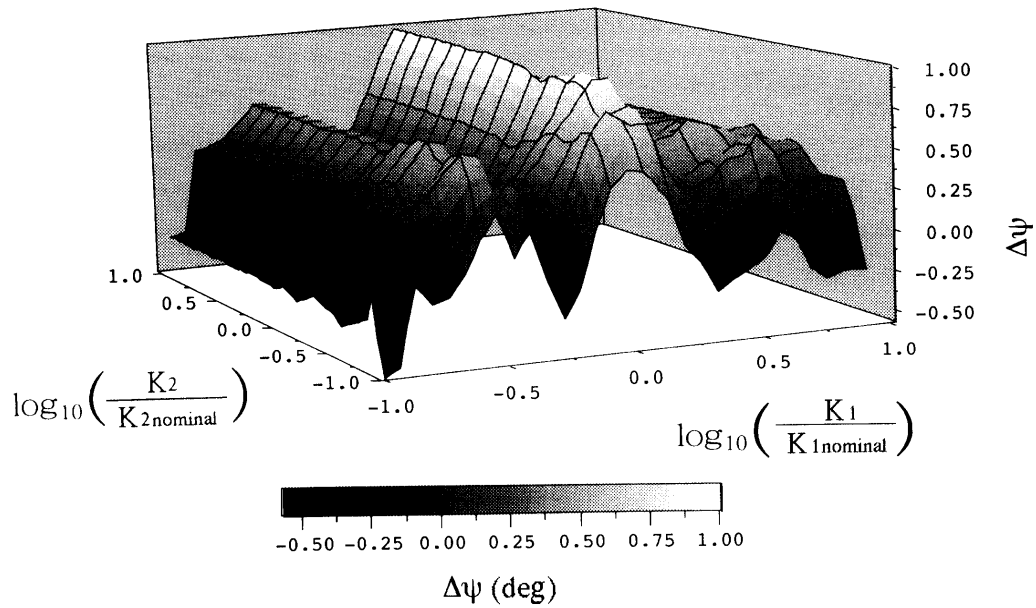


図 16: 等価バネ剛性の影響: 相当発射方位角

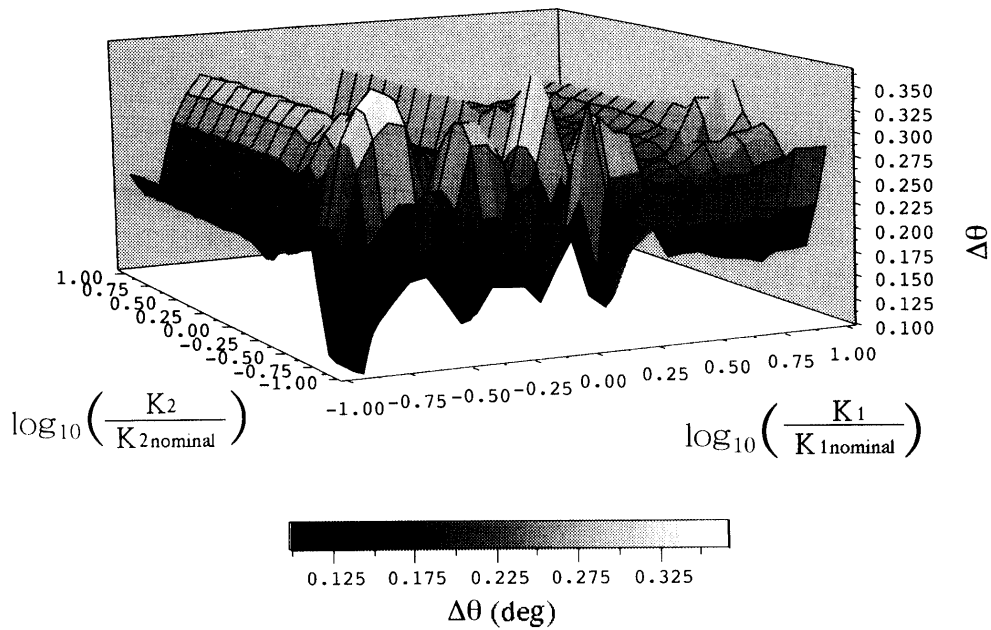


図 17: 等価バネ剛性の影響: 相当発射上下角

予想される。振動試験結果と有限要素法計算結果との比較及び提供されたランチャー設計図の精度から誤差は大きくとも全体の数割以内と考えられるが、余裕を見てランチャー剛性及び密度を基準値の0.5倍から2.0倍の間で変化させ軌道分散の計算を行なった。図20及び図21に計算結果を示す。図中 $EI_{launcher}$ はランチャー剛性を、 $M_{launcher}$ はランチャー密度を表す。ただし、剛性及び密度はランチャー全体で一様に变化させたものであり、特定の部分の剛性及び密度を变化させたものではない。具体的にはランチャーモジュール質量 m_{L_i} 及び固有振動数 ω_{L_i} を变化させることで計算を行なった。

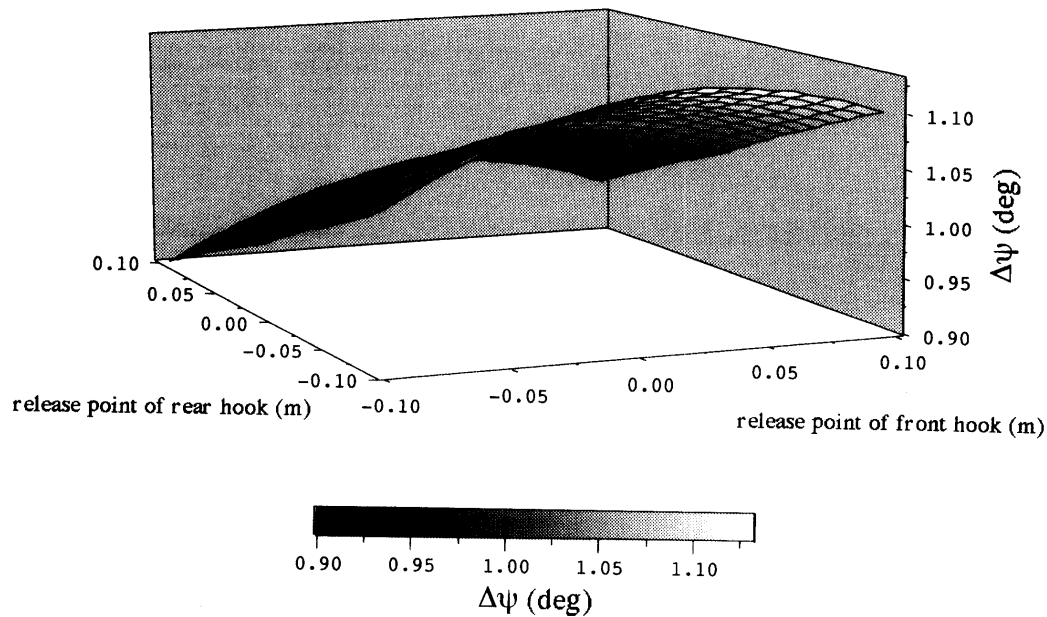


図 18: ランチャー離脱点の影響：相当発射方位角

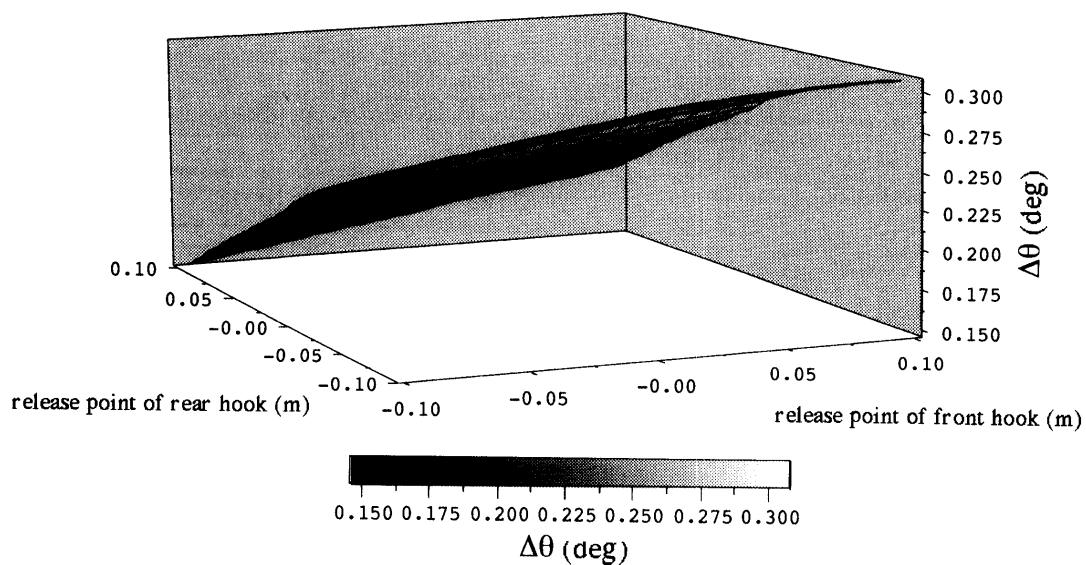


図 19: ランチャー離脱点の影響：相当発射上下角

4-5. ロケット剛性の影響

ロケット剛性変化はロケットの固有振動数を変化させ、系全体の振動に影響を与える。ここでロケットの密度も弾性振動に関連するパラメータの一つであるが、ランチャーと異なりロケット質量は計測することが可能であるため、ロケット密度はランチャー密度と比較して誤差が小さいことが考えられる。そのためロケット剛性のみをパラメータとし、4-4. 節と同様に基準値の 0.5 倍から 2.0 倍の間で変化させ軌道分散の評価を行なった。図 22 に計算結果を示す。図中 EI_{vehicle} はロケット剛性を表す。前節と同様に剛性はロケット全体で一様

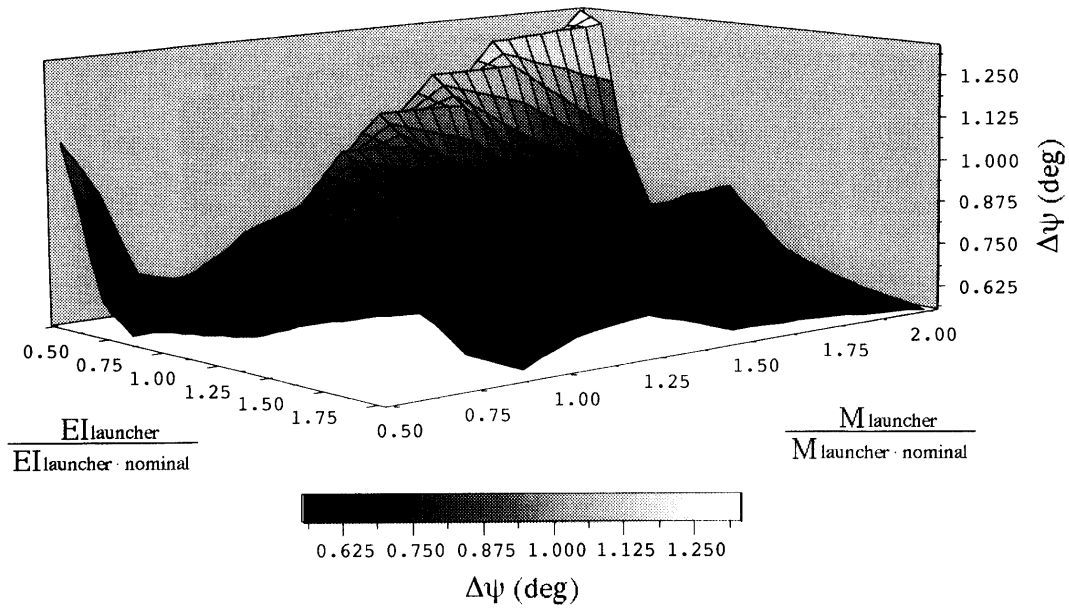


図 20: ランチャー剛性・質量の影響: 相当発射方位角

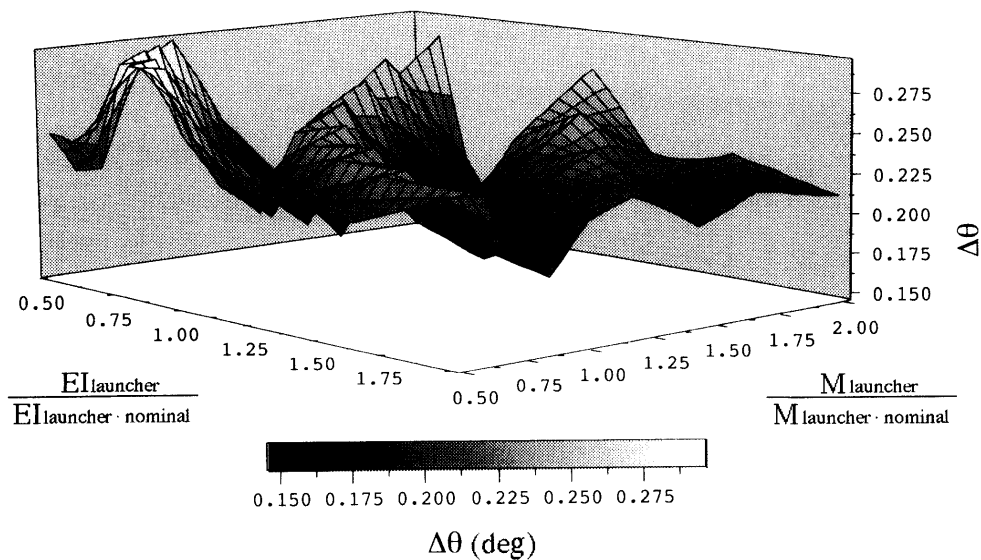


図 21: ランチャー剛性・質量の影響: 相当発射上下角

に変化させたものであり、特定の部分の剛性を変化させたものではない。

図を見ると、特に $\Delta\psi$ はこのパラメータの影響が大きいことがわかる。また $\Delta\theta$ が極大の時 $\Delta\psi$ は最大・最小値のほぼ中間の値をとる。この現象の原因はロケットがランチャーから離脱する時の角速度ベクトル(p, q, r)の方向の変化にある。具体的にはロケットの固有振動数が変化するために離脱時のロケット本体の振動位相が変化し、ロケット後尾の接線方向に作用する推力の横力成分の方向が変化するために生じる。

4-6. 軌道分散の評価

4-2. 節から 4-5. 節までの計算結果から、発射時に生じるロケット本体及びランチャーの弾性振動に起因する軌道分散の最大値は $\Delta\psi = 1.1deg.$ 、 $\Delta\theta = 0.3deg.$ 程度であると推定される。Viper の製造元より提供され

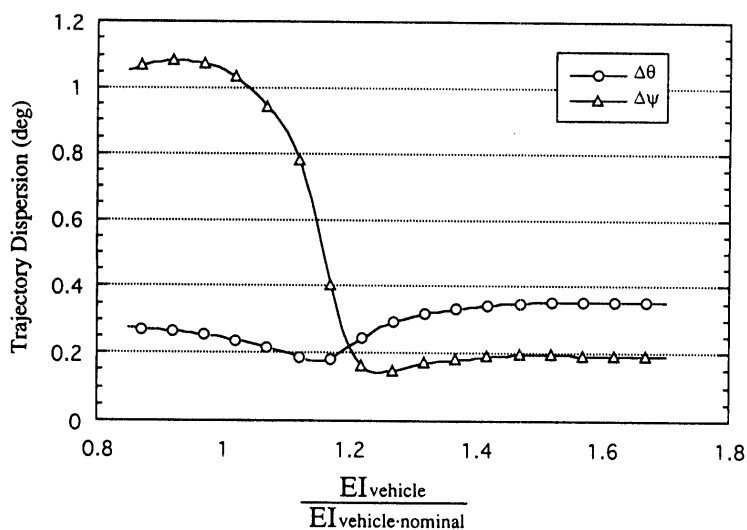


図 22: ロケット剛性の影響

た風補正計算データからこれらの値を風速に換算すると、それぞれ約 $1m/s$ 程度の風によって生じる値である。実際の打ち上げは風速数 m/s 程度の場合にも行なわれ、またレーダーの搜索は数度の範囲に渡り行なわれるため、この値は実用上は問題のない値である。

5. ランチャー改修の有効性の検討

5-1. ランチャー改修

現在使用しているランチャーは、平成 2 年 1～3 月にかけて行なわれた中層大気国際共同ロケット観測計画 (DYANA : Dynamics Adapted Network for the Atmosphere) において、Viper ロケット及び Viper とほぼ同形状で少し小型の Super Loki ロケットを打ち上げるために製作されたランチャーに改修を施したものである。DYANA 計画時にも打ち上げ後観測不能となる事態が生じ、原因としてランチャーの剛性不足が考えられたため、今回の Viper 打ち上げに際して改修が行なわれた。ここではその改修の有効性について検討する。

具体的な改修内容は、DYANA 計画では 2 種類のロケットを打ち上げるために Super Loki 用、Viper 用と 2 つ並べて搭載されていたレールが Viper 用の 1 つのみになった点、及びランチャー前下部に補強用の支持棒 (図 5 参照) が取り付けられた点である。この補強が取り付けられることにより、ランチャーの最低次固有振動数は、縦方向が $4.50Hz$ から $10.4Hz$ へ、横方向が $3.73Hz$ から $4.00Hz$ へそれぞれ上昇した。これは単純計算で縦方向剛性が 5.3 倍、横方向剛性が 1.2 倍になったことになる。

5-2. 改修の有効性の検討

この改修による軌道分散の変化を調べる。改修を施す前のランチャーのデータを用いて 3-3 節と同様の計算を行ない、軌道分散の予測を行なった。その結果、軌道分散の最大値は $\Delta\psi = 3.0deg.$ 、 $\Delta\theta = 2.5deg.$ となり、ランチャー改修の有効性が確認された。

6. 結 論

ロケット及びランチャーの弾性を考慮した打ち上げ数値シミュレーションプログラムを作成し、計算結果

と実際の打ち上げ時に計測されたデータの比較により数値シミュレーションの精度の検討を行なった。次にこの数値シミュレーションプログラムを用いてパラメータスタディによる Viper の軌道分散の推定を行ない、軌道分散が実用上問題ない範囲の値であることを確認した。また改修前のランチャーのデータを用いて同様の推定を行ない、ランチャーの改修が有効であったことを確認した。

現在の段階ではパラメータスタディにより軌道分散の最大値が問題ない値であることを確認するに留まっている。しかし実際のパラメータはそれぞれ統計により求められる確率分布に従う確率変数である。そのため将来的にはパラメータ変化に確率分布を導入することにより軌道分散に重み付けを行ない、軌道分散の期待値及び分散を求めることが可能である。これにより搜索に要する時間の短縮及び観測時間の延長が期待され、より質の良い観測結果につながることを期待される。

参考文献

- [1] K.Kishi, J.Onoda and K.Minesugi, "Dynamic Loads on Mu-Series Satellite Launch Vehicles at Lift Off", AIAA-94-1708
- [2] J.Onoda, "The Dynamic Bending Load on a Satellite Launcher Due to Inclined Lift-off", *Trans Japan Society for Aeronautics and Space Sciences*, Vol.26, No.71, 1983.5, pp.37-52.
- [3] "バイパーロケット", 平成8年度第2次観測ロケット飛翔実験計画書, pp.59-114, 宇宙科学研究所 SES データセンター
- [4] 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, "有限要素法ハンドブック", 培風館
- [5] 近藤恭平, "[工学基礎] 振動論", 培風館

Appendix A. オイラー角

Appendix A 記号

$(\vec{i}_*, \vec{j}_*, \vec{k}_*)$ 座標系*における単位ベクトル
 (V_x, V_y, V_z) (X, Y, Z) 座標系で見たロケット重心速度
 (v_x, v_y, v_z) (x, y, z) 座標系で見たロケット重心速度
 Φ, Θ, Ψ ロケットの姿勢を表すオイラー角
 $\vec{\omega}, p, q, r$ 座標系回転角速度ベクトル及びその x, y, z 軸回り成分

A-1. オイラー角の定義

オイラー角 (Φ, Θ, Ψ) の定義は、次のようにする。(図 23 参照) まず座標系 (x, y, z) を原点が座標系 (X, Y, Z) の原点と重なる様に平行移動する。次に、座標系 (X, Y, Z) を Z 軸を中心に角度 Ψ 回転させる。これを座標系 (X_1, Y_1, Z_1) とする。(図 23 の破線の座標系) 次に座標系 (X_1, Y_1, Z_1) を Y_1 軸を中心に角度 Θ 回転させる。これを座標系 (X_2, Y_2, Z_2) とする。(図 23 の一点鎖線の座標系) 最後に座標系 (X_2, Y_2, Z_2) を X_2 軸を中心に角度 Φ 回転させて座標系 (x, y, z) に一致させる。(図 23 の二点鎖線の座標系) $\Theta \neq \frac{\pi}{2}$ であれば、2つの座標系が一致する時の3つの角度 (Φ, Θ, Ψ) の組合せは唯一である。この角度 (Φ, Θ, Ψ) を用いて、座標系 (X, Y, Z) と (x, y, z) の姿勢の関係を表す。

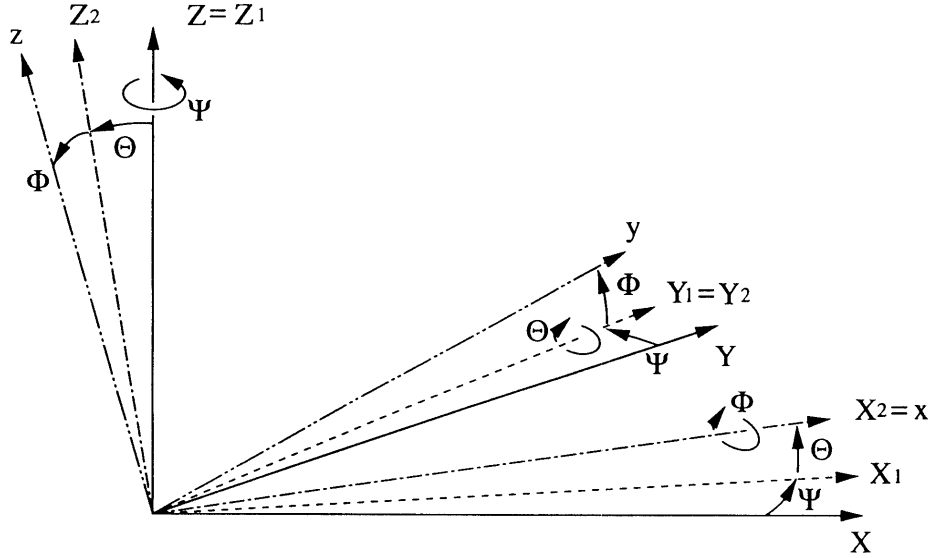


図 23: オイラー角の取り方

A-2. 座標系変換行列

次にオイラー角 (Φ, Θ, Ψ) を用いた座標系 (X, Y, Z) から座標系 (x, y, z) への変換行列を求める。座標系 (X, Y, Z) , (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) , (x, y, z) の単位ベクトルをそれぞれ $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ とする。これらの単位ベクトルの間には、オイラー角を用いて次のような関係が成立する。

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

これらの式を $\Theta, \Psi \ll 1$ の条件を用いて整理すると座標系 (X, Y, Z) から座標系 (x, y, z) への変換行列 T が求まる。

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Psi & -\Theta \\ \Theta \sin \Phi - \Psi \cos \Phi & \Theta \Psi \sin \Phi + \cos \Phi & \sin \Phi \\ \Theta \cos \Phi + \Psi \sin \Phi & \Theta \Psi \cos \Phi - \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} \equiv T \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

A-3. オイラー角の時間微分

次に角速度 (p, q, r) とオイラー角の時間微分 $(\dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi})$ との間の関係を求める。角速度とオイラー角の間には、オイラー角の取り方より次のような関係が成立する。

$$p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = \dot{\Psi}\vec{i}_0 + \dot{\Theta}\vec{j}_1 + \dot{\Phi}\vec{k}_2 \quad (47)$$

これを式 (43) ～ (45) を用いて整理すると、次のような角速度とオイラー角の関係式が導かれる。

$$\dot{\Phi} = p + q\Theta \sin \Phi + r\Theta \cos \Phi \quad (11)$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (12)$$

$$\dot{\Psi} = q \sin \Phi + r \cos \Phi \quad (13)$$

また、 (X, Y, Z) 座標系で見たロケット重心速度 (V_X, V_Y, V_Z) は、変換行列 T と (v_x, v_y, v_z) を用いて次のように表される。

$$(V_X, V_Y, V_Z)^t = T^{-1}(v_x, v_y, v_z)^t \quad (48)$$

これより、ロケット重心位置の時間微分は次のように表される。

$$\dot{X}_{CG} = v_x + v_y(\Theta \sin \Phi - \Psi \cos \Phi) + v_z(\Theta \cos \Phi + \Psi \sin \Phi) \quad (14)$$

$$\dot{Y}_{CG} = v_x \Psi + v_y(\Theta \Psi \sin \Phi - \cos \Phi) + v_z(\Theta \Psi \cos \Phi - \sin \Phi) \quad (15)$$

$$\dot{Z}_{CG} = -v_x \Theta + v_y \sin \Phi + v_z \cos \Phi \quad (16)$$

Appendix B. 回転する梁の運動方程式

Appendix B 記号

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$	任意のベクトル
A_i, B_i	微分方程式の期条件から決定される定数
E	梁弾性率
EJ	剛性行列
J_z, J_y	y, z 軸回り梁断面二次モーメント
l	梁長さ
\vec{M}_k	集中モーメントベクトル
\vec{m}, m_z, m_y	分布モーメントベクトル及びその y, z 軸回り成分
\vec{Q}_k	集中外力ベクトル
\vec{q}, q_y, q_z	分布外力ベクトル及びその y, z 方向成分
r_{rk}	$r_{rk} = (\vec{Q}_k, \vec{M}_k)$
\vec{w}, w_y, w_z	たわみベクトル及びその y, z 方向成分
x_k	\vec{Q}_k 及び \vec{M}_k 作用点の x 座標
δ	ディラックの δ 関数
δ_{ij}	クロネッカーの δ
ζ_{ri}	梁 i 次モード減衰比
$\vec{\eta}_i(x)$	梁 i 次固有振動モード形状ベクトル
$\eta_{rj}(x)$	$\eta_{rj}(x) = (\vec{\eta}_{rj}(x), \frac{\partial \vec{\eta}_{rj}(x)}{\partial x})$
ρ	梁体積密度
μ	梁線密度
$\xi_{ri}(t)$	梁 i 次固有振動モード変位量
$\vec{\omega}, p, q, r$	座標系回転角速度ベクトル及びその x, y, z 軸回り成分
ω_{ri}	梁 i 次固有振動数
$[[\]_R$	梁上での $x = 0 \sim l$ までの線積分

B-1. 梁の運動方程式

長さ l の自由境界のオイラー梁を考える．梁の中心軸に沿って x 軸をとり，主軸方向に y, z 軸をとる．梁の弾性率を E ，線密度を μ ，体積密度を ρ ， y, z 軸回りの断面二次モーメントを J_z, J_y ， y, z 方向の分布外力を q_y, q_z ， y, z 軸回りの分布モーメントを m_z, m_y とする． y, z 方向のたわみをそれぞれ w_y, w_z とすると，それぞれの方向のたわみの運動方程式は独立に書けて次のようになる．(文献 [5] 参照)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ_y \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}) + \mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho J_y \frac{\partial^3 w_y}{\partial t^2 \partial x}) = q_y + \frac{\partial m_y}{\partial x} \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ_z \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}) + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho J_z \frac{\partial^3 w_z}{\partial t^2 \partial x}) = q_z + \frac{\partial m_z}{\partial x} \quad (50)$$

左辺第 3 項の回転慣性の項は無視できるほど小さいものと考え，さらにこれらの式をベクトル表記すると，次のように書ける．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial x^2}) + \mu \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x} \quad (51)$$

ただし，ここで

$$\vec{w} = (0, w_y, w_z) \quad (52)$$

$$\vec{q} = (0, q_y, q_z) \quad (53)$$

$$\vec{m} = (0, m_y, m_z) \quad (54)$$

$$EJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y & 0 \\ 0 & 0 & EJ_z \end{pmatrix} \quad (55)$$

である．方程式 (51) において右辺＝零とした自由振動に対する解は変数分離法によって比較的容易に求めることができ次のように与えられる．

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\eta}_{ri}(x)(A_i \cos(\omega_{ri}t) + B_i \sin(\omega_{ri}t)) \quad (56)$$

ここで A_i, B_i は初期条件から決定される定数であり， $\vec{\eta}_i(x)$ 及び ω_{ri} は，次の固有値問題を次の境界条件の下で解いた解である．

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJ \frac{d^2 \vec{\eta}_{ri}(x)}{dx^2}) - \mu \omega_{ri}^2 \vec{\eta}_{ri}(x) = 0 \quad (57)$$

境界条件

$$-\frac{d}{dx}(EJ \frac{d^2 \vec{\eta}_{ri}(x)}{dx^2}) = -EJ \frac{d^2 \vec{\eta}_{ri}(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0, l \quad (58)$$

また $\vec{\eta}_{ri}(x)$ は直行性と呼ばれる次のような性質を持つ．

$$\int_0^l \mu \vec{\eta}_{ri}(x) \cdot \vec{\eta}_{rj}(x) dx = m_{ri} \delta_{ij} \quad (59)$$

$$\int_0^l \frac{d^2}{dx^2}(EJ \frac{d^2 \vec{\eta}_{ri}(x)}{dx^2}) \cdot \vec{\eta}_{rj}(x) dx = m_{ri} \omega_{ri}^2 \delta_{ij} \quad (60)$$

ただし，ここで δ_{ij} はクロネッカーの δ である．以上のような条件を満たす関数 $\vec{\eta}_{ri}(x)$ 及び固有振動数 ω_{ri} を用いて，梁のたわみ \vec{w} を次のように表す．

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\eta}_{ri}(x) \xi_{ri}(t) \quad (61)$$

式 (61) を方程式 (51) に代入すると，次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ \frac{\partial^2 \vec{\eta}_{ri}(x) \xi_{ri}(t)}{\partial x^2}) + \mu \frac{\partial^2 \vec{\eta}_{ri}(x) \xi_{ri}(t)}{\partial t^2} \right\} = \vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x} \quad (62)$$

B-2. 回転する梁の運動方程式

ここで座標系が角速度 $\vec{\omega} = (p, q, r)$ で回転していることを考慮する. 式(1)を用いて上の式を展開すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 \tilde{\eta}_{ri}(x)}{\partial x^2} \right) \xi_{ri}(t) + \mu \left\{ \frac{\delta^2 \xi_{ri}(t)}{\delta t^2} \tilde{\eta}_{ri}(x) + \vec{\omega} \times \tilde{\eta}_{ri}(x) \xi_{ri}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\vec{\omega} \times \tilde{\eta}_{ri}(x) \frac{\delta \xi_{ri}(t)}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \tilde{\eta}_{ri}(x) \xi_{ri}(t)) \right\} \right] = \vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x} \end{aligned} \quad (63)$$

この式について, 両辺と $\tilde{\eta}_{rj}(x)$ の内積を取り, $x=0$ から $x=l$ まで x について積分する. $\int_0^l dx$ を $[[\quad]_R$ であらわし, 式(59)と(60)を考慮すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & m_{rj} \omega_{rj}^2 \xi_{rj}(t) + m_{rj} \ddot{\xi}_{rj}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \{ [[\mu(\vec{\omega} \times \tilde{\eta}_{ri}(x)) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \xi_{ri}(t) \\ & + 2[[\mu(\vec{\omega} \times \tilde{\eta}_{ri}(x)) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \dot{\xi}_{ri}(t) + [[\mu \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \tilde{\eta}_{ri}(x)) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \xi_{ri}(t) \} \\ & = [[(\vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x}) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \end{aligned} \quad (64)$$

ベクトルの積の関係式 $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$ 及び $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ を考慮し, $\vec{\omega}$ は場所によらない関数なので積分の外に出すと次の式が導かれる.

$$\begin{aligned} & m_{rj} \omega_{rj}^2 \xi_{rj}(t) + m_{rj} \ddot{\xi}_{rj}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \{ [[\mu(\tilde{\eta}_{ri}(x) \times \tilde{\eta}_{rj}(x))]_R \cdot \dot{\xi}_{ri}(t) \\ & + 2[[\mu(\tilde{\eta}_{ri}(x) \times \tilde{\eta}_{rj}(x))]_R \cdot \dot{\xi}_{ri}(t) + [[\mu(\vec{\omega} \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x))(\vec{\omega} \cdot \tilde{\eta}_{ri}(x))]_R \xi_{ri}(t) \\ & - \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} [[\mu \tilde{\eta}_{rj}(x) \cdot \tilde{\eta}_{ri}(x)]]_R \xi_{ri}(t) \} = [[(\vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x}) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \end{aligned} \quad (65)$$

今角速度は x 軸回りのスピンの支配的で $q, r \ll p$ とすると, $\vec{\omega} \sim (p, 0, 0)$ となり, 式(52)及び(56)を考慮すると, $\vec{\omega} \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x) \sim 0$ となる. これより, 式(65)の左辺第5項は0とする. 左辺第6項に式(59)を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned} & m_{rj} \omega_{rj}^2 \xi_{rj}(t) + m_{rj} \ddot{\xi}_{rj}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \{ m_{rj} \vec{C}_{ji} \cdot \dot{\xi}_{ri}(t) + 2m_{rj} \vec{C}_{ji} \cdot \dot{\xi}_{ri}(t) \} - m_{rj} \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \xi_{rj}(t) \\ & = [[(\vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x}) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \end{aligned} \quad (66)$$

ここに \vec{C}_{ji} は, ベクトル $\tilde{\eta}_{ri}$ を用いて次のように定義される量である.

$$m_{rj} \vec{C}_{ji} \equiv [[\mu(\tilde{\eta}_{ri} \times \tilde{\eta}_{rj})]]_R = -m_{rj} \vec{C}_{ij} \quad (20)$$

次に右辺の力の項を整理する. 分布外力 \vec{q} と分布モーメント \vec{m} の代わりに, $x = x_k$ を作用点とする集中外力 \vec{Q}_k 及び集中モーメント \vec{M}_k を考える. これらの力を用いると, 右辺はディラックの δ 関数を用いて次のように書ける.

$$\begin{aligned} [[(\vec{q} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial x}) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R &= \sum_{k=1}^{\infty} [[\{ \vec{Q}_k \delta(x - x_k) - \frac{\partial \vec{M}_k}{\partial x} \delta(x - x_k) \} \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]]_R \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \vec{Q}_k \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x_k) - \sum_{k=1}^{\infty} [\vec{M}_k \delta(x - x_k) \cdot \tilde{\eta}_{rj}(x)]_0^l \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} [[\vec{M}_k \delta(x - x_k) \cdot \frac{\partial \tilde{\eta}_{rj}(x)}{\partial x}]]_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \{ \vec{Q}_k \cdot \vec{\eta}_{rj}(x_k) + \vec{M}_k \cdot \frac{\partial \vec{\eta}_{rj}(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k} \} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{r}_{rk} \cdot \boldsymbol{\eta}_{rj}(x_k)
\end{aligned} \tag{67}$$

ここで、 $\mathbf{r}_{rk}, \boldsymbol{\eta}_{rj}(x_k)$ は次のように定義される 6 次元のベクトル量である。

$$\mathbf{r}_{rk} = (\vec{Q}_k, \vec{M}_k) \tag{68}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{rj}(x) = (\vec{\eta}_{rj}(x), \frac{\partial \vec{\eta}_{rj}(x)}{\partial x}) \tag{69}$$

これらを用いて、式 (66) を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
m_{rj} \omega_{rj}^2 \xi_{rj}(t) + m_{rj} \ddot{\xi}_{rj}(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \{ m_{rj} \vec{C}_{ij} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{\xi_{ri}}(t) + 2m_{rj} \vec{C}_{ij} \cdot \vec{\omega}_{\xi_{ri}}(t) \} \\
&+ m_{rj} \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_{\xi_{rj}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{r}_{rk} \cdot \boldsymbol{\eta}_{rj}(x_k)
\end{aligned} \tag{70}$$

インデックス i, j を入れ換え、粘性減衰を考慮すると次の式が導かれる。

$$\begin{aligned}
m_{ri}(\ddot{\xi}_{ri}(t) + 2\zeta_{ri}\omega_{ri}\dot{\xi}_{ri}(t) + \omega_{rj}^2 \xi_{ri}(t)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \{ m_{ri} \vec{C}_{ji} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{\xi_{rj}}(t) + 2m_{ri} \vec{C}_{ji} \cdot \vec{\omega}_{\xi_{rj}}(t) \} \\
&+ m_{ri} \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_{\xi_{ri}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{r}_{rk} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ri}
\end{aligned} \tag{71}$$

これが求める運動方程式である。

Appendix C. 排気による力の推算

Appendix C 記号

A	断面積
A_R	流れ中に含まれるレールを流れに垂直な方向に投影した面積
A_s	流れの全断面積
C_f	推力係数
D_{ma}	レール中心からのモーメントアームの長さ
F	推力
$F_1, F_2, F_{3X}, F_{3\Phi}$	\mathbf{R}_f の定義に用いる力
M	マッハ数
P	圧力
P_a	大気圧
P_s	レールに当たる流れの全運動量
\mathbf{R}_f	ロケット排気によりランチャーに及ぼされる力
u	主流方向流速
X_{Rf}, Y_{Rf}, Z_{Rf}	力 \mathbf{R}_f 作用点の座標, Appendix C 参照
X_{CG}	ロケット重心 X 座標
α	X 軸に対するレールの傾きの角度

κ	比熱比
ρ	空気密度
$*_0$	澱み点での値を表す添字
$*_1$	垂直衝撃波上流での値を表す添字
$*_2$	垂直衝撃波下流での値を表す添字
$*_c$	燃焼室内での値を表す添字
$*_e$	ノズル後方での値を表す添字
$*_l$	ランチャー後部の面での値を表す添字
$*_n$	ノズル出口での値を表す添字
$*_t$	スロートでの値を表す添字
$*_x, *_y$	任意の断面 x, y での値を表す添字

C-1. 燃焼室圧の推算

ロケットの排気によりランチャーに及ぼされる力を推算する。Viper の製造元より開示されている推力関連データは時間履歴のみである。このデータと Viper の図面より求められるノズルの寸法を用いて、まずノズル出口後方の排気の特性に大きく影響する燃焼室圧力の推算を行なう。ノズル中では流れは準一次元流として扱えたと仮定し、燃焼室内での値には添字 c 、スロートでの値には添字 t 、ノズル出口での値には添字 n 、ノズル後方での値には添字 e をつけて表す。実際の Viper ではスロート及びノズル出口において断面積 A は、 $A_t = 1990(mm^2)$ 、 $A_n = 10260(mm^2)$ である。また固体燃料ロケットであるので、比熱比は $\kappa = 1.2$ とする。準一次元流では任意の断面 x, y における断面積 A_x, A_y とマッハ数 M_x, M_y との間に次の式が成り立つ。

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{M_y}{M_x} \sqrt{\left\{ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_y^2} \right\}^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} \quad (72)$$

また流れ中に垂直衝撃波が存在せず、全圧は保存されるとすると、ある任意の断面 x における圧力 P_x と燃焼室圧 P_c の間には、次の式が成り立つ。

$$\frac{P_x}{P_c} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_x^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (73)$$

スロートでは $M_t = 1$ であるので、式 (72) からノズル出口マッハ数は $M_n = 2.81$ 。また式 (73) より $\frac{P_n}{P_c} = 0.0306$ 。ここで推力 F は推力係数 C_F を用いて次のように表される。

$$F = C_F A_t P_c \quad (74)$$

$$C_F = \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\kappa-1} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left\{ 1 - \left(\frac{P_n}{P_c} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\}} + \frac{P_n - P_e}{P_c} \frac{A_n}{A_t} \quad (75)$$

Viper の初期推力は $17000(N)$ であり、 $P_e = 1(atm)$ であるので、

$$F = 3.283 \times 10^{-3} P_c - 1037 = 17000(N)$$

よって、 $P_c = 5.5 \times 10^6 (Pa) = 55(atm)$ と推算される。また、 $\frac{P_n}{P_c} = 0.0306$ より $P_n = 1.66(atm)$ 。つまり Viper においては流れは不足膨張であり、ノズルから排出されたあと流れは膨張する。

排気がランチャーに及ぼす力を推算するためには、ノズル出口後方の排気の形状、流速、圧力分布などを求める必要がある。現実にはノズルから排出された後の流れは流れ方向を中心軸とする軸対称問題であり2次元問題として扱う必要がある。さらに厳密には実際のランチャー形状などから決まる境界条件を考慮した3次元問題となる。しかしこれらの多次元問題では大幅に計算量が増加するが、実際の境界条件が複雑であるために計算量の増加に対して計算精度はそれほど良くならないと予想される。そのため以後の力の推算は全て準一次元流の仮定に基づいて行なう。

また以下の C-2. 節から C-4. 節で $F_1, F_2, F_{3x}, F_{3\phi}$ という力を求め、それらを用いて R_f を次のように定義する.

$$R_f = (F_1 + F_2 + F_{3x}, 0, 0, F_{3\phi}, 0, 0) \quad (76)$$

C-2. 背部圧力上昇による力の推算

排気が地面に当たると流れ中の動圧が静圧に変換され、地面とランチャーレール最後端及びランチャー最後部の面とはさまれた空間 (図 5 参照) の圧力が上昇する. この圧力上昇によりランチャー後部が受ける力の推算を行なう. 微視的には流れ中の粒子が地面で反射されランチャーに衝突して力を及ぼす現象であり、運動量理論での扱いも可能であるが、計算の簡略のため圧力の視点から計算を行なう.

排気の後方に地面が存在すると、地面上で地面に垂直な方向の速度成分は 0 という境界条件を満たすために流れ中に垂直衝撃波が生じ、流れは超音速から亜音速に変化する. 衝撃波上流での値には添字 1 を、下流での値には添字 2 をつけて表すことにすると、衝撃波前後のマッハ数 M 及び静圧 P の関係式は次のように書ける.

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}} \quad (77)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (78)$$

Viper のランチャーではレール最後端から地面まで 50(cm) 前後の距離がある. そのため流れはある程度膨張・加速し、静圧が低くなった時点で地面との境界条件のために垂直衝撃波が生じると考えられる. そこで垂直衝撃波は大気圧と同じ $P_1 = 1.0(atm)$ で生じると仮定する. このとき式 (73) より $M_1 = 3.08$ である. これを式 (77) (78) へ代入して、 $M_2 = 0.416, P_2 = 10.2(atm)$ となる. また澱み点圧力 P_0 と P_2 の間には次の関係がある.

$$\frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (79)$$

これより、 $P_0 = 11.3(atm)$ となる. この澱み点圧とランチャー後部の面積をかけ合わせた値が考えられうる最大の力であるが、実際に値を計算すると推力の数倍の値となり、値が大き過ぎてこの近似は適当ではない. 現実の圧力上昇は澱み点付近での局所的な現象であり、実際に圧力上昇による力を受けるのはランチャーのごく一部であると考えられる. 向かいあっている地面とランチャーの面には同じ圧力が作用すると考えると、圧力上昇により地面が受ける力 (地面上での圧力の無限遠方までの積分値) とランチャー後部面での圧力の積分値は圧力上昇が局所的にしか生じないため同じ値になる. (図 24 参照) ランチャー後部面での圧力から大気圧 P_a を引いて積分を行なうと実際にランチャーが受ける力が求まる. ランチャー後部の面における値には添字 l を、地面での値には添字 G をつけて表すと、ランチャーが受ける力は F_l は次のように書ける.

$$F_l = \int_{Surfacel} (P_l - P_a) dA_l \quad (80)$$

ただし、 F_l は X 方向の成分のみを持つと考える. 次に流れ中の任意の断面での値には添字に x をつけて表すと、流れの運動量保存則は次のように書ける.

$$\int_{Surfacex} (P_x + \rho_x u_x^2) dA_x = const \quad (81)$$

超音速の流れ場では動圧が高いため流れの全圧が大きく、垂直衝撃波が生じた後の亜音速の流れ場ではその動圧がほぼ静圧に変換されており、静圧に比べて動圧は小さく無視できる ($P_x \ll \rho_x u_x^2$) と考えると、力 F_l の式は次のようになる.

$$F_l = \int_{Surfacel} (P_l - P_a) dA_l$$

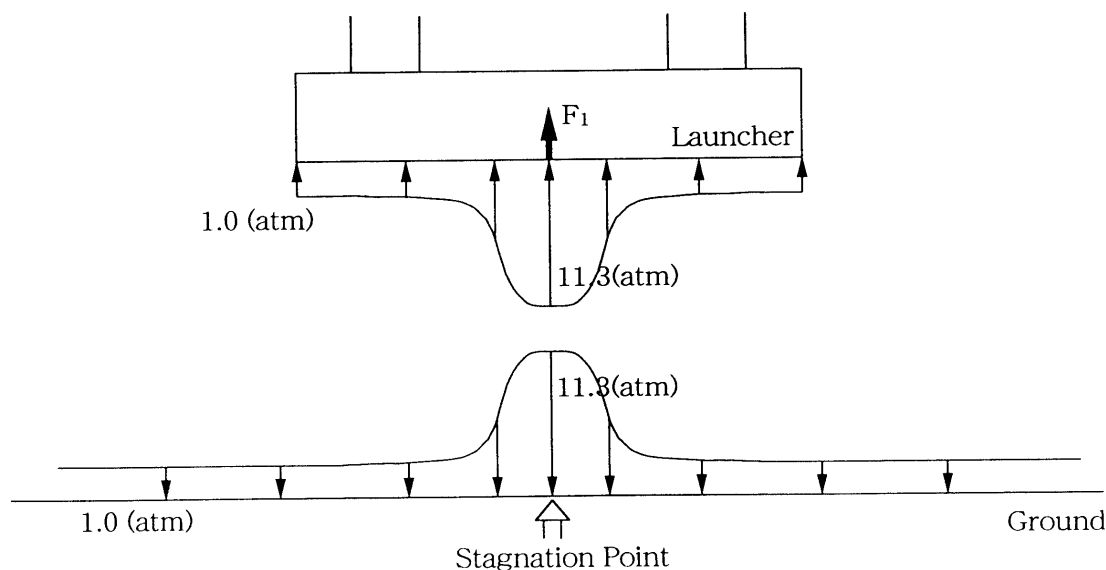


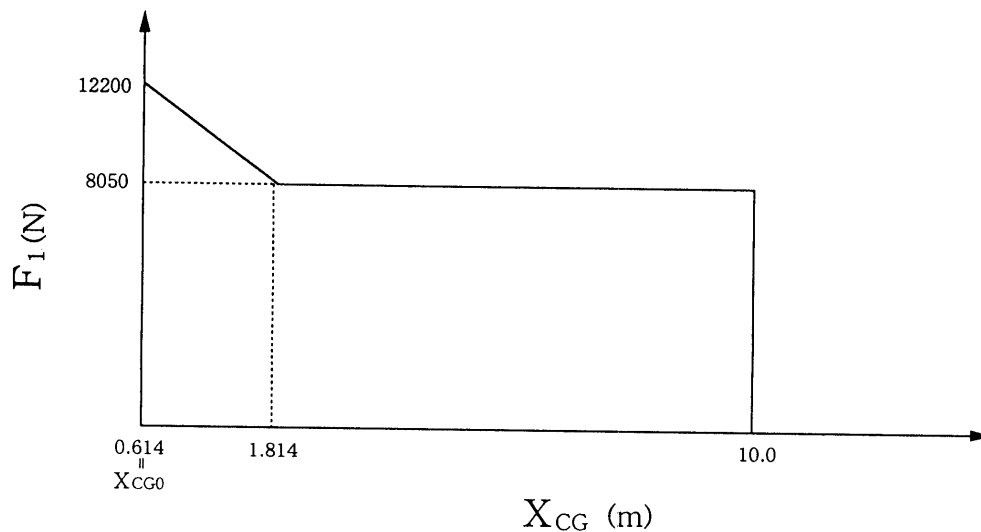
図 24: ランチャー後方の圧力分布概念図

$$\begin{aligned}
 & \sim \int_{\text{Surface1}} (P_1 - P_a + \rho_1 u_1^2) dA_1 \\
 & = \int_{\text{Ground}} (P_G + \rho_G u_G^2) dA_G - \int_{\text{Surface1}} P_a dA_1 \\
 & = \int_{\text{Surface2}} (P_2 + \rho_2 u_2^2) dA_2 - \int_{\text{Surface1}} P_a dA_1 \quad (82)
 \end{aligned}$$

実際の値を代入すると、 $F_1 = 12200(N) = 1.22(t)$ となる。ただし、これはノズルから排出された全運動量が地面に達している場合の力である。点火時にはロケットはレールの最後端にあるため排気的全運動量が地面に到達する。点火後ロケットが前進するにつれて、Viper においては排気はノズルから排出された後も膨張を続けるため、流れの外周部がレールにあたり地面に到達する運動量が減少する。レールの面にあつた運動量は地面に到達しないと考えると、螺旋状になったレールの面は $1.2(m)$ で $\frac{\pi}{2}$ 回転し、レールは4枚存在するので、 $1.2(m)$ 前進した時点で流れ外周部の運動量は全て地面に到達しなくなる。その後は地面に到達する運動量は一定であり、ロケットがある地点まで前進すると流れ中に垂直衝撃波を生じて超音速流が地面まで到達しないため、地面に到達する運動量が0になると考える。この点は $X_{CG} = 10.0(m)$ であるとする。(C-3. 節参照) そのためこの力は点火時が最大でロケットが $1.2(m)$ 前進するまで単調減少し、その後は一定で $X_{CG} = 10.0(m)$ で0になる。単調減少した後に一定になった力の値は、膨張した流れの最大面積を求め、ランチャー内で流れが通過できる部分の面積と流れの最大面積との比に従って流れの運動量、ひいてはその積分値である力 F_1 を減少させることで求めることができる。流れの最大面積の推算是 C-3. で行なうが、図 25 にその結果を用いてこの力 F_1 を X_{CG} の関数として示す。

C-3. ランチャー先端に当たる排気による力の推算

ロケットがランチャーから離脱した後にロケットの排気がランチャー先端の面に当たることにより生じる力 F_2 の推算を行なう。 F_2 は X 軸方向に作用する力であるとする。排気主流中に含まれた、流れに垂直なランチャーの面は、その面にあたる排気の運動量を全て受け止めると考えて、ランチャー先端の面にあつた排気がランチャーに及ぼす力の推算を行なう。推算においては、排気的主流中では断面での運動量の分布は一樣であると仮定する。

図 25: ロケット排気による力 F_1

Viper の排気は明瞭なダイヤモンドショックを形成し、主流断面積が周期的に変化するため、力も周期的に変化する。そのためまず排気形状の推算を行なう。Viper では不足膨張なのでノズルから排出された流れは膨張を続け、ある時点で弱い衝撃波を生じて圧縮に転ずる。この現象は流れの静圧が大気圧よりもある程度低くなった時点で、大気圧のためにそれ以上流れが膨張できなくなり発生する。そこでその点は静圧が $P = 0.5(atm)$ であると仮定する。式 (72) (73) より $P = 0.5(atm)$ の時の流れの断面径は $180(mm)$ である。その後流れは圧縮され続け、またある時点で弱い衝撃波を生じて膨張に転ずる。この現象は流れの静圧が大気圧よりもある程度高くなった時点で、大気圧が流れをそれ以上圧縮できなくなるため発生する。そこでその点は圧力が $P = 1.0(atm)$ であると仮定する。同様にその点での流れの断面径は $138(mm)$ となる。その後流れは前述の膨張と圧縮を繰り返し、ある時点で垂直衝撃波を生じて亜音速に転ずる。垂直衝撃波の後方では流れの運動量はあらゆる方向に拡散されており、ランチャーに力は及ぼさないものとする。弱い衝撃波の間隔及び垂直衝撃波発生点は計算で求めるのが困難なため、高速度カメラの映像から求めた。その結果、弱い衝撃波の間隔は $300(mm)$ 、垂直衝撃波発生点はノズル出口から $8.5(m)$ 後方である。垂直衝撃波発生点は $X_{CG} = 10.0(m)$ に相当する。また高速度カメラの映像から求めたダイヤモンドショックの径は先に計算で求めた値と大体一致しており、計算の仮定はある程度妥当であるといえる。

以上の議論から、この力 F_2 はロケットがランチャー先端から離脱する点 $X_{CG} = 5.714(m)$ で立ち上がり、弱い衝撃波の間隔 $0.3(m)$ おきに最大・最小値を繰り返し、 $X_{CG} = 10.0(m)$ で 0 となる力である。 F_2 の図示は次節で F_{3X} と組み合わせて行なう。

C-4. レール面に当たる排気による力の推算

レールは螺旋状になっているため、レールの側面にロケットの排気があたり、レールの面に垂直な力を及ぼす。この力はレール全体で考えると X 方向の力と X 軸回りのモーメントになる。 X 方向の力を F_{3X} 、 X 軸回りのモーメントを $F_{3\Phi}$ とする。流れに対するレールの傾きの角度を α 、レールに当たる流れの全運動量を P_s とする。流れはレールに当たった後、レールに沿って流れると仮定すると、レールの面に垂直に $P_s \sin \alpha$ の力が働く。これより、 F_{3X} 、 $F_{3\Phi}$ は次のようになる。

$$F_{3X} = P_s \sin^2 \alpha \quad (83)$$

$$F_{3\Phi} = P_s D_{ma} \sin \alpha \cos \alpha \quad (84)$$

ここで D_{ma} はレールの中心からのモーメントアームである。超音速では流れ中の任意の垂直断面での全運動量は推力に等しく、断面中では運動量の分布は一様であると考え、流れ中に含まれるレールを流れに垂直な方向に投影した面積を A_R とすると、レールに当たる流れの全運動量 P_s は、流れの全断面積 A_s を用いて $P_s = T \frac{A_R}{A_s}$ と書ける。厳密には F_{3X} , $F_{3\Phi}$ は分布力であり、前節で求めた変化する流れ断面積を用いて求める必要があるが、流れの最大・最小径の比は 1.5 倍程度であるので、分布力としても集中力としてもそれほど誤差が生じないと考えられる。そこでここでは計算の簡略化のため F_{3X} , $F_{3\Phi}$ は、ロケット後端がレール先端から抜ける前は流れの最大断面積を用いて計算された集中力、またロケット後端がレール先端から抜けた後は、レール先端での流れ断面積を用いて計算された集中力として扱う。力及びモーメントの作用点は、ロケット後端がレール先端から抜けるまではロケット最後端と同じ X 座標のレール上の点、その後はレールの最先端とする。

C-2. 節と同様の理由により、これらの力は点火時は 0 で、ロケットが 1.2(m) 前進するまで単調増加しその後は一定となる。その後ロケット後端がレール先端から抜けると、力は周期的に変化する。図 26 に力 F_2 と F_{3X} を加え合わせた値を X_{CG} の関数として示す。また、図 27 に $F_{3\Phi}$ を X_{CG} の関数として示す。

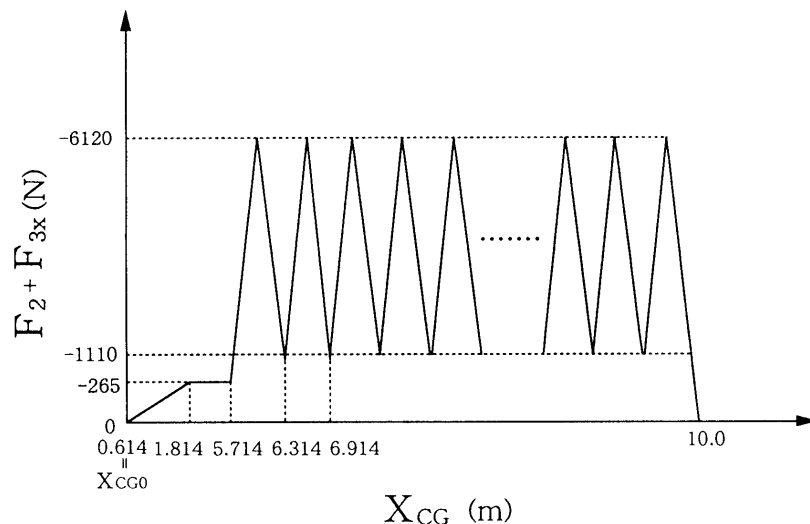


図 26: ロケット排気による力 F_2

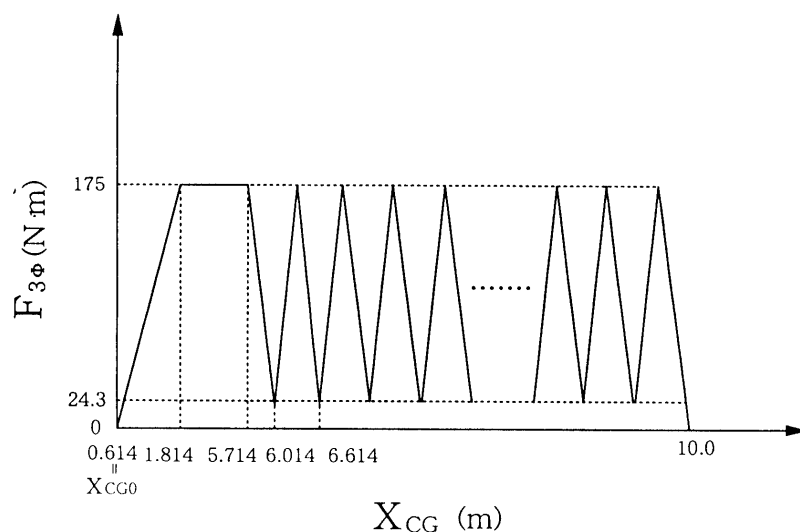


図 27: ロケット排気による力 F_3