

天文観測用科学衛星の姿勢決定系におけるカルマンフィルタ

二宮 敬虔・橋本 樹明

飯田 浩*・卯尾 匡史**・村中 昇*・前田 健*

小倉 直人*・斎藤 徹**・藤原 宏悦**

(1998年10月29日受理)

Kalman Filtering Used in The Attitude Determination Systems for Astronomy Missions of ISAS

By

Keiken NINOMIYA, Tatsuaki HASHIMOTO

Hiroshi IIDA*, Masashi UO**, Noboru MURANAKA*, Ken MAEDA*

Naoto OGURA*, Tetsu SAITOH**, Koetsu FUJIWARA**

Abstract: This report describes the detailed algorithms and practical design techniques for the attitude determination Kalman filtering which have been and will be applied to the astronomy missions of the Institute of Space and Astronautical Science (ISAS). More than ten years have passed since the successful launch of "GINGA" in February 1987, to which Kalman filtering technique was first applied for the attitude determination. During the period, flight experiences have helped improve the practical design techniques for the Kalman filter for attitude determination. On the other hand, more exact algorithm needs to be applied to the near future astronomy missions under development, that require better attitude determination and control accuracy. With these as the background, the report summarizes the design techniques and methods of the Kalman filtering as applied to the astronomy missions of ISAS. The report consists of the following sections. (1) Overview of the development history of the attitude determination Kalman filtering as applied to the astronomy missions of ISAS. (2) Definition of the detailed algorithm for the attitude determination Kalman filter. (3) Performance analysis method for the attitude determination Kalman filter. (4) Definition of practical design techniques for each of the astronomy missions of ISAS introduced in Section (1). Appendix A gives basic formulae of Kalman filtering. Appendices B, C and D include several basic formulae concerning Euler parameters, attitude kinematic equations expressed by Euler parameters, and the method for checking observability.

* 日本電気 (株) 宇宙開発事業部

** 日本電気航空宇宙システム (株)

概 要

本報告書は、宇宙科学研究所のこれまでおよび近い将来の天文観測用科学衛星の姿勢決定系に採用されてきたカルマンフィルタに関して、そのアルゴリズムおよび実用上の工夫を中心に記述する。

宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星で、姿勢決定にカルマンフィルタがはじめて適用された「ぎんが」の打ち上げ(1987年2月)から10年以上が経過した。この間に打ち上げられた天文観測衛星の飛翔ごとに、その経験にもとづいてカルマンフィルタにおいても実用上の工夫が取り入れられてきた。一方、観測ミッションの達成に必要な姿勢制御精度/姿勢決定精度はますます厳しくなり、カルマンフィルタを用いる場合にも、より厳密なアルゴリズムを適用することが必要となってきた。以上の背景を基に、本報告書では、これまで用いてきたカルマンフィルタの設計や適用の方法をまとめておくことを通じて、今後の衛星への確実な技術継承を図ることを目的としている。

本報告書の構成は、以下の通りである。第1章では、宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星における姿勢決定系の開発の流れを示す。第2章では、姿勢決定系におけるカルマンフィルタのアルゴリズムを、付録Aに示した一般的定式化を基に記述する。第3章では、カルマンフィルタの性能を定めるパラメータと性能との関係を明らかにし、カルマンフィルタの設計指針を与える。第4章では、これまでの天文観測用科学衛星におけるカルマンフィルタの適用方法を、実際の衛星を対象として具体的に説明する。付録Aには、カルマンフィルタの一般的定式化をまとめて記載しておく。なお、付録B以下では、姿勢決定系カルマンフィルタの定式化を図る上で不可欠であるオイラーパラメータ、それに基づく姿勢運動の方程式の記述、カルマンフィルタの状態変数を決定する上で必要となる可観測性の検証方法についてまとめておく。

1. はじめに

本章では、宇宙科学研究所のこれまでの天文観測用科学衛星に採用されてきた姿勢決定系のカルマンフィルタに関して、その開発の流れを概説する。

1.1 姿勢決定系の開発の流れ

三軸安定姿勢をとる天文観測用科学衛星において、スタートラッカ(STT)および慣性基準ユニット(IRU)を取り入れた姿勢決定系は、1987年2月に打ち上げられたX線天文衛星「ぎんが」において始めて採用されている。「ぎんが」では、互いにはほぼ直角方向に視野を有する2台のSTTにより三軸姿勢を検出し、3軸(冗長系を合わせれば4軸)方向の角速度を検出することができるIRU(ジャイロスコープから構成されている)により、姿勢伝播を行っている。また、姿勢制御装置(ACE)の演算処理部には、宇宙科学研究所はもとより、国産の衛星としては始めてMPUを用いた搭載計算機を採用している。しかし、

- IRUを用いた姿勢決定系を採用することは初めての試みであったこと、
- ACEで採用したMPUが8ビットであったため、処理能力上の限界があったこと、

等により、「ぎんが」では、カルマンフィルタを用いたオンボード姿勢決定処理は行われず、地上姿勢決定処理によって、ミッション観測データの処理に必要な観測方向を決定していた。ただ、地上での処理であったため、逆に大胆な処理方法を採用しており、その後の衛星のオンボード姿勢決定処理の骨格部分はほぼここで確立されたといっても過言ではない。また、STTが蝕状態から明けて星を再捕捉する直前は、IRU

のドリフトレート補正誤差による姿勢伝播誤差が大きく蓄積しているが、当時すでに時間軸を逆方向に姿勢伝播し、この誤差を小さくする手法も採用している。これらの意味で、その後の衛星のオンボード姿勢決定系および地上姿勢決定系に対する「ぎんが」の地上姿勢決定系の貢献度は極めて大きいと云える。

「ぎんが」に続く三軸安定衛星として1991年8月に太陽観測衛星「ようこう」が打ち上げられたが、この衛星では、

- 「ぎんが」における飛翔データ処理の実績を積み上げたこと、
- 宇宙用16ビットMPUの開発によりACEの演算処理能力が向上したこと、

等の理由により、オンボード姿勢決定処理が始めて導入されている。そして、IRUによる姿勢伝播、カノープスを撮像対象とするSTTや高精度二次元太陽センサ(TFSS)による姿勢検出により、本格的なストラップダウン型姿勢決定系を実現した。特徴的なこととしては、

- デジタルフィルタによるジャイロ雑音除去を採用していること、
- カルマンフィルタの離散的処理サイクルと同期するタイミングで姿勢センサの観測を行い、時刻ずれの影響による姿勢決定精度の劣化を抑制するために、ACEから各姿勢センサへ撮像タイミング信号を出力していること、
- 計算処理負荷軽減のために、定常カルマンフィルタのカルマンゲインをフィルタの収束段階に応じて多段階に切り替える多段階定常カルマンフィルタの導入を図ったこと、

などがある。但し、「ようこう」では、

- 観測方向を太陽指向させるため、TFSSが出力する2軸方向の姿勢検出がそのまま姿勢決定の2軸方向と一致していたこと、
- 観測軸まわりの姿勢は、STTを用いて検出するが、他の2軸と比較して姿勢制御に対する要求が厳しくなかったこと、

等により、カルマンフィルタは3軸それぞれが独立に設計された。

1993年2月に打ち上げられたX線天文衛星「あすか」では、「ようこう」の成果をさらに引き継ぎ、完成度の高い姿勢決定系の導入を図った。異なる方向に視野を持つ2台のSTTによって姿勢検出を行っているが、このSTT自体も高精度化を図っている。また、衛星のとり得る姿勢自体も自由度を上げているため、大角度姿勢マヌーバ中(これはIRUのみによる)および直後を含む姿勢決定を可能としている。特徴的なこととしては、

- 太陽暦に基づいて太陽の方向を逐次、機上で計算していること、
- 全天の星を観測対象とするため、機上に必要なスターカタログを持たせて適宜アップロードしていること、

などが挙げられる。

1997年2月に打ち上げられた「はるか」では、これまでの衛星における精密姿勢決定の経験をさらに活かした改良が盛り込まれている。姿勢センサの構成は、「あすか」と基本的に同一であるが、大きく改良されている点は、カルマンフィルタの実用的な利用技術として、パーティクルイベント等のノイズにより誤ってSTTから出力される偽の星の除去を詳細に行っていることである。「あすか」では、このような誤った

星に対するロバスト性が弱く、このため、機上姿勢決定値が影響を受けるため、打ち上げ後にパラメータチューニングを行う必要があった。「はるか」では、この部分を大きく改良し、誤った星で姿勢更新を行うことがないように、実用的に十分なロバスト性を持たせている。

2000年に打ち上げが予定されている ASTRO-E では、観測ミッションの姿勢系に対する性能および運用要求が「あすか」とほぼ同じである。従って、姿勢決定系は、「あすか」と同じ構成を基本として、「はるか」で構築した技術の反映を図る予定である。

慣性空間の一定方向を指向するこれまでの三軸安定型天文衛星と異なり、2003年度に打ち上げが予定されている ASTRO-F では、軌道レートで衛星が回転する状態で観測ミッションが行われる。このため、その姿勢決定系の開発においては、以下の考慮が必要となる。

- カルマンフィルタでは、IRU 出力にもとづいて厳密な姿勢伝播を行うと同時に、姿勢更新を行う際の時刻管理を厳密に行う。
- 2 台の STT では、衛星が回転することにより視野内を移動する星を逐次、軌道上で自律的に同定しながら捕捉・追尾を行う。
- IRU を校正するジャイロ (4 台の FRIG = Floated Rate Integrating Gyroscopes および、1 台 [直交 2 軸まわり角速度検出] の TDG = Tuned Dry Gyroscope) には、常に軌道レートが入力されることになるため、これらを考慮したドリフトレートの推定やスケールファクタの取り扱いが必要となる。

以上、これまでの三軸安定型天文観測用科学衛星における姿勢決定系の開発経緯を表 1-1 にまとめる。

2. 姿勢決定系におけるカルマンフィルタのアルゴリズム

ここでは、付録 A で与えるカルマンフィルタの一般的なアルゴリズムを基本として、衛星の姿勢決定系に用いられるカルマンフィルタのアルゴリズムを示す。宇宙科学研究所におけるこれまでの天文観測用科学衛星の姿勢決定系カルマンフィルタでは、状態方程式を構成する運動方程式の代わりに IRU で検出される角速度を用いて、三軸ストラップダウン型姿勢決定アルゴリズムを構築している。また、衛星の姿勢を表現する方法としては、一般的には、方向余弦行列、オイラー角、オイラーパラメータなどがあるが、ここでは、オイラーパラメータに基づいた姿勢の表現方法を採用して姿勢決定系を構成している。オイラーパラメータに含まれる 4 つの要素は互いに独立でないため、それに対する誤差共分散行列には特異性が存在することになる。これに対しては、機体座標系における微小オイラーパラメータを状態変数として採用することで状態ベクトルおよび誤差共分散行列の次数を減らし、この問題を回避している。

姿勢決定系におけるカルマンフィルタには、非線形な離散系に対してカルマンフィルタを適用する必要がある。これは、姿勢運動を記述する運動学的方程式がオイラーパラメータに関して非線形であること、および、センサによる観測量が離散的にしか得られないためである。姿勢決定系におけるカルマンフィルタが、一般的な非線形カルマンフィルタの定式化と大きく異なる点は、オイラーパラメータのリファレンス値と微小量とが線形で結合されるのではなく、両者の積として結合されることである [付録参照]。従って、リファレンス値まわりの微小量に関して線形化されたシステム方程式も、この点を考慮して構築される必要がある。

以下では、姿勢決定系カルマンフィルタにおける IRU の扱い、および、オイラーパラメータの適用方法を説明した後、姿勢決定系カルマンフィルタの具体的なアルゴリズムをカルマンフィルタの一般的定式化と対比させながら紹介する。

なお、本章におけるオイラーパラメータの諸性質ならびにその表記方法は、付録 B および付録 C を参照されたい。

表 1-1 これまでの三軸安定型天文観測用科学衛星における姿勢決定系の開発

対象衛星	姿勢センサ	姿勢決定系の特徴	備考
ぎんが 1987.2	NSAS × 1 STT × 2 IRU × 1 (4 軸分)	<ul style="list-style-type: none"> 科学衛星で始めて精密姿勢決定系を導入 (地上処理) 精度向上のため時間に対して逆行する姿勢伝播を実施 共分散行列の伝播は 3 軸カップルさせて処理 共分散行列の更新は 3 軸カップルさせて処理 様々なアルゴリズムを採用し精密姿勢決定系の難型として実績を蓄積 	機上での処理でなく、地上姿勢決定系にて左記処理を実施した。
ようこう 1991.8	NSAS × 1 TFSS × 1 STT × 1 IRU × 1 (4 軸分)	<ul style="list-style-type: none"> 科学衛星で始めてオンボード精密姿勢決定系を導入 ジャイロ信号にデジタルフィルタ処理を導入 姿勢センサの時刻同期検出を実施 時変係数カルマンフィルタを導入 伝播, 更新とも各軸独立な処理を実施 2[sec](X,Y 軸), 32[sec](Z 軸) のマルチレート処理を実施 	
あすか 1993.2	NSAS × 1 STT × 2 IRU × 2 (5 軸分)	<ul style="list-style-type: none"> 大角度マヌーバ時を含むオンボード精密姿勢決定系を導入 2 台の恒星センサ出力をオンボードで処理 (スターカタログの搭載) 慣性系における姿勢決定結果を姿勢制御に反映 (目標姿勢の赤道面座標系での表現を採用) 共分散行列の伝播は 3 軸独立に実施 共分散行列の更新は 3 軸カップルさせて実施 	2 台の恒星センサに対するスターカタログは処理対象のみを登録し、オンボードでの星同定は実施せず
はるか 1997.2	NSAS × 1 STT × 2 IRU × 2 (4 軸分)	<ul style="list-style-type: none"> 恒星センサの誤出力に対する耐性を強化 共分散行列の伝播は 3 軸独立に実施 共分散行列の更新は 3 軸カップルさせて実施 	
ASTRO-E (2000.2)	NSAS × 1 STT × 2 IRU × 2 (5 軸分)	<ul style="list-style-type: none"> 基本的に “あすか” と同じ 但し, 恒星センサの観測の高速化・恒星センサ出力に対する星同定機能を実施予定 	
ASTRO-F (2003.2)	TFSS × 1 STT × 2 IRU × 2 (5 軸分)	<ul style="list-style-type: none"> 軌道レートを考慮して姿勢決定アルゴリズムを構築 恒星センサの視野内を流れる星に対して追尾し姿勢決定を実施予定 恒星センサの出力に対して自律星同定を実施予定 	

2.1 三軸ストラップダウン姿勢決定系における IRU の扱い

ここでは、衛星における三軸ストラップダウン姿勢決定系を構成する場合の IRU の取り扱いについて示す。三軸ストラップダウン姿勢決定系では、衛星に固定された座標系における三軸方向の角速度を計測する IRU により姿勢を伝播している。さらに、姿勢を伝播する IRU に加えて、姿勢の更新を行う姿勢センサ (恒星センサ, 太陽センサ, 地球センサ等) を用いるのが一般的であり、これらの慣性センサと光学的センサの情報を取り入れてカルマンフィルタが構成される。

カルマンフィルタにおける基本的な状態方程式は、運動学的方程式(kinematics)や運動方程式(dynamics)から構成される。この場合、状態方程式を正確に記述することがカルマンフィルタの推定精度を大きく左右することになる。しかし、環境外乱などの様に正確に予測できない外力が作用する場合や、衛星内部の機器が発生する内部擾乱要素などのモデル化が困難な擾乱が存在する場合には、これらの要素を取り入れて正確な運動方程式を記述することは、非常に困難である。また、衛星に取り付けられた柔軟構造物や可動物体のために、衛星の運動方程式そのものの正確なモデル化が困難である場合もある。さらに、推進剤の消費にともない、衛星の質量特性が時間的に変化する場合には、運動方程式の正確な記述の困難さに加え

て、運動方程式に含まれるパラメータを質量特性の変化に併せて変化させなければならないという実用上の困難さも存在する。

一方、IRUを搭載する場合には、角速度が直接計測されるため、外乱等の影響を考慮することなく直接的に姿勢の運動を検出することができる。従って、IRUを用いる三軸ストラップダウン姿勢決定系では、IRUで計測される角速度を運動学的方程式の中で用いることにより運動方程式の代替とし、力学的運動方程式に依存しない状態方程式を採用している。

ところが、一般的にIRUにはジャイロドリフトが存在し、その結果、IRUが計測する角速度にはバイアスレートが存在することになる。姿勢決定を行うためには、衛星の姿勢に加えて、このバイアスレートをカルマンフィルタによって同時に推定する必要がある。従って、状態変数としては、姿勢角を記述する変数の他にIRUに含まれるバイアスレートを加えたものを採用している。従って、状態方程式は、衛星姿勢の運動学的方程式と、ジャイロのバイアスレートの数学モデルとから構成されるものを採用している。このようにして構成された状態方程式では、ジャイロによって計測された角速度は観測量として観測方程式の中で扱うのではなく、状態方程式における入力として扱っている。これと同様に、ジャイロのバイアスレート誤差は観測ノイズとして扱うのではなく、状態方程式におけるシステムノイズとして扱われることになる。

2.2 姿勢決定系におけるオイラーパラメータの採用

衛星の姿勢を表現する方法には、オイラー角、オイラーパラメータ、または、それらによって計算される姿勢変換行列(=方向余弦行列)などがあるが、衛星の姿勢決定系ではオイラーパラメータによる姿勢の記述が広く用いられている。その理由は以下の通りである。

- 4つの変数により姿勢を記述するオイラーパラメータを用いると運動学的方程式に特異性が存在しない。(これに対して、3つの変数により姿勢を記述するオイラー角を用いると特異性が存在する。)
- 運動学的方程式がオイラーパラメータに対して線形で扱える。(これに対して、オイラー角による運動学的方程式は、 \sin , \cos 等の超越関数を用いて記述されており、オイラー角に対して線形ではない。)
- 運動学的方程式を積分して得られる状態遷移行列がオイラーパラメータによって代数的に表現されている。(これに対して、オイラー角による状態遷移行列は三角関数等の超越関数を使用して表現される。)

オイラーパラメータを採用して姿勢決定系でカルマンフィルタを構成する場合にも上記の利点があるため、定式化の面で扱いやすくなる。

姿勢決定系カルマンフィルタのアルゴリズムには、非線形・離散系カルマンフィルタを適用する必要がある。これは、姿勢の運動学的方程式ならびに観測方程式が非線形であること、および、姿勢センサによる観測量が離散的にしか得られないためである。非線形システムに対しては、リファレンス値まわりに展開された微小量状態ベクトルに対してカルマンフィルタを適用する。ところが、オイラーパラメータを状態変数として採用した場合には、一般的なカルマンフィルタの定式化と大きく異なる点がある。それは、リファレンス値と微小量とが線形和で扱われるのではなく、両者の積として扱われる点である。従って、リファレンス値まわりの線形化はこの点を考慮して行われなければならない。

一方、オイラーパラメータは、その4つの要素が互いに独立ではなく、それらの二乗和が1であるという拘束条件が存在する。このため、オイラーパラメータを状態変数とした場合の誤差共分散行列は、特異性を有することになる。Leffertsらは、この特異性を回避するためのアルゴリズムを3種紹介している[1]。

1番目のアルゴリズムは、誤差共分散を縮退させるものである。このアルゴリズムでは、姿勢決定系のカルマンフィルタの状態ベクトルは、オイラーパラメータの4つの要素と、IRUバイアスレートの3つの要素から構成される。従って、この状態ベクトルに対する誤差共分散行列は、 7×7 の次元を有している。し

かし、この行列を伝播/更新するのでなく、その時点におけるオイラーパラメータで規定される座標変換行列により、 6×6 の行列に変換し、その上で伝播/更新を行っている。これにより、誤差共分散の特異性を避けている。

2番目のアルゴリズムは、オイラーパラメータの1つの要素を消去するものである。即ち、オイラーパラメータの拘束条件を反映して、状態ベクトルそのものの次元を6次元で扱い、これに対応する誤差共分散行列も 6×6 として扱っているものである。これにより、誤差共分散行列の特異性を避けている。

3番目のアルゴリズムは、機体座標系における微小オイラーパラメータを推定するものである。微小オイラーパラメータでは、第4番目の要素であるスカラー成分がほとんど1であるため、その他の3つの成分から構成されるベクトル成分のみを状態ベクトルに組み入れている。従って、状態ベクトルは、これらの3つの要素と、IRUバイアスレート ω の3つの要素により構成され、6次元のベクトルとなっている。これに対応する誤差共分散行列は 6×6 であり、これにより、特異性を避けている。

上記の3種のアルゴリズムを比較すると、システム方程式の表現の簡潔さ、アルゴリズムの簡単さ、計算処理の負荷、の観点から第3番目のアルゴリズムが最も優れているものと判断できる。

以上の理由により、以下では、第3番目のアルゴリズムを採用して、その定式化を紹介する。

2.3 状態変数

姿勢決定系カルマンフィルタにおける状態変数を、カルマンフィルタで用いられる一般状態変数と対比させて表2-1に示す。表中、'(プライム)のついている量は、リファレンス値近傍の微小量を示す。また、 ω_{IRU} は、IRUが出力する角速度、 b は、IRUのバイアスレートである。基本的に、状態変数としては、 q と b と

表 2-1 状態変数

一般式	姿勢決定系
$X = X_{ref} + x$ <p> X : 状態変数 X_{ref} : 状態変数のリファレンス値 x : リファレンス値まわりの微小量 </p>	<p>[状態変数]</p> $X = \begin{bmatrix} q \\ b \end{bmatrix} \quad (\in \mathcal{R}^7)$ <p>[状態変数のリファレンス値]</p> $X_{ref} = \begin{bmatrix} q_{ref} \\ b_{ref} \end{bmatrix} \quad (\in \mathcal{R}^7)$ <p>[リファレンス値まわりの微小量]</p> $x = \begin{bmatrix} q'_v \\ b' \end{bmatrix} \quad (\in \mathcal{R}^6)$ <p>(微小量に関してのみ6次元の次数とする。)</p> <p>[線形化の定義]</p> $q = q_{ref} q'$ $b = b_{ref} + b'$ <p>ここに、</p> $q' = \begin{bmatrix} q'_v \\ q'_4 \end{bmatrix} \quad (q'_4 \simeq 1)$ $\omega = \omega_{ref} + \omega'$ <p>(補足)</p> $\begin{aligned} \omega &= \omega_{IRU} - b \\ &= \underbrace{\omega_{IRU} - b_{ref}}_{\omega_{ref}} - \underbrace{b'}_{\omega'} \\ \omega_{ref} &= \omega_{IRU} - b_{ref} \\ \omega' &= -b' \end{aligned}$

で構成される 7 次元のベクトルを採用する。

線形化を行う際に、一般式では、推定すべき状態量がリファレンス値とそのまわりの微小量との線形和として扱われているのに対して、姿勢決定系では、オイラーパラメータで表される部分については、両者の積として扱われている。また、その他の量については、一般式と同様に、両者の和として扱われている。

オイラーパラメータの微小量 q' は、そのスカラー成分である q'_4 がほとんど 1 に等しい。このため、オイラーパラメータの微小量のベクトル成分 q'_v のみを微小量に対する状態変数に取り込み、IRU バイアスレートの微小量とを合せた 6 次元の状態ベクトルとして定義している。一方、リファレンス値に相当する q_{ref} は、4 つの要素を有する通常のオイラーパラメータとして扱われている。従って、微小量の推定値をリファレンス値の推定値に反映して状態変数の推定値を計算する際には、 $q'_4 \simeq 1$ として微小量の次数を調整する必要がある。

なお、表中には、 ω に関する線形化の定義も併せて示してある。これは、リファレンスに対する状態方程式やリファレンス近傍での微小量に対する状態方程式を記述する際に必要となるものである。前述のとおり、IRU を用いたストラップダウン姿勢決定系では、物理的運動方程式の代わりに (IRU により計測される) 角速度をパラメータとした運動学的方程式を用いている。そして、姿勢角速度の推定値は、IRU で検出された姿勢角速度 ω_{IRU} からカルマンフィルタで推定されたバイアスレート \hat{b} を引くことにより計算している。

2.4 状態方程式

姿勢決定系カルマンフィルタにおける状態方程式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-2 に示す。ここで、 η_1 は、IRU の出力に含まれる白色ノイズであり、等価的にバイアスレートに加算される白

表 2-2 状態方程式

一般式	姿勢決定系
$\dot{X} = f(X, u, t) + g_w(X, t) w$	$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\omega) q = \frac{1}{2} q \omega$ $\dot{b} = -\frac{1}{\tau_b} b + \eta_2$ $\omega = \omega_{\text{IRU}} - b - \eta_1$
	<p>以上より、</p> $\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{b} \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} q (\omega_{\text{IRU}} - b) \\ -\frac{1}{\tau_b} b \end{bmatrix}}_{f(X(t), u(t), t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} q \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}}_{g_w(X(t), t) w(t)}$ <p>ここに、</p> $q \omega \equiv \Omega(\omega) q$ $\Omega(\omega) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix}$ $q b \equiv \Xi(q) b$ $\Xi(q) \equiv \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}$

色ノイズとして扱っている。また、 η_2 は、IRU のバイアスレートランダムウォークを励起するノイズである。すなわち、バイアスレート b の数学モデルとして、時定数 τ_b の ECRV (Exponentially Correlated Random Variable) を想定している。この場合 τ_b は、 b の変化速度を規定する時定数となる。

表中から明らかとおり、 q および b を状態変数とする場合には、状態方程式は非線形となる。なお、前述のとおり、衛星の運動方程式の代わりに IRU 出力を用いているため、衛星の姿勢角速度 ω は、IRU で検出された姿勢角速度 ω_{IRU} からジャイロバイアスレート推定値 \hat{b} を引くことにより計算する。

2.5 観測方程式

姿勢決定系の観測方程式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-3 に示す。衛星に搭載された姿勢センサでは、センサ座標系に対する特定の天体 (恒星、太陽、地球、月など) の方向ベクトル p_s に基づいて規定される観測ベクトルを計測する。この特定の天体については、一般に、基準座標系 (一般には慣性系) に対する方向ベクトル p_R が既知である。この方向ベクトル p_R を、衛星の姿勢を表すオイラーパラメータによる座標変換行列 $T(q)$ 、および衛星座標系からセンサ座標系への座標変換行列 T_M によって順次、座標変換することにより、センサ座標系に対する特定天体の方向ベクトル $p_s(q)$ が計算できる。観測モデルとしては、この $p_s(q)$ を変数とする関数 $h(p_s(q))$ を採用している。従って、観測方程式は、センサ観測値 Y に対して、表 2-3 に示すとおり記述できる。ここで、 v は、観測値に含まれる観測ノイズである。

表 2-3 観測方程式

一般式	姿勢決定系
$Y = h(X) + v$	$Y = h(p_s(q)) + v$ $p_s(q) = T_M T(q) p_R$ <p>p_R : 基準座標系における方向ベクトル</p> <p>p_s : センサ座標系における方向ベクトル</p> <p>$T(q)$: 基準座標系から衛星座標系への座標変換行列</p> <p>T_M : 衛星座標系からセンサ座標系への座標変換行列</p>

2.6 リファレンス値に対する状態方程式

リファレンス値に対する姿勢決定系の状態方程式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-4 に示す。リファレンス値は、非線形システムにおいて状態変数の微小量を展開する時の基準となる値であり、それ自体には、元の状態方程式と同一の状態方程式が適用される。但し、システムノイズの影響は、すべて

表 2-4 リファレンス値に対する状態方程式

一般式	姿勢決定系
$\dot{X}_{\text{ref}} = f(X_{\text{ref}})$	$\dot{q}_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \Omega(\omega_{\text{ref}}) q_{\text{ref}} = \frac{1}{2} q_{\text{ref}} \omega_{\text{ref}}$ $\dot{b}_{\text{ref}} = -\frac{1}{\tau_b} b_{\text{ref}}$ $\omega_{\text{ref}} = \omega_{\text{IRU}} - b_{\text{ref}}$

微小量に対する状態方程式で扱うため、リファレンス値に対する状態方程式の中には含めない。

2.7 リファレンス値に対する観測方程式

リファレンス値に対する姿勢決定系の観測方程式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-5 に示す。リファレンス値は、非線形システムにおいて状態変数の微小量を展開する時の基準となる値であり、それ自体には、元の観測方程式と同一の観測方程式が適用される。但し、観測ノイズの影響は、すべて微小量に対する観測方程式で扱うため、リファレンス値に対する観測方程式の中には含めない。

表 2-5 リファレンス値に対する観測方程式

一般式	姿勢決定系
$Y_{\text{ref}}(t) = h(X_{\text{ref}}(t))$	$Y_{\text{ref}} = h(p_S(q_{\text{ref}}))$ $p_S(q_{\text{ref}}) = T_M T(q_{\text{ref}}) p_R$

2.8 リファレンス近傍での微小量に対する状態方程式

姿勢決定系のリファレンス値近傍での微小量に対する状態方程式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-6 に示す。微小量に対する状態方程式は、オイラーパラメータの微小量のベクトル成分に対する状態方程式と、IRU バイアスレート微小量に対する状態方程式とにより構成される。このうち、前者の導出については、付録 C を参照されたい。また、後者は、 b に対して線形の関係があるため、もとの状態方程式と同じ式を適用している。なお、 $\Upsilon(\omega_{\text{ref}})$ の定義は、式 (B.21) と同じである。

表 2-6 リファレンス近傍での微小量に対する状態方程式

一般式	姿勢決定系
$\dot{x} = Ax + B_w w$ $A = \frac{\partial}{\partial X} f(X(t), u(t), t) \Big _{X=X_{\text{ref}}}$ $B_w = g_w(X_{\text{ref}}, t)$	$\begin{aligned} \dot{q}'_v &= -\omega_{\text{ref}} \times q'_v + \frac{1}{2} \omega' \\ &= \Upsilon(\omega_{\text{ref}}) q'_v - \frac{1}{2} I_{3 \times 3} b' - \frac{1}{2} I_{3 \times 3} \eta_1 \\ \dot{b}' &= -\frac{1}{\tau_b} b' + \eta_2 \end{aligned}$ <p>以上より、</p> $\dot{x} = Ax + B_w w$ <p>ここに、</p> $A = \left[\begin{array}{c c} \Upsilon(\omega_{\text{ref}}) & -\frac{1}{2} I_{3 \times 3} \\ \hline O_{3 \times 3} & -\frac{1}{\tau_b} I_{3 \times 3} \end{array} \right] \quad (\in \mathcal{R}^{6 \times 6})$ $B_w = \left[\begin{array}{c c} -\frac{1}{2} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ \hline O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{array} \right] \quad (\in \mathcal{R}^{6 \times 6})$ $x = \begin{bmatrix} q'_v \\ b' \end{bmatrix} \quad (\in \mathcal{R}^6)$ $w = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (\in \mathcal{R}^6)$

2.9 リファレンス値近傍での微小量に対する観測方程式

姿勢決定系のリファレンス値近傍での微小量に対する観測方程式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-7 に示す。一般式と同様、観測量の微小量 y は、実際の観測値 Y と観測モデルにリファレンス状態量を代入して得られる Y_{ref} との差として計算される。また、 H は、観測モデル $h(q)$ を q_v で偏微分した行列と $O_{m \times 3}$ との列結合で与えられる。

表 2-7 リファレンス値近傍での微小量に対する観測方程式

一般式	姿勢決定系
$y = Hx + v$ $y = Y - Y_{\text{ref}} = Y - h(X_{\text{ref}})$ $H = \frac{\partial h}{\partial X}(X, t) _{X=X_{\text{ref}}}$	$y = Hx + v$ <p>ここに、</p> $y = Y - Y_{\text{ref}} = Y - h(p_S(q_{\text{ref}}))$ $p_S(q_{\text{ref}}) = T_M T(q_{\text{ref}}) p_R$ $H = \left[\frac{\partial h}{\partial p_S} \frac{\partial p_S}{\partial q_v} \mid O_{m \times 3} \right] _{q=q_{\text{ref}}} \quad (\in \mathcal{R}^{m \times 6})$ $x = \begin{bmatrix} q_v' \\ b' \end{bmatrix} \quad (\in \mathcal{R}^6)$ <p>また、ベクトルのベクトルによる偏微分は、以下の通り定義される。</p> $\frac{\partial h}{\partial p_S} = \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial p_{s,1} & \partial h_1 / \partial p_{s,2} & \partial h_1 / \partial p_{s,3} \\ \partial h_2 / \partial p_{s,1} & \partial h_2 / \partial p_{s,2} & \partial h_2 / \partial p_{s,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial h_m / \partial p_{s,1} & \partial h_m / \partial p_{s,2} & \partial h_m / \partial p_{s,3} \end{bmatrix}$ $\frac{\partial p_S}{\partial q_v} = \begin{bmatrix} \partial p_{s,1} / \partial q_1 & \partial p_{s,1} / \partial q_2 & \partial p_{s,1} / \partial q_3 \\ \partial p_{s,2} / \partial q_1 & \partial p_{s,2} / \partial q_2 & \partial p_{s,2} / \partial q_3 \\ \partial p_{s,3} / \partial q_1 & \partial p_{s,3} / \partial q_2 & \partial p_{s,3} / \partial q_3 \end{bmatrix}$

2.10 状態変数の伝播

本章におけるこれまでの記述では、状態方程式および観測方程式に対して連続系の式を用いてきた。この理由の1つは、実際の衛星の運動は連続系として表されるためである。ところが、カルマンフィルタの処理は計算機で行うため、連続系の微分方程式を数値積分等によりそのまま扱うよりも、これらを積分して得られる離散系の式を適用する方が計算機負荷の観点で有利である。よって、本章におけるこれ以降の記述では、離散系による式を用い、計算機で処理を行うアルゴリズムとして定式化する。

姿勢決定系の状態変数の伝播式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-8 に示す。オイラーパラメータの伝播値 \hat{q}_{t+1} は、1 サイクル前の推定値 \hat{q}_t を用いて伝播することができる。この際の状態遷移行列は、IRU の出力 ω_{ref} からバイアスレートの推定値 \hat{b} を差し引いた値を数値積分することにより計算することができる。また、バイアスレートの伝播値は、1 サイクル前の推定値 \hat{b} に 1 以下の一定の係数 $\exp(-\Delta t / \tau_b)$ をかけたものとして単純に計算することができる。なお、 τ_b は、バイアスレートの推定値の変化の度合いを規定する時定数であり、実際の IRU バイアスレートの変化の度合いや、バイアスレートの推定精度に応じて決められるパラメータである。

姿勢決定系のカルマンフィルタでは、アルゴリズムの簡素化のため、一般にリセット型のカルマンフィルタ [表 A-9 参照] を適用している。このため、微小量に対する伝播の初期値は、すべて 0 とすることになる。したがって、伝播後の微小量の値も 0 となる（ので伝播の必要はない）。ただ、オイラーパラメータに関しては、そのベクトル部分についてのみ $q_v' = 0$ としているため、これに対応するオイラーパラメータ

q' は、表中に示すとおり、すべての要素が 0 になっている訳ではないので、この点に関して注意を要する。

仮に微小量に関して伝播時のリセットを行わない場合には、2.8 節で定式化した微小量に対する状態方程式を積分して離散化を行った上で、アルゴリズムに組み込む必要がある。以下では、リセット型のみを採用しているため、この場合の詳細な定式化を省略する。

表 2-8 状態変数の伝播（時間更新）－リセットあり

一般式	姿勢決定系
$\bar{X}_{t+1} = \phi(\bar{X}_t, u_t, t)$ $\bar{x}_{t+1} = 0$	<p>連続系での状態方程式は、</p> $\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \Omega(\dot{\omega}) \bar{q}$ $\dot{\bar{b}} = -\frac{1}{\tau_b} \bar{b}$ <p>以上より、離散系での状態方程式は、</p> $\bar{q}_{t+1} = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \Omega(\omega(\tau)) d\tau\right\} \bar{q}_t$ $\bar{b}_{t+1} = \exp\left\{-\frac{1}{\tau_b} \Delta t\right\} \bar{b}_t$ $\bar{q}'_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \text{ or, } \bar{q}'_{v,t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\bar{b}'_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.11 共分散行列の伝播

姿勢決定系の共分散行列の伝播式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-9 に示す。

微小量に対する状態遷移行列等のシステム行列 (F_t , $G_{w,t}$ 等) を計算するには、離散系の伝播式を状態変数で偏微分するか、連続系のシステム行列 (A , B_w) を用いて積分するかの 2 つの方法がある。ここでは、離散系の伝播式が解析的に記述できないため、後者を採用し、表中にはそのアルゴリズムを記述している。 F_t および $G_{w,t}$ は、 $\dot{\omega}$ の関数である。従って、これらの行列は、IRU の出力値 ω_{IRU} およびそのときのバイアスレート推定値 \hat{b} を用いて、伝播の処理リサイクルごとに計算し直す必要がある。

表 2-9 共分散行列の伝播

一般式	姿勢決定系
$\bar{P}_{t+1} = F_t \bar{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$	$\bar{P}_{t+1} = F_t \bar{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$ <p>F_t および $G_{w,t}$ は、以下で計算</p> $F_t = \exp\{A \Delta t\} F_{t-1}$ <p>($\dot{F}_t = A F_t$ の積分型)</p> $G_{w,t} = \left[\int_0^{\Delta t} \exp\{A(t-\tau)\} d\tau \right] B_w$ $A = \begin{bmatrix} \Upsilon(\dot{\omega}) & \frac{1}{2} I_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & -\frac{1}{\tau_b} I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ $B_w = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$

2.12 観測更新 (リセット型)

姿勢決定系の観測更新式を、カルマンフィルタの一般式と対比させて表 2-10 に示す。状態量の観測更新および誤差共分散行列の観測更新は、計算処理上、同時に処理する方が効率的であるため、表中には両者を併記している。従って、表中の処理を上から下に向かって順次行うことにより、観測更新による推定値 \hat{q}_t , \hat{b}_t , $\hat{\omega}_t$ を得ることができる。なお、観測値が得られなかった場合には、これらの処理を行わず、伝播値 \bar{q}_t , \bar{b}_t , $\bar{\omega}_t$ をそのまま推定値として扱い、次の伝播処理サイクルの入力とする。

表 2-10 観測更新

一般式	姿勢決定系
$y_t = Y_t - h(\bar{X}_{t,t})$	$y_t = Y_t - h(p_S(\bar{q}_t))$
$H_t = \frac{\partial h}{\partial X} _{X=\bar{X}_t}$	$(p_S(\bar{q}_t) = T_M T(\bar{q}_t) p_R)$
$R_t = R(\bar{X}_t)$	$H_t = \left[\frac{\partial h}{\partial q_v} _{q_v=\bar{q}_{v,t}} \mid O_{m \times 3} \right]$
$K_t = \bar{P} H_t^T [H_t \bar{P} H_t^T + R_t]^{-1}$	$\left(\frac{\partial h}{\partial q_v} _{q_v=\bar{q}_v} = \frac{\partial h}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial q_v} _{q_v=\bar{q}_{v,t}} \right)$
$\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$	$R_t = E[vv^T] \delta_{t,t'}$
$\hat{x} = K_t y_t$	$K_t = \bar{P}_t H_t^T [H_t \bar{P}_t H_t^T + R_t]^{-1}$
$\hat{X}_t = \bar{X}_t + \hat{x}_t$	$\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$
	$\begin{bmatrix} \hat{q}'_{v,t} \\ \hat{b}'_t \end{bmatrix} = K_t y_t$
	$\hat{q}'_t = \begin{bmatrix} \hat{q}'_{v,t} \\ 1 - \hat{q}'_{v,t} \hat{q}'_{v,t} \end{bmatrix}$
	$\hat{q}_t = \bar{q}_t \hat{q}'_t$
	$\hat{b}_t = \bar{b}_t + \hat{b}'_t$
	$\hat{\omega}_t = \omega_{IRU,t} - \hat{b}_t$

2.13 姿勢決定系カルマンフィルタの処理構成図

本章の最後に、これまで示してきた姿勢決定系カルマンフィルタ (リセット型) の処理フローを表 2-11 に、全体構成図を図 2-1 に示す。

3. 姿勢決定系の性能解析

本章では、姿勢決定系におけるカルマンフィルタの性能解析方法について記述する。ここで示す性能解析では、システム方程式を無次元化することにより、システムノイズや観測ノイズの大きさの違いに対して一般的に取り扱えるようにしている。また、連続系システムと離散系システムとの両方について性能解析を示しており、両者の対応、とりわけ、システムノイズ、観測ノイズの取り扱いの関係が明確になるようにしている。また、ここで扱っている姿勢決定系は 1 次元の場合を対象としているが、その性能解析結果として得られる特徴は、そのまま通常の 3 次元の姿勢決定系にも適用できる。なぜなら、ストラップダウン姿勢決定系では、機体座標系においてシステムノイズおよび観測ノイズが記述されているため、それらが衛星の姿勢によって変化しない限り、衛星の各軸に投影されたシステムノイズ・観測ノイズも変化しないか

表 2-11 姿勢決定系カルマンフィルタ処理フロー (リセット型)

時刻	処理	入力	出力	アルゴリズム
$t = 0$	初期値設定			$\bar{q}_0 = q_0, \bar{b}_0 = b_0$ または 0 $\hat{q}'_{v,t} = 0, \hat{b}' = 0, Y_0 \leftarrow$ 観測値, $\bar{P}_0 = P_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$t - 1$		\vdots	\vdots	$\bar{P}_t = \dots, \bar{q}_{v,t} = \dots, \bar{q}_t = \dots$
t	観測更新	\bar{q}_t Y_t \bar{P}_t \hat{q}'_t	\hat{P}_t \hat{q}'_t	$y_t = Y_t - h(p_S(\bar{q}_t))$ $(p_S(\bar{q}_t) = T_M T(\bar{q}_t) p_R)$ $H_t = \left[\frac{\partial h}{\partial q} \Big _{q=\bar{q}_t} \mid 0_{m \times 3} \right]$ $\left(\frac{\partial h}{\partial q} \Big _{q=\bar{q}} = \frac{\partial h}{\partial p_S} \frac{\partial p_S}{\partial q_v} \Big _{q=\bar{q}_t} \right)$ $R_t = R(\bar{q}_t, t)$ $K_t = \bar{P}_t H_t^T [H_t \bar{P}_t H_t^T + R_t]^{-1}$ $\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$ $\begin{bmatrix} \hat{q}'_{v,t} \\ \hat{b}'_t \end{bmatrix} = K_t y_t, \hat{q}'_t = \begin{bmatrix} \hat{q}'_{v,t} \\ 1 - \hat{q}'_{v,t} \hat{q}'_{v,t} \end{bmatrix}$ $\hat{q}_t = \bar{q}_t \hat{q}'_t, \hat{b}_t = \bar{b}_t + \hat{b}'_t, \hat{\omega}_t = \omega_{IRU,t} - \hat{b}_t$
	時間更新		\hat{P}_t \hat{q}'_{t+1} \hat{b}'_{t+1}	$F_t = \exp\{A \Delta t\} F_{t-1}$ $G_{w,t} = \left[\int_0^t \exp\{A(t-\tau)\} d\tau \right] B_w$ $A = \begin{bmatrix} \Upsilon(\hat{\omega}) & \mid & \frac{1}{2} I_{3 \times 3} \\ \hline O_{3 \times 3} & \mid & -\frac{1}{\tau_b} I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ $B_w = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} I_{3 \times 3} & \mid & O_{3 \times 3} \\ \hline O_{3 \times 3} & \mid & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ $\hat{P}_{t+1} = F_t \hat{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$ $\hat{q}'_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ or, $\hat{q}'_{v,t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\hat{b}'_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\bar{q}_{t+1} = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \Omega(\omega(\tau)) d\tau \right\} \hat{q}_t$ $\bar{b}_{t+1} = \exp\left\{ -\frac{1}{\tau_b} \Delta t \right\} \hat{b}_t$
$t + 1$		\vdots	\vdots	\vdots

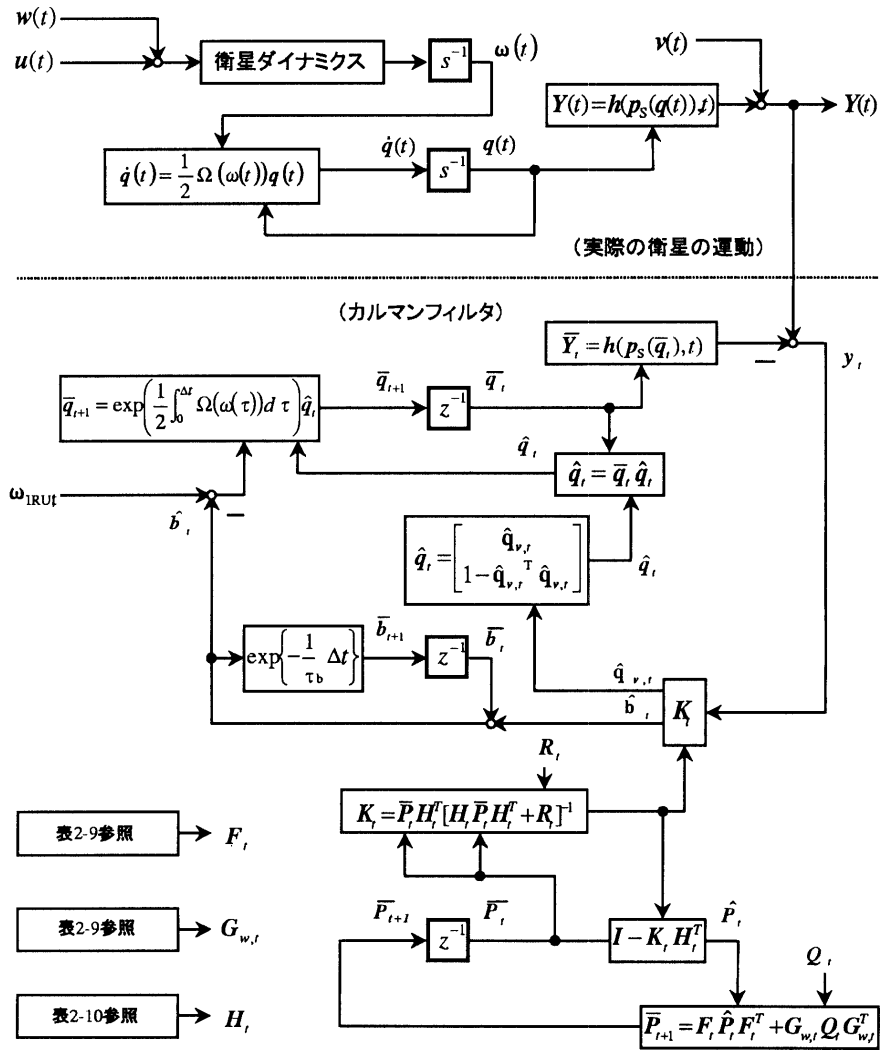


図 2-1 姿勢決定系カルマンフィルタの処理構成図

らである。3次元姿勢決定系の性能確認にはシミュレーションによる手法を用いる必要があるが、ここに示す性能解析手法は、姿勢決定系の設計段階におけるカルマンフィルタのパラメータチューニングの際に有効な手法となる。

姿勢決定系におけるカルマンフィルタの性能を規定する項目としては、以下のものがある。

- 定常状態における推定精度 (姿勢角推定精度, バイアスレート推定精度)
- 定常に至るまでの収束時間
- パラメータ変動に対するロバスト性

ここでは、最も単純な場合として、1次元の姿勢決定系についての性能解析手法を示すものとする。すなわち、1軸回りの姿勢角および1軸回りのIRUバイアスレートを状態変数とし、この姿勢を検出する1軸センサの出力を観測量として、1次元のストラップダウン型姿勢決定系を構成する。そして、このシステムに対してカルマンフィルタを適用するものとする。

本章の構成は次のとおりである。3.1では、上記の姿勢決定系を連続系として扱った場合のシステム方程式を示し、このシステム方程式に対してカルマンフィルタを適用した場合のアルゴリズムを示す。3.2では、上記で扱ったシステム方程式を無次元化し、システムノイズや観測ノイズに対して一般的に性能解析を行う手法を示す。次いで、3.3では、この無次元化されたシステムに対する推定精度を、3.4では、その収束時間を解析する。そして、3.5では、これらの性能解析結果を具体的事例をもとに説明する。上記と同様のことを、連続系を離散化した1次元の姿勢決定系のシステム方程式に対して行い、離散系と連続系との関連について示す(3.6,3.7)。

3.1 連続系の1次元モデルに対するシステム方程式

ここでは、連続系カルマンフィルタの性能解析を行うため、最も単純な場合として、状態変数が一軸まわりの姿勢角 $\theta(t)$ と IRU のバイアスレート $b(t)$ からなる1次元モデルを扱うものとする。即ち、状態変数として以下の式を採用する。

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ b(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

1次元モデルに対する状態方程式は、3次元モデルの状態方程式から一般的に導くことができる。まず、一軸まわりの姿勢に対するオイラーパラメータ、および姿勢角速度を以下で表すものとする。

$$q(t) = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \cos \frac{\theta(t)}{2} \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

これら変数を用いれば表 2-2 に示したシステム方程式は以下のように表される。

$$\dot{\theta}(t) = \omega_{\text{IRU}}(t) - b(t) - \eta_1(t) \quad (3.3)$$

$$\dot{b}(t) = -\alpha_b b(t) + \eta_2(t) \quad (3.4)$$

ただし、 τ_b をその逆数 α_b でおきかえている。すなわち、

$$\alpha_b \equiv \frac{1}{\tau_b} \quad (3.5)$$

ここに、 $\omega_{\text{IRU}}(t)$ は、IRU が出力する角速度、 $b(t)$ は IRU のバイアスレート、 η_1 は、IRU の出力ノイズ、 η_2 は、 b のランダムウォークを励起するノイズである。また、 α_b の逆数は、IRU バイアスレート $b(t)$ の変化速度を規定する一次ローパスフィルタの時定数に相当する。

一方、観測量としては、姿勢角 $\theta(t)$ が直接計測できるものとして、以下の観測方程式を想定する。

$$y(t) = \theta(t) + n(t) \quad (3.6)$$

ここに、 $n(t)$ は、観測ノイズである。式 (3.3)、(3.4) および (3.6) により、一次元における姿勢決定系のシステム方程式を構成する。

上記のシステム方程式をマトリクス表示で書き直すと以下のようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\alpha_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{\text{IRU}}(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

または、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3.10)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\alpha_b \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \omega_{\text{IRU}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n(t) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

3次元の一般的な姿勢決定系では非線形のカルマンフィルタを適用しなければならなかった。ところが、式 (3.3)、(3.4) および (3.6) からわかるとおり、一次元モデルにおけるシステム方程式は、状態変数に関して線形で扱うことができる。よって、この系に対しては、線形のカルマンフィルタを適用することができ、性能解析を行う上で定式化を単純化できるという利点がある。

上記のシステム方程式におけるシステムノイズおよび観測ノイズは、すべて白色雑音であることを想定している。それらの性質を以下で規定するものとする。

$$E[\eta_1(t)] = 0, \quad E[\eta_1(t)\eta_1(t')] = \sigma_v^2(t)\delta(t-t') \quad (3.19)$$

$$E[\eta_2(t)] = 0, \quad E[\eta_2(t)\eta_2(t')] = \sigma_u^2(t)\delta(t-t') \quad (3.20)$$

$$E[n(t)] = 0, \quad E[n(t)n(t')] = \sigma_n^2(t)\delta(t-t') \quad (3.21)$$

ここに、 $\delta(t-t')$ は連続系におけるデルタ関数であり、以下の関係式を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') dt = 1 \quad (3.22)$$

よって、 $\delta(t-t')$ は、時間の逆数の次元を有している。

$E[\cdot]$ は、時間に対する平均値を与える演算を示しており、この演算による次元の変化はない。また、 $\eta_1(t)$ 、 $\eta_2(t)$ 、 $n(t)$ は、システム方程式で規定される次元を有している。これらの次元を以下のとおりとする。

$$\begin{aligned} \eta_1(t) & \text{ [rad/sec]} \\ \eta_2(t) & \text{ [rad/sec}^2\text{]} \\ n(t) & \text{ [rad]} \end{aligned} \quad (3.23)$$

この場合、これらの次元と式(3.19)、(3.20)、(3.21)とを比較することにより、 σ_v 、 σ_u 、 σ_n の次元は、以下の通り規定される。

$$\begin{aligned} \sigma_v^2(t) & \text{ [rad}^2\text{/sec]} \\ \sigma_u^2(t) & \text{ [rad}^2\text{/sec}^3\text{]} \\ \sigma_n^2(t) & \text{ [rad}^2 \cdot \text{sec]} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2 連続系システム方程式の無次元化

3.1で示した連続系のシステム方程式では、各変数およびその係数が物理現象に対応した次元を有している。このシステム方程式に対して、性能解析を行うことは当然可能であるが、ここでは、まず、システム方程式の無次元化を行うものとする。これにより、姿勢決定系の性能解析を一般的に記述することができるとともに、実際の物理現象に併せて有次元化することにより、ノイズ特性の異なるシステムに対して、ここでの性能解析結果を一般的に適用することができるようになる。ここでは、そのための無次元化されたシステム方程式を示す。

姿勢決定系のシステム方程式を無次元化するためには、角度の単位および時間の単位が必要となる。角度自身は無次元量であるが、無次元化に際しては角度の次元を一致させることが必要となるので、ここでは、角度も次元を有する量として扱っている。

姿勢決定系の無次元化による精度解析については、Farrenkopfによって示されている([2]参照)。ここでは、これと同様の手法で無次元化を行うものとする。即ち、角度の単位に観測ノイズ σ_n/\sqrt{T} [rad]、時間の単位に T [sec]を採用するものとする。ここで T は、任意の時間である。ただし、後に示すように、これを離散系システムにおける離散時間と等しくする場合には、連続系と離散系のノイズに一定の関係を持たせることにより、連続系での性能解析結果と離散系での性能解析結果を一致させることができる。その意味で、 T としては、観測量が得られる更新周期に設定するのが好ましいことになる。

各変数に対する無次元化変数を $\tilde{\cdot}$ (ティルド; tilde) により表し, 以下の通り定義する.

$$\begin{aligned}
t &\equiv \tilde{t} T && [\text{sec}] \\
\theta(t) &\equiv \tilde{\theta}(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} && [\text{rad}] \\
b(t) &\equiv \tilde{b}(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} \frac{1}{T} && [\text{rad/sec}] \\
\omega_{\text{IRU}}(t) &\equiv \tilde{\omega}_{\text{IRU}}(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} \frac{1}{T} && [\text{rad/sec}] \\
\eta_1(t) &\equiv \tilde{\eta}_1(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} \frac{1}{T} && [\text{rad/sec}] \\
\eta_2(t) &\equiv \tilde{\eta}_2(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} \frac{1}{T^2} && [\text{rad/sec}^2] \\
n(t) &\equiv \tilde{n}(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} && [\text{rad}] \\
\alpha_b &\equiv \tilde{\alpha}_b \frac{1}{T} && [1/\text{sec}] \\
y(t) &\equiv \tilde{y}(\tilde{t}) \frac{\sigma_n}{\sqrt{T}} && [\text{rad}]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

式(3.25)を式(3.7)および(3.8)に代入して以下の式を得る.

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(\tilde{t}) \\ \tilde{b}(\tilde{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\tilde{\alpha}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(\tilde{t}) \\ \tilde{b}(\tilde{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{\text{IRU}}(\tilde{t}) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1(\tilde{t}) \\ \tilde{\eta}_2(\tilde{t}) \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(\tilde{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(\tilde{t}) \\ \tilde{b}(\tilde{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{n}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

または,

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{t}) + \tilde{\mathbf{B}}_w \tilde{\mathbf{w}}(\tilde{t}) \tag{3.28}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) + \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{t}) \tag{3.29}$$

ここに,

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(\tilde{t}) \\ \tilde{b}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\tilde{\alpha}_b \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_w = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{y}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{\text{IRU}}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1(\tilde{t}) \\ \tilde{\eta}_2(\tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{n}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

また、システムノイズの共分散については、以下の通り無次元化される。

$$\begin{aligned} \sigma_v^2(t) &= \tilde{\sigma}_v^2(\tilde{t}) \frac{\sigma_n^2}{T} \frac{1}{T} \quad [\text{rad}^2/\text{sec}] \\ \sigma_u^2(t) &= \tilde{\sigma}_u^2(\tilde{t}) \frac{\sigma_n^2}{T} \frac{1}{T^3} \quad [\text{rad}^2/\text{sec}^3] \end{aligned} \quad (3.39)$$

これを用いてシステムノイズおよび観測ノイズの性質を示すと、以下のとおりとなる。

$$\text{E}[\tilde{\eta}_1(\tilde{t})] = 0, \quad \text{E}[\tilde{\eta}_1(\tilde{t}) \tilde{\eta}_1(\tilde{t}')] = \tilde{\sigma}_v^2(\tilde{t}) \delta(\tilde{t} - \tilde{t}') \quad (3.40)$$

$$\text{E}[\tilde{\eta}_2(\tilde{t})] = 0, \quad \text{E}[\tilde{\eta}_2(\tilde{t}) \tilde{\eta}_2(\tilde{t}')] = \tilde{\sigma}_u^2(\tilde{t}) \delta(\tilde{t} - \tilde{t}') \quad (3.41)$$

$$\text{E}[\tilde{n}(\tilde{t})] = 0, \quad \text{E}[\tilde{n}(\tilde{t}) \tilde{n}(\tilde{t}')] = \tilde{\sigma}_n^2(\tilde{t}) \delta(\tilde{t} - \tilde{t}') \quad (3.42)$$

また、 $\delta(\tilde{t} - \tilde{t}')$ は無次元化された時間 \tilde{t} での連続系におけるデルタ関数であり、以下の関係式を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{t} - \tilde{t}') d\tilde{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') T \frac{1}{T} dt = 1 \quad (3.43)$$

3.3 連続系システムでの推定精度

ここでは、前節までで求めたシステム方程式に基づいて構成される姿勢決定系カルマンフィルタの定常状態での推定精度の解析手法を示す。この定常状態での推定精度は、推定値に対する誤差共分散行列の定常解によって求めることができる。推定値に対する誤差共分散行列の対角要素は、対応する状態量の推定誤差の分散を示している。従って、誤差共分散行列の時間変化を規定する Riccati 方程式において、時間微分項を 0 とした定常 Riccati 方程式の解を求めることにより、定常状態での推定精度を求めることができる。以下では、この誤差解析の詳細について示す。

式 (3.10) で規定されるシステム方程式に対する定常 Riccati 方程式は次式で与えられる。

$$\left(\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \right) \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_w\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}_w^T - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{P}(t) = 0 \quad (3.44)$$

また、式 (3.29) で規定される無次元化されたシステム方程式に対する定常 Riccati 方程式は次式で与えられる。

$$\left(\frac{d\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \right) \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t}) + \tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t})\tilde{\mathbf{A}}^T + \tilde{\mathbf{B}}_w\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{t})\tilde{\mathbf{B}}_w^T - \tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t})\tilde{\mathbf{C}}^T\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\tilde{t})\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t}) = 0 \quad (3.45)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t})$ は、無次元化された状態変数の推定値に対する誤差共分散行列であり、次式で定義される。

$$\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{t})) (\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{t}))^T \\ \tilde{p}_{12}(\tilde{t}) & \tilde{p}_{22}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

上式における無次元化された誤差共分散行列を実際の次元量に変換する場合には、次式を用いる。

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} \frac{\sigma_n^2}{T} & \tilde{p}_{12} \frac{\sigma_n^2}{T} \frac{1}{T} \\ \tilde{p}_{12} \frac{\sigma_n^2}{T} \frac{1}{T} & \tilde{p}_{22} \frac{\sigma_n^2}{T} \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

ここで、 $p_{11}(t)$ は、姿勢角 $\theta(t)$ の推定精度の2乗、 $p_{22}(t)$ は、IRU バイアスレート $b(t)$ の推定精度の2乗に相当する量である。

また、 $\tilde{Q}(\tilde{t})$ および $\tilde{R}(\tilde{t})$ は、以下で定義される。

$$\tilde{Q}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_v^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 \frac{T}{\sigma_n^2} T & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \frac{T}{\sigma_n^2} T^3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\tilde{R}(\tilde{t}) = [1] \quad (3.49)$$

定常 Riccati 方程式の一般的解法について記述している文献は多数ある ([3] など)。また、数値解を求めるのであれば、MATRIXx や MATLAB 等により簡単に求めることができる。ここでは、式 (3.45) で示される無次元化された定常 Riccati 方程式の一般解を求め、これをもとに、姿勢角推定精度ならびにバイアスレート推定精度の特性について議論するものとする。

式 (3.45) を共分散行列の各要素について計算すると以下の3個の式に展開される。

$$\frac{d\tilde{p}_{11}}{d\tilde{t}} = -2\tilde{p}_{12} + \tilde{\sigma}_v^2 - \tilde{p}_{11}^2 = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d\tilde{p}_{12}}{d\tilde{t}} = -\tilde{\alpha}_b \tilde{p}_{12} - \tilde{p}_{22} - \tilde{p}_{11} \tilde{p}_{12} = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{d\tilde{p}_{22}}{d\tilde{t}} = -2\tilde{\alpha}_b \tilde{p}_{22} + \tilde{\sigma}_u^2 - \tilde{p}_{12}^2 = 0 \quad (3.52)$$

上の方程式を連立で解くことにより、定常解が得られることになる。これら3つの式は、 \tilde{p}_{11} および \tilde{p}_{12} に関して2次式であるため、一般解は4組存在することになる。ところが、この解に対して、 $\tilde{p}_{11} > 0$ および $\tilde{p}_{22} > 0$ の条件を満たすものは1組だけである。この解を以下に示す。

$$\tilde{p}_{11}(\tilde{t}) = -\tilde{\alpha}_b + \sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2 + 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{22}(\tilde{t}) = & -\tilde{\alpha}_b^3 - \tilde{\alpha}_b \tilde{\sigma}_v^2 - 2\tilde{\alpha}_b \sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2} + \tilde{\alpha}_b^2 \sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2 + 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}} \\ & + \sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2} \sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2 + 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\tilde{p}_{12}(\tilde{t}) = -\tilde{\alpha}_b^2 - \sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2} + \tilde{\alpha}_b \sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2 + 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}} \quad (3.55)$$

特に、 $\tilde{\alpha}_b = 0$ ($\tilde{\tau}_b = \infty$) とした場合には、式 (3.53)~(3.55) で与えられる定常解は、以下の通り非常に簡単に表現することができる。

$$\tilde{p}_{11}(\tilde{t}) = \sqrt{2\tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_v^2} \quad (3.56)$$

$$\tilde{p}_{22}(\tilde{t}) = \tilde{\sigma}_u \sqrt{2\tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_v^2} \quad (3.57)$$

$$\tilde{p}_{12}(\tilde{t}) = -\tilde{\sigma}_u \quad (3.58)$$

図3-1の左図は、式(3.56)および(3.57)を用いて、 $\tilde{\sigma}_v$ および $\tilde{\sigma}_u$ をパラメータとした場合の、姿勢角 $\hat{\theta}$ の推定精度 (\hat{p}_{11} の平方根) を示す。(但し、 $\alpha_b = 0$ としている。) 図3-1の右図は、同様に、バイアスレート b の推定精度 (\hat{p}_{22} の平方根) を示したものである。

これらの図より、姿勢角推定精度は、以下の特性を有していることがわかる。

- $\tilde{\sigma}_v$ が $\tilde{\sigma}_u$ に比べて十分小さい場合には、姿勢角の推定精度は、 $\tilde{\sigma}_u$ とともに劣化し、 $\tilde{\sigma}_v$ には殆ど依存しない。
- $\tilde{\sigma}_v$ が $\tilde{\sigma}_u$ に比べて十分大きい場合には、姿勢角の推定精度は、 $\tilde{\sigma}_v$ とともに劣化し、 $\tilde{\sigma}_u$ にはあまり依存しない。
- ある一定の $\tilde{\sigma}_v$ に対して、姿勢角推定精度の下限値が存在し、その値は、 $\tilde{\sigma}_u$ に依存する。
- ある一定の $\tilde{\sigma}_u$ に対して、姿勢角推定精度の下限値が存在し、その値は、 $\tilde{\sigma}_v$ に依存する。

また、バイアスレート推定精度は、以下の特性を有していることがわかる。

- バイアスレート推定精度は、 $\tilde{\sigma}_u$ とともに劣化する。また、 $\tilde{\sigma}_v$ が $\tilde{\sigma}_u$ に比べて十分小さい場合と、その反対の場合とで、その増大の程度が異なる。
- $\tilde{\sigma}_v$ が $\tilde{\sigma}_u$ に比べて十分小さい場合には、バイアスレートの推定精度は、 $\tilde{\sigma}_v$ には依存しない。
- ある一定の $\tilde{\sigma}_u$ に対して、バイアスレート推定精度の下限値が存在し、その値は、 $\tilde{\sigma}_u$ に依存する。

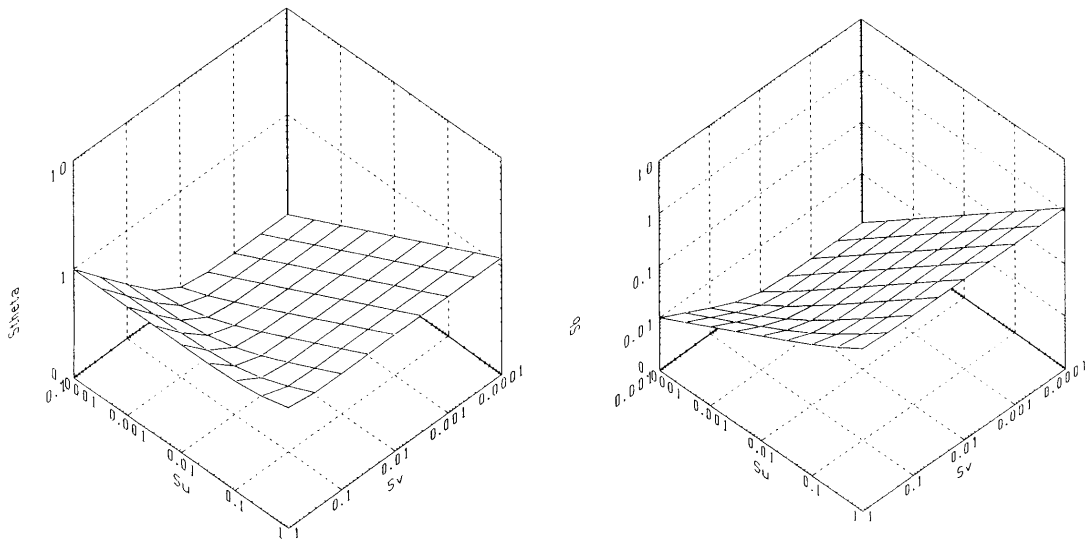


図3-1 姿勢角推定精度(左)およびバイアスレート推定精度(右)

上述の特性において、推定精度は、 $2\tilde{\sigma}_u = \tilde{\sigma}_v^2$ を分岐点として、その特性が変化している。そこで、推定精度を $2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2$ と $2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2$ とに分類して各推定精度に対する近似式を求めることができる。式 (3.56) および (3.57) をもとにこの近似を行うと、以下のとおりとなる。

$$(\text{姿勢角推定精度}) = \sqrt{\tilde{p}_{11}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{4}} \tilde{\sigma}_u^{\frac{1}{4}} & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ \tilde{\sigma}_v^{\frac{1}{2}} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.59)$$

また、バイアスレート推定精度に対する近似式を以下のとおり作成することができる。

$$(\text{バイアスレート推定精度}) = \sqrt{\tilde{p}_{22}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{4}} \tilde{\sigma}_u^{\frac{3}{4}} & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ \tilde{\sigma}_u^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}_v^{\frac{1}{2}} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.60)$$

また、姿勢角推定精度とバイアスレート推定精度との相関を示す相関係数は以下のとおりとなる。

$$(\text{相関係数}) = \frac{\tilde{p}_{12}}{\sqrt{\tilde{p}_{11}}\sqrt{\tilde{p}_{22}}} = \begin{cases} -2^{-\frac{1}{2}} \simeq -0.707 & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ -\frac{\tilde{\sigma}_u^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\sigma}_v} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.61)$$

即ち、 $2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2$ の場合には、両者の相関は一定値になり、 $\tilde{\sigma}_u$ により姿勢角推定精度が影響を受けていることを示している。一方、 $2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2$ の場合には、両者の相関はほとんどなく、姿勢角推定精度は、 $\tilde{\sigma}_v$ によって支配的に影響を受けていることがわかる。

3.4 定常カルマンゲインを適用した場合の収束特性

通常のカルマンフィルタでは、誤差共分散行列の初期値から、Riccati の方程式に基づき時間的に変化していく誤差共分散行列の各要素の値を求める必要がある。このため、計算処理が多くなり、計算機負荷が重くなる。また、計算機の精度が短精度程度の場合には、計算機の演算誤差による共分散行列の発散を防ぐために U-D 分解などの計算方法を適用する必要があり、アルゴリズムが複雑になる。特に、人工衛星の搭載計算機などのように、計算機処理能力やプログラム容量に制約がある場合には、通常のカルマンフィルタの適用については慎重に対処する必要がある。これに対して、定常カルマンフィルタでは、通常のカルマンフィルタが収束した後のカルマンゲインを予め求めておき、この値を固定値としてフィルタを構成している。即ち、誤差共分散行列を逐次計算せずに、同一のカルマンゲインを適用するフィルタを構成している。従って、定常カルマンフィルタでは、前述のような計算負荷・計算アルゴリズムの複雑さといった問題がないというメリットがあり、しかしその反面、定常解に至るまでの収束特性が悪くなるというデメリットもあるため、実用的に使えるかどうかを判断する際には、その収束特性を明確にしておく必要がある。

一方、時変のカルマンゲインを有する通常のカルマンフィルタにおける収束時間を議論する際には、推定値に対する誤差共分散行列の収束特性によって決定される姿勢決定系の時定数以外に、以下の項目の収束性を議論する必要がある。

- 姿勢が全く不定であることを初期条件とした場合の収束時間 (推定値の収束特性)
- 実用的な精度までの収束時間

特に、はじめの状況下では、万一、十分な精度の推定値が得られる前に誤差共分散行列が収束してしまった場合には、推定値が真値に至るまでに相当な時間が必要となり、最悪は真値に収束しない場合も十分に考えられる。また、誤差共分散の初期値をある程度大きな値にしておき、推定値が真値に近づく初期収束特性を早めることも行っている。よって、通常のカルマンフィルタにおける収束時間を議論するには、これまで性能解析のパラメータとして扱ってきた $\tilde{\sigma}_v$ および $\tilde{\sigma}_u$ 以外に、誤差共分散行列の初期値についてもパラ

メータとして扱う必要がある。しかし、このような議論を行う場合には、扱うべきパラメータが多くなるため、解析的な議論ができない。従って、実用上は計算機シミュレーション等によりその収束時間を評価する手法がとられているが、カルマンゲインが定常値に近づいた段階では、定常カルマンフィルタの収束時間とほぼ等しくなるため、定常カルマンフィルタの収束時間を明確にしておくことは必要である。

以上の理由により、ここでは、定常カルマンフィルタを適用した場合の収束特性を扱い、その解析手法について示す。

定常カルマンフィルタにおけるカルマンゲインは、定常 Riccati 方程式の解 P_s を用いて、以下のとおり表すことができる。

$$K_s = P_s C^T R^{-1} \quad (3.62)$$

また、この場合のカルマンフィルタの基本方程式は以下で記述される。

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_s[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (3.63)$$

$$= [A - P_s C^T R^{-1} C] \hat{x}(t) + Bu(t) + K_s y(t) \quad (3.64)$$

従って、定常カルマンフィルタの収束特性は、

$$A - P_s C^T R^{-1} C \quad (3.65)$$

の固有値によって決定され、その固有値の実数部の逆数が収束の時定数を与える。数式 (3.65) を 3.2 で示すとおりに無次元化した場合には、以下のとおりとなる。

$$\tilde{A} - \tilde{P}_s \tilde{C}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{C} \quad (3.66)$$

この行列の固有値を $\tilde{\lambda}_i$ とすると、行列 (3.65) の固有値 λ_i は以下の式で表される。

$$\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{T} \quad (3.67)$$

このとき、定常カルマンフィルタの収束時間 $T_{c,i}$ は、以下で与えられる。

$$T_{c,i} = \frac{1}{\text{real}[\lambda_i]} = \frac{1}{\text{real}[\tilde{\lambda}_i]} T = \tilde{T}_{c,i} \quad (3.68)$$

ここに $\tilde{T}_{c,i}$ は、無次元化された収束時間である。

式 (3.66) で与えられる行列の固有値を解析的に求めると、以下に示すとおりとなる。

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{-\sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2} - 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}}{2} - \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2} + 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}}{2} \quad (3.69)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2} - 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}}{2} - \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}_b^2 + \tilde{\sigma}_v^2} + 2\sqrt{\tilde{\sigma}_u^2 + \tilde{\alpha}_b^2 \tilde{\sigma}_v^2}}{2} \quad (3.70)$$

また、特別な場合として $\tilde{\alpha}_b = 0$ とすると、以下の通り、簡単な形で記述することができる。

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{-\sqrt{-2\tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_v^2} - \sqrt{2\tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_v^2}}{2} \quad (3.71)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{-2\tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_v^2} - \sqrt{2\tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_v^2}}{2} \quad (3.72)$$

式、 $\tilde{\sigma}_v$ および $\tilde{\sigma}_u$ をパラメータとした場合の無次元収束時間を、図 3-2 に示す。

図 3-2 より、収束時間は以下の特性を有していることがわかる。

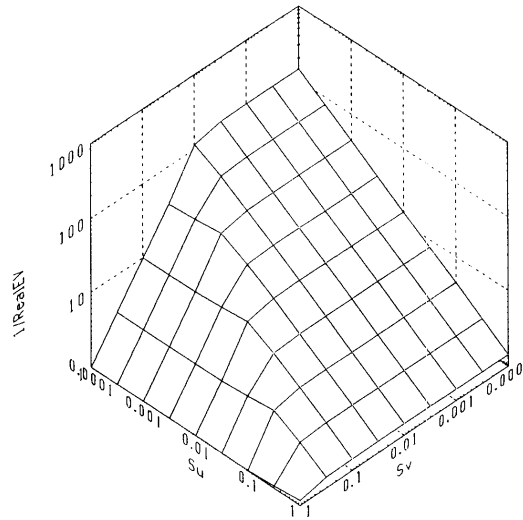


図 3-2 無次元化収束時間

- 一般に, $\tilde{\sigma}_v$ および $\tilde{\sigma}_u$ がともに小さくなるほど, (一定の $\tilde{\sigma}_v$ および $\tilde{\sigma}_u$ を仮定した場合には, 観測ノイズ $\tilde{\sigma}_n$ が大きくなるほど,) 収束時間は長くなる。(逆もしかり)
- $\tilde{\sigma}_v$ が $\tilde{\sigma}_u$ に比べて十分小さい場合には, 収束時間は, $\tilde{\sigma}_u$ とともに短くなり, $\tilde{\sigma}_v$ には殆ど依存しない。
- $\tilde{\sigma}_v$ が $\tilde{\sigma}_u$ に比べて十分大きい場合には, 収束時間は, $\tilde{\sigma}_v$ とともに短くなり, $\tilde{\sigma}_u$ には殆ど依存しない。
- ある一定の $\tilde{\sigma}_v$ に対して, 収束時間の上限值が存在し, その値は, $\tilde{\sigma}_v$ に依存する。
- ある一定の $\tilde{\sigma}_u$ に対して, 収束時間の上限值が存在し, その値は, $\tilde{\sigma}_u$ に依存する。

上述の特性において, 無次元収束時間は, $2\tilde{\sigma}_u = \tilde{\sigma}_v^2$ を分岐点として, その特性が変化している。そこで, 無次元収束時間を $2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2$ と $2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2$ とに分類して各推定精度に対する近似式を求めることができる。式 (3.71) および (3.72) をもとにこの近似を行うと, 以下のとおりとなる。

$$(\text{収束時間}) = -\frac{1}{\text{real}[\tilde{\lambda}_i]} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_u} & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ \frac{1}{\tilde{\sigma}_v} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.73)$$

3.5 性能解析結果の具体的適用方法

ここでは, 3.3 で示した無次元化推定精度と 3.4 で示した無次元収束時間を, 実際の姿勢決定系に用いられているカルマンフィルタの性能解析へ適用する方法を示す。

姿勢伝播のための IRU には, レート積分型のジャイロを用いるのが一般的である。即ち, IRU へのレート入力に比例して制御されるジャイロジンバルの駆動トルカ電流を積分することにより, レート入力の結

果生じる IRU 座標系での姿勢変化を計測している。そして、その積分値を、サンプリングによる量子化誤差が生じないように、V/F 変換して出力している。従って、IRU を取り入れた姿勢決定系のカルマンフィルタを構成する基本式のうち、IRU のバイアスレートを状態変数として組み込んだ状態方程式は、離散系で扱うより連続系として扱うのが妥当である。そして、離散系で扱うシステムノイズを一定として扱うのではなく、連続系で扱った場合のシステムノイズ η_1 および η_2 の分散値 σ_v^2 および σ_u^2 を一定値として扱うことが妥当である。

一方、観測ベクトルは、観測周期 (= T) ごとにしか得られないため、連続系で扱うのではなく離散系として扱う必要がある。この際には、観測周期ごとのそれぞれの観測値にランダムノイズが混入されているため、連続系における σ_n を一定値として扱うのではなく、離散系での観測ノイズに相当する $\sigma_{n,t}$ を一定値として扱うべきである。そして、両者には、一般に、

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n,t}^2 T \quad (3.74)$$

の関係があるため、この式を用いて、実際の姿勢決定系のカルマンフィルタの推定精度が T へ依存する度合いを求めることができる。

まずはじめに、推定精度に関して、3.3 で示した無次元化モデルを次元のある量に逆変換した結果を以下に示す。(但し、 $\alpha_b = 0$ としている。)

$$P_{11} = \sigma_{n,t} \sqrt{(2\sigma_u \sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}} + \sigma_v^2) T} \quad (3.75)$$

$$P_{22} = \sigma_u \sqrt{2\sigma_u \sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}} + \sigma_v^2} \quad (3.76)$$

この式を、 $2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2$ あるいは $2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2$ の条件で近似して平方根をとると、姿勢角推定精度は以下のとおりとなる。

$$(\text{姿勢角推定精度}) = \sqrt{p_{11}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{4}} \sigma_{n,t}^{\frac{3}{4}} \sigma_u^{\frac{1}{4}} T^{\frac{3}{8}} & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ \sigma_{n,t}^{\frac{1}{2}} \sigma_v^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{4}} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.77)$$

同様に、バイアスレート推定精度に対する近似式を以下のとおり作成することができる。

$$(\text{バイアスレート推定精度}) = \sqrt{\bar{p}_{22}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{4}} \sigma_{n,t}^{\frac{1}{4}} \sigma_u^{\frac{3}{4}} T^{\frac{1}{8}} & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ \sigma_u^{\frac{1}{2}} \sigma_v^{\frac{1}{2}} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.78)$$

具体的一事例として、ここでは実際の IRU の性能に対して以下の数値を仮定する。

$$\sigma_v = 2 \times 10^{-4} [\text{arcsec}/\text{sec}^{\frac{1}{2}}] \quad (3.79)$$

$$\sigma_u = 2 \times 10^{-5} [\text{arcsec}/\text{sec}^{\frac{3}{2}}] \quad (3.80)$$

この場合のカルマンフィルタの推定精度を図 3-3 に示す。同図は、 $\sigma_{n,t}$ をパラメータとして、観測更新周期 T に対する姿勢推定精度およびバイアスレート推定精度を式 (3.75) および (3.76) をもとに計算したものである。

次いで、収束時間に関して、3.4 で示した無次元化モデルを次元のある量に逆変換した結果を以下に示す。(但し、 $\alpha_b = 0$ としている。)

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}}} \left(-\sqrt{-2\sigma_u \sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}} + \sigma_v^2} - \sqrt{2\sigma_u \sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}} + \sigma_v^2} \right) \quad (3.81)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{-2\sigma_u \sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}} + \sigma_v^2} - \sqrt{2\sigma_u \sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}} + \sigma_v^2} \right) \quad (3.82)$$

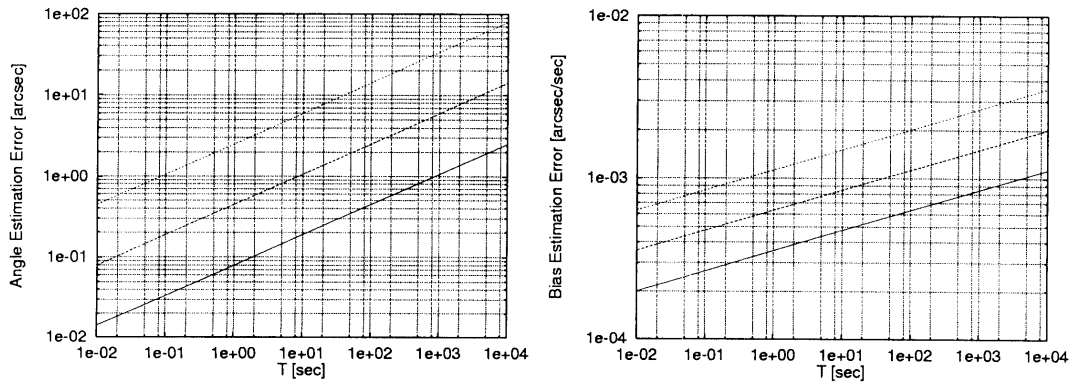


図 3-3 姿勢角推定精度 (左図) およびバイアスレート推定精度 (右図). 上から $\sigma_{n,t} = 100, 10, 1$ [arcsec] の場合の推定精度 (1σ 値)

この式を, $2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2$ あるいは $2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2$ の条件で近似すると, 収束時間は以下のとおりとなる.

$$(\text{収束時間}) = -\frac{1}{\text{real}[\lambda_i]} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\sigma_{n,t}} T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\sigma_u} & (2\tilde{\sigma}_u \gg \tilde{\sigma}_v^2) \\ \frac{\sigma_{n,t} T^{\frac{1}{2}}}{\sigma_v} & (2\tilde{\sigma}_u \ll \tilde{\sigma}_v^2) \end{cases} \quad (3.83)$$

この場合のカルマンフィルタの推定精度を図 3-4 に示す. 同図は, $\sigma_{n,t}$ をパラメータとして, 観測更新周期 T に対する収束時間を上に示した式をもとに計算したものである. なお, IRU の特性は式 (3.79) および (3.80) と同じものを使用している.

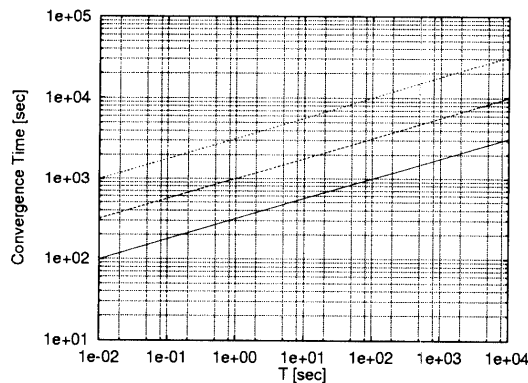


図 3-4 収束時間—上から $\sigma_{n,t} = 100, 10, 1$ [arcsec] の場合 (1σ 値)

3.6 離散系の 1 次元モデルに対するシステム方程式

実際の姿勢決定系では, センサの情報が連続的に得られることはなく, ある計測周期毎に得られるのが一般的である. また, IRU の出力は, ある時間内の角度変化分を IRU 内部で V/F 変換するレート積分センサの場合には連続系と等価であると思わせるが, あるサンプリング周期でそのレートを計測するレートセンサの場合にはやはり離散系として扱う必要がある. これ以降では, これまでに示した連続系カルマンフィルタの性能解析と同様の解析を離散系カルマンフィルタに対して行うための条件について整理する. まず, 本節では, 姿勢決定系カルマンフィルタを離散系として記述するためのシステム方程式を示す.

離散系における状態変数を以下のとおり記述する.

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ b_t \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

連続系におけるシステム方程式(3.9)および(3.10)を離散化すると、以下のとおりとなる. 但し、離散化時間を T とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{G}\mathbf{u}_t + \mathbf{G}_w\mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t \end{aligned} \quad (3.85)$$

ここに,

$$\mathbf{F} = \exp(\mathbf{A}T) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_b}(1 - e^{-\alpha_b T}) \\ 0 & e^{-\alpha_b T} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{G} = \int_0^T \exp(\mathbf{A}(T - \tau)) d\tau \mathbf{B} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{G}_w = \int_0^T \exp(\mathbf{A}(T - \tau)) d\tau \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} -T & -\frac{1}{\alpha_b^2}(e^{-\alpha_b T} + \alpha_b T - 1) \\ 0 & \frac{1}{\alpha_b}(1 - e^{-\alpha_b T}) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} \omega_{\text{IRU}} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{w}_t = \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{n}_t = \begin{bmatrix} n_t \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$\alpha_b T \ll 1$ の場合には、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G}_w は、以下のとおり近似的に表現できる.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -T \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_b T\right) \\ 0 & 1 - \alpha_b T \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{G}_w = \begin{bmatrix} -T & -\frac{1}{\alpha_b^2} T^2 \left(1 - \frac{1}{3}\alpha_b T\right) \\ 0 & T \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_b T\right) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

上記のシステム方程式におけるシステムノイズおよび観測ノイズは、すべて白色雑音であることを想定している. 離散系の場合、それらの性質は以下で表現される.

$$E[\eta_{1,t}] = 0, \quad E[\eta_{1,t} \eta_{1,t'}] = \sigma_{v,t}^2 \delta_{t,t'} \quad (3.96)$$

$$E[\eta_{2,t}] = 0, \quad E[\eta_{2,t} \eta_{2,t'}] = \sigma_{u,t}^2 \delta_{t,t'} \quad (3.97)$$

$$E[n_t] = 0, \quad E[n_t n_{t'}] = \sigma_{n,t}^2 \delta_{t,t'} \quad (3.98)$$

ここに、 $\delta_{t,t'}$ は離散系におけるデルタ関数であり、以下の関係式を満たす。

$$\delta_{t,t'} = \begin{cases} 1 & (t = t') \\ 0 & (t \neq t') \end{cases} \quad (3.99)$$

なお、 $\delta_{t,t'}$ は、無次元量である。

また、 $\eta_{1,t}$ 、 $\eta_{2,t}$ 、 n_t は、システム方程式で規定される次元を有している。今、これらの次元を以下のとおりとする。

$$\begin{aligned} \eta_{1,t} & \text{ [rad/sec]} \\ \eta_{2,t} & \text{ [rad/sec}^2\text{]} \\ n_t & \text{ [rad]} \end{aligned} \quad (3.100)$$

この場合、これらの次元と式 (3.96)、(3.97)、(3.21) とを比較することにより、 $\sigma_{v,t}$ 、 $\sigma_{u,t}$ 、 $\sigma_{n,t}$ の次元は、以下の通り規定される。

$$\begin{aligned} \sigma_{v,t}^2 & \text{ [rad}^2\text{/sec}^2\text{]} \\ \sigma_{u,t}^2 & \text{ [rad}^2\text{/sec}^4\text{]} \\ \sigma_{n,t}^2 & \text{ [rad}^2\text{]} \end{aligned} \quad (3.101)$$

連続系と離散系のシステム誤差、観測誤差の関係は、誤差共分散の関係式を比較することにより求めることができる。まず、システム誤差による誤差共分散の影響を比較することにより、次式を得る。

$$B_w Q(t) B_w^T T = G_w Q_{t,t'} G_w^T \quad (3.102)$$

また、観測誤差による誤差共分散の影響を比較することにより、次式を得る。

$$P_t H^T \left[H P_t H^T + R_t \right]^{-1} H P_t = P(t) C^T R^{-1} C P(t) T \quad (3.103)$$

これらの関係式を整理し、かつ、 $P(t) = P_t$ とすることにより、次の関係式が導かれる。

$$\sigma_{v,t}^2 = \frac{1}{T} \sigma_v^2(t) \quad (3.104)$$

$$\sigma_{u,t}^2 = \frac{1}{T} \sigma_u^2(t) \quad (3.105)$$

$$\sigma_{n,t}^2 = \frac{1}{T} \sigma_n^2(t) \quad (3.106)$$

すなわち、システム誤差、観測誤差に関する以上の方程式 (3.104)～(3.106) を満足する限りにおいて、連続系と離散系のカルマンフィルタは同じ結果を与えることになる。

3.7 離散系システム方程式の無次元化

ここでは、3.6で示した姿勢決定系カルマンフィルタに関する離散系システム方程式を無次元化する。無次元化の考え方および方法は、3.2で示した連続系システム方程式に対するものと同様である。従って、無次元化のための角度の単位に $\sigma_{n,t}$ [rad]、時間の単位に T [sec] を採用するものとする。ここで T は、離散系システムにおける離散時間である。また、各変数に対する無次元化変数を $\tilde{\cdot}$ (ティルド; tilde) で表すものとする。以上に従い、各変数の無次元化を以下の通り行うものとする。

$$\begin{aligned}
 t &\equiv \tilde{t} T && [\text{sec}] \\
 \theta_t &\equiv \tilde{\theta}_t \sigma_{n,t} && [\text{rad}] \\
 b_t &\equiv \tilde{b}_t \sigma_{n,t} \frac{1}{T} && [\text{rad/sec}] \\
 \omega_{\text{IRU},t} &\equiv \tilde{\omega}_{\text{IRU},t} \sigma_{n,t} \frac{1}{T} && [\text{rad/sec}] \\
 \eta_{1,t} &\equiv \tilde{\eta}_{1,t} \sigma_{n,t} \frac{1}{T} && [\text{rad/sec}] \\
 \eta_{2,t} &\equiv \tilde{\eta}_{2,t} \sigma_{n,t} \frac{1}{T^2} && [\text{rad/sec}^2] \\
 \alpha_b &\equiv \tilde{\alpha}_b \frac{1}{T} && [1/\text{sec}] \\
 y_t &\equiv \tilde{y}_t \sigma_{n,t} && [\text{rad}] \\
 n_t &\equiv \tilde{n}_t \sigma_{n,t} && [\text{rad}]
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

離散系における無次元化システム方程式は、連続系における無次元化システム方程式を離散化するか、または、離散系システム方程式を上式により無次元化するかのもいずれでも求めることができる。以下に離散系における無次元化システム方程式を示す。

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}_t + \tilde{\mathbf{B}}_w \tilde{\mathbf{w}}_t \tag{3.108}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{n}}_t \tag{3.109}$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_t \\ \tilde{b}_t \end{bmatrix} \tag{3.110}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\tilde{\alpha}_b} (1 - e^{-\tilde{\alpha}_b}) \\ 0 & e^{-\tilde{\alpha}_b} \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_w = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{\tilde{\alpha}_b^2} (e^{-\tilde{\alpha}_b} + \tilde{\alpha}_b - 1) \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\alpha}_b} (1 - e^{-\tilde{\alpha}_b}) \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{\text{IRU}} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1,t} \\ \tilde{\eta}_{2,t} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{n}_t \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

また、システムノイズの共分散については、以下の通り無次元化される。

$$\begin{aligned} \sigma_{v,t}^2 &= \tilde{\sigma}_{v,t}^2 \sigma_{n,t}^2 \frac{1}{T^2} \quad [\text{rad}^2/\text{sec}^2] \\ \sigma_{u,t}^2 &= \tilde{\sigma}_{u,t}^2 \sigma_{n,t}^2 \frac{1}{T^4} \quad [\text{rad}^2/\text{sec}^4] \end{aligned} \quad (3.119)$$

これを用いてシステムノイズおよび観測ノイズの性質を示すと、以下のとおりとなる。

$$E[\tilde{\eta}_{1,t}] = 0, \quad E[\tilde{\eta}_{1,t} \tilde{\eta}_{1,t'}] = \tilde{\sigma}_{v,t}^2 \delta_{\tilde{t},\tilde{t}'} \quad (3.120)$$

$$E[\tilde{\eta}_{2,t}] = 0, \quad E[\tilde{\eta}_{2,t} \tilde{\eta}_{2,t'}] = \tilde{\sigma}_{u,t}^2 \delta_{\tilde{t},\tilde{t}'} \quad (3.121)$$

$$E[\tilde{n}_t] = 0, \quad E[\tilde{n}_t \tilde{n}_{t'}] = 1 \quad (3.122)$$

式 (3.39) および式 (3.119) を、式 (3.104) (3.105) に代入し、さらに式 (3.106) の関係を用いることにより次式を得る。

$$\tilde{\sigma}_u(\tilde{t}) = \tilde{\sigma}_{u,t} \quad (3.123)$$

$$\tilde{\sigma}_v(\tilde{t}) = \tilde{\sigma}_{v,t} \quad (3.124)$$

すなわち、無次元化された状態で連続系システムと離散系システムの間に以上の関係 (3.123)~(3.124) が成り立つとき、姿勢決定系カルマンフィルタは、3.3 で示した推定精度、3.4 で示した収束特性と同様の性能を示すことになる。

したがって、このような対応関係をもとにすれば、3.5 で行ったのと同じ方法によって、離散系システム（あるいは、連続系と離散系の混ざったシステム）に対するカルマンフィルタの性能解析を行うことができる。

4. 天文観測用科学衛星におけるカルマンフィルタの適用方法

本章では、宇宙科学研究所の衛星の姿勢決定系にカルマンフィルタが始めて採用された「ぎんが」以降、これまでに打ち上げられた天文観測用科学衛星、および今後打ち上げ予定の天文観測用科学衛星を対象として、それらの姿勢決定系に適用された、あるいは今後適用される予定のカルマンフィルタについて示す。カルマンフィルタを実際の衛星に適用する際には、第2章で示した理論に基づく基本アルゴリズムに加えて、搭載計算機の処理能力、姿勢センサの特性や衛星の運用を考慮した種々の実用上の工夫が必要となる。ここでは、まず始めに、これまでの宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星に於いて構築された種々の実用上の工夫を一般的にまとめる。次いで、カルマンフィルタの適用方法を表 1-1 に示した各衛星毎に示すものとする。

4.1 カルマンフィルタの実用上の工夫

姿勢決定系にカルマンフィルタを適用する際には、以下に示す観点からの工夫が必要となる。

アルゴリズムの簡素化 搭載計算機で実行可能なプログラム容量・処理負荷となるようにアルゴリズムを簡素化する。

誤差共分散行列の処理 フィルタ性能および上記のアルゴリズムの簡素化を考慮した上で誤差共分散行列の伝播・更新処理の方法を決める。

フィルタの初期化 推定値が真値から逸脱した場合には、フィルタを初期化することにより推定をやり直す。

カルマンゲイン最小値の設定 カルマンゲインの最小値を設定し、フィルタの追従特性を改善する。

センサ観測時刻の同期 観測時刻ずれによる推定精度の劣化を抑えるため、カルマンフィルタの処理とセンサ観測時刻との同期を図る。

センサ出力遅延の処理 カルマンフィルタの処理サイクルを越えるセンサ出力遅延がある場合に、その観測更新を行う方法を工夫する。

誤まった観測の除去 誤った観測データに対してはこれを除去し、姿勢更新を行わないようにすることにより、姿勢推定値が乱されることを防止する。

以下では、このような観点での工夫の具体的方法を紹介する。

4.1.1 アルゴリズムの簡素化

衛星の姿勢角および姿勢角速度に基づく姿勢の運動学的方程式は、三軸が相互にカップルしたものと記述される。また、一般にセンサの観測軸は、衛星の機体座標軸に一致しているとは限らず、その観測量は3軸方向に展開される。よって、カルマンフィルタを構成する状態方程式または観測方程式は、厳密には、各軸ごとに独立に扱うことはできない。しかし、実用的な範囲内で推定精度の劣化が問題とならない場合には、状態方程式または観測方程式のいずれか、あるいはその両方を各軸ごとに独立に扱って、アルゴリズムを簡素化する場合がある。この場合には、推定値に対する姿勢伝播または観測更新の処理が簡素化されるのに加えて、誤差共分散行列の伝播または観測更新も簡素化されることになり、アルゴリズムの簡素化に対する効果は大きい。

また、アルゴリズムの簡素化という観点では、次に示す誤差共分散行列の処理を工夫することも有効な方法である。

4.1.2 誤差共分散行列の処理

通常のカルマンフィルタでは、推定値の伝播・更新に加えて誤差共分散行列を伝播・更新する処理を平行して行っている。そして、誤差共分散行列の初期値として、推定誤差より十分大きな値を設定し、カルマンゲインを大きくすることで、初期段階における推定値が迅速に真値に収束するようにしている。しかし、フィルタが十分収束した後は、誤差共分散行列の値は一定となり、定常カルマンフィルタと等価となる。このような状況で、誤差共分散行列を計算することはあまり意味がないため、実用的には誤差共分散行列の計算を必要としない定常カルマンフィルタを採用する場合がある。

定常カルマンフィルタを採用した場合には、上述の初期段階における推定値の収束特性が劣化するという欠点がある。これに対処するため、準定常カルマンフィルタを用いる場合がある。準定常カルマンフィルタは、フィルタの推定開始時点からの時間によって初期段階でのカルマンゲインを数通りに切り替え、初期段階での収束特性を改善している。また、最終的には定常時でのカルマンゲインと同じ定常カルマンフィルタとして動作させることにより推定精度を確保している。

4.1.3 カルマンフィルタの初期化

理論的な扱いでは、慣性センサや恒星センサ等の姿勢センサのノイズ特性は定常であることを前提としている。ところが、実際に大きな姿勢マヌーバを実施した場合のジャイロ出力に含まれるノイズ特性等は、それまでの静止した状態のものと大きく異なっている可能性がある。これに加えて、大きな姿勢マヌーバを実施した場合の問題点としては、

- 静止時には問題にならなかったアライメント誤差に起因する他軸の角速度が混入すること、
- 慣性センサのパルスウェイトの誤差が大きく影響すること、
- 計算機内部の演算精度の制約（特に単精度演算を用いた場合）により、姿勢伝播の最小分解能がジャイロのパルスウェイトより大きくなり、結果として姿勢伝播精度が劣化すること、

がある。これらの要因により、大きな姿勢マヌーバの実施後には姿勢誤差が増大しており、見かけ上の誤差雑音は極めて大きくなる。

このような状況下で姿勢決定処理を行う際の最も実用的かつ最も簡単な対処方法は、カルマンフィルタの初期化を強制的に行うことである。即ち、本来ならば、厳密にノイズ特性の要因を分析して、除去可能な分は除去し、除去不可能な分は誤差共分散行列の値を大きくする等のパラメータ調整を実施してカルマンフィルタの処理を行うべきである。しかし、実用的には、カルマンフィルタの共分散行列を初期値に戻す初期化を行い、姿勢センサによる姿勢観測値に重みを置いて新たに姿勢決定処理を行う方が扱いが簡単であり、運用上および処理上の単純化を図ることができる。以上の理由により、天文観測用科学衛星の姿勢決定系では、下記の場合に初期化動作を行っている。

<カルマンフィルタの初期化条件>

- 姿勢決定系を起動する場合（本来の初期化）
- 姿勢マヌーバ実施後（誤差共分散行列の初期化のみ実施）
- 観測残差が規定値以上の大きな値に複数回連続して達した場合（誤差共分散行列の初期化のみ実施）
- コマンドによる強制的な初期化

4.1.4 カルマンゲイン最小値の設定

理論的には、ノイズ特性が規定されると、フィルタが十分収束した後のカルマンゲインは一定となり、定常カルマンフィルタの処理と等しくなる。しかし、実際には、センサの精度が極めて高いことから、カルマンゲインが極めて小さくなり、カルマンフィルタ初期化後ある程度時間が経過すれば、姿勢センサによる姿勢更新がほとんど姿勢決定値に影響を与えなくなってしまう。ところが、現実には、前述のように予想以外の誤差要因が作用して姿勢誤差が増大することがある。この姿勢誤差を予め考慮して、実力よりも大きいノイズ特性でカルマンフィルタを構成することも可能であるが、この場合にはカルマンフィルタの収束特性が劣化して、実用性に乏しくなる。これらの問題を解消するための実用的な処置として、カルマンゲイン最小値を設定できるようにし、誤差共分散行列の収束にしたがって小さくなるカルマンゲインの値がこの値より小さくなった場合には、実際の処理に用いるカルマンゲインをこの最小値とするアルゴリズムを採用する場合がある。この工夫は、収束性、および収束後の姿勢推定値の追従性に対する柔軟性の両方に対応することができる方法であり、理論的扱いでは説明できないが、実用性は極めて高いものである。

4.1.5 センサ観測時刻の同期

精度の高い姿勢決定を行うためには、それが定義される時刻の精度も重要となる。慣性空間に対して静止している衛星では一定時間内の姿勢変動が小さいが、高精度の姿勢決定精度が要求される場合には、やはり時刻同期精度が問題となる。また、慣性空間に対して回転する衛星では、時刻のずれがその時間内に衛星が回転する分だけ姿勢誤差となるため、厳密な時刻同期を行う必要がある。これらの理由により、姿勢制御装置から観測タイミング信号を姿勢センサに対して供給し、複数の姿勢センサによる姿勢観測時刻の同期を図るとともに、観測開始時間の遅れや観測に要する時間も考慮に入れてカルマンフィルタの処理サイクルとの同期を図っている。

4.1.6 センサ出力遅延の処理

センサ出力遅延がカルマンフィルタの処理サイクルを越える場合には、観測更新の処理方法に工夫が必要となる。これまでの宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星では、姿勢決定系の処理サイクルは 8 [Hz] 程度である。これに対して、恒星センサの観測を行ってからデータ処理等を行った後に観測データが出力されるまでの遅延時間は 1 [sec] 以上である。

この場合の処理方法の概念を図 4-1 に示す。図中、姿勢センサによる姿勢計測値の出力遅延は、カルマンフィルタ処理サイクルの 3 サイクル以上 4 サイクル以内であることを想定している。また、姿勢センサによる姿勢計測値の計測時刻が時刻 $t-4$ に一致しているとしている。ここにいう姿勢計測時刻とは、CCD を用いた恒星センサの場合、CCD の露光時間の中心時刻に相当する。（これまでの慣性指向天文衛星では、姿勢決定要求精度を考慮して姿勢の計測時刻をカルマンフィルタの処理サイクルに同期させることは必要でなかったため、厳密な同期は行っていなかった。しかし、ここでは、軌道レートで回転する衛星の姿勢決定も考慮して、姿勢の計測時刻を処理サイクルに一致させることを前提としている。）姿勢計測値 (y_{t-4}) が出力されるまでの間の姿勢伝播値 $(\bar{\theta}_{t-3}, \bar{\theta}_{t-2}, \bar{\theta}_{t-1})$ は、過去の姿勢伝播値 $(\bar{\theta}_{t-4})$ とその間の姿勢増分値 $(\Delta\theta_{t-4}, \Delta\theta_{t-3}, \Delta\theta_{t-2})$ に基づき計算する。ここに云う姿勢増分値は、IRU 出力からバイアス推定値を引いて伝播した値である。そして、姿勢計測値 (y_{t-4}) が出力された時点で、 $\bar{\theta}_{t-4}$ に対して観測更新を行い、 $\hat{\theta}_{t-4}$ を計算するとともに、記憶されていた姿勢増分値 $(\Delta\theta_{t-4}, \Delta\theta_{t-3}, \Delta\theta_{t-2})$ に基づき、新たな姿勢伝播値 $\bar{\theta}_t$ を計算する。この $\bar{\theta}_t$ は、それ以降の姿勢伝播に用いられて同様の処理を繰り返す。なお、姿勢計測値 (y_{t-4}) が得られなかった場合には、姿勢伝播値 $\bar{\theta}_t$ は、直前の姿勢伝播値 $\bar{\theta}_{t-1}$ とその間の姿勢増分 $(\Delta\theta_{t-1})$ とにより計算される。

一方、姿勢伝播の際には、慣性センサの出力からバイアス推定値を差し引いて伝播した値を $\Delta\theta_i$ として扱う必要がある。この際、バイアス推定値はほぼ一定であり急激な変化がないこと、および、バイアス推定値はある仮定されたモデルに従って伝播されるだけであり観測更新値以上の精度が期待できないこと、の 2 つを理由として、姿勢伝播処理では $\bar{\theta}_t$ を求める最終段階の“再姿勢伝播”においても \hat{b}_{t-8} を使用している。但し、姿勢計測値 (y_{t-4}) が出力されるまでの姿勢伝播には、 \hat{b}_{t-8} を用い、姿勢計測値が出力され、新たな姿勢伝播値 $\bar{\theta}_t$ を計算する際には、新たなバイアス推定値 \hat{b}_{t-4} を用いる方がより厳密なアルゴリズムとなる。

4.1.7 誤った観測の除去

放射線等によって恒星センサが本来の星以外の誤った星を出力した場合、あるいは、正常な星の近傍にこの影響が発生して正常な星の観測が乱された場合を想定する。この場合には、これをそのままカルマンフィルタに反映すると、姿勢決定値がずれてしまい、好ましくない。そこで、このような誤った星を出力しないような工夫を恒星センサ側の内部処理で行っている。しかし、実際には誤った星がすべて除去できる訳ではなく、これらの出力が姿勢決定系に供給される危険性が十分に考えられる。従って、姿勢決定系では、主に以下の方法により、可能な限り誤った星の情報を姿勢決定系に反映することがないようにしている。

1. 星強度の連続性のチェック
2. 星位置の連続性のチェック
3. 星間離角の整合性のチェック
4. トラック領域内の星数のチェック

上記の異常チェックは、カルマンフィルタの処理内容とは直接関連しないが、これらの異常チェックが生じた際には、観測更新を行わないようにカルマンフィルタ側で考慮しておく必要がある。

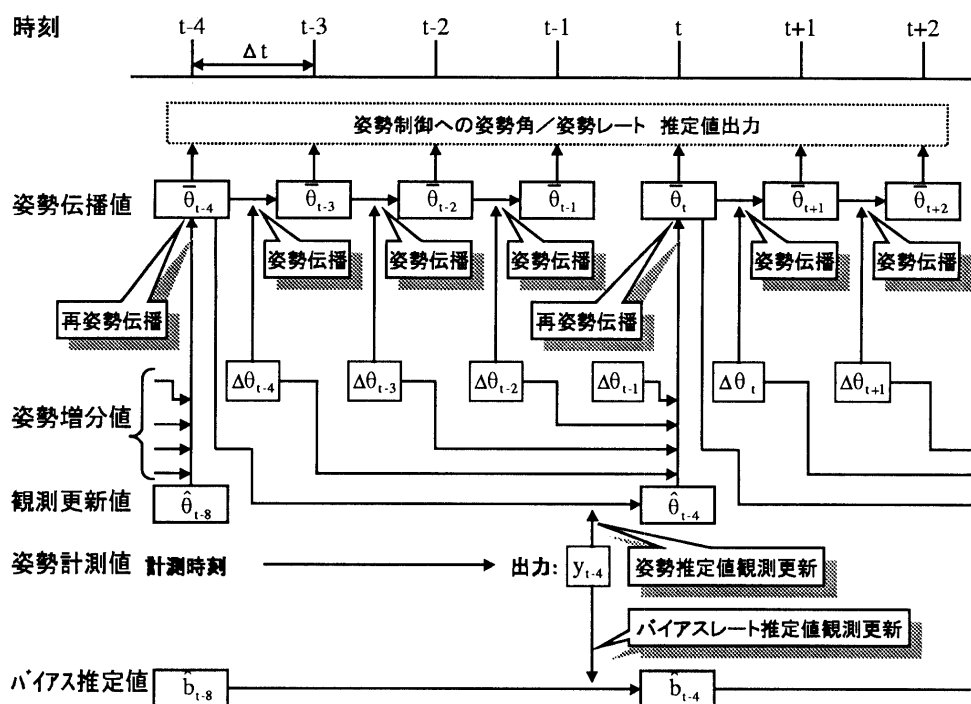


図 4-1 姿勢決定系カルマンフィルタにおけるセンサ出力遅延の処理

4.2 “ぎんが”におけるカルマンフィルタ

4.2.1 “ぎんが”の概要

第11号科学衛星“ぎんが”は、銀河系内外のX線源を高感度・高分解能で系統的に観測することを主要な目的としたX線天文観測衛星である。“ぎんが”以前のX線天文衛星（第4号科学衛星“はくちょう”、第8号科学衛星“てんま”）よりも詳細な観測を可能にするため、観測機器として大面積比例計数管(LAC)、ガンマ線バースト検出機(GBD)、全天モニター(ASM)を搭載し、姿勢系には以下のような要求が課せられた。

- LAC視野をX線源に長期にわたり安定に指向させること、
 - 姿勢決定精度：各軸まわり 0.05 [deg] 以下 (3σ)
 - 姿勢制御精度：X/Y軸まわり 0.1 [deg] 以下, Z軸まわり 0.5 [deg] 以下 (3σ)
- LAC視野を天球上の様々な天体に指向するための大角度マヌーバを行うこと、
- ASMで全天をサーベイするためのZ軸回りの360度スルーマヌーバならびにスロースピンを行うこと。

これらの要求を満たすため、慣性基準装置(IRU)、CCDスタートラッカ(STT)、モーメントムホイール(MW)、8ビットマイクロプロセッサ(CDP1802)搭載姿勢制御装置(ACE)等を中心とする本格的な慣性指向三軸姿勢制御方式を採用した。

“ぎんが”は1987年2月5日、近地点高度506 [km]、遠地点高度674 [km]の軌道に投入された。その後、約5年間にわたり、数多くの観測を通じて大きな成果をあげた。

4.2.2 姿勢決定系の概要

“ぎんが”の観測センサならびに姿勢センサの機体座標系に対する視野配置を図4-2に示す。“ぎんが”に搭載されたSTTは実使用に供された恒星センサとしては世界で初めてCCDを使用したものであり、主要性能は以下の通りである。

- 視野角： 6 [deg] × 8 [deg]
- 星検出限界等級： 6 等級
- 星位置検出精度： 0.85 [arcmin](3σ) 以下
- 星位置出力頻度： 32 [sec]

STTの主要動作モードとしてはマップモードとトラックモードがある。マップモードでは視野内全域の星のデータを地上に伝送し、パターンマッチング手法を用いた星同定を地上処理にて行う。トラックモードでは視野内の星1個について機上で星像中心位置(セントロイド)を算出し、ACEに出力する。ACEはこの星方向データを用いてIRUデータによる姿勢積分値を補正する。ACEでの補正はSTT出力とIRU積分値の差をそのまま補正する方式をとっており、カルマンフィルタなどの統計的処理は行っていない。その代わりに、地上処理にて、同定した星データ(マップデータないしトラックデータ)をIRUデータと組み合わせ、カルマンフィルタを使用した精姿勢決定を行っている。IRUは角度分解能0.8 [arcsec]のFRIG(Floated Rate Integrating Gyroscope)タイプジャイロ4台をX,Y,Zならびにスキュー方向に配置したものを使用している。この他、太陽センサ(NSAS: 分解能3 [arcmin])、磁場方向を計測する地磁気センサ(GAS)を搭載している。NSASならびにGASのデータは、星の同定を行うための概略の姿勢決定を行うために使用している。また、NSASのデータは地上計算機に実装したカルマンフィルタでも使用している。図4-3に“ぎんが”の姿勢決定系の機能ブロック図を示す。

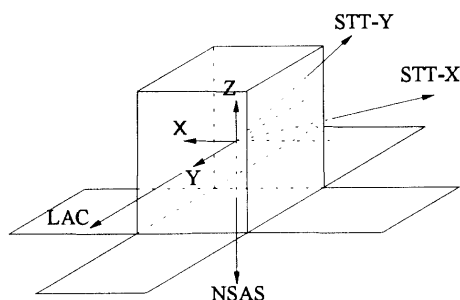


図 4-2 “ぎんが”の観測センサ/姿勢センサの視野配置

4.2.3 カルマンフィルタの主要諸元

“ぎんが”は宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星として初めてカルマンフィルタを姿勢決定系に適用した衛星である。但し、機上の計算機能力が十分では無かったため、以降の各衛星と異なりカルマンフィルタは機上ではなく地上処理で行っている。地上処理を前提としているため倍精度演算可能な高速計算機の使用が可能となり、カルマンフィルタを実現する上で、計算負荷を軽減するための処置は特に実施していない。すなわち、共分散行列の更新、観測更新処理は、各軸カップルした状態で、カルマンフィルタの定式通りに行列演算等を行っている。“ぎんが”のカルマンフィルタの主要諸元を表4-1に示す。

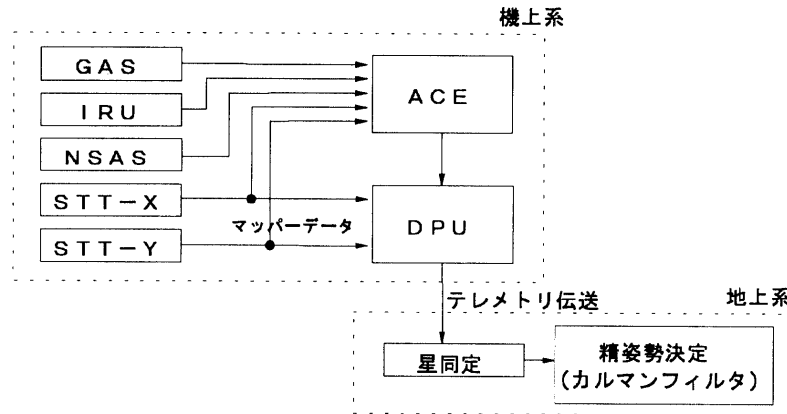


図 4-3 “ぎんが” の姿勢決定系機能ブロック図

表 4-1 “ぎんが” における姿勢決定系カルマンフィルタの主要諸元

項目	内容	備考
基準座標系	慣性座標系 (1950年平均分点赤道座標系)	
動作モード	単一. 姿勢マヌーバ中は観測更新を禁止し, 姿勢マヌーバ終了後に初期化.	
姿勢センサ	恒星センサ (2台) + 太陽センサ (1台)	
状態変数	姿勢誤差角 (次元数: 3) ジャイロレートバイアス (次元数: 3)	
姿勢角推定精度	各軸 14.4 [arcsec] (1σ) 以内	
ジャイロレートバイアス推定精度	各軸 0.003 [deg/hour] (1σ) 以内	STTデータの使用頻度に依存
収束時間	1 軌道周期 (90分)	
姿勢伝播周期	テレメトリビットレートに依存 ビットレート High の時: 1 [sec] ビットレート Low の時: 32 [sec]	
観測更新周期	STT: 32 [sec] NSAS: 1 [sec] (ビットレート High の時) 32 [sec] (ビットレート Low の時)	
姿勢力学モデル	X/Y/Z 軸ともにカップルした厳密式を使用 $\dot{q} = (1/2)\Omega(\omega)q$	
レートバイアスモデル	三軸ともランダムウォークモデルを使用 $\dot{b} = \eta_b$	η_b : ランダムノイズ
カルマンゲイン	時変システムを採用 (誤差共分散を逐次計算)	(5.1.2 参照)
カルマンフィルタの初期化条件	・ 姿勢マヌーバ終了時 ・ テレメトリが長期間中断した場合	
カルマンゲイン最小値の設定	適用	(5.1.4 参照)
センサ観測時刻の同期	テレメトリ処理にて実施	
センサ出力遅延の処理	テレメトリ処理にて実施	
誤った観測の除去	星同定機能と連携して実施	

4.2.4 実用上の工夫

(1) テレメトリレートに対する対応

“ぎんが”のテレメトリレートは High (16Kbps), Mid (2Kbps), Low (512bps) の3種類が運用に応じて使い分けられた。ビットレートに依存して地上局で得られる姿勢センサデータの間隔が異なるとともに、光学センサ (STT, NSAS) と IRU の伝送時間差も異なるため、光学センサデータと IRU データの時間同期処理はビットレートを認識した上でを行い、また、ビットレート変更時にはカルマンフィルタの処理を一時中断するなどの処置を取った。

(2) マヌーバによるカルマンフィルタリセット

“ぎんが”では360度スルーマヌーバ、大角度マヌーバが頻繁に行われた。IRUによる姿勢積分はこれらのマヌーバ中も、テレメトリが全て地上伝送されている限り行いが、IRUのミスアライメントならびにスケールファクタ誤差等により、マヌーバを行ったあとのIRU積分姿勢値の誤差は増大する。この増大量はマヌーバ量、マヌーバ方向などにより異なるため、誤差増大のモデルをカルマンフィルタに適切に反映することが困難であった。このためマヌーバ後にはカルマンフィルタを初期化することとした。

(3) 最小カルマンゲインの設定

NSASデータはテレメトリのデータレートに応じ1秒ないし32秒ごとに得られ、かつ日照中であれば常時得られる。これに対しSTTデータの出力頻度は最大でも32秒に1回であり、かつ太陽干渉範囲が大きいため1軌道のうちのわずかな時間しか星データを得ることが出来ない。この結果、カルマンフィルタに使用できるSTTデータとNSASデータの個数には大きな差異が生じる。“ぎんが”における姿勢決定値は精度の高いSTTを基準とする方針としているが、NSASのみによる観測更新が多数回行われると、姿勢はNSASを基準とした値に収束する。この姿勢はNSASのバイアス残留誤差ならびに構体熱歪み等による誤差のため、STTを基準とする姿勢とは必ずしも一致しない。しかし、多数回の観測更新によりカルマンゲインが下がっているため、後にSTTデータが得られても、STT基準姿勢に引き戻すことが十分には出来なくなっている。これに対する対策として、カルマンゲインの下限値を設け、カルマンゲインがその下限値より小さくならないように操作するものとした。これによって、姿勢決定値の収束速度を損なうことなく、かつSTTデータが得られたときに適切な姿勢更新が行われるという効果を得ている。

(4) 後進積分の採用

地上でのテレメトリ処理を行っているため、姿勢センサのデータを連続的に得ることが出来ない場合がある。運用スケジュールによっては長期間の姿勢データの中断がある場合があり、このような場合、再開後の初期姿勢情報の精度は低くなる。そこで、以下のような手順による後進積分処理により、テレメトリデータ全域にわたり、高い姿勢決定精度が得られるよう配慮した。

- 初期姿勢値を、以前の最終姿勢決定値あるいはNSAS + GASによる粗姿勢決定値とし、一連の姿勢テレメトリデータに対するフィルタリング処理を行う。(前進処理)
- この最終姿勢決定値あるいは新たにSTTデータが得られる様になった時点で決めた姿勢を初期値として、IRUデータを元に時間を逆行して積分を行う(後進処理)。
- 前進処理と後進処理の重み付け平均を取り、最終結果とする。姿勢データの状況によっては、重み付け平均を行わず、前進処理あるいは後進処理の結果のみを採用する。

4.3 “ようこう”におけるカルマンフィルタ

ここでは“ようこう”の軌道上の姿勢制御系として組み込まれているカルマンフィルタの概要を示す。はじめに、衛星の観測ミッション及び姿勢決定系に関連した“ようこう”の概要を示し、次いで、センサ構

成および、それらの使用方法や姿勢決定系の性能諸元をまとめる。最後に“ようこう”のカルマンフィルタに固有な実用上の工夫点について述べる。

4.3.1 “ようこう”の概要

“ようこう”は、1991年8月30日に鹿児島宇宙空間観測所からM-3SIIロケットにより第14号科学衛星SOLAR-Aとして打ち上げられ、遠地点高度790[km]、近地点高度520[km]の略円軌道に投入された。“ようこう”は太陽観測をミッションとする衛星である。主要な観測機器として、分解能2.4 [arcsec]の軟X線望遠鏡、分解能5 [arcsec]の硬X線望遠鏡を搭載しており、高分解能のX線太陽像観測を実現している。太陽像の精密な観測を行うことから、姿勢制御系では太陽望遠鏡の観測光軸方向(機体座標系におけるZ軸方向)を高精度・高安定度で制御している。また、必要に応じて ± 1.0 [deg]以下の範囲で観測光軸方向を太陽中心からオフセットさせる機能を有する。

“ようこう”では、姿勢制御則の実現のために、姿勢制御装置(ACE)にIntel8086相当の16bit計算機を採用しており、宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星としては初めて本格的なカルマンフィルタによる姿勢決定系を軌道上で実現している。姿勢センサとして搭載されている慣性センサ(IRU)、精太陽センサ(TFSS)、恒星センサ(STT)は、“ようこう”のミッション要求に基づき設計を見直し、新規開発されたものである。

4.3.2 姿勢決定系の概要

“ようこう”では、姿勢決定の基準座標に太陽指向座標を適用している。(図4-4参照)太陽指向座標では、衛星重心を座標原点として、太陽方向をZ軸とし、太陽自転軸方向(J2000平均赤道座標で、赤経19h4m、赤緯63.8 [deg]の方向として定義)とZ軸に直交した方向をX軸、これらと右手系をなすようにY軸を定義している。

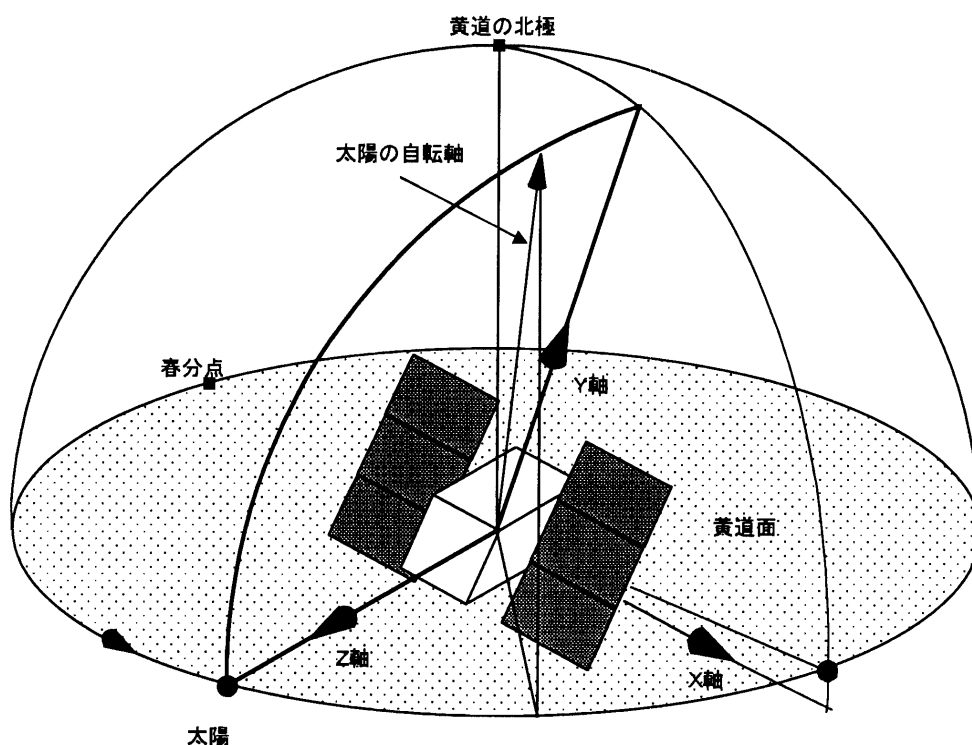


図 4-4 太陽指向座標の定義

姿勢決定値で検出する姿勢角は、太陽指向座標に対する X/Y/Z の各軸回りの微小角として定義されている。これらは、各軸ごとに独立しているものとして近似されている。その根拠は次のとおりである。衛星の目標姿勢は太陽指向座標と一致しており、太陽指向座標と衛星機体座標とのずれは X/Y 軸回りに ± 1 [deg] 以内、Z 軸回りには ± 3 [deg] 以内に抑えられている。この範囲内では上述の微小角に関する運動学的関係を各軸独立としたことによる近似誤差は 2.0 [arcmin] 以下 (X/Y 軸回り) であり、ミッション要求 (6 [arcmin] 以下) と比較して問題とならない。

“ようこう” では、観測軸方向、即ち X/Y 軸回りの姿勢安定度要求が高く、このため IRU にて検出する姿勢変動の分解能であるパルスウェイトを“ぎんが”の 0.8 [arcsec] から“ようこう”では 0.08 [arcsec] に変更している。IRU は、機体座標に対する X/Y/Z の三軸の姿勢変動を同時に検出可能であり、冗長系として衛星機体座標で $[1, 1, 1]/\sqrt{3}$ の方向に感度を有するスキュージャイロを備えた構成となっている。また、IRU ノイズの高周波成分を除去するために、ACE 内部でデジタルフィルタによる平滑化処理を行い、姿勢決定系に入力している。

姿勢検出センサとして、X/Y 軸回りの姿勢の検出には TFSS を、Z 軸回りには STT を使用している。これらのセンサの主要諸元を表 4-2 に示す。TFSS の視野中心は衛星機体座標の Z 軸と、STT の視野中心は -Y 軸方向と一致するように配置している (図 4-5 参照)。TFSS は太陽望遠鏡による観測ミッション中の姿勢検出用に新規に設計されたものであり、視野は狭いものの、非常に高い分解能を有している。“ようこう”では TFSS の他にも初期姿勢捕捉やセーフホールド用に ± 50 [deg] \times ± 50 [deg] の広視野を有する粗太陽センサ (NSAS) を搭載しており、TFSS が故障したときの冗長センサ (精度は劣化) としての役割も有する。

Z 軸回りの姿勢を検出する STT は、ミッション運用の観点から最適なものに設計されている。即ち、非常に明るい恒星カノープスのみを観測対象とし、光学系を広視野化することにより、常時カノープスを STT の視野に捉えることができる様にし、年間を通じた運用性を確保している。一方、広視野化に伴い、星方向検出の分解能の低下、光学系の収差の増大が生じる。しかし、“ようこう”では Z 軸の姿勢制御の要求は X/Y 軸回りと比較して緩い。このため、STT 出力星角に対して、光学歪み補正係数を用いて収差の影響を除去することにより、これらの影響を問題とならない程度に抑えることが可能である。

“ようこう”における姿勢決定系の機能ブロック図を図 4-6 に示す。基本的に、X/Y 軸まわりに関する姿勢決定系と、Z 軸まわりに関する姿勢決定系が独立となる構成となっている。これは、以下の理由による。

- X/Y 軸回りの姿勢検出を行う TFSS は日陰期間、Z 軸回りの姿勢検出を行う STT は星が地球に隠れる地蝕期間は利用不可となり、両者は基本的に独立的に発生する。
- ミッション観測が要求する姿勢決定精度は、X/Y 軸回りに厳しく、Z 軸回りには緩い。
- TFSS からは 0.125 秒毎に、STT からは 32 秒毎にセンサ出力が得られるため、X/Y 軸回りと Z 軸回りに対する観測更新周期が異なる。

なお、X/Y 軸回りの指向目標は見かけの太陽中心方向であり、軌道周回中に軌道光行方向差を修正する様

表 4-2 “ようこう”の精太陽センサと恒星センサの主要諸元

姿勢センサ	精太陽センサ	恒星センサ
動作視野	$\pm 1.0 \times 1.0 \pm \text{deg}$	$\pm 18.4 \times \pm 14.0 \text{deg}$
分解能	0.00054 deg	$7.5 \times 4.5 (\times 10^{-4}) \text{deg}$
精度 (ランダム誤差)	0.001 deg (1 σ)	0.01 deg (1 σ)
検出頻度	0.125 [sec] 毎	32 [sec] 毎 (出力遅延: 1 秒)

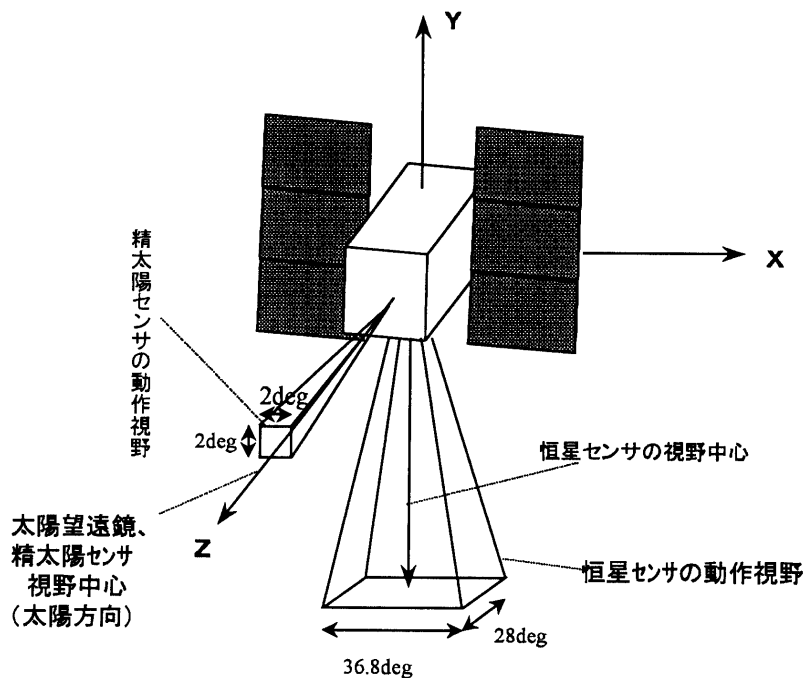


図 4-5 “ようこう” の観測センサ／姿勢センサの視野配置

に微小な追尾制御を行っている。ただし、観測方程式ではこの姿勢運動による影響を除去することは行わずに、カルマンフィルタにて2秒毎の高い頻度で観測更新を行い、これらの影響を抑制するように設計している。一方、Z軸回りに対しては、STTの出力頻度が32秒毎であることから観測更新の頻度も32秒毎としている。

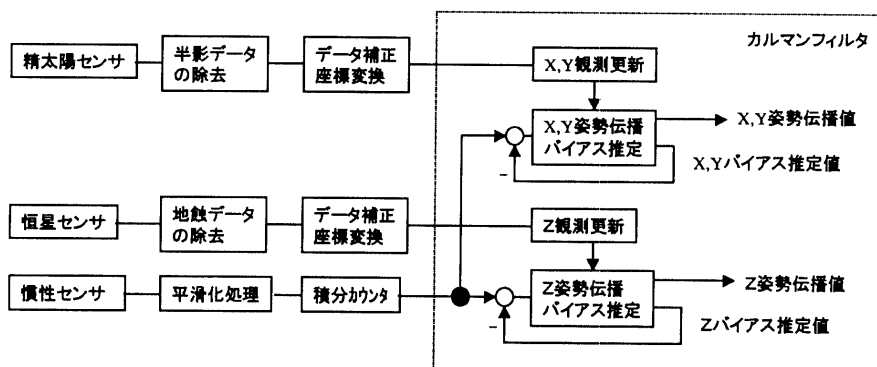


図 4-6 “ようこう” の姿勢決定系機能ブロック図

4.3.3 カルマンフィルタの主要諸元

“ようこう”の姿勢決定系に採用しているカルマンフィルタの主要諸元を表4-3に示す。

表 4-3 “ようこう” 姿勢決定系カルマンフィルタの主要諸元

項目	内容	備考
基準座標系	太陽指向座標 (5.3.1 参照)	
動作モード	単一	
姿勢センサ	X,Y 軸回り : 精太陽センサ (1 台) Z 軸回り : 恒星センサ (1 台)	
状態変数	微小姿勢誤差角 (次元数: 1) ジャイロレートバイアス (次元数: 1)	X,Y,Z の各々に 1 組ずつ
姿勢角推定精度	X,Y 軸回り 0.0027 [deg] 以下 (1σ) Z 軸回り 0.33 [deg] 以下 (1σ)	
ジャイロレートバイアス推定精度	1.7×10^{-3} [deg/h] 以下 (1σ)	実測値: 1.7×10^{-3} [deg/h] 以下
収束時間	X,Y 軸回り: 100 分以内	
姿勢伝播周期	0.125 秒	
観測更新周期	X,Y 軸回り: 2 秒 Z 軸回り: 32 秒	
姿勢力学モデル	三軸とも互いに独立した一次式を使用 $\dot{\theta} = \omega$	X,Y,Z の各々に 1 組ずつ
レートバイアスモデル	ランダムウォークモデルを適用 $\dot{b} = \eta_b$	X,Y,Z の各々に 1 組ずつ η_b はランダムノイズ
カルマンゲイン	時変システムを採用	(5.1.2 参照)
カルマンフィルタの初期化条件	観測残差が許容値を逸脱した場合	
カルマンゲイン最小値の設定	適用しない	(5.1.4 参照)
センサ観測時刻の同期	X,Y 軸回り: 30 [msec] 以下で同期 Z 軸回り: 1 秒以下で同期	(5.1.5 参照)
センサ出力遅延の処理		(5.1.6 参照)
誤った観測の除去	・ 精太陽センサの日陰による半影の影響の除去 ・ 恒星センサに対しては、カノープスの同定、地蝕影響のタイマによる除去	(5.1.7 参照)

4.3.4 実用上の工夫

軌道上でカルマンフィルタによる姿勢決定系を実現させるための主要な工夫点を以下に 3 つ述べる。これらは、姿勢センサの誤った観測の除去方法、STT に対する観測時刻の同期、及び搭載計算機に対する計算負荷の最小化に関するものである。

(1) 誤った観測の除去方法

はじめに、TFSS の誤った観測に対する工夫を示す。日照・日陰の境界部分で生じる半影蝕 (penumbra) 時には、円状の太陽光が部分的に地球により隠された状態となっているものの、蝕部分が少ない状態では太陽光の強度によっては TFSS が利用可能な状態となっている。しかし、TFSS は、CCD により太陽光強度中心を検出しているにすぎないため、検出された太陽光強度中心は実際の太陽中心からずれた状態となっている。特に日陰直前の半影蝕における TFSS の出力を観測更新に使用した場合には、太陽方向の変化が X, Y 軸回りのドリフトレート推定誤差となり、IRU により姿勢を保持している日陰中の姿勢制御への影響が懸念された。このため、軌道上で日陰期間を測定し、次の軌道周回での日照・日陰の期間を予測し、日

陰前、日照直後の1分間はTFSSの出力を使用しないようにしている。

次いで、STTの誤った観測に対する工夫を示す。STTには、地蝕による恒星像の喪失や、地球アルベド光による疑似星発生に対するアラーム検出機能が備えられているが、CCD上の星像情報のみで完全な異常検出は困難である。そのため、姿勢決定系でもSTTの出力から疑似星を除去する機能を持たせて、その除去をより完全なものにしている。疑似星の除去には具体的に以下の工夫を利用している。

- (a) タイマを用いた地蝕時期予測に基づくSTTの動作制御
- (b) 予測方向と検出方向との比較に基づくカノープスの同定
- (c) 総信号強度に基づくカノープスの同定

(a)項では、コマンドにて設定した地蝕期間には姿勢制御装置からSTTに信号処理を中断させるコマンドを送出する。STTではコマンドを受けるとアラームを出力し、結果的に姿勢決定系で用いられなくなる。

(b)項では、姿勢決定系にて姿勢角、太陽黄経から算出した推定カノープス方向を利用している。推定星方向とSTTにて検出したものとの差異が許容値より大きい場合はSTTの出力を使用しないことにより疑似星を除去する。(c)項では、STTにて検出した星像の総信号強度がカノープスに対して予測している範囲を逸脱している場合はSTT出力を使用しない。

(2) 恒星センサに対する観測時刻の同期

センサ出力の時刻同期を図るため、観測タイミング信号を姿勢制御装置から姿勢センサに供給し、各センサで観測タイミングを制御している。X/Y軸回りについては、出力要求から30[msec](撮像時間8.3[msec])以内にTFSSからの太陽角出力が得られる。一方、STTでは32秒毎に出力が得られるが、撮像は観測指令信号から1秒後の時点(撮像時間0.25~1秒の可変)に行われ、STT出力から観測残差を算出するタイミングと実際の撮像のタイミングとの間に約30秒のが生じている。これらの間の同期をとるため、観測方程式に入力する伝播姿勢には32秒前に推定した値を使用するように構成している。

(3) 搭載計算機に対する計算負荷の最小化

“ようこう”におけるカルマンフィルタでは、姿勢としてX, Y, Zの各軸について独立に扱っていることから、姿勢角とドリフトレートとの2つの状態変数を推定するカルマンフィルタが各軸に1組ずつ備えられた構成としている。また、カルマンフィルタの共分散行列の計算にはUD分解を使用している。なお、UD分解を用いた共分散行列の伝播・更新の計算では、近似を用いずに四則計算回数が最小となるように計算アルゴリズムに注意を払っている。UD分解自身は、“ようこう”に特有の工夫でなく、宇宙科学研究所におけるその後の天文観測用科学衛星におけるカルマンフィルタにも適用されている一般的な技法であるが、“ようこう”において初めて搭載化を実現したこと、および、“ようこう”でのモデルが各軸独立で扱われているために計算機負荷の軽減に有効である、ということで、1つの工夫としてここに紹介した。なお、このアルゴリズムの詳細に関しては、参考文献[4]の2.7項を参照されたい。

4.4 “あすか”におけるカルマンフィルタ

ここでは、“あすか”の姿勢決定系およびその中に用いられるカルマンフィルタについて、それらの概要を示す。はじめに、衛星の観測ミッションおよび姿勢決定系に関連した“あすか”の概要を示す。次いで、姿勢決定系の概要を示し、センサ構成およびそれらの使用方法や姿勢決定系の性能諸元をまとめる。最後に姿勢決定系の中に用いられているカルマンフィルタを取り上げ、主要諸元、ならびにそこで採用される実用上の工夫について説明する。

4.4.1 “あすか”の概要

第15号科学衛星“あすか”は、“ぎんが”に次ぐX線天文観測衛星である。1993年2月20日に鹿児島宇宙空間観測所からM-3SII型ロケットにより打ち上げられ、近地点高度520[km]、遠地点高度620[km]の略円軌道に投入された。X線望遠鏡を搭載し、中性子星やブラックホールのような高密度で相対論的な天

体や宇宙の高温ガス・宇宙 X 線背景放射などが起源となり放出される X 線を観測することをミッションとする。

“あすか”は太陽電池パドルが衛星に固定されており、その法線方向と太陽のなす角度が 30 [deg] 以内の姿勢に保つことがシステム条件となっている。X 線望遠鏡の視野は太陽電池パドル法線方向に垂直な方向に向いている。従ってある時期に向けることのできる望遠鏡視野中心方向は、太陽方向を中心軸とする大円に沿った幅 60 [deg] の帯状領域の内部になり、約半年で全天の任意方向をカバーすることができる。

“あすか”には“ようこう”と同タイプの姿勢制御用計算機を搭載し、軌道上でカルマンフィルタによる姿勢決定を実行している。“あすか”の姿勢制御系は、前述の帯状領域内の観測姿勢の範囲内を最大 0.2 [deg / sec] の角速度で姿勢マヌーバする機能を持ち、姿勢決定系はマヌーバ後すみやかに収束するように設計された。

4.4.2 姿勢決定系の概要

“あすか”の観測センサおよび姿勢センサの機体座標系に対する視野配置を図 4-7 に示す。姿勢更新に使用するセンサは、正規には二台の恒星センサ (STT) であり、太陽センサ (NSAS) は STT 故障時にバックアップとして使用する。(NSAS は主に姿勢異常検出用に使用するため広視野を優先して設計されており、検出精度は高くない。そのため、NSAS を姿勢更新に使用すると、姿勢決定精度は STT のみを使用する場合に比べて著しく悪くなる。)

STT の主要性能を以下に示す。

- ・ 視野角 : 5 [deg] × 10 [deg]
- ・ 星検出限界等級 : 6 等級
- ・ 星位置検出精度 : 18 arcmin 以下 (3σ)
- ・ 星位置出力頻度 : 32 sec
- ・ トラック機能 : 最大 1 [deg] × 1 [deg] のトラックウィンドウを 3 個まで

姿勢を伝播するための慣性センサ (IRU) として、従来から天文観測用科学衛星で搭載されてきた FRIG タイプのジャイロ 4 台が一つのパッケージになった 4 軸方向 (X, Y, Z, スキュー) 角速度検出可能な慣性センサ (IRU-SA) と、ジャイロ故障時の冗長のために FRIG を 1 台内蔵した慣性センサ (IRU-SB) を搭載している。これら合計 5 台のジャイロの角速度感度軸はそれぞれ異なった方向を向いており、このうちの 3 台を用いて三軸回りの角速度を計測する。IRU のパルスウェイトは、“ようこう”における 0.08 [arcsec/pulse] から 0.16 [arcsec/pulse] に変更している。これは、“あすか”では姿勢マヌーバをする必要があることから、“ようこう”よりもダイナミックレンジを広げる必要があり、角速度計測レンジを“ようこう”における 0.16 [deg/sec] から 0.32 [deg/sec] に変更したことに伴った変更である。

“あすか”の姿勢決定系の性能諸元を表 4-4 にまとめる。また、機能ブロック図を図 4-8 に示す。

表 4-4 “あすか”の姿勢決定系の性能諸元

項目	要求性能	実現性能	備考
姿勢決定精度 (3σ)	X 60 [arcsec] Y Z	18 [arcsec]	・この要求性能は観測センサ指向軸の制御精度全体であるが、そのうちほとんどが姿勢決定精度要求分である
収束時間	X 1 [rev] 以内 Y Z	1 [rev] 以内	・姿勢マヌーバ終了直後からの時間で規定しているため、一軌道以内には収束するとしている

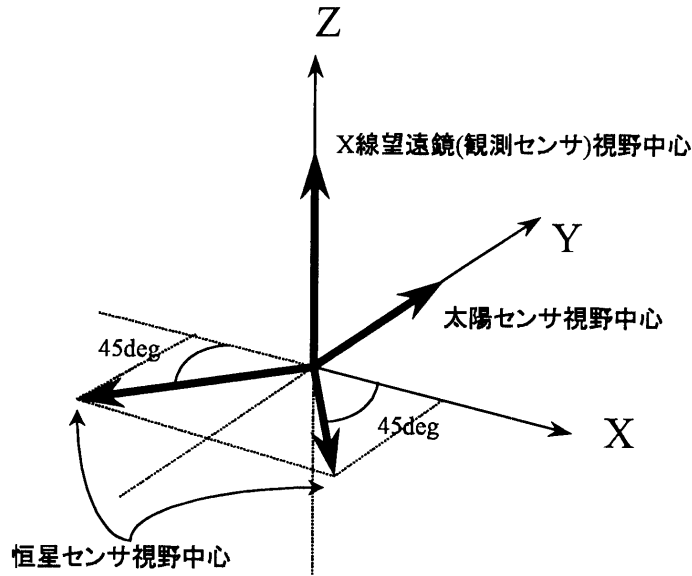
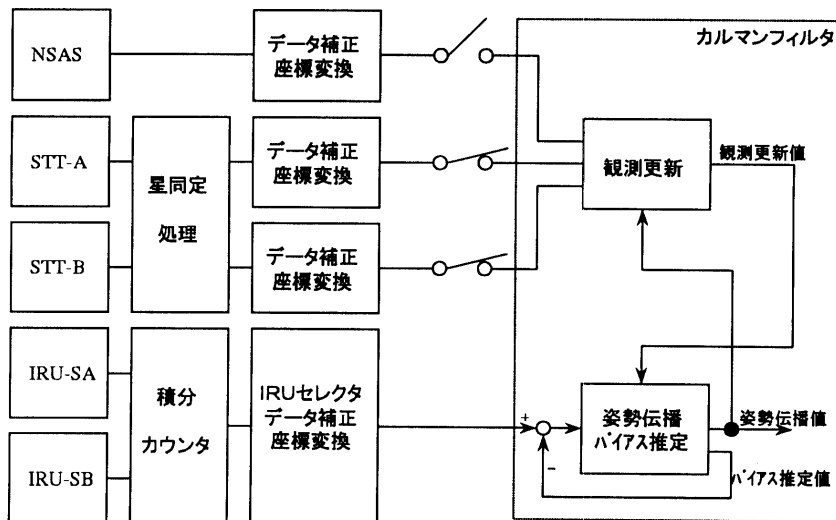


図 4-7 “あすか” の観測センサ/姿勢センサの視野配置



NSAS=太陽センサ, STT=恒星センサ, IRU=慣性センサ

図 4-8 “あすか” の姿勢決定系機能ブロック図

4.4.3 カルマンフィルタの主要諸元

“あすか”の姿勢決定系の特徴は、姿勢マヌーバを実行するたびに STT で観測される星が異なるため、マヌーバ後に STT で観測が予想される観測目標星の慣性空間での方向情報（スターカタログ）をオンボードで持っていることである。このスターカタログは、STT における追尾が予想される星の分だけをコマンドで送信し、あらかじめ 6 姿勢分をオンボードで持つことができる。スターカタログは、1つのトラックウィンドウにつき 1 個の恒星しか追尾しないため、星同定の処理はオンボードでは実行しない。

“あすか”で使用するカルマンフィルタは、誤差共分散を逐次計算するカルマンゲインの時変システムタイプであり、カルマンゲインを意図的に操作するような処理は行っていない。

“あすか”の姿勢決定系に採用しているカルマンフィルタの主要諸元を表 4-5 に示す。

4.4.4 実用上の工夫

以下に、“あすか”のカルマンフィルタを設計・開発するに際して採用した実用上の工夫を示す。

(1) アルゴリズムの簡素化

“あすか”に搭載されている姿勢制御用計算機の処理能力は、地上で使用されている計算機に比べればそれほど高くない。また、“あすか”の定常運用時は三軸制御であるので、共分散行列伝播は近似的に 3 軸独立に扱うことができる。そこで計算処理負荷を下げるために、伝播処理の行列演算式をあらかじめ展開して前処理を行うことにより、無駄な計算をしないようにした。その計算式は、“ようこう”と全く同じである。

また、センサ出力による観測更新の処理式についても、行列演算を前処理することにより、計算量を減らすことができた。“あすか”では STT 視野方向が衛星機体座標軸方向に向いていないため、三軸独立には扱えないが、これによる項が若干増えるだけでほとんど“ようこう”と同様な式となる。

(2) カルマンフィルタの初期化

“あすか”の運用では観測対象が変わるごとに姿勢マヌーバを実行する。そこで、マヌーバ中に蓄積された誤差をすみやかに除去するためにマヌーバ実行後にカルマンフィルタの共分散行列を初期値に戻す処理を行った。

また、何らかの事情で観測残差が許容値を超えた場合もカルマンフィルタの初期化を行っている。

(3) センサ出力遅延の処理

“あすか”に搭載されている STT の撮像開始間隔は 32 秒である。星の観測情報による共分散行列の更新処理は、撮像が始まってから 32 秒後に行っている。そのため、各撮像開始のタイミングにおける姿勢情報（オイラーパラメータ）を記憶しておき、更新処理では同じ時刻の姿勢情報と観測データを用いて処理を行うようにして、センサ出力が遅延したことによる誤差が生じないようにしている。

(4) 誤った観測の除去

姿勢制御用計算機の処理負荷を下げるため、STT 出力に対するチェックはほとんど行っていない。しかし、ごくまれに軌道上で STT から誤った出力が行われることがあった。これに対処するために、以下のようなことを行った。

- STT 側で星であると判定する条件パラメータ値を厳しくした。
- 推定量のうちジャイロレートバイアスレートは短時間では大きく動かないと予想される。そのため、カルマンフィルタ係数を調整して、多少観測値がずれてもジャイロレートバイアスレートが大きく変化することがないようにした。
- 放射線が多い地帯を衛星が通っている時は更新処理を行わないように、地蝕カウンタという機能を使って観測更新を禁止した。

表 4-5 “あすか” 姿勢決定系カルマンフィルタの主要諸元

項目	内容	備考
基準座標系	慣性座標系 (2000年平均分点赤道座標系)	スターカタログを規定している座標系を適用
動作モード	単一。ただし、姿勢マヌーブ中は観測更新処理を禁止している。	
姿勢センサ	恒星センサ × 2 台 (ノミナル運用時) 恒星センサ × 1 台 + 太陽センサ × 1 台 (恒星センサ 1 台故障時)	
状態変数 (=推定値)	姿勢推定誤差角 (機体座標系, 次元数:3) IRU レートバイアス推定(機体座標系, 次元数:3) 誤差	全次元: 3 + 3 = 6
姿勢角推定精度	各軸とも 18 [arcsec] (3σ)	熱歪み等の要因により生じる長周期誤差を除く
ジャイロレート バイアス推定精度	各軸とも 0.01 [deg/hour] 以下 (3σ)	熱歪みによると推測される恒星センサデータ変動を含む最悪値
収束時間	約 100 分以内 (=1 軌道以内)	姿勢マヌーブ終了後、姿勢決定系が収束するまで
姿勢伝播周期 [sec]	0.125	
観測更新周期 [sec]	32	
姿勢力学モデル	三軸ともにカップルした厳密式を使用 $\dot{q} = (1/2)\Omega(\omega)q$	q : オイラーパラメータ ω : 衛星角速度
IRU レートバイアス モデル	三軸ともに τ_b を時定数とする一次式を使用 $\dot{b} = -(1/\tau_b)b + \eta_b$	b : IRU レートバイアス η_b : ランダムノイズ
カルマンゲイン	時変システムを採用 (誤差共分散を逐次計算)	(5.1.2 参照)
カルマンフィルタ の初期化条件	・ 観測残差が許容値を逸脱した場合 ・ 姿勢マヌーブ終了直後	(5.1.3 参照) 誤差共分散のみ初期化, 推定値は継続使用
カルマンゲイン最 小値の設定	適用しない	(5.1.4 参照)
センサ観測時刻の 同期	姿勢制御装置から出力する撮像タイミング信号と恒星センサ観測時刻は 1 秒以下で同期する	(5.1.5 参照) 恒星センサの撮像時間分を同期ずれと見なした
センサ出力遅延の 処理	実施する	(5.1.6 参照)
誤った観測の除去	恒星センサデータに対して直接的には実施しない (誤った観測の影響が少なくなるようにフィルタ係数を調整)	(5.1.7 参照)

4.5 “はるか”におけるカルマンフィルタ

ここでは、“はるか”の姿勢決定系およびその中に用いられるカルマンフィルタについて、それらの概要を示す。はじめに、衛星の観測ミッションおよび姿勢決定系に関連した“はるか”の概要を示す。ついで、姿勢決定系の概要を示し、センサ構成およびそれらの使用方法や姿勢決定系の性能諸元をまとめる。最後に姿勢決定系の中に用いられているカルマンフィルタについて主要諸元、ならびにそこで採用されている実用上の工夫について説明する。

4.5.1 “はるか”の概要

第16号科学衛星 “はるか” は、スペース VLBI に関わる工学諸技術の研究並びにそれを用いた電波天文観測をミッションとする工学試験衛星である。工学の観点での目的はスペース VLBI を実現するために必要な技術、例えば大型の展開式アンテナ、低雑音受信、高精度姿勢制御、位相基準信号の伝送、精密軌道決定などの実現、理学の観点での目的は高分解度の天体画像を得ること（従来の地上局のみによる観測に比べ約3倍の解像度—最大90マイクロ秒角—がえられる）によって、活動銀河中心核 (AGN) の高分解度観測、超光速運動天体の構造変化のモニタ観測、AGN の赤方遷移と固有運動の関係の測定、水酸基メーザと水メーザのサイズ頻度分布の測定等を行うことである。姿勢系に対する要求は、慣性基準で与えられる目標姿勢に対して衛星本体の姿勢を 0.01[deg] の精度で制御すると同時に、電力確保・熱制御上の観点から禁止されている領域（太陽方向からの離角 70deg 以内の領域）を除く任意の方向に姿勢指向するための大角度マヌーバを行うことである。“はるか” は世界初の電波天文用望遠鏡衛星として 1997 年 2 月 12 日に打ち上げられた後、近地点高度を上昇させる軌道制御、口径約 8 メートルの観測用アンテナの展開等を行い、観測運用へと移行した。現在、近地点高度約 560 [km]、遠地点高度 21,400 [km] の楕円軌道上を周回し、衛星と地上の電波望遠鏡を結合したスペース VLBI(超長基線干渉計) 観測によって各種の電波天体を観測する運用を継続中である。

4.5.2 姿勢決定系の概要

姿勢検出には姿勢更新用の光学センサとして高精度スタートラッカ (STT) 2 台、姿勢伝播用の慣性センサとして、4 軸レート積分ジャイロを内蔵する慣性基準装置 (IRU) および慣性基準装置のバックアップとしての光ファイバジャイロ (IRU-F) を搭載している。これらジャイロのうち 3 系統のデータを用いてカルマンフィルタで衛星の姿勢及びジャイロドリフトを推定するオンボード姿勢決定ロジックを構成している。姿勢センサの主要性能は表 4-6 に示す通りである。

表 4-6 はるかの STT および IRU の主要性能

センサ	主要性能	
STT	視野角：	11 [deg] × 5.6 [deg]
	星検出限界等級：	6 等級
	星位置検出精度：	18 [arcsec](3 σ) 以下
	星位置出力頻度：	32 [sec] 毎
IRU	パルスウェイト：	0.08 [arcsec/pulse]
	G 不感ドリフト安定度：	0.001 [deg/h] (1 σ) in 2h
	等価雑音角：	3 [arcsec] (P-P) in 1h

アクチュエータを含めた “はるか” 姿勢センサの配置を図 4-9 に示す。STT 視野方向は、視野中心から 41.2[deg] のコーン状の妨害光回避領域内に、太陽、観測用アンテナ、太陽電池パドルが侵入しないよう設定している。視野方向の詳細を図 4-10 に示す。STT の使用に際しては、バンアレン帯通過時の放射線による不要なセンサ出力の発生、地球光が妨害光回避視野内へ侵入する可能性がある等の制約を受ける。運用での最悪ケースとしては、軌道周期 6 時間余りの中で 1.5 時間程度のみ STT が使用可能で、かつ、個々の STT が互い違いのタイミングで使用可能となる（視野内に恒星を捕える）ケースを想定している。それ以下の STT 使用率となる姿勢では必要な姿勢決定精度の確保は困難であるため運用制約領域としている。姿勢決定系の機能ブロックを図 4-11 に、性能諸元を表 4-7 に示す。

4.5.3 カルマンフィルタの主要諸元

“はるか” 姿勢決定系は “あすか” までの天文観測用科学衛星での構成を継承する形で構成されている。ただし、軌道周期の特性から従来の衛星に比べ STT が恒星を連続して捕えていられる時間が長く、一方

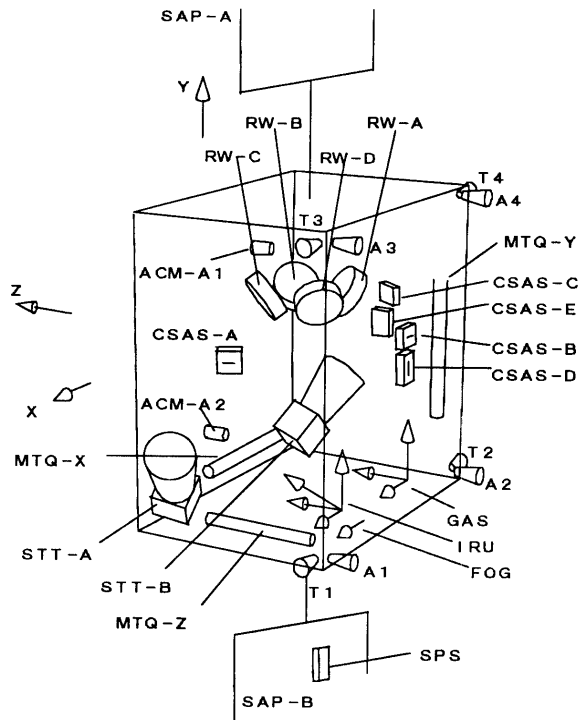


図 4-9 “はるか” の観測センサ/姿勢センサの配置

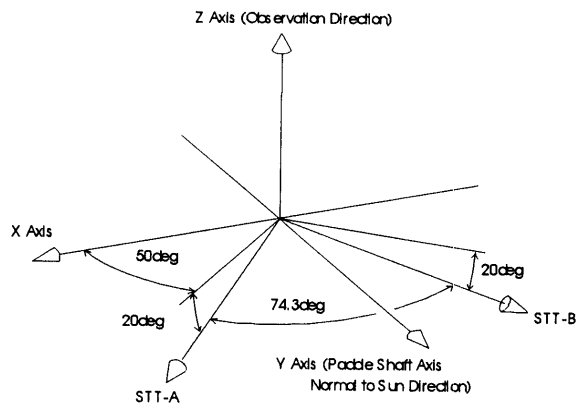


図 4-10 “はるか” の STT 視野配置

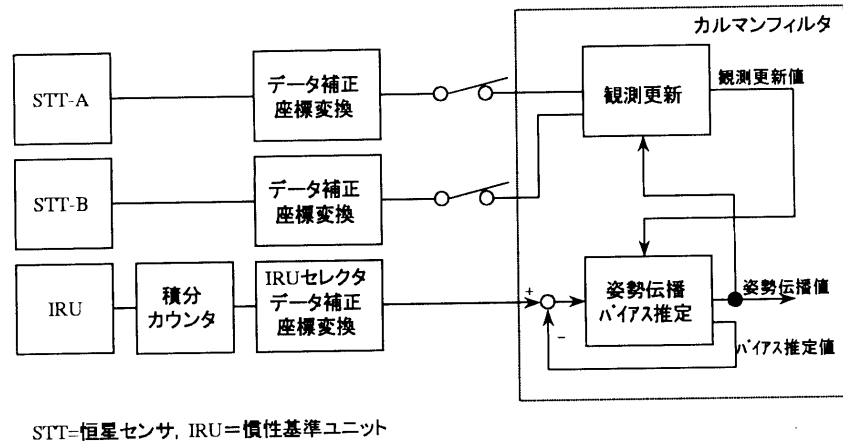


図 4-11 “はるか” の姿勢決定系機能ブロック図

表 4-7 “はるか” の姿勢決定系の性能諸元

項目	要求性能	実現性能	備考
姿勢決定精度	21 [arcsec]	35 [arcsec]	STT 使用可能時間 2 時間, 姿勢伝播時間 4 時間程度の運用を想定
ジャイロレートバイアス推定精度	0.001 [deg/h]	0.002 [deg/h]	(同上)
収束時間	1 軌道以内	1 軌道以内	姿勢マヌーバ終了後から収束までの時間

(注) 実現性能は 97/04/02 時点での評価結果による。この時点ではオンボードデータによるチューニングは行われていなかった。この後 STT-A レンズの恒温制御が不能となり、性能は下方に見直さざるを得なくなった。

IRU データを用いた姿勢伝播時間も大幅に長くなっているため、ジャイロ系のドリフトレート推定を重視したパラメータ設定を行っている。カルマンフィルタの諸元を表 4-8 に示す。

4.5.4 実用上の工夫

(1) 星の誤同定の排除

“はるか” では観測目標天体の切り替えを行うため、大角度マヌーバが 1 回 / 1 日以上 の頻度で実施されている。マヌーバ中は IRU データを用いた姿勢伝播が行われているが、IRU ミスアライメントおよびスケールファクタ誤差のためその精度は定常観測時に比べて大幅に劣化する。そのためマヌーバ後の姿勢更新において目標星の近傍に存在する別の星がたまたま STT に捉えられた場合に、誤ってそれをカルマンフィルタの観測更新に使用する危険が”あすか”等の運用経験から指摘されていた。これに対応するため、以下の処置を施した。

- 複数の星データが STT から得られた場合、星データ間の離角と目標星のカタログデータ間の離角を比較し、それらの間の差が大きい (0.02 [deg] 以上) 場合には、全ての星データの使用を中止する。
- 姿勢マヌーバが停止して十分な時間が経過してから STT データの使用を開始する。

表 4-8 “はるか” 姿勢決定系カルマンフィルタの主要諸元

項目	内容	備考
基準座標系	慣性座標系 (2000年平均分点赤道座標系)	スターカタログを規定している座標系を適用
動作モード	単一。ただし、姿勢マヌーバ中は観測更新処理を禁止している。	
姿勢センサ	スタートラッカ：2台	
状態変数 (=推定値)	オイラーパラメータ4次 (慣性系) ジャイロレートバイアス3次 (機体系)	
姿勢角推定精度	X/Y/Z 21[arcsec]	STT 地触あけ直前 ジャイロレートバイアス推定誤差による伝播姿勢ドリフト分を含む
レートバイアス推定精度	0.001 [deg/hour]	
収束時間	1軌道周回以内	STT 地触パターンが1サイクル回るまでに収束
姿勢伝播周期 [sec]	X/Y/Z 0.125 [sec]	
観測更新周期	X/Y/Z 32 [sec]	
姿勢力学モデル	X/Y/Z 軸ともにカップルした厳密式を使用 $\dot{q} = (1/2)\Omega(\omega)q$	
レートバイアスモデル	三軸ともに τ_b を時定数とする一次式を使用 $\dot{b} = -(1/\tau_b)b$	
カルマンゲイン	時変システムを採用	
カルマンフィルタの初期化条件	・ 指向制御モードへの移行時 ・ 観測残差が規定値を逸脱した場合	
カルマンゲイン最小値の設定	適用しない	
センサ観測時刻の同期	撮像タイミングは AOCs タイミング (32sec 周期固定クロック) に同期 IRU 計測カウンタも同様	
センサ出力遅延の処理	センサ出力遅延に関して実施	
誤った観測の除去	STT データ間の離角とカタログデータ間の離角が規定値を逸脱した場合、全 STT データを使用しない。観測算差が誤差共分散の規定倍を逸脱した場合その観測データのみ使用しない。	

第1の処置は簡易的な星同定を意図している。STTによって得られた星データ間の離角がスターカタログに基づく離角と一致していないということは、目標星とは別の星をトラックしていること意味しているため、この場合には観測更新を行わないこととしている。第2の処置は、マヌーバ終了後に行われる観測更新の際に使用する星として、マヌーバ途中で誤って捕捉された星を使用しない様にするための処置である。運用実績では、第2の処置において、経過時間の設定が不十分であったため、微少な角度のマヌーバで、かつ、マヌーバ前後で同一の星を使用する場合に誤同定をおこしたケースがあったが、現在ではマヌーバ終了後から観測更新を許可するまでの時間の設定値を変更し、問題なく運用されている。

(2) 誤差の大きなデータの排除

カルマンフィルタの収束途中において、ノイズを含む誤った観測データによって観測更新が行われた場合、推定値の収束に深刻な影響を与える場合がありうる。このような誤った観測データを排除するため、カルマンフィルタ誤差共分散の規定倍以上の残差を持ったデータは観測更新に使用しないようにした。これにより、カルマンフィルタの収束途中での異常観測データの適切な排除が可能になる。これと同時に、STT

へのパラメータ設定ミス等で特定の星データのみ精度が劣る様なケースでも、そのデータのみを観測から排除することにより、相応の姿勢精度の維持が期待できる。また、(1)の処置とあわせて星の誤同定の排除の効果も期待できる。運用実績ではおおむね良好であるが、STTの運用パラメータを大きく誤った場合(例えば、撮像時間を長く設定しすぎ、異常に大きく星像が広がったようなデータが生じた場合)、STT側のセントロイド計算結果が大きく誤り、この処置のみではデータを排除できなかったケースがあった。今後の衛星では、STTより出力されるピクセル強度データ等とあわせた総合的な判定則等を検討することが必要であろう。

(3) カルマンフィルタのリセット

伝播姿勢が劣化していると考えられる以下の2ケースにおいて、カルマンフィルタをリセットし、初期状態から動作を再開させることとした。

- 姿勢マヌーバ終了時 (PID 制御移行時)
- STT データの観測残差が 0.02[deg] を越えた場合

姿勢マヌーバ終了時のリセットは従来の設計を継承するものである。STTの観測残差が大きい場合のリセットは、STTの誤差モデルにて想定される以上の残差が発生し、ドリフトレート推定が不良となっている等の不具合が想定される場合である。“はるか”の場合には前述したように IRU ドリフトの推定を重視したパラメータ設定になっているため、一旦フィルタが収束した後は、たとえ STT のデータを用いた観測更新が行える時間でも、姿勢角に対するカルマンゲインが低いため姿勢がドリフトしてゆく様なケースがあり得る。STT 使用可能時間が充分にとれる場合にはこの状態からでも徐々に観測更新が行われ最終的には姿勢が収束できると考えられる。ところが、“はるか”の場合には STT を用いた観測時間は最短 1.5 時間に制約されており、その間に収束が見込めない場合には、その後、STT が使用不能となる最長 4.5 時間の期間の姿勢伝播でさらに姿勢が劣化してゆく可能性が想定される。このような状態を回避するため、残差が多い場合にはカルマンフィルタをリセットして更新スピードを確保することとした。打ち上げ後の実績では、予期せぬ原因 (STT レンズの恒温制御不能、衛星温度制御の不調) により、当初想定された以上の STT データのふらつきが出ている。この結果、IRU ドリフトレートの推定精度が劣化し、STT が恒星可視状態であるにも関わらず、ジャイロドリフトによって大きく姿勢が流れてゆく場合が発生している。この場合でもある程度大きな誤差が出た時点でフィルタのリセット機能によってその都度 STT 基準に追従する形の更新が行われ、伝播異常によるドリフトで姿勢が発散することが抑えられている。このような動作は想定した以上の最悪状態で生じるものではあるが、カルマンフィルタのリセット機能は効果を発揮し、姿勢の維持に貢献している。

4.6 ASTRO-E におけるカルマンフィルタ

ここでは、ASTRO-E の姿勢決定系およびその中に用いられるカルマンフィルタについて、それらの概要を示す。はじめに、衛星の観測ミッションおよび姿勢決定系に関連した ASTRO-E の概要を示す。次いで、姿勢決定系の概要を示し、センサ構成およびそれらの使用方法や姿勢決定系の性能諸元をまとめる。最後に姿勢決定系の中に用いられているカルマンフィルタを取り上げ、主要諸元、ならびにそこで採用される実用上の工夫について説明する。

なお、ASTRO-E は本報告書の執筆時点において FM 開発中の衛星であるため、本節の記述内容は現時点での設計に基づくものである。従って、今後、設計の進捗に伴い見直される可能性があることを予め断っておく。

4.6.1 ASTRO-E の概要

第 19 号科学衛星 ASTRO-E は、“あすか”に次ぐ X 線天文観測衛星として開発が行われており、2000 年 2 月打ち上げ予定の衛星である。“あすか”と同様に X 線望遠鏡を搭載し、宇宙の X 線源を指向観測するこ

とをミッションとするが、“あすか”よりも大型の観測装置を搭載し、より高精度な観測を可能にしている。従って姿勢制御系に要求される制御精度も“あすか”より高く、姿勢決定系をより高精度化する必要がある。

熱・電力的なシステム制限は、“あすか”と同様に、衛星に固定された太陽電池パドルの法線方向と太陽方向のなす角が 30 [deg] 以内の姿勢を保つことである。X 線望遠鏡視野は太陽電池パドル法線方向と垂直に向いているため、太陽方向を中心軸とする大円に沿った幅 60 [deg] のベルト状の範囲を観測できる。

ASTRO-E 姿勢制御系は、前述のベルト内の観測姿勢を最大 0.2 [deg / sec] の角速度で姿勢マヌーバする機能を持ち、姿勢決定系はマヌーバ後すみやかに収束する必要がある。この収束の速度も“あすか”より高速化を要求されている。

4.6.2 姿勢決定系の概要

ASTRO-E の観測センサおよび姿勢センサの機体座標系に対する視野配置を図 4-12 に示す。姿勢更新に使用するセンサは、ノミナル運用時は二つの恒星センサ (STT) であり、太陽センサ (NSAS) は STT 故障時にバックアップとして使用する。(NSAS は“あすか”のタイプよりも高分解能化が図られているが、高精度化はなされていないため、やはり NSAS を姿勢更新に使用すると姿勢決定精度は悪くなる。)

姿勢決定精度を高めるために STT の高精度化を図り、収束の速度を速めるために STT の出力間隔の高速化を図った。その結果、STT の設計精度は“あすか”の 18 [arcsec](3 σ) に対して 7 [arcsec](3 σ)、出力間隔は“あすか”の 32 秒に対して 2 秒を目指して開発を行っている。

STT の視野中心方向が“あすか”と異なっているのは、“あすか”の経験から、なるべく観測センサと STT の使用できる時間帯を重ねた方がミッション観測時の姿勢精度を高めることができると判断したためであり、構造上可能な限り STT の向きを観測センサの向きに近づけた結果である。

姿勢を伝播するための慣性センサ (IRU) は、“あすか”と同じ構成であり、4 台の FRIG タイプジャイロパッケージの慣性センサ (IRU-SA) と、ジャイロ故障時の冗長のための FRIG 1 台内蔵タイプの慣性センサ (IRU-SB) を搭載している。FRIG 感度軸は 5 軸とも異なった方向を向いており、このうち 3 台を用いて三軸回りの角速度を計測する。

ASTRO-E の姿勢決定系の性能諸元を表 4-9 にまとめる。また、機能ブロック図を図 4-13 に示す。

4.6.3 カルマンフィルタの主要諸元

“あすか”では STT によりトラックが予想される星に対してのみスターカタログをオンボードで持たせたが、慣性センサのスケールファクタ誤差等により姿勢マヌーバ後の姿勢がずれるため、トラックウィンドウ幅を大きくとらなければ正しくトラックできなかつた。その反省から、ASTRO-E ではオンボードで離角比較による星同定 (目標としている星が正しい星であるかどうかを、その周りの星との離角により判断する確認手法) を行う機能を持たせることにした。そのために処理負荷が高くなるが、幸い ASTRO-E では“あすか”よりも 2 倍以上高速な MPU と大容量のメモリを持つ姿勢制御用計算機が利用できることから、離角比較によるオンボードの星同定が実現できる。スターカタログは二つの STT の視野内に入ると思われるそれぞれ 10 個程度の星情報を数通りの姿勢分だけ、オンボードに持たせることができる。

表 4-9 ASTRO-E の姿勢決定系の性能諸元

項目	要求性能	実現性能	備考
姿勢決定精度 (3 σ)	X Y Z 14 [arcsec]	TBD [arcsec]	・この要求性能は観測センサ指向軸の制御精度全体であるが、そのうちほとんどが姿勢決定精度要求分である
収束時間	X Y Z 10 [min] 以内	TBD [min] 以内	・姿勢マヌーバ後、初めて姿勢更新処理が始まってから収束するまでの時間として規定している

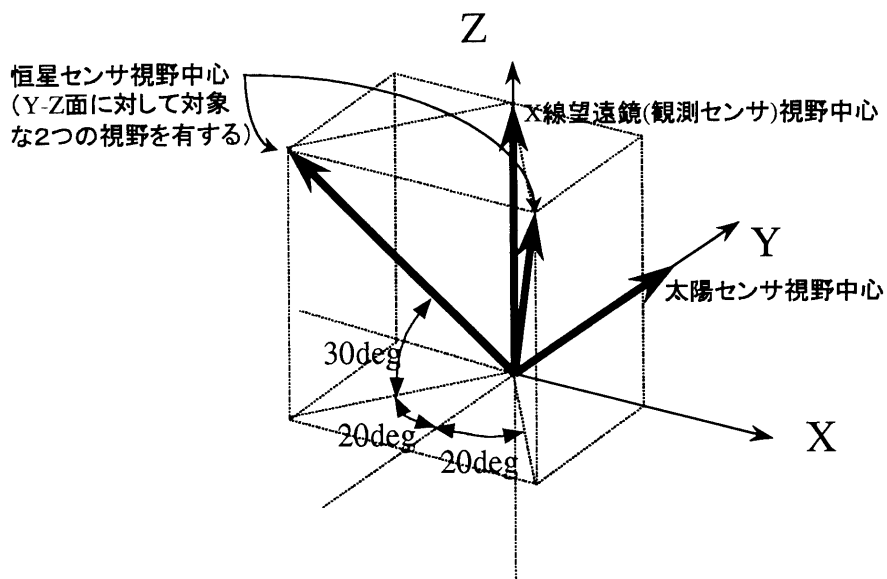


図 4-12 ASTRO-E の観測センサ／姿勢センサの視野配置

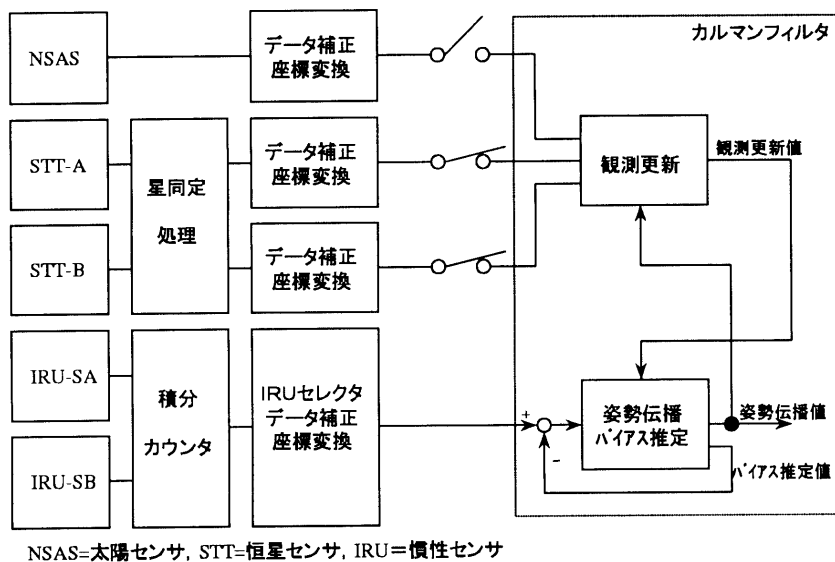


図 4-13 ASTRO-E の姿勢決定系機能ブロック図

この星同定処理を行うことにより、マヌーバ後の STT によるトラック間違いを防ぎ、姿勢決定系の破綻を防ぐことができる。

ASTRO-E で採用するカルマンフィルタは、基本的には“あすか”同様の誤差共分散を逐次計算するカルマンゲイン時変システムのタイプであるが、定常状態における姿勢更新能力を高めるために、カルマンゲインに最小値を設けて、それ以下にはならないように調整する。

ASTRO-E の姿勢決定系に採用しているカルマンフィルタの主要諸元を表 4-10 に示す。

表 4-10 ASTRO-E 姿勢決定系カルマンフィルタの主要諸元

項目	内容	備考
基準座標系	慣性座標系 (2000 年平均分点赤道座標系)	スターカタログを規定している座標系を適用
動作モード	単一。ただし、姿勢マヌーバ中は観測更新処理を禁止している。	
姿勢センサ	恒星センサ × 2 台 (ノミナル運用時) 恒星センサ × 1 台 + 太陽センサ × 1 台 (恒星センサ 1 台故障時)	
状態変数 (=推定値)	姿勢推定誤差角 (機体座標系, 次元数:3) IRU レートバイアス推定(機体座標系, 次元数:3) 誤差	全次元数: 3 + 3 = 6
姿勢角推定精度	各軸とも 14 [arcsec] (3 σ) 14	
ジャイロレート バイアス推定精度	各軸とも 0.005 [deg/hour] 以下 (3 σ)	
収束時間	10 分以内	姿勢マヌーバ後初めて姿勢更新が行われてから姿勢決定系が収束するまで
姿勢伝播周期 [sec]	0.125	
観測更新周期 [sec]	2	
姿勢力学モデル	三軸ともにカップルした厳密式を使用 $\dot{q} = (1/2)\Omega(\omega)q$	q : オイラーパラメータ ω : 衛星角速度
IRU レートバイアス モデル	三軸ともに τ_b を時定数とする一次式を使用 $\dot{b} = -(1/\tau_b)b + \eta_b$	b : IRU レートバイアス η_b : ランダムノイズ
カルマンゲイン	時変システムを採用 (誤差共分散を逐次計算)	(5.1.2 参照)
カルマンフィルタ の初期化条件	・ 観測残差が許容値を逸脱した場合 ・ 姿勢マヌーバ終了直後	(5.1.3 参照) 誤差共分散のみ初期化, 推定値は継続使用
カルマンゲイン最 小値の設定	実施する	(5.1.4 参照)
センサ観測時刻の 同期	姿勢制御装置から出力する撮像タイミング信号と 恒星センサ観測時刻は 1 秒以下で同期する	(5.1.5 参照) 恒星センサの撮像時間分を同期ずれと見なした
センサ出力遅延の 処理	実施する	(5.1.6 参照)
誤った観測の除去	恒星センサデータに対して直接的には実施しない (誤った観測の影響が少なくなるようにフィルタ係数を調整)	(5.1.7 参照)

4.6.4 実用上の工夫

(1) アルゴリズムの簡素化

“あすか”同様、共分散行列伝播を 3 軸独立と見なし、前処理の計算を行うことにより計算負荷を下げる工夫を行った。

(2) カルマンフィルタの初期化

姿勢マヌーバごとにカルマンフィルタの共分散行列を初期化し、マヌーバ後の姿勢誤差収束時間を早める工夫を行った。

(3) カルマンゲイン最小値の設定

4.6.3 項でも述べたように、定常時の姿勢更新能力を高めるために、カルマンゲインに最小値を設けた。

(4) センサ出力遅延の処理

ASTRO-E に搭載する STT は、出力間隔の高速化を図り 2 秒毎に出力が得られるが、やはり姿勢制御用計算機処理の基本サイクル (0.125 秒) に比べれば大きな遅延が生じる。また、STT では出力間隔の高速化のために、撮像と STT が持つ計算機の処理を並行して行っており、姿勢制御用計算機が出力する STT データは STT 処理サイクルにおける 2 サイクル前の撮像データになる。

そこで、各撮像タイミング時の姿勢情報 (オイラーパラメータ) を、対応する時刻に撮像した STT データが得られるまで記憶しておき、同じ時刻の姿勢情報と STT 観測データを用いて更新処理を行った。これにより、センサ出力遅延による誤差が生じないようにした。

なお、制御のために用いられる姿勢誤差情報は、その時点における姿勢伝播の最新値を用いている。即ち、新たなセンサ出力が得られるまでは、その直前のセンサ出力によって観測更新された姿勢を伝播したものを使用し、新たなセンサ出力が得られた後は、その出力により過去に遡って観測更新を行った姿勢を元に姿勢伝播したものを使用している。また、制御のために用いられる姿勢レートは、その時点における IRU 出力から、その時点におけるジャイロレートバイアス推定値を引いた値を用いているが、ジャイロレートバイアス自身が緩慢な変化しかしないため、姿勢情報で行っているような厳密な出力遅延処理は行っていない。(4.1.6 参照)

上記の遅延処理は、「ぎんが」以降の衛星の地上における姿勢決定処理においてすでに採用されてきた手法であるが、オンボードとして実現するのは ASTRO-E が初めてとなる。これは、衛星の姿勢が主として慣性指向であったため、姿勢制御の目的で姿勢決定を行う目的として、上記の厳密な処理をとる必要がなかったことによる。しかるに、ASTRO-E では、オンボード姿勢決定精度を向上させることを目的として、厳密な遅延処理を取り入れる予定である。

(5) 誤った観測の除去

姿勢マヌーバ直後は、マヌーバ中に蓄積された誤差により STT 出力データが予想よりもずれている可能性が高い。“あすか”ではトラックウィンドウ幅を大きくとることにより、多少姿勢がずれても星をつかまえることができるようにしたが、誤った星をつかまえる危険性も高くなる。

そこで ASTRO-E では、STT にトラックウィンドウを切る高精度出力モード以外に全視野からある程度の精度で数個の観測データを出力させるモードを設けて、一つの STT 視野あたり 10 個程度の星情報を姿勢制御用計算機にコマンドで教えることにより、星同定処理を行うことにした。これにより、視野からはずれるほど大きな誤差でない限り、確実に目標とする星をつかまえることができる。星同定を行った後、そのなかから一つの STT あたり最大 3 個までの小さなトラックウィンドウを設定することにより、トラックウィンドウ内に別の星が混入する危険性を下げつつ高精度な STT 出力を得ることができ、姿勢決定精度を高めることができる。

また、星同定がなされてトラックが始まった後の定常時にも、常に STT 出力データの時間的な連続性をチェックし、誤ったデータが出てこないかどうかをチェックすることで、姿勢決定系の誤差を最小限にお

さえる工夫を行っている。

4.7 ASTRO-Fにおけるカルマンフィルタ

ここでは、ASTRO-Fの姿勢決定系およびその中に用いられるカルマンフィルタについて、それらの概要を示す。はじめに、衛星の観測ミッションおよび姿勢決定系に関連したASTRO-Fの概要を示す。([5])次いで、姿勢決定系の概要を示し、センサ構成およびそれらの使用方法や姿勢決定系の性能諸元をまとめる。最後に姿勢決定系の中に用いられているカルマンフィルタを取り上げ、主要諸元、ならびにそこで採用される実用上の工夫について説明する。

なお、ASTRO-Fは2003年2月に打ち上げることを予定としており、本報告書の執筆時点において開発中の衛星であるため、本節の記述内容は現時点での設計に基づくものである。従って、今後、設計の進捗に伴い見直される可能性があることを予め断っておく。

4.7.1 ASTRO-Fの概要

ASTRO-Fは、赤外線望遠鏡による全天観測（一様サーベイ）およびそのうちの特定の星を対象とした指向観測を行うことをミッションとした衛星である。赤外線観測では、太陽ならびに地球との干渉を回避する必要がある。このため、衛星は、昇交点地方時が6:00あるいは18:00付近の太陽同期極軌道に打ち上げられる。そして、太陽方向に対して垂直な面内で望遠鏡光軸方向をほぼ反地球方向に向け、軌道1周回で太陽方向回りに衛星を1回転させることにより、太陽および地球との干渉を回避する。また、この姿勢により、天球に対してほぼ大円となるベルト上の観測を行う。さらに、慣性空間に対して軌道面が1日に約1[deg]ずつ移動することを利用して、一様サーベイによる観測を半年行うことにより全天の観測を行うことができる。

指向観測は、赤外線望遠鏡が太陽および地球と干渉しない範囲内で実施される。一様サーベイから指向観測へのモード移行時には、衛星の回転レートが通常の軌道レートの2倍程度となり、指向方向の位相角を地球に対して進める操作を行う。指向観測は約10分程度行う。その間は、衛星姿勢が慣性空間に固定されるため、衛星の軌道上の移動に伴い、徐々に指向方向の位相が遅れていく。そして、地球干渉を起こす前に、指向観測を終了するとともに、軌道レートの2倍程度の回転レートで衛星を回転させ始め、遅れていた指向方向位相角を進め、最終的にもとの一様サーベイに移行する。

4.7.2 姿勢決定系の概要

ASTRO-Fの観測センサおよび姿勢センサの機体座標系に対する視野配置を図4-14に示す。図中、Y軸方向は太陽方向に指向され、軌道1周回中に衛星がY軸回りに平均軌道レートで回転することにより、観測センサが天球上のほぼ大円をスキャンする。日陰が発生しない期間における定常観測時は、Y軸方向に視野をもつ精太陽センサ(TFSS)によりX軸回りおよびZ軸回りの姿勢が計測される。また、2台搭載される恒星センサ(STT)のうち1台を用いてY軸回りの姿勢が決定される。(日照モード)一方、1年のうち約3カ月程度は軌道周回中に日陰が発生する時期があるが、その間はTFSSが使用できないため、2台のSTTを用いて3軸を決定する構成に切り替える。(日陰モード)

姿勢を伝播するための慣性センサ(IRU)として、従来から天文観測用科学衛星で搭載されてきたFRIGタイプのジャイロ4台を用いて4軸方向(X,Y,Z, スキュー)の角速度が検出可能な慣性センサ(IRU-A)と、TDGタイプのジャイロ1台を用いて2軸方向の角速度が検出可能な慣性センサ(IRU-B)を搭載する。これら5台のジャイロによって検出される6軸方向はそれぞれ異なった方向を向いており、このうちの2台ないし3台を用いて、3軸回りの角速度を計測する。

ASTRO-Fの姿勢決定系の性能諸元を表4-11にまとめる。また、機能ブロック図を図4-15に示す。

4.7.3 カルマンフィルタの主要諸元

ASTRO-Fの姿勢決定系がこれまでの天文観測用科学衛星と最も異なる点は、一様サーベイにおいて衛星の姿勢が平均軌道レートで回転していることである。また、これまでの天文観測用科学衛星では、観測指

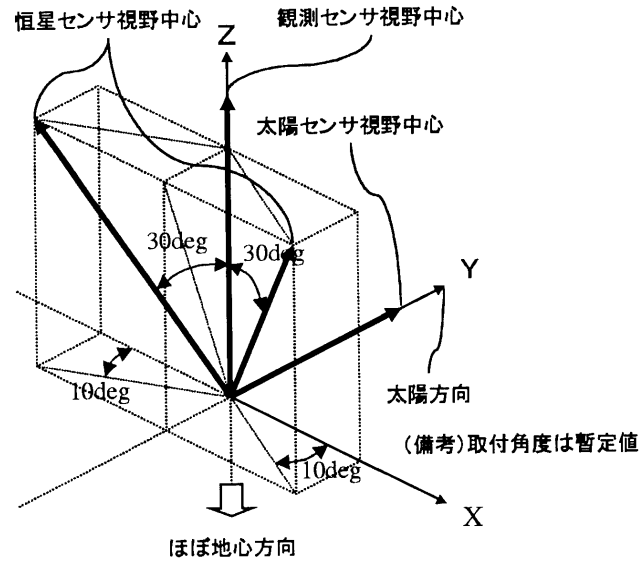


図 4-14 ASTRO-F の観測センサ／姿勢センサの視野配置

表 4-11 ASTRO-F の姿勢決定系の性能諸元

項目	要求性能	実現性能	備考
姿勢決定精度 X Y Z	30 [arcsec]	TBD [arcsec]	・要求性能は、観測指向軸の制御精度全体であり、姿勢決定精度はそのうちの一部として配分予定である
収束時間 X Y Z	5 [min] 以内	TBD [min] 以内	一様サーベイと指向観測とのモード切り替え時の遷移時間として規定

向軸を慣性空間に対してある特定の方向に指向させるのに対して、ASTRO-Fでは、時々刻々と目標指向方向を変化させる必要がある。このため、カルマンフィルタの処理においても、この点を考慮して、以下の観点からの留意が必要である。

- 平均軌道レートの影響により推定精度が劣化しないように姿勢伝播を行う際に十分な留意を要する必要がある。
- 時刻ずれにより推定姿勢がずれないように、センサの観測およびカルマンフィルタの処理の時刻管理を厳密に行う。

ASTRO-Fの姿勢決定系に採用しているカルマンフィルタの主要諸元を表 4-12 に示す。

4.7.4 実用上の工夫

(1) センサ観測時刻の同期

ASTRO-Fでは、全天観測時に衛星が平均軌道レートで回転する。この回転軸(機体座標系のY軸)回りの姿勢決定については、時刻同期精度が非常に重要になるが、Y軸回りの姿勢は、姿勢決定系の日照モード・日陰モードいずれの場合もSTTで検出することとなっているため、カルマンフィルタとSTTとの観測時刻の同期が重要となる。一方、全天観測時におけるSTTの姿勢観測では、視野内を流れる星を扱

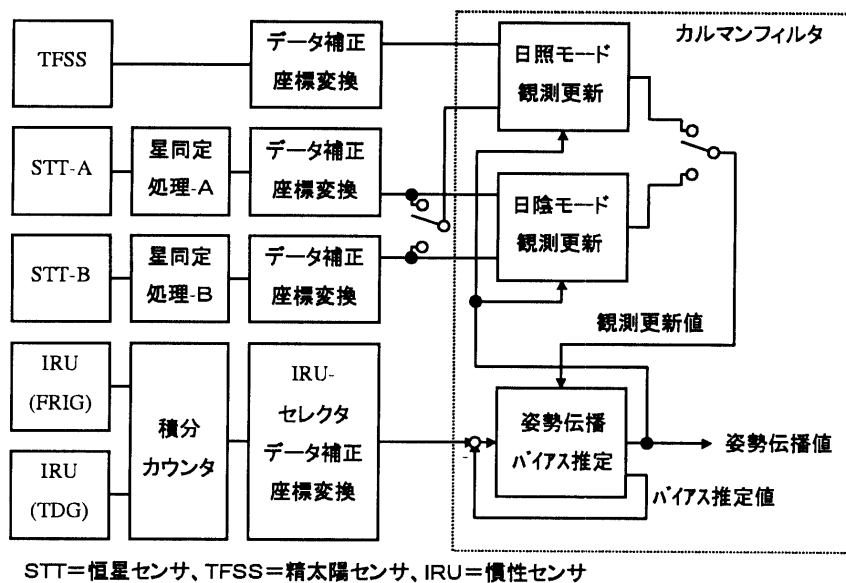


図 4-15 ASTRO-F の姿勢決定系機能ブロック図

うために、その星軌跡が CCD の撮像時間（露光時間）に比例して伸びることになる。このため、有限な撮像時間の間の中間の時刻を撮像時刻として扱い、この時刻とカルマンフィルタの処理サイクルとを同期させる必要がある。以上を踏まえ、STT に対する撮像指令信号のタイミングは、CCD の撮像時間に応じて変化し、上記の同期の条件が満たされるように管理されている。

(2) バイアス推定値の切り替え

ASTRO-F では、全天観測時に平均軌道レートが Y 軸回りに入力される。また、指向観測モードでは、入力角速度はほぼ 0 に等しいほか、両者のモード移行時には、平均軌道レートの約 2 倍のレートが入力される。この場合、IRU のレートバイアスは、スケールファクタ誤差による等価的なレートバイアスが付加されるため、入力レートが変化した際に、レートバイアスが見かけ上、不連続に変化することになる。（入力角速度変化分×ジャイロのスケールファクタ誤差が、見かけ上のレートバイアスの不連続的変化となる。）これに対して、レートバイアス推定値の不連続的変化量と入力角速度変化分との関係から、ジャイロのスケールファクタのインフライトキャリブレーションを行い、この影響を小さくすることも可能であると考えられる。しかし、ASTRO-F は、宇宙科学研究所の衛星として軌道レートで回転する初めての衛星でもあるため、より確実な設計を行う必要がある。そこで、入力角速度が異なる全天観測モードと指向観測モードの両モードでジャイロレートバイアス推定値を別々に管理し、モード切り替え毎に、ジャイロレートバイアス推定値を置き換える工夫をすることを考えている。また、モード切り替え時のレートバイアス推定値の初期値は、同モードにおける最終推定値を使用するものとする。

(3) センサ出力遅延の処理

ASTRO-E のオンボード姿勢決定系で採用したセンサ出力遅延処理を、ASTRO-F のオンボード姿勢決定系でも採用する予定である。（4.1.6 および (4) 参照）この理由の 1 としては、姿勢決定精度の要求が ASTRO-E と同程度になることである。これに加えて、ASTRO-F の観測モードの 1 つである一様サーベイモードでは衛星が軌道レートで Y 軸周りに回転するため、センサ出力遅延がそのまま姿勢決定誤差になるという事情があり、センサ出力遅延処理が必須となる。

表 4-12 ASTRO-F 姿勢決定系カルマンフィルタの主要諸元

項目	内容		備考
基準座標系	慣性座標系 (2000 年平均分点赤道座標系)		スターカタログを規定している座標系を適用
動作モード	日照モード：日陰発生時を除く通常動作モード 日陰モード：日陰発生時のみ動作させるモード		
姿勢センサ	日照モード：精太陽センサ (1 台) + 恒星センサ (1 台) 日陰モード：恒星センサ (2 台)		X/Z 軸回りの姿勢を計測 Y 軸回りの姿勢を計測 2 台で 3 軸を計測
状態変数	オイラーパラメータ (慣性座標系, 次元数: 4) ジャイロレートバイアス (機体座標系, 次元数: 3)		全次元数: 4+3=7
姿勢角推定精度 [arcsec](1 σ)	日照モード	日陰モード	
	X/Z 10 Y 10	10 10	
ジャイロレート バイアス推定精度 [deg/hour](1 σ)	日照モード	日陰モード	
	X/Z 0.003 Y 0.003	0.003 0.003	
収束時間 [分] 以内	日照モード	日陰モード	
	X/Z 5 Y 5	5 5	
姿勢伝播周期 [sec]	日照モード	日陰モード	
	0.125	0.125	
観測更新周期	日照モード	日陰モード	日陰モードの観測更新は 3 軸同時
	X/Z 0.125 Y 1	1 1	
姿勢力学モデル	X/Y/Z 軸ともにカップルした厳密式を使用 $\dot{q} = (1/2)\Omega(\omega)q$		
レートバイアス モデル	三軸ともに τ_b を時定数とする一次式を使用 $\dot{b} = -(1/\tau_b)b$		
カルマンゲイン	時変システムを採用 (誤差共分散を逐次計算)		(5.1.2 参照)
カルマンフィルタ の初期化条件	・ 観測残差が許容値を逸脱した場合 ・ 指向観測モードへの移行時		(5.1.3 参照) 誤差共分散のみ初期化, 推定値は継続使用
カルマンゲイン最 小値の設定	適用しない		(5.1.4 参照)
センサ観測時刻の 同期	5 [msec] 以内の精度で同期		(5.1.5 参照)
センサ出力遅延の 処理	恒星センサの出力データに関して実施		(5.1.6 参照)
誤った観測の除去	恒星センサのデータに関してのみ実施 (星同定機能の結果を反映)		(5.1.7 参照)

5. おわりに

“ぎんが”では、宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星として初めて搭載計算機を採用したが、8ビット CPU であることにより処理能力に限界があり、姿勢決定系カルマンフィルタを搭載するまでは至らなかった。しかし、テレメトリデータに基づく地上処理により姿勢決定系カルマンフィルタを構築でき、その有効性を検証できたことは、その後の衛星における姿勢決定系カルマンフィルタの搭載化に対して大きな

貢献をしたと云える。

“ぎんが”に続く“ようこう”では、搭載計算機が16ビット化され処理能力が向上したこともあって、宇宙科学研究所の天文観測用科学衛星として初めて姿勢決定系カルマンフィルタを搭載化している。また、それ以降の衛星では、飛翔実績に基づく経験を通じて、姿勢決定系カルマンフィルタに対しても様々の工夫が重ねられて、現在に至っている。

一方、衛星毎にますます厳しくなる姿勢制御要求を実現するために、姿勢決定系に対する精度要求もますます厳しくなっている。これに対応するためには、姿勢センサの高精度化や出力頻度の高速化はもちろんのこと、センサが搭載される構造体やその熱環境にまでおよぶ厳密な設計が要求される。カルマンフィルタの設計においても、これまでの衛星では実用上問題のなかった簡素化アルゴリズムを見直し、より厳密な扱いをしなければならなくなってきた。

以上のような観点にもとづいて、本報告書では、宇宙科学研究所における天文観測用科学衛星の姿勢決定系カルマンフィルタの基本アルゴリズムおよび性能解析方法を詳述するとともに、“ぎんが”(1987年2月打上げ)から今後打上げ予定のASTRO-Fまでを対象として、これらの衛星に用いられている姿勢決定用カルマンフィルタの実用上の工夫を具体的に説明しまとめておくこととした。

付録 A. カルマンフィルタの一般的定式化

本章では、まず始めに、カルマンフィルタの一般的な定式化を示す。対象とするシステムは、以下の4つである。

- 線形・連続系
- 線形・離散系
- 非線形・連続系
- 非線形・離散系

一般に、姿勢決定系におけるカルマンフィルタには非線形・離散系の定式化を適用する必要がある。これは、以下の理由による。

- 3次元での衛星の姿勢を記述する力学方程式が非線形である。(付録 C 参照)
- 衛星の姿勢を観測するセンサの出力が離散的にしか得られない。

さらに、実用的な観点を加えた場合には、以下の理由を加えることができる。

- 衛星の運動学的方程式に基づく姿勢伝播を実行する際に、微分方程式を連続系で積分するよりも、その微分方程式を積分して離散化の方が、搭載化を考慮した場合に計算負荷の観点から有利である。

しかしながら、

- 非線形システムの定式化では、リファレンス点まわりでの線形化を行った上で、線形システムにおける定式化を取り入れていること、
- 離散系の状態方程式は基本的に連続系として与えられる運動学的方程式から導かれること、

を考慮して、ここでは、上記4つのシステムに対して、順次、それらのカルマンフィルタの定式化を示すものとする。

上記の定式化に続いて、基本システム方程式を拡張 (augmentation) する手法について示す。カルマンフィルタでは、システムノイズあるいは観測ノイズとして白色雑音を仮定している。ところが、実際の系では、必ずしも白色雑音を想定できないものがある。このような場合にシステムの拡張が必要となる。ここでは、線形・連続系および線形・離散系の2つのシステムに対して、それらの拡張の定式化を示している。非線形・連続系、もしくは、非線形・離散系については、線形における系を基本として、同様にシステムの拡張を行うことができる。

なお、ここでは、いずれの場合も、定式化された結果についてのみ示すものとする。それらの導出方法等については文献等を参照されたい (例えば、[6], [7], [8] など)。本付録におけるこれらの定式化に基づき、2章では、姿勢決定系におけるカルマンフィルタの定式化を展開している。

A.1 線形・連続系におけるカルマンフィルタの定式化

線形・連続系におけるカルマンフィルタを構成する状態方程式、観測方程式、これらに含まれるシステムノイズおよび観測ノイズのノイズ特性、カルマンフィルタに用いられる状態量の伝播/更新式、誤差共分散の伝播/更新式、およびこれらの計算に用いられるカルマンゲインの計算式を表 A-1 に示す。状態方程式および観測方程式を併せて、システム方程式と呼ぶ。 $P(t)$ は、推定値 \hat{x} に対する誤差共分散行列であり、カルマンフィルタのカルマンゲイン $K(t)$ は、与えられたノイズ特性に対して $P(t)$ を最小にする様に選ばれている。

状態方程式に含まれるシステムノイズ $w(t)$ は、運動方程式に含まれる外乱や、運動方程式を導出する際のモデル化誤差などに対応する量であり、一般にガウス分布を仮定している。同様に、観測方程式に含まれる観測ノイズ $v(t)$ は、センサの出力に含まれるノイズに対応する量であり、ガウス分布を仮定している。これらのノイズの平均値は 0 であり、分散は、それぞれ、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 、にデルタ関数 $\delta(t-t')$ をかけた量として表されている。一方、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{A.1})$$

を満たすから、 $\delta(t-t')$ 自身は、時間 t の逆の次元を有している。従って、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ の次元はそれぞれ、 $w(t)w^T(t')$ 、 $v(t)v^T(t')$ の次元に時間 t の次元をかけたものとなっている。

表 A-1 で示した式に対応するカルマンフィルタの処理構成図を図 A-1 に示す。図中、点線より上側は、システム方程式によって記述される実際のシステムを示している。また、点線より下側は、実際のシステムにおける制御ベクトル $u(t)$ および観測ベクトル $y(t)$ を入力として、システムの状態ベクトル $x(t)$ を推定するカルマンフィルタの処理構成を示している。カルマンフィルタに用いるシステム方程式が実際のシステムを極めて正確に表現している場合には、カルマンフィルタによる状態ベクトルの推定精度も向上することが期待できる。この意味で、システム方程式を実際のシステムに合致する様に正確に記述することは、極めて重要である。

同図の一番下の部分に、状態ベクトル $x(t)$ に関する誤差共分散行列 $P(t)$ の伝播/更新式を示している。この式は、カルマンフィルタを構成する各行列、システムノイズの特性、観測ノイズの特性などのみで規定されている。従って、これらの値が状態ベクトル $x(t)$ の関数となっていない限りにおいて、 $P(t)$ の時間変化は、状態ベクトル $x(t)$ の推定値によらない。そして、カルマンフィルタの処理時間とともに $P(t)$ の対角要素で規定される状態ベクトル $x(t)$ の各要素の推定誤差は徐々に小さくなり、やがて定常値に収束する。カルマンゲイン $K(t)$ は、上記変化を示す $P(t)$ とその他の固定値を有する行列との積で示されるため、やはり状態ベクトル $x(t)$ の推定値には依存しない。そして、フィルタの計算開始時には、ある程度大きな値を有する様に初期値を設定し、時間とともに状態ベクトル $x(t)$ の推定精度が向上するにつれ、

それと同等の速度で $K(t)$ の値が小さくなるようにパラメータを調整するのが一般的である。いわば、カルマンフィルタの計算開始時間とともに、時定数が増大するローパスフィルタを構成しているのである。これにより、カルマンフィルタの計算開始直後には、観測残差に基づいて状態ベクトルの推定値の修正を行い、状態ベクトルの推定精度を速やかに向上させるとともに、時間の経過に従い観測ノイズの影響を小さくしてさらに推定精度を向上させているのである。

上記の処理では、 $K(t)$ を計算するために、 $P(t)$ の時間変化を時々刻々と計算する必要がある。これに対して、 $P(t)$ が一定値に収束した後の $K(t)$ を固定値として計算開始直後から使用するものを、定常カルマンフィルタと称している。定常カルマンフィルタでは、 $K(t)$ を計算する必要がないため、計算処理が非常に簡単になるというメリットを有するが、推定値が十分に収束するまでに、時間を要するというデメリットがある。

表 A-1 線形・連続系におけるカルマンフィルタの定式化

状態方程式	$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + B_w w(t)$
観測方程式	$y(t) = C\hat{x}(t) + v(t)$
ノイズ特性	$E[w(t)] = 0, E[w(t)w^T(t')] = Q(t)\delta(t-t')$ $E[v(t)] = 0, E[v(t)v^T(t')] = R(t)\delta(t-t')$
状態量の伝播 /更新	$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)[y(t) - C\hat{x}(t)]$
誤差共分散の 伝播/更新	$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + B_w Q(t)B_w^T - P(t)C^T R^{-1}(t)CP(t)$
カルマン ゲイン	$K(t) = P(t)C^T R^{-1}(t)$

A.2 線形・離散系におけるカルマンフィルタの定式化

線形・離散系におけるカルマンフィルタを構成する状態方程式、観測方程式、これらに含まれるシステムノイズおよび観測ノイズのノイズ特性、カルマンフィルタに用いられる状態量の伝播式・更新式、誤差共分散の伝播式・更新式、およびこれらの計算に用いられるカルマンゲインの計算式を表 A-2 に示す。

離散系における離散時間を T とすると、対応する連続系のシステム方程式を記述する各行列と離散系のシステム方程式を記述する各行列との関係は、以下のとおりとなる。

$$F = \exp(AT) \quad (A.2)$$

$$G = \int_0^T \exp(A(T-\tau)) d\tau B \quad (A.3)$$

$$G_w = \int_0^T \exp(A(T-\tau)) d\tau B_w \quad (A.4)$$

$$H = C \quad (A.5)$$

ここに、 F は、状態遷移行列 (State Transition Matrix) と呼ばれており、式 (A.2) の解析解を求めることができない場合には、以下の微分方程式を数値的に積分して求める。

$$\dot{F} = AF \quad (A.6)$$

離散系で扱うシステムノイズ w_t および観測ノイズ v_t に対する平均は 0 を仮定している。また、これ

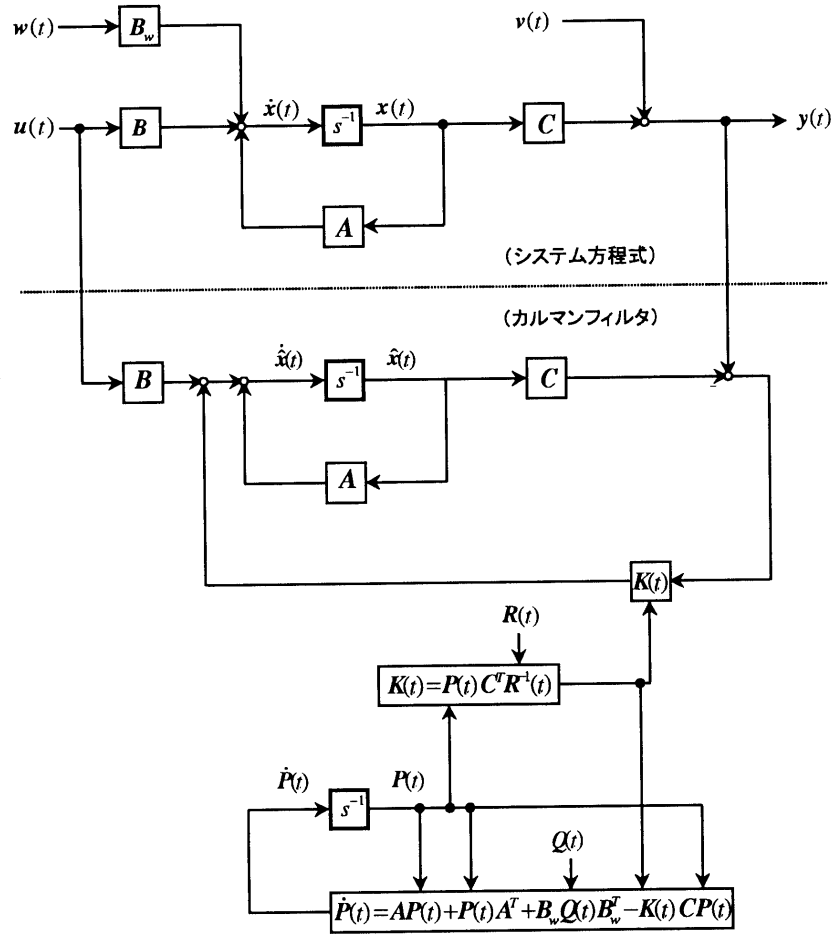


図 A-1 線形・連続系におけるカルマンフィルタの処理構成図

らの分散値は、それぞれ、 Q_t 、 R_t に離散系でのデルタ関数 $\delta_{t,t'}$ をかけた積で表される。ここに、

$$\delta_{t,t'} = \begin{cases} 1 & (t = t') \\ 0 & (t \neq t') \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

であるから、 $\delta_{t,t'}$ 自体は無次元量である。従って、 Q_t 、 R_t の次元は、それぞれ、 $w_t w_t^T$ 、 $v_t v_t^T$ の次元と一致する。また、連続系と離散系とのノイズ特性を比較すると、以下の関係式が成り立つ。

$$Q_t = \frac{Q(t)}{T} \quad (\text{A.8})$$

$$R_t = \frac{R(t)}{T} \quad (\text{A.9})$$

表 A-2 で示される各処理の処理フローを表 A-3 に、処理構成図を図 A-2 に示す。

これらの処理における計算式では、伝播（＝時間更新）と更新（＝観測更新）とが同じ時間間隔で処理されることを想定している。ところが、実際には観測ベクトルを得るためのセンサの出力周期が比較的最長い場合などは、伝播のみを比較的最短い時間間隔で行い、更新はセンサの出力周期に併せて処理する場合がある。（マルチレート系の系）この場合には、状態量の伝播および誤差共分散の伝播の計算式の右辺に表れる \hat{P}_t および \hat{x}_t は、それぞれ \bar{P}_t および \bar{x}_t で置き換えて計算し、観測が行われた時点でのみ更新（＝観測更新）処理を行うものとして解釈すればよい。

その他、状態ベクトルの誤差共分散行列およびカルマンゲインに関する考え方およびそれらのカルマンフィルタにおける解釈は、線形・連続系の説明で記述した内容と同様である。

表 A-2 線形・離散系におけるカルマンフィルタの定式化

状態方程式	$x_{t+1} = Fx_t + Gu_t + G_w w_t$
観測方程式	$y_t = Hx_t + v_t$
ノイズ特性	$E[w_t] = 0, E[w_t w_{t'}^T] = Q_t \delta_{t,t'}$ $E[v_t] = 0, E[v_t v_{t'}^T] = R_t \delta_{t,t'}$
状態量の伝播	$\bar{x}_{t+1} = F\bar{x}_t + Gu_t$
状態量の更新	$\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t [y_t - H\bar{x}_t]$
誤差共分散の伝播	$\bar{P}_{t+1} = F\bar{P}_t F^T + G_w Q_t G_w^T$
誤差共分散の更新	$\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H \bar{P}_t$
カルマンゲイン	$K_t = \bar{P}_t H^T [H \bar{P}_t H^T + R_t]^{-1}$

A.3 非線形・連続系におけるカルマンフィルタの定式化

非線形システムの場合には、一般的に、状態ベクトルのリファレンス値 $X_{\text{ref}}(t)$ 近傍でシステム方程式を線形化し、その近傍における状態ベクトルの微小量ベクトル $x(t)$ に対して A.1 で示した線形システムに対するカルマンフィルタを適用する。このとき、 $X_{\text{ref}}(t)$ の初期値をシステム方程式に従って積分し、新たに推定された状態量 $\hat{X}(t) = X_{\text{ref}}(t) + x(t)$ で $X_{\text{ref}}(t)$ 自体を更新しない方式を「リセットなし」と定義し、新たに推定された状態量で $X_{\text{ref}}(t)$ 自体を置き換える方式を「リセットあり」と定義している。

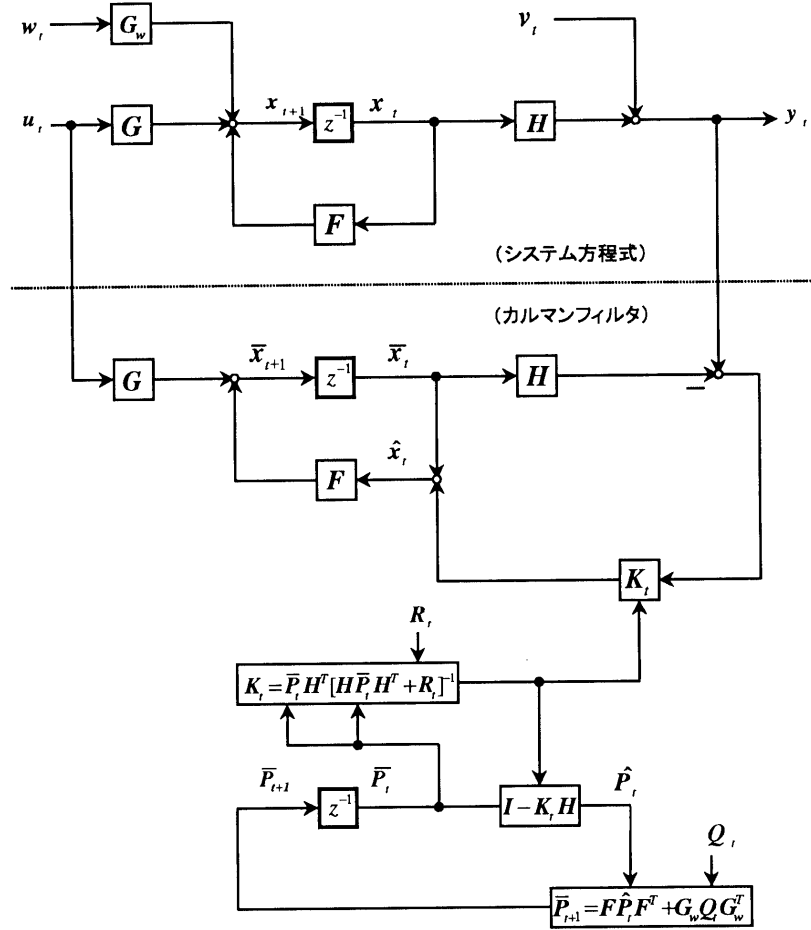


図 A-2 線形・離散系におけるカルマンフィルタの処理構成図

表 A-3 線形・離散系カルマンフィルタ処理フロー

時刻	処理	入力	出力	アルゴリズム
$t = 0$	初期値設定			$\bar{x}_0 = x_0, y_0 \leftarrow$ 観測値, $\bar{P}_0 = P_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$t - 1$		\vdots	\vdots \bar{P}_t \bar{x}_t	\vdots $\bar{P}_t = \dots$ $\bar{x}_t = \dots$
t	観測更新	\bar{x}_t \bar{P}_t	\hat{P}_t \hat{x}_t	$R_t = R(\bar{x}_t, t)$ $K_t = \bar{P}_t H^T [H \bar{P}_t H^T + R_t]^{-1}$ $\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H \bar{P}_t$ $\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t [y_t - H \bar{x}_t]$
	時間更新	\hat{P}_t \hat{x}_t	\bar{P}_{t+1} \bar{x}_{t+1}	$Q_t = Q(\hat{x}_t, t)$ $\bar{P}_{t+1} = F \hat{P}_t F^T + G_w Q_t G_w^T$ $\bar{x}_{t+1} = F \hat{x}_t + G u_t$
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots

即ち、「リセットなし」の場合は、リファレンス値 $X_{\text{ref}}(t)$ が真の値と大きくずれない限りにおいてカルマンフィルタによる推定が正常に行われ、かつ、リファレンス値近傍の微小量ベクトル $x(t)$ は連続性を有することになる。そして、状態ベクトルの推定値 $\hat{X}(t)$ は、リファレンス値と微小量ベクトルの推定値との和として求められる。一方、「リセットあり」の場合には、状態ベクトルの推定値 $\hat{X}(t)$ をリファレンス値に選ぶ結果により、 $x(t)$ の伝播前の初期値、すなわち $\bar{x}(t)$ は常に 0 として扱われることになる。この意味で「リセット型」と呼ばれ、カルマンフィルタとして実用的に用いることができるが、数学的な扱いの面からは、厳密には正しくない。そのため、誤差共分散行列が収束する前にリセットありのアルゴリズムを用いると、誤差共分散行列が振動的挙動を示すことも懸念される。従って、カルマンフィルタが収束する前は、「リセットなし」のアルゴリズムを用い、カルマンフィルタの挙動が安定した段階で、「リセットあり」のアルゴリズムを用いリファレンス値自体を更新して、推定値の精度を向上させることが一般的にはよいとされている。

非線形・連続系におけるカルマンフィルタを構成する各方程式等の計算式を表 A-4 (リセットあり/なし共通の適用式)、表 A-5 (リセットなしの場合の適用式)、および表 A-6 (リセットありの場合の適用式) に示す。また、これらの式の処理の構成図を図 A-3 (リセットなしの場合) および図 A-4 (リセットありの場合) に示す。

線形化を行う際には、状態ベクトル X に関して線形化を行うと同時に、観測ベクトル Y についてもリファレンス状態ベクトル X_{ref} に対応するリファレンス観測ベクトル Y_{ref} の近傍に対する微小観測ベクトルを求める。また、線形化されたシステム方程式におけるシステム行列は、もとの非線形システムのシステム

方程式を状態ベクトル X で偏微分して求める。この時の微係数を計算する際に、リセットなしの場合には、リファレンス値 X_{ref} を用い、リセットありの場合には、 \hat{X} を用いる。また、連続系システムにおけるリセットありの場合には、実質的に微小状態ベクトル x の伝播／更新を行う必要がない点が、リセットなしの場合と大きく異なる点である。

表 A-4 非線形・連続系におけるカルマンフィルタの定式化（リセットあり／なし共通の適用式）

状態方程式	$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) + g_w(X(t), t) w(t)$
観測方程式	$Y(t) = h(X(t), t) + v(t)$
ノイズ特性	$E[w(t)] = 0, E[w(t) w^T(t')] = Q(t) \delta(t - t')$ $E[v(t)] = 0, E[v(t) v^T(t')] = R(t) \delta(t - t')$
線形化	$X(t) = X_{\text{ref}}(t) + x(t)$ $\dot{X}_{\text{ref}}(t) = f(X_{\text{ref}}(t), u(t), t)$ $\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B_w(t) w(t)$ $A(t) = \frac{\partial}{\partial X} f(X(t), u(t), t)$ $B_w(t) = g_w(X(t), t)$ $Y(t) = Y_{\text{ref}}(t) + y(t)$ $Y_{\text{ref}}(t) = h(X_{\text{ref}}(t), t)$ $y(t) = C(t) x(t) + v(t)$ $C(t) = \frac{\partial}{\partial X} h(X(t), t)$

表 A-5 非線形・連続系におけるカルマンフィルタの定式化（リセットなしの場合の適用式）

線形化システム行列の計算	$A(t) = \frac{\partial}{\partial X} f(X(t), u(t), t) _{X(t)=X_{\text{ref}}(t)}$ $B_w(t) = g_w(X_{\text{ref}}(t), t)$ $C(t) = \frac{\partial}{\partial X} h(X(t), t) _{X(t)=X_{\text{ref}}(t)}$
状態量の伝播／更新	$\dot{X}_{\text{ref}}(t) = f(X_{\text{ref}}(t), u(t), t)$ $\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \hat{x}(t) + K(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)]$ $\dot{\hat{X}}(t) = X_{\text{ref}}(t) + \hat{x}(t)$
誤差共分散の伝播／更新	$\dot{P}(t) = A(t) P(t) + P(t) A^T(t) + B_w(t) Q(t) B_w^T(t)$ $- P(t) C^T(t) R^{-1}(t) C(t) P(t)$
カルマンゲイン	$K(t) = P(t) C^T(t) R^{-1}(t)$

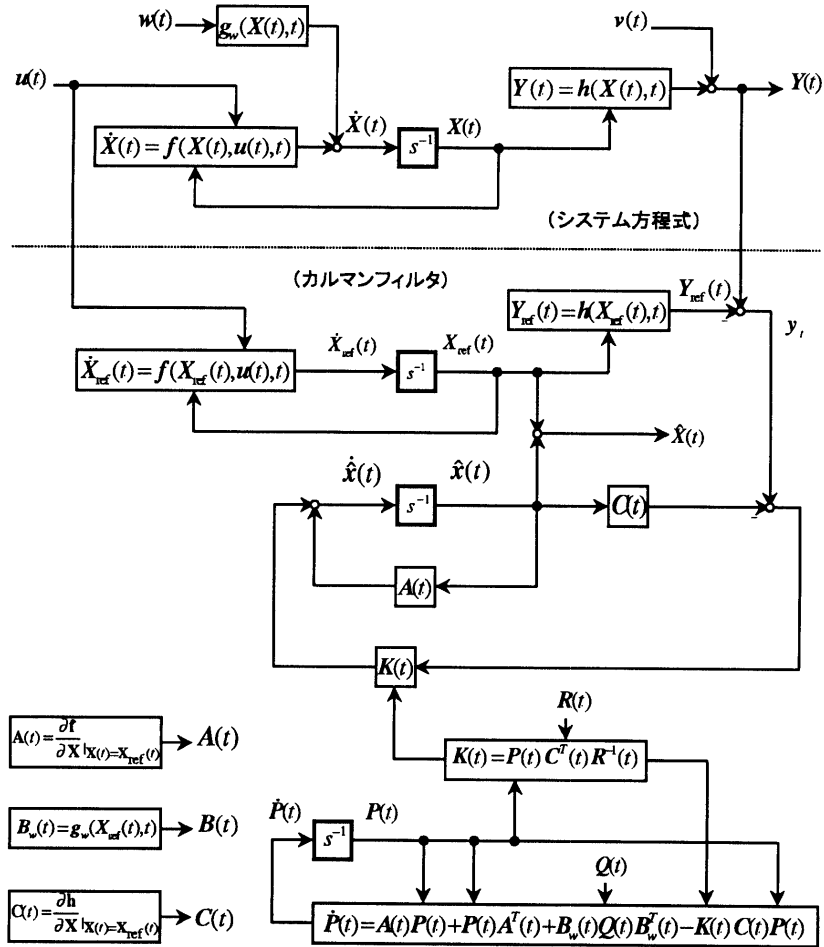


図 A-3 非線形・連続系におけるカルマンフィルタの処理構成図 (リセットなしの場合)

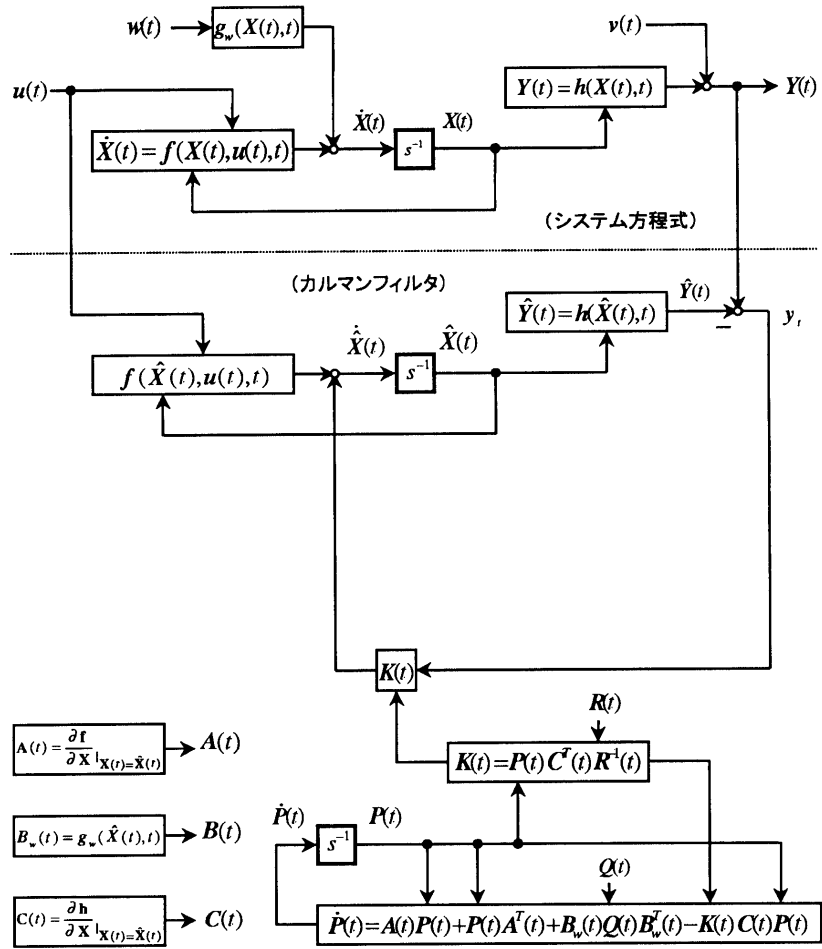


図 A-4 非線形・連続系におけるカルマンフィルタの処理構成図（リセットありの場合）

表 A-6 非線形・連続系におけるカルマンフィルタの定式化（リセットありの場合の適用式）

線形化システム行列の計算	$A(t) = \frac{\partial}{\partial X} f(X(t), u(t), t) _{X(t)=\hat{X}(t)}$ $B_w(t) = g_w(\hat{X}(t), t)$ $C(t) = \frac{\partial}{\partial X} h(X(t), t) _{X(t)=\hat{X}(t)}$
状態量の伝播／更新	$\dot{\hat{X}}(t) = f(\hat{X}(t), u(t), t) + K(t) [Y(t) - h(\hat{X}(t), t)]$
誤差共分散の伝播／更新	$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B_w(t)Q(t)B_w^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)$
カルマンゲイン	$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t)$

A.4 非線形・離散系におけるカルマンフィルタの定式化

非線形・離散系におけるカルマンフィルタを構成する各方程式等の計算式を表 A-7（リセットあり／なし共通）、表 A-8（リセットなしの場合）、および表 A-9（リセットありの場合）に示す。これらの処理の処理フローを表 A-10（リセットなしの場合）、および表 A-11（リセットありの場合）に示す。また、これらの式の処理の構成図を図 A-5（リセットなしの場合）および図 A-6（リセットありの場合）に示す。

表 A-7 非線形・離散系におけるカルマンフィルタの定式化（リセットあり／なし共通）

状態方程式	$X_{t+1} = \phi(X_t, u_t, t) + \psi(X_t, t) w_t$
観測方程式	$Y_t = h(X_t, t) + v_t$
ノイズ特性	$E[w_t] = 0, E[w_t w_{t'}^T] = Q_t \delta_{t,t'}$ $E[v_t] = 0, E[v_t v_{t'}^T] = R_t \delta_{t,t'}$
線形化	$X_t = X_{\text{ref},t} + x_t$ $X_{\text{ref},t+1} = \phi(X_{\text{ref},t}, u_t, t)$ $x_{t+1} = F_t x_t + G_{w,t} w_t$ $F_t = \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, u_t, t) _{X=X_{\text{ref},t}}$ $G_{w,t} = \psi(X_{\text{ref},t}, t)$ $Y_t = Y_{\text{ref},t} + y_t$ $Y_{\text{ref},t} = h(X_{\text{ref},t}, t)$ $y_t = H_t x_t + v_t$ $H_t = \frac{\partial}{\partial X} h(X, t) _{X=X_{\text{ref},t}}$

表 A-8 非線形・離散系におけるカルマンフィルタの定式化 (リセットなしの場合)

状態量の伝播	$\bar{X}_{t+1} = \phi(\bar{X}_t, u_t, t)$ $\bar{x}_{t+1} = F_t \bar{x}_t$ $F_t = \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, u_t, t) _{X=\bar{X}_t}$
状態量の更新	$\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t [y_t - H_t \bar{x}_t]$ $H_t = \frac{\partial}{\partial X} h(X, t) _{X=\bar{X}_t}$ $y_t = Y_t - h(\bar{X}_t, t)$ $\hat{X}_t = \bar{X}_t + \hat{x}_t$
誤差共分散の伝播	$\bar{P}_{t+1} = F_t \bar{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$
誤差共分散の更新	$\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$
カルマンゲイン	$K_t = \bar{P}_t H_t^T [H_t \bar{P}_t H_t^T + R_t]^{-1}$

表 A-9 非線形・離散系におけるカルマンフィルタの定式化 (リセットありの場合)

状態量の伝播	$\bar{X}_{t+1} = \phi(\hat{X}_t, u_t, t) = \phi(\bar{X}_t + \hat{x}_t, u_t, t)$ $\bar{x}_{t+1} = 0$ $F_t = \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, u_t, t) _{X=\hat{X}_t = \bar{X}_t + \hat{x}_t}$
状態量の更新	$\hat{x}_t = K_t y_t$ $H_t = \frac{\partial}{\partial X} h(X, t) _{X=\bar{X}_t}$ $y_t = Y_t - h(\bar{X}_t, t)$ $\hat{X}_t = \bar{X}_t + \hat{x}_t$
誤差共分散の伝播	$\bar{P}_{t+1} = F_t \bar{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$
誤差共分散の更新	$\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$
カルマンゲイン	$K_t = \bar{P}_t H_t^T [H_t \bar{P}_t H_t^T + R_t]^{-1}$

表 A-10 非線形・離散系カルマンフィルタ処理フロー (リセットなし)

時刻	処理	入力	出力	アルゴリズム
$t = 0$	初期値設定			$\bar{X}_0 = X_{ref}, \bar{x}_0 = 0, Y_0 \leftarrow \text{観測値}, \bar{P}_0 = P_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$t - 1$		\vdots	\vdots \bar{P}_t \bar{x}_t \bar{X}_t	\vdots $\bar{P}_t = \dots$ $\bar{x}_t = \dots$ $\bar{X}_t = \dots$
t	観測更新	\bar{X}_t Y_t \bar{P}_t \bar{x}_t	\hat{X}_t	$y_t = Y_t - h(\bar{X}_t, t)$ $H_t = \frac{\partial}{\partial X} h(X, t) _{X=\bar{X}}$ $R_t = R(\bar{X}_t, t)$ $K_t = \bar{P}_t H_t^T [H_t \bar{P}_t H_t^T + R_t]^{-1}$ $\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$ $\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t [y_t - H_t \bar{x}_t]$ $\hat{X}_t = \bar{X}_t + \hat{x}_t$
	時間更新	\hat{P}_t \hat{x}_t \bar{X}_{t+1}	\bar{P}_{t+1} \bar{x}_{t+1}	$F_t = \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, u_t, t) _{X=\hat{X}_t}$ $G_{w,t} = \psi(\bar{X}_t, t), Q_t = Q(\bar{X}_t, t)$ $\bar{P}_{t+1} = F_t \hat{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$ $\bar{x}_{t+1} = F_t \hat{x}_t$ $\bar{X}_{t+1} = \phi(\bar{X}_t, u_t, t)$
$t + 1$		\vdots	\vdots	\vdots

非線形・離散系の場合には、非線形・連続系の場合と同様に、状態ベクトルのリファレンス値 (X_{ref}) 近傍でシステム方程式を線形化し、その近傍における状態ベクトルの微小量ベクトル (x) に対してカルマンフィルタを適用する。また、リセットあり／リセットなしの考え方についても非線形・連続系の場合と基本的に同じである。

ただし、非線形・連続系システムのリセットありの場合には、状態ベクトルの微小量ベクトル (x) は常に0として扱われるのに対して、非線形・離散系システムのリセットありの場合には、常に0として扱うことができない。これは、離散系の処理において、伝播と更新の処理が分離しているためである。即ち、伝播処理の際には微小量 \hat{x}_t を \bar{X}_t に加えた状態ベクトルの推定値 \hat{X}_t を用いて、次の処理サイクルの予測値 \bar{X}_{t+1} を求めるので、 \bar{x}_{t+1} は、0となる。一方、更新処理の際には、微小観測量 y_t にカルマンゲイン K_t をかけた量を予測値 \bar{X}_t に加えることにより、推定値 \hat{X}_t を計算している。この際の微小量の推定値 $\hat{x}_t (= K_t y_t)$ は0ではない。

表 A-11 非線形・離散系カルマンフィルタ処理フロー (リセットあり)

時刻	処理	入力	出力	アルゴリズム
$t = 0$	初期値設定			$\bar{X}_0 = X_{ref}, \bar{x}_0 = 0, Y_0 \leftarrow \text{観測値}, \bar{P}_0 = P_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$t - 1$		\vdots	\vdots \bar{P}_t \bar{x}_t \bar{X}_t	\vdots $\bar{P}_t = \dots$ $\bar{x}_t = \dots$ $\bar{X}_t = \dots$
t	観測更新	\bar{X}_t Y_t \bar{P}_t \bar{x}_t	\hat{X}_t	$y_t = Y_t - h(\bar{X}_t, t)$ $H_t = \frac{\partial}{\partial X} h(X, t) _{X=\bar{X}}$ $R_t = R(\bar{X}_t, t)$ $K_t = \bar{P}_t H_t^T [H_t \bar{P}_t H_t^T + R_t]^{-1}$ $\hat{P}_t = \bar{P}_t - K_t H_t \bar{P}_t$ $\hat{x}_t = K_t y_t$ $\hat{X}_t = \bar{X}_t + \hat{x}_t$
	時間更新	\hat{P}_t \hat{x}_t \bar{X}_{t+1}	\bar{P}_{t+1} \bar{x}_{t+1} \bar{X}_{t+1}	$F_t = \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, u_t, t) _{X=\hat{X}_t}$ $G_{w,t} = \psi(\hat{X}_t, t), Q_t = Q(\hat{X}_t, t)$ $\bar{P}_{t+1} = F_t \hat{P}_t F_t^T + G_{w,t} Q_t G_{w,t}^T$ $\bar{x}_{t+1} = 0$ $\bar{X}_{t+1} = \phi(\hat{X}_t, u_t, t)$
$t + 1$		\vdots	\vdots	\vdots

A.5 システムの拡張

カルマンフィルタは、システム方程式におけるシステムノイズおよび観測ノイズの統計的性質として、白色雑音を仮定している。よって、それらの平均値が 0 であり、かつそれらの分散がガウス分布に従う必要がある。ところが、現実には扱うモデルでは、必ずしもこの条件を満足していない場合が多い。たとえば、大気抵抗を考慮した軌道推定を行う場合、大気モデル等による大気抵抗予測値と実際の大気抵抗のずれは、ランダム誤差よりバイアス誤差の方がはるかに支配的となっている。また、慣性基準装置 (IRU) を用いた姿勢決定系では、IRU のデータは観測値として使用されるのではなく、これを状態方程式の中に組み込むことを一般的に行うが (2 章参照)、この場合の IRU 出力に含まれるレートバイアスは、ランダム誤差として扱うことは不適切である。

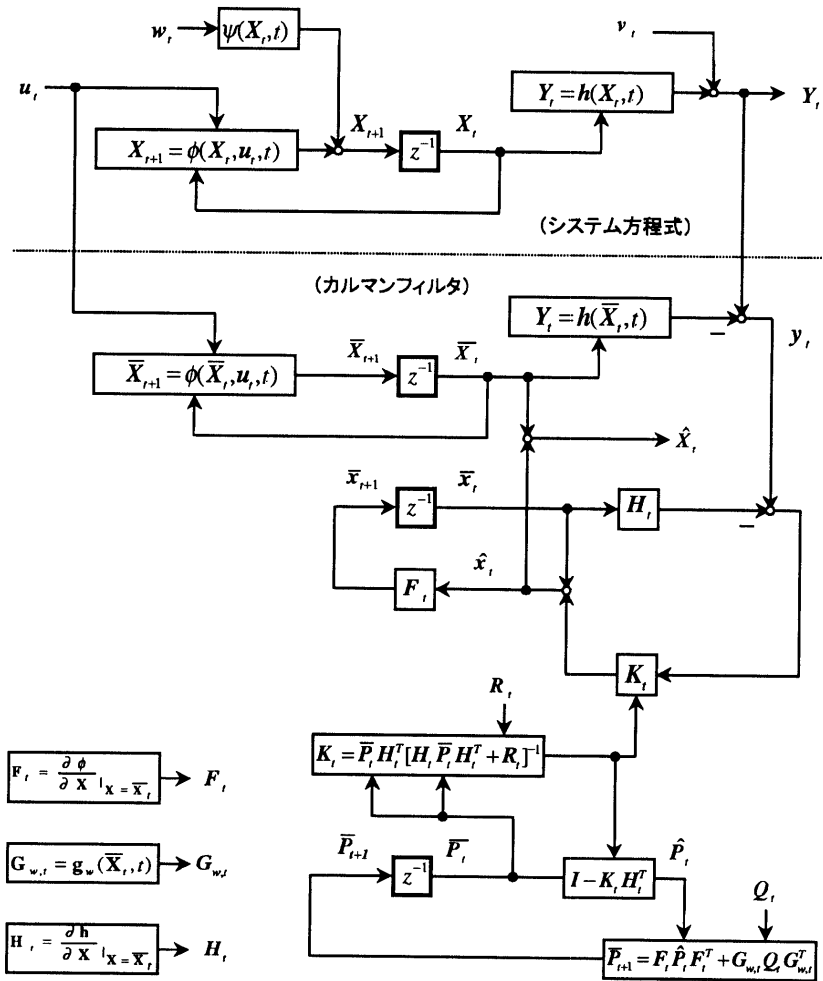


図 A-5 非線形・離散系におけるカルマンフィルタの処理構成図 (リセットなし)

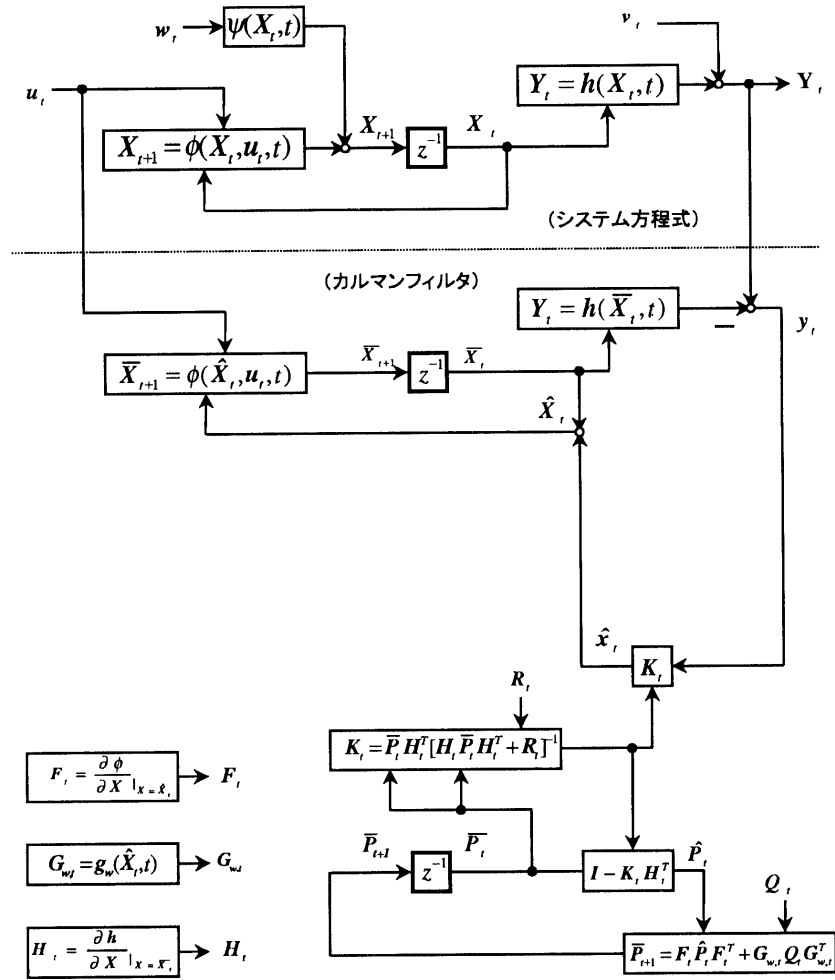


図 A-6 非線形・離散系におけるカルマンフィルタの処理構成図 (リセットあり)

このようなシステムノイズを扱う際には、システムノイズ自体にある数学モデルを仮定することにより、上記の問題を解決することができる。すなわち、システムノイズに対してある数学モデルを仮定し、その数学モデルでのシステムノイズを白色雑音として設定し、その数学モデルを基本システム方程式に組み込んでシステムの拡張 (augmentation) を行う。この拡張されたシステムに対してカルマンフィルタを適用することがよく行われる。

線形・連続系システムにおけるシステムの拡張方法を表 A-12 に示す。また、線形・離散系システムにおけるシステムの拡張方法を表 A-13 に示す。非線形システムの場合には、リファレンス状態ベクトルまわりの線形化されたシステム方程式に対して、これらの拡張方法を適用することにより、同様のシステム拡張が可能である。

システムノイズに仮定する数学モデルとしては、種々のものがある ([6] 参照)。ここでは、一般的によく用いられる数学モデルとして、ランダムウォークモデルおよび Exponentially Correlated Random Variable (=ECRV) を表 A-14 に示す。

表 A-12 線形・連続系におけるシステムの拡張

基本状態方程式	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(t)$
基本観測方程式	$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$
ノイズ数学モデル	($E[\mathbf{w}(t)] \neq 0$ の場合、以下の誤差モデルを導入する) $\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}_w\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_v\nu(t)$
ノイズ特性	$E[\nu(t)] = 0, E[\nu(t)\nu^T(t')] = \mathbf{Q}(t)\delta(t-t')$ $E[\mathbf{v}(t)] = 0, E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t')] = \mathbf{R}(t)\delta(t-t')$
拡張状態方程式	$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}^{(a)}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{(a)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{(a)}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{(a)}} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_w^{(a)}} \nu(t)$ $\dot{\mathbf{x}}^{(a)}(t) = \mathbf{A}^{(a)}\mathbf{x}^{(a)}(t) + \mathbf{B}^{(a)}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_w^{(a)}\nu(t)$
拡張観測方程式	$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{(a)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{(a)}(t)} + \mathbf{v}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^{(a)}\mathbf{x}^{(a)}(t) + \mathbf{v}(t)$

表 A-13 線形・離散系におけるシステムの拡張

基本状態方程式	$x_{t+1} = Fx_t + Gu_t + G_w w_t$
基本観測方程式	$y_t = Hx_t + v_t$
ノイズ特性	<p>($E[w_t] \neq 0$ の場合, 以下の誤差モデルを導入する)</p> $w_{t+1} = F_w w_t + G_w \nu_t$ $E[\nu_t] = 0, E[\nu_t \nu^T(t')] = Q_t \delta_{t,t'}$
	$E[v_t] = 0, E[v_t v^T(t')] = R_t \delta_{t,t'}$
拡張状態方程式	$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ w_{t+1} \end{bmatrix}}_{x_{t+1}^{(a)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & G_w \\ 0 & F_w \end{bmatrix}}_{F^{(a)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix}}_{x_t^{(a)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}}_{G^{(a)}} u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ G_w \end{bmatrix}}_{G_w^{(a)}} \nu_t$ $x_{t+1}^{(a)} = F^{(a)} x_t^{(a)} + G^{(a)} u_t + G_w^{(a)} \nu_t$
拡張観測方程式	$y_t = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C^{(a)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix}}_{x_t^{(a)}} + v_t$ $y_t = C^{(a)} x_t^{(a)} + v_t$

表 A-14 白色雑音でないシステムノイズに適用する数学モデルの一例

誤差モデルの例	
ランダムウォーク	$\dot{w}(t) = \nu(t)$
ECRV	$\dot{w}(t) = -\alpha w(t) + \nu(t)$

付録 B. オイラーパラメータ

オイラーパラメータ (Euler parameter) は, ある基準となる直交座標系から別の直交座標系への座標変換を4つのパラメータで表すものであり, 衛星姿勢の運動学 (kinematics) を扱う際に非常に便利である. オイラーパラメータは, オイラー対称パラメータ (Euler symmetric parameter), クォータニオン (quaternion, 4元数), q パラメータなどと呼ばれることもある. 絶対値が1の複素数を用いて1軸まわり (即ち2次元平面内) の座標変換を表すことができることに対応して, オイラーパラメータは絶対値が1の3次元複素数 (hyper-imaginary) として取り扱うことができ, 3次元空間内の座標変換を表すことができる.

ここでは, オイラーパラメータの定義, 表記法, 座標変換行列のオイラーパラメータによる表示, 積算, およびオイラーパラメータによる座標変換の表現についてまとめておく.

B.1 オイラーパラメータの定義

オイラーパラメータ q は, 以下で定義される q_1 から q_4 の4つのパラメータで表される.

$$\begin{aligned} q_1 &\triangleq e_1 \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_2 &\triangleq e_2 \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_3 &\triangleq e_3 \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_4 &\triangleq \cos \frac{\Phi}{2} \end{aligned} \tag{B.1}$$

ここに, $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ は, 基準座標における1つの単位ベクトル, Φ は, そのベクトルまわりの回転角を表わす.

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{B.2}$$

が成立するから, 明らかに以下の関係が成り立つ.

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \tag{B.3}$$

単位ベクトル e によって規定される軸をオイラー軸ともいう. 単位ベクトル e を回転軸として Φ だけ回転することにより得られる座標系においては, 回転軸 e の各座標成分は座標変換前の座標系における値と同じである. 従って, ベクトル e は, q によって規定される座標変換行列 (方向余弦行列) の固有ベクトルとなっている.

オイラーパラメータ q の逆数 (inverse) または共役数 (conjugate) は, 回転軸 e まわりに $-\Phi$ だけ回転させる座標変換を表すオイラーパラメータとして定義され, q^* で表現するものとする.

B.2 オイラーパラメータの表記法

オイラーパラメータを4次元列ベクトルとして以下の様に表記するものとする.

$$q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \hline q_4 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

ここに, \mathbf{q}_v は, 次式で定義される3次元列ベクトルである.

$$\mathbf{q}_v \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

一方, オイラーパラメータを3次元複素数として表現する場合には以下の様に表記するものとする.

$$\mathbf{q} \triangleq q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 \quad (\text{B.6})$$

ここで, i, j, k は以下の条件を満足する3次元複素数の単位である. (注: 三次元ユークリッド空間の各軸方向の単位ベクトルを表わす i, j, k とは異なるものである.)

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j \quad (\text{B.7})$$

オイラーパラメータ \mathbf{q} の共役数 \mathbf{q}^* をベクトル表示で示すと以下のとおりとなる.

$$\mathbf{q}^* \triangleq \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_v \\ \hline q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

また, \mathbf{q}^* を三次元複素数表示で示すと以下のとおりとなる.

$$\mathbf{q}^* \triangleq -q_1 i - q_2 j - q_3 k + q_4 \quad (\text{B.9})$$

B.3 座標変換行列のオイラーパラメータによる表示

回転軸 e まわりに Φ だけ回転させる座標変換を示す行列は以下で与えられる ([9]).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \Phi + e_1^2(1 - \cos \Phi) & e_1 e_2(1 - \cos \Phi) + e_3 \sin \Phi & e_1 e_3(1 - \cos \Phi) - e_2 \sin \Phi \\ e_1 e_2(1 - \cos \Phi) - e_3 \sin \Phi & \cos \Phi + e_2^2(1 - \cos \Phi) & e_2 e_3(1 - \cos \Phi) + e_1 \sin \Phi \\ e_1 e_3(1 - \cos \Phi) + e_2 \sin \Phi & e_2 e_3(1 - \cos \Phi) - e_1 \sin \Phi & \cos \Phi + e_3^2(1 - \cos \Phi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

これを式 (B.1) を用いて書きかえると, オイラーパラメータ \mathbf{q} による座標変換行列 (方向余弦行列) $\mathbf{T}(\mathbf{q})$ として次式を得る.

$$\mathbf{T}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$\mathbf{T}(\mathbf{q})$ の逆行列は, \mathbf{q} の代わりに \mathbf{q}^* を代入することにより次式で計算することができる.

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}(\mathbf{q}^*) \quad (\text{B.12})$$

$\mathbf{T}(\mathbf{q})$ は回転による座標変換行列であり, 一般的に以下に示す直交性がある.

$$\mathbf{T}(\mathbf{q})\mathbf{T}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^T(\mathbf{q})\mathbf{T}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} \quad (\text{B.13})$$

従って, この関係を用いることにより $\mathbf{T}(\mathbf{q})$ の逆行列を以下の通り求めることもできる.

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^T(\mathbf{q}) \quad (\text{B.14})$$

B.4 オイラーパラメータの積算

ここでは、オイラーパラメータの演算子としての積算を導入し、これに基づき、オイラーパラメータの積算における関係式について示す。なお、オイラーパラメータの3次元複素数表示を用いると、オイラーパラメータどうしの演算以外に、オイラーパラメータと一般ベクトルの演算も定義することができ、これによりベクトル表示による場合に比べて簡潔に演算を行うことができるという利点がある。従って、ここでは、3次元複素数表示を基本としていくつかの関係式を導入し、これに対応するベクトル表示を併記するものとする。

2つのオイラーパラメータの積算演算を以下により表記するものとする。

$$\begin{aligned}
 q_a q_b &= (q_{a1}i + q_{a2}j + q_{a3}k + q_{a4})(q_{b1}i + q_{b2}j + q_{b3}k + q_{b4}) \\
 &= (q_{a1}q_{b4} + q_{a2}q_{b3} - q_{a3}q_{b2} + q_{a4}q_{b1})i \\
 &\quad + (-q_{a1}q_{b3} + q_{a2}q_{b4} + q_{a3}q_{b1} + q_{a4}q_{b2})j \\
 &\quad + (q_{a1}q_{b2} - q_{a2}q_{b1} + q_{a3}q_{b4} + q_{a4}q_{b3})k \\
 &\quad + (-q_{a1}q_{b1} - q_{a2}q_{b2} - q_{a3}q_{b3} + q_{a4}q_{b4})
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

これにより、オイラーパラメータ q とその共役数 q^* との積算は以下のとおりとなる。

$$qq^* = q^*q = 1 \tag{B.16}$$

(上式はオイラーパラメータの絶対値が1であることを示している。)

式(B.15)をベクトル表示を用いて示すと以下のとおりとなる。

$$q_a q_b = M(q_b)q_a = \begin{bmatrix} q_{b4} & q_{b3} & -q_{b2} & q_{b1} \\ -q_{b3} & q_{b4} & q_{b1} & q_{b2} \\ q_{b2} & -q_{b1} & q_{b4} & q_{b3} \\ -q_{b1} & -q_{b2} & -q_{b3} & q_{b4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \\ q_{a4} \end{bmatrix} \tag{B.17}$$

または、

$$q_a q_b = M_c(q_a)q_b = \begin{bmatrix} q_{a4} & -q_{a3} & q_{a2} & q_{a1} \\ q_{a3} & q_{a4} & -q_{a1} & q_{a2} \\ -q_{a2} & q_{a1} & q_{a4} & q_{a3} \\ -q_{a1} & -q_{a2} & -q_{a3} & q_{a4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \\ q_{b4} \end{bmatrix} \tag{B.18}$$

また、上式中の $M(q)$ および $M_c(q)$ は、以下の様にも表される。

$$M(q) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Y}(q_v) + q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{q}_v \\ \hline -\mathbf{q}_v^T & q_4 \end{array} \right] \tag{B.19}$$

$$M_c(q) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{Y}(q_v) + q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{q}_v \\ \hline -\mathbf{q}_v^T & q_4 \end{array} \right] \tag{B.20}$$

ここに, $\Upsilon(\mathbf{q}_v)$ は, 以下で定義される 3×3 行列である.

$$\Upsilon(\mathbf{q}_v) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (= \times \mathbf{q}_v) \quad (\text{B.21})$$

これは, ベクトル演算におけるベクトル積の演算子を表す行列である. すなわち, $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ に対して

$$\Upsilon(\mathbf{q}_v)\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{q}_v \quad (\text{B.22})$$

が成立する.

2つのオイラーパラメータ q_a および q_b の積の共役数については, 以下の関係式が成り立つ.

$$(q_a q_b)^* = q_b^* q_a^* \quad (\text{B.23})$$

(ユークリッド空間の) 3次元ベクトル $[u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ に対して, その3次元複素数表示を

$$\mathbf{u} \triangleq u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \quad (\text{B.24})$$

によって定義するものとする. このとき, オイラーパラメータ q とこの3次元ベクトルとの積算は以下の通り計算される.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\mathbf{u} &= (u_3 q_2 - u_2 q_3 + u_1 q_4) \mathbf{i} + (-u_3 q_1 + u_1 q_3 + u_2 q_4) \mathbf{j} \\ &\quad + (u_2 q_1 - u_1 q_2 + u_3 q_4) \mathbf{k} + (-u_1 q_1 - u_2 q_2 - u_3 q_3) \\ &= \Omega(\mathbf{u})\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 & u_1 \\ -u_3 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & 0 & u_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

または,

$$\mathbf{q}\mathbf{u} = \Xi(\mathbf{q})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

ここに,

$$\Omega(\mathbf{u}) \triangleq \begin{bmatrix} \Upsilon(\mathbf{u}) & \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

$$\Xi(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} -\Upsilon(\mathbf{q}_v) + q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{q}_v^T \end{bmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

B.5 オイラーパラメータを用いた座標変換の表現

オイラーパラメータ q を用いた座標変換行列は式 (B.11) で与えられ, これを q_v と q_4 を用いて表すと以下のとおりとなる.

$$\begin{aligned} T(q) &= \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \\ &= (q_4^2 - \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v) I_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T + 2q_4 \Upsilon(\mathbf{q}_v). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

この関係と式 (B.19) および (B.20) を用いることより, 次式を得る.

$$M_c(q^*)M(q) = \left[\begin{array}{c|c} T(q) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] \quad (\text{B.30})$$

一方, $u' = T(q)u$ なる座標変換は, 以下のように表すこともできる.

$$\left[\begin{array}{c} u' \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T(q) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u \\ 0 \end{array} \right] \quad (\text{B.31})$$

よって, u' は, 以下の通り表すことができる.

$$u' = M_c(q^*)M(q)u = M_c(q^*)uq = q^*uq \quad (\text{B.32})$$

即ち, オイラーパラメータによる座標変換は, 3次元ベクトル u とオイラーパラメータ q の3次元複素数表示により

$$u' = q^*uq \quad (\text{B.33})$$

として簡単に記述できる.

また, $q = q_a q_b$ とすると, これを式 (B.33) に代入して, 次式を得る.

$$u' = q_b^* q_a^* u q_a q_b = T(q_b)T(q_a)u \quad (\text{B.34})$$

よって q_a および q_b の積によって規定される座標変換には以下の関係式が成り立つ.

$$T(q_a q_b) = T(q_b)T(q_a) \quad (\text{B.35})$$

付録 C. オイラーパラメータにより表現された運動学的方程式

ここでは, オイラーパラメータを用いて衛星の姿勢を表現する場合の運動学的方程式について示す. まず始めに, オイラーパラメータを時間微分し, その結果として得られる最も一般的なオイラーパラメータの運動学的方程式を導く. 次に, この方程式を拡張カルマンフィルタの状態方程式として適用するために, オイラーパラメータをリファレンス値とそのまわりの微小量とに分解して, これらの変数に対するオイラーパラメータの運動学的方程式を導出する.

C.1 一般的な運動学的方程式

時刻 t においてある基準座標に対して衛星の姿勢を表すオイラーパラメータを $\mathbf{q}(t)$ とする。また、時刻 t から $t + \Delta t$ の間の微小時間 Δt における姿勢変化量を $\Delta \mathbf{q}(t)$ とする。但し、 $\Delta \mathbf{q}(t)$ は、時刻 t における衛星の姿勢 $\mathbf{q}(t)$ を基準としたオイラーパラメータである。このとき、上記の基準座標に対する時刻 $t + \Delta t$ における衛星の姿勢を表すオイラーパラメータは以下で与えられる。

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t) \Delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{M}(\Delta \mathbf{q}(t)) \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \Delta q_4 & \Delta q_3 & -\Delta q_2 & \Delta q_1 \\ -\Delta q_3 & \Delta q_4 & \Delta q_1 & \Delta q_2 \\ \Delta q_2 & -\Delta q_1 & \Delta q_4 & \Delta q_3 \\ -\Delta q_1 & -\Delta q_2 & -\Delta q_3 & \Delta q_4 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) \quad (\text{C.1})$$

この式を用いて、時刻 t におけるオイラーパラメータの時間微分は、衛星の姿勢 $\mathbf{q}(t)$ を基準とした座標形から見た時刻 t における衛星の姿勢レート $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ を用いて、以下の通り求められる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(\Delta \mathbf{q}(t)) \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{q}(t) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}(t) \boldsymbol{\omega}(t) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

但し、上式の導出の過程では、 $\Delta \mathbf{q}$ の Δt に関する一次近似として以下の関係式を用いた。

$$\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}(t)|\Delta t\right) \times \omega_1/|\boldsymbol{\omega}(t)| \\ \sin\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}(t)|\Delta t\right) \times \omega_2/|\boldsymbol{\omega}(t)| \\ \sin\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}(t)|\Delta t\right) \times \omega_3/|\boldsymbol{\omega}(t)| \\ \cos\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}(t)|\Delta t\right) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_1\Delta t \\ \frac{1}{2}\omega_2\Delta t \\ \frac{1}{2}\omega_3\Delta t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

また、 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t))$ は、以下で定義される行列である。

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t)) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

C.2 オイラーパラメータの積に対する運動学的方程式

ここでは、連続した2つの座標変換を表現するオイラーパラメータの積に対する運動学的方程式を導出する。オイラーパラメータによって表現された運動学的方程式は、オイラーパラメータおよび衛星の姿勢角速度を状態変数とした場合に、この状態変数に対して非線形である。この理由により、オイラーパラメー

タを用いてカルマンフィルタを構成する場合には、非線形システムに対する拡張カルマンフィルタを適用する必要がある。そこで、ここでは、状態変数に含まれるオイラーパラメータ q をリファレンス値 q_{ref} とその近傍の微小量 Δq に分けて、これらの状態ベクトルに対する運動学的方程式を導出する。

まず、衛星の姿勢 q をリファレンス値 q_{ref} とそのまわりの微小量 Δq に分解し、以下のとおり定義する。

$$q = q_{\text{ref}} \Delta q \quad (\text{C.5})$$

但し、 Δq は、 q_{ref} で規定されるリファレンス座標系からみた場合の衛星の姿勢を表すオイラーパラメータである。式 (C.2) の運動学的方程式と同様に、 q_{ref} に関する運動学的方程式を書くと以下のとおりとなる。

$$\dot{q}_{\text{ref}} = \frac{1}{2} q_{\text{ref}} \omega_{\text{ref}} \quad (\text{C.6})$$

よって、

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\text{ref}}^* &= \frac{1}{2} \omega_{\text{ref}}^* q_{\text{ref}}^* \\ &= -\frac{1}{2} \omega_{\text{ref}} q_{\text{ref}}^* \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

ただし、ここに ω_{ref} は、 q_{ref} で与えられる座標系の角速度ベクトルをこの座標系で表わしたもの (の3次元複素数表示) である。

一方、式 (C.5) の両辺に左から q_{ref}^* を作用させて得られる

$$\Delta q = q_{\text{ref}}^* q \quad (\text{C.8})$$

を時間微分し、式 (C.7) の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q} &= \dot{q}_{\text{ref}}^* q + q_{\text{ref}}^* \dot{q} \\ &= -\frac{1}{2} \omega_{\text{ref}} q_{\text{ref}}^* q + q_{\text{ref}}^* \frac{1}{2} q \omega \\ &= -\frac{1}{2} \omega_{\text{ref}} \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q \omega \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

ここで、

$$\omega = \omega_{\text{ref}} + \Delta \omega \quad (\text{C.10})$$

と置いて、これを式 (C.9) に代入して、式 (B.17)、式 (B.18) および式 (B.26) を用いることによって次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q} &= -\frac{1}{2} \omega_{\text{ref}} \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q \omega_{\text{ref}} + \frac{1}{2} \Delta q \Delta \omega \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\Delta q_v) + \Delta q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -q_v^T \end{bmatrix} \omega_{\text{ref}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathcal{Y}(\Delta q_v) + \Delta q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -q_v^T \end{bmatrix} \omega_{\text{ref}} + \frac{1}{2} \Xi(\Delta q) \Delta \omega \\ &= \begin{bmatrix} -\mathcal{Y}(\Delta q_v) \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{\text{ref}} + \frac{1}{2} \Xi(\Delta q) \Delta \omega \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\omega_{\text{ref}}) \Delta q_v \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{\text{ref}} + \frac{1}{2} \Xi(\Delta q) \Delta \omega \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

一方、 ω は、実は q で規定される座標系の角速度ベクトルを q で規定される座標系で表わしたものであり、 ω_{ref} は、 q_{ref} で規定される座標系の角速度ベクトルを q_{ref} で規定される座標系で表わしたものである

から、厳密には、式 (C.10) のように表わすのは適当でなく、このような場合、 ω_{ref} を q で規定される座標系に座標変換して扱う必要がある。即ち、

$$\omega = \Delta q^* \omega_{\text{ref}} \Delta q + \Delta \omega \quad (\text{C.12})$$

ここに、 $\Delta \omega$ は、 q で規定される座標系の角速度（を q で規定される座標系で表したもの）と q で規定される座標系で表した ω_{ref} との差ベクトルである。これを、式 (C.9) に代入して、次式を得る。

$$\Delta \dot{q} = -\frac{1}{2} \omega_{\text{ref}} \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q \Delta q^* \omega_{\text{ref}} \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q \Delta \omega \quad (\text{C.13})$$

$$= \frac{1}{2} \Delta q \Delta \omega \quad (\text{C.14})$$

即ち、式 (C.2) の運動学的方程式は、 q_{ref} および Δq のそれぞれに対して成り立っており、基準とする座標系が q_{ref} を表現するために用いた慣性座標系であるか、 Δq を表現するために用いた回転座標系 q_{ref} であるかには依存しない。ところが、実際の角速度ベクトルは、衛星座標系に固定された IRU によって計測されるため、 ω および ω_{ref} は、衛星座標系 q を基準とした値として扱うべきである。よって、ここで議論するストラップダウン姿勢決定系における状態方程式に含まれる運動学的方程式としては、式 (C.10) をもとにして導かれた式 (C.11) を採用する必要がある。即ち、

$$\Delta \dot{q} = \begin{bmatrix} \Upsilon(\omega_{\text{ref}}) \Delta q_v \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \Xi(\Delta q) \Delta \omega \quad (\text{C.15})$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega_{\text{ref}} \times \Delta q_v \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \Xi(\Delta q) \Delta \omega. \quad (\text{C.16})$$

Δq が微小オイラーパラメータである場合には、式 (B.1) および式 (B.4) により

$$\Delta q_v \approx \frac{1}{2} \Delta \theta \quad (\text{C.17})$$

となる。これを式 (C.16) に代入して、

$$\Delta \dot{\theta} = -\omega_{\text{ref}} \times \Delta \theta + \Delta \omega \quad (\text{C.18})$$

を得る。ここに、 $\Delta \theta$ は、 Δq に対応する微小オイラー角を意味している。

付録 D. 可観測性

カルマンフィルタを適用するにあたっては、システム方程式の可観測性を事前に確認しておく必要がある。可観測性がなければ観測値から状態変数を推定することは論理的に不可能であり、カルマンフィルタの適用も当然のことながら不可能である。これはちょうど、制御コントローラを設計する際に事前に可制御性を確認し、制御入力によって任意の状態変数に制御可能かどうかを確認することと対応している。ここでは、まず始めに、一般によく知られている線形システムに対する可観測性の判定方法を紹介する。次いで、非線形システムに対する可観測性の判定方法について紹介する。([10]) ここに紹介する方法を適用することにより、非線形システムとして扱う必要がある姿勢決定系に対する可観測性を確認することができる。

D.1 線形システムにおける可観測性の判定方法

線形システムとして以下の連続系を考える.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (\text{D.2})$$

ここに, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^m$ である. このとき, 可観測性の必要十分条件は, 以下の条件式に含まれる $(m \times n) \times n$ の行列のランクが n であることである. 即ち,

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = n \quad (\text{D.3})$$

式 (D.3) が成り立つときには, このシステムは可観測である. システム方程式を構成する各行列のうち, \mathbf{A} および \mathbf{C} が時間とともに変化しない限りにおいて, 状態ベクトル \mathbf{x} について全域的可観測性が成立している.

D.2 非線形システムにおける可観測性の判定方法

非線形システムとして以下の連続系を考える.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{X}(t)) \quad (\text{D.5})$$

ここに, $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{Y}(t) \in \mathcal{R}^m$ である. このとき, 可観測性の条件は, 以下の式に含まれる $(m \times n) \times n$ の行列のランクが n であることである. 即ち,

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \{L_h^{(0)} \mathbf{f}\} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \{L_h^{(1)} \mathbf{f}\} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \{L_h^{(2)} \mathbf{f}\} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \{L_h^{(n-1)} \mathbf{f}\} \end{bmatrix} \right\} = n \quad (\text{D.6})$$

ここに, $L_h^{(i)} \mathbf{f}$ は, 以下で定義される演算を示す記号であり, リー微分と呼ばれている.

$$L_h^{(0)} \mathbf{f} \equiv \mathbf{h}(\mathbf{X}(t)) \quad (\text{D.7})$$

$$L_h^{(1)} \mathbf{f} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (L_h^{(0)} \mathbf{f}) \mathbf{f}$$

$$L_h^{(2)} \mathbf{f} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (L_h^{(1)} \mathbf{f}) \mathbf{f}$$

$$\vdots$$

$$L_h^{(i)} \mathbf{f} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (L_h^{(i-1)} \mathbf{f}) \mathbf{f}$$

$$\vdots$$

仮に、式(D.4)および(D.5)で示されるシステムが線形であり、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ h(\mathbf{X}(t)) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(t) \end{aligned} \tag{D.8}$$

と表されるとき、式(D.3)と(D.6)とは、まったく同じ条件式となる。この意味において、式(D.6)は可観測性を示す一般的な条件式と考えることができる。一方、システム方程式が非線形の場合には、式(D.6)の中に示される行列自体が、 \mathbf{X} の関数であるため、 \mathbf{X} の値によって式(D.6)に示される行列のランクが変わり得る。従って、すべての \mathbf{X} の領域で、式(D.6)が成立するわけではなく、一般的には、ある限られた \mathbf{X} のみで可観測性が成立することになる。この意味での可観測性を局所的可観測性(local observability)という。

参 考 文 献

- [1] E.J.Lefferts F.L.Markley and M.D.Shuster. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance*, Vol. 5, No. 5, pp. 417-429, Sep.-Oct. 1982.
- [2] R.L.Farrenkopf. Analytic steady-state accuracy solutions for two common spacecraft attitude estimators. *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 4, pp. 282-284, July-Aug. 1978.
- [3] 西村敏充, 狩野弘之. 制御のためのマトリクス・リカッチ方程式. 朝倉書店, 1996.
- [4] 二宮敬虔, 小河原義明, 橋本樹明ほか. 第14号科学衛星「ようこう(1991-062a)」の姿勢制御. 宇宙科学研究所報告 第81号, 宇宙科学研究所, 1995.
- [5] T.Hashimoto K.Ninomiya and H.Iida. Attitude and orbit control system for an infrared imaging surveyor. In *Third ESA International Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems*. ESTEC, Nov. 1996. ESA-SP-381, pp.373-378.
- [6] Arthur Gelb. *Applied Optimal Estimation*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- [7] 有本卓. カルマン・フィルタ. 産業図書, 1976.
- [8] 片山徹. 応用カルマンフィルタ. 朝倉書店, 1983.
- [9] James R. Wertz ed. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Kluwer Academic Publishers, Netherland, 1978.
- [10] Robert H.Hermann and Authur J.Krener. Non-linear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, No. 5, pp. 728-740, Oct. 1977.