

## Drag-Free 衛星を用いた一般相対論検証実験の 可能性

中井 豊\*・河島 信樹

(1983年3月30日受理)

### Possibilities of Verification of General Relativity by the Use of Drag-Free Satellite

By

Yutaka NAKAI, Nobuki KAWASIMA

**Abstract:** A possibility of the verification experiment of general relativity by the use of a drag-free satellite in an interplanetary orbit is reviewed. A number of the experiment programs have been proposed but they have not yet been realized. Physical and engineering problems involved in it are extensively discussed.

#### 1章 序 論

一般相対論によれば、質量中心の回りを回る質点の軌道は、よく知られている様に、近日点の移動を示す (perihelion shift). 移動の大きさを PPN パラメータで表わすと、

$$\Delta_{P.S} = 3\pi \times \frac{R_s}{a(1-e^2)} \frac{2+2\gamma-\beta}{3} \quad [\text{rad/Rev}] \quad (1)$$

但し、 $R_s$  ; 質量中心の schwartzschild 半径

$\beta, \gamma$  ; PPN パラメーター, 一般相対論では  $\beta = \gamma = 1$  となる.

$a$  ; 軌道長半径

$e$  ; 離心率

となる。一方我々に最も身近な最大の重力源は太陽であり、この太陽の回りに人工衛星を飛ばし軌道を精密観測する事で、上述の一般相対論等の効果を観測することができる。

---

\* 現在, 宇宙開発事業団

理想的には衛星の位置、 $\dot{X}$  や速度  $\dot{V}$  が直接計測できれば良いのだが我々が実際に取得できるデータは局から送信された信号が衛星を通して地上に返ってくるまでの往復時間 (Range) と、受信した carrier の周波数と局の基準周波数との比較による衛星/局間の視線方向の相対速度 (Doppler) である (図1)。そして、衛星/局間を電波リンクで結ぶため、一般相対論の効果として上述の‘近日点の移動’以外に太陽の近くを通る電波信号が遅れる現象である‘time delay’も観測可能になるし、又衛星に原子時計を積めば doppler の観測により太陽重力場による‘Red Shift’も見る事ができるかも知れない。

図1の様を取得したデータには、近日点移動の効果や time delay の効果 (range のみ)、redshift (doppler のみ) が乗っており、データ処理に当ってはこれらの現象に対する記述

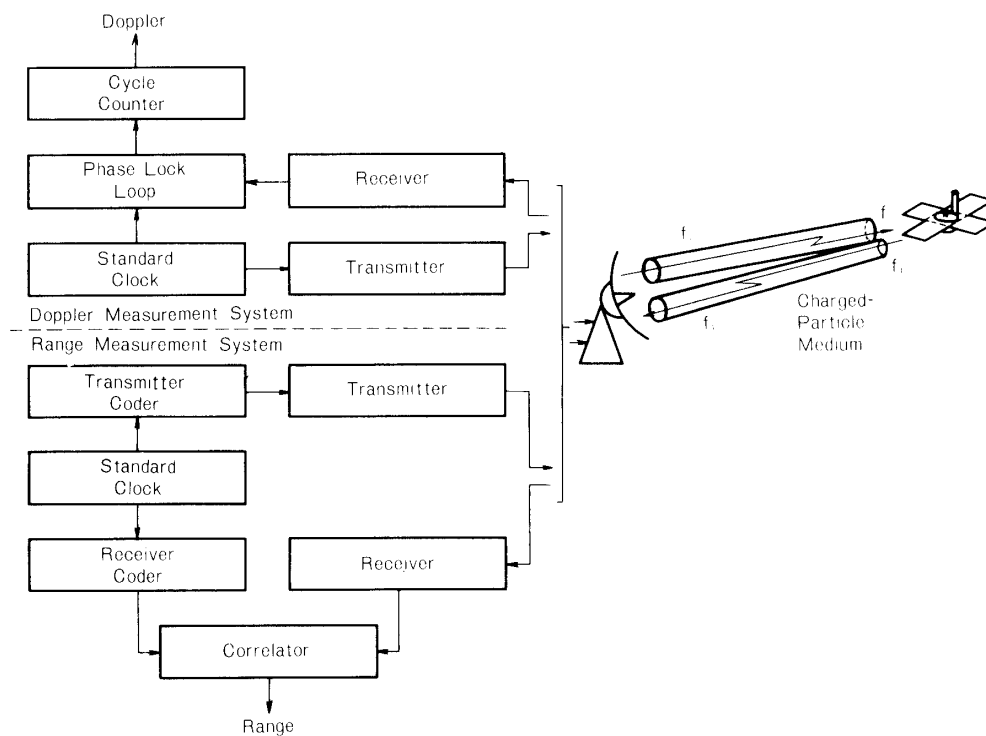


図1 計測システムの概要

を含んだモデルを用意しておき、取得されたデータに‘best fit’する様に  $\beta$ ,  $\gamma$  の値を評価するのである (kalman Filter)。但しここで注意すべき事は

- 1) 実際のデータには一般相対論の効果以外に太陽の球からのズレ ( $J_2$ ) や木星等の引力による影響が乗っている。
- 2) モデルに使用される定数 (例えば、太陽の質量  $M_\odot$ , 上記  $J_2$ , 局の緯度経度) の中には、この種の精密実験の使用に耐える程の精度を持たないものがある。

であり、1) に対しては、実際に衛星に働く力をすべてモデルに導入し、2) については、衛星の位置や速度、 $\beta$  及び  $\gamma$  は持論、 $M_\odot$  や  $J_2$ , 木星の質量、局の位置、重力定数等をすべて“unknown”, な量としてモデルに組み込み、 $\beta/\gamma$  と同様、実際のデータを最も説明し

うる様“再”評価する事で実験の質を保つ事になる。

この種の実験で実際に行なわれたのは、1969～70年にかけての Mariner 6/7 [ 1 ] や 1976年の Viking [ 2 ] による “time delay” の計測実験であって PPN パラメーター  $\gamma$  に対してそれぞれ 1%, 0.1% の精度を得ている。この実験の経験及び種々の検討によれば人工惑星の追跡による一般相対論の実験の精度を左右するものとして

1) range 及び doppler の計測精度

2) 衛星に働く重力以外の力による軌道のズレ (radiation pressure 等)

が指適されている。

1) に対しては Viking の実験の経験から今後の精度向上に対して up/down link とも S-band 及び X-band の二波を使用して、プラズマによる誤差を取り除き、range の精度に対して数  $m$  ( $\sim 3m$ ) を目標とすることが望まれる。(Viking では uplink が S-band のみで range 精度が 15 m  $\sim$  30 m 程度であった。又完全な二波使用のリンクによって range 精度がどの程度良くなるかは非常に重要な検討事項である。)

又 2) に対しては着陸船の使用か drag free 衛星の使用 (図 2) が必要となってくる。

図 2 における様に衛星中央部にある “proof mass” には重力以外の力が働かないため、衛星に重力以外の力が働いた時、衛星と proofmass の相対位置を検出し proofmass の位置を元に戻す様に gas jet を発射する様なメカニズムを用意しておけば、衛星の軌道は重

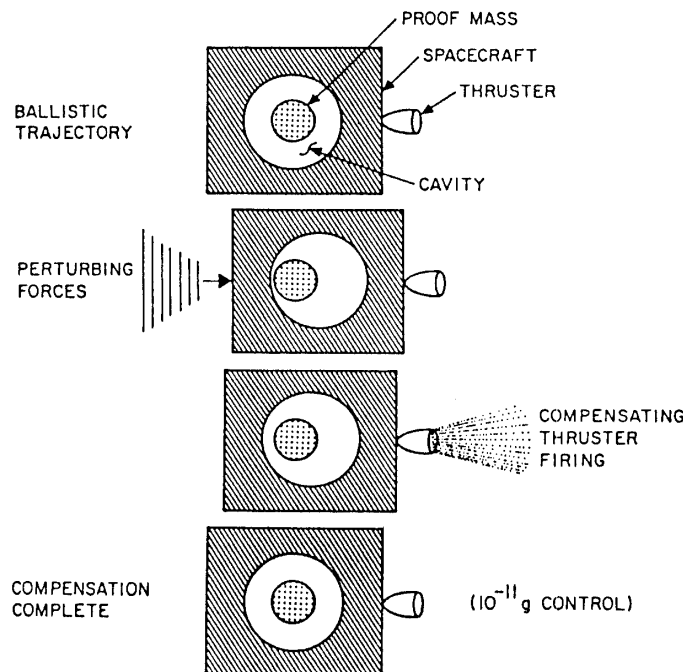


図 2 DRAG FREE CONCEPT

表1 衛星に働くさまざまな力

一般相対論 (近日点の移動)
一般相対論 (Lense-Thirring 効果)
太陽の偏平度による効果 ( $J_2$ )
他の惑星の重力による効果 (主に木星)
重力定数の時間変化の可能性
重力以外の力 (radiation pressure 等)

力だけによって決定されるわけである (drag free). 本報告では drag-free 衛星の詳細には言及しないが (ref 3 参照), 世界最初の drag free 衛星 (TRIAD-I [3]) は, 1972 年に米国で打ち上げられその “drag free” のレベルは  $\sim 10^{-11} g$  であった.

以下 2 章では, 一般相対論等の力が軌道に及ぼす影響について, 3 章は計測システムとデータ処理について, そして 4 章では外国で行なわれた実験 (主に計画) について review する.

## 2 章 一般相対論及び他の力の “Newtonian Orbit” に及ぼす効果 [5][6]

### 2-1) 一般相対論の効果 (“近日点” の移動)

最もよく知られた効果で質量中心の回りを回る質点の近日点が 1 周回当り,

$$\delta \sim 3\pi \times \frac{2+2\gamma-\beta}{3} \times \frac{R_s}{a(1-e^2)} \quad [\text{rad}/1 \text{ rev}] \quad (2)$$

但し,  $R_s$ : schwartzschild 半径

$a$ : 軌道長半径

$e$ : 離心率

だけずれる現象である.

しかし重要な点は軌道の 6 要素, 近日点引数 ( $\omega$ ), 昇交点赤経 ( $\Omega$ ), 平均運動 ( $l$ ; Newton の軌道では,  $\equiv \frac{2\pi}{T_p} t$ ,  $T_p$  は軌道周期), 軌道長半径 ( $a$ ), 離心率 ( $e$ ),

軌道傾斜角 ( $i$ ) すべてが摂動を受ける点である. 摂動は一般に  $a/e/i$  が周期項のみを, そして  $\omega/\Omega/l$  が, 周期項と時間に比例して現象の大きさが増大していく永年項を含む形で表われる. (2) 式の  $\delta$  は軌道 6 要素で表わすと

$$\delta \equiv (\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{i=0} \quad [\text{rad}/\text{rev}] \quad (3)$$

となるが, この関係を使えば (2) 式は下記の永年項,

$$(\Delta\omega(t) + \cos i \Delta\Omega(t)) = \frac{3}{2} \times \frac{2+2\gamma-\beta}{3} \frac{R_s}{a(1-e^2)} \times \frac{2\pi}{T_p} t + (\text{周期項})$$

の中で、周期項が1 rev 当り ( $t = T_p$ ) で0になる事を考えると自然に出てくる。つまりよく知られた“近日点”の移動は、複雑な運動の中の特に“近日点” ( $\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega$ )のみを取り出して更にこの中の永年項の1 rev 当りの変化量を表わしたものであって、“近日点の移動”は軌道を1 rev 毎に見るのではなく更に細く見れば、近日点ばかりでなく軌道6要素すべての周期的な変動も含めた複雑な運動と考えるべきである。

以上述べた軌道6要素の摂動は次節以降も全く同じであって、ただ異なるのは永年項や周期項の関数形がかわるだけである。つまり、太陽の偏平度等による摂動力も衛星の軌道に近日点移動を含め複雑な影響を及ぼすが、現象の大きさを大ざっぱにつかむため、次節以降同様のセンスで近日点の移動に着目していく。

### 2-2) 一般相対論の効果 (Lense Thirring 効果[7])

太陽は自転しており、この自転による効果が2-1)に加え更に“Newtonian Orbit”に加わる。

この効果も各軌道要素に摂動として乗ってくるが、やはり一様なドリフト成分である永年項と周期成分とで構成される。

永年項のみを考えれば、2-1)項で述べた様に近日点引数 ( $\omega$ )、昇交点赤経 ( $\Omega$ )、平均運動 ( $l$ ) に影響を及ぼす。

Lense Thirring 効果による近日点の移動は、

$$(\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{LT} \sim \frac{2|\vec{J}|G}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2} n} \left( \frac{5}{2} - \frac{13}{2} \sin^2 \frac{i}{2} \right) \times nt + (\text{周期項}) \quad (4)$$

但し、 $n$  ; 平均角速度 ( $n = \frac{2\pi}{T_p}$ ,  $T_p$  は軌道周期)

$i$  ; 軌道傾斜角

$\vec{J}$  ; 中心の天体の持つ角運動量

であって1 rev 当りの Lense/Thirring 効果による近日点移動は、

$$(\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{LT} / \text{rev} \sim \frac{4\pi|\vec{J}|G}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2} n} \left( \frac{5}{2} - \frac{13}{2} \sin^2 \frac{i}{2} \right) \quad [\text{rad/rev}] \quad (5)$$

であり近日点移動の距離は、

$$\Delta L_{LT} \sim (\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{LT} \times a(1-e) \quad [\text{m/rev}]$$

である。

### 2-3) 太陽の偏平度による効果

もしその回りを回っている天体が完全な球であれば、そのポテンシャルは Newton のポテンシャルであるが、真球からズレた形をしていればそのポテンシャルは一般に、

$$\varphi_1 = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{ae}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) \right\}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_n^m(\sin \varphi) \{c_{n,m} \cos m\lambda e + S_{n,m} \sin m\lambda e\} \quad (6)$$

但し,  $J_n, C_{n,m}, S_{n,m}$  は定数

$a_e$  は, 天体の半径

と表わせる.

地球では  $J_2 \sim 1.08 \times 10^{-3}$ , それ以外の係数は  $10^{-6}$  のオーダーであり, 太陽に対しては  $J_2 \leq 5 \times 10^{-5}$  であって他の係数は知られていない.

このポテンシャルは, 前述の通り軌道6要素に対して一様なドリフトである永年項と周期項の和の形で摂動を与えるが, ここでは主要項である  $J_2$  に対して永年項のみ下に記述する. この永年項は前節と同様,  $\omega, \Omega, l$  に摂動を与えるが, 近日点の移動は,

$$\begin{aligned} (\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{J_2} &\sim \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_{\odot}}{a(1-e^2)} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) nt \quad [\text{rad}] \\ (\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{J_2} / \text{rev} &\sim 3\pi J_2 \left( \frac{R_{\odot}}{a(1-e^2)} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \quad [\text{rad/rev}] \end{aligned} \quad (7)$$

但し,  $R_{\odot}$ ; 中心の天体の半径

又近日点移動の距離は,

$$\Delta L_{J_2} / \text{rev} \sim 3\pi a(1+e) J_2 \left( \frac{R}{a(1-e^2)} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \quad [\text{m/rev}] \quad (8)$$

である.

#### 2-4) 他惑星の引力による効果

太陽回りの衛星は木星や金星の引力によってその軌道が摂動を受けるし, 地球回りの衛星は太陽や月によって摂動を受ける. この摂動による軌道6要素の変化も永年項と周期項によって表わす事ができるが, 永年項のみを考えると同様に,  $\omega, \Omega, l$  だけに摂動を与える.

1 rev 当りの近日点移動は,

$$\begin{aligned} &(\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{\text{dis}} / \text{rev} \\ &\sim \frac{3\pi}{2} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \left( 2 + \frac{1}{2} e^2 - \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos^2 i - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \\ &\times \frac{M_{\text{dis}}}{M + M_{\text{dis}}} n_{\text{dis}}^2 (1 - e_{\text{dis}}^2)^{-3/2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_{\text{dis}} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

但し,  $n_{\text{dis}}$ ; 衛星に摂動を及ぼす天体の平均運動

$e_{\text{dis}}$ ; 衛星に摂動を及ぼす天体の離心率

$i_{\text{dis}}$  ; 衛星に摂動を及ぼす天体の inclination

$M_{\text{dis}}$  ; 衛星に摂動を及ぼす天体の質量

であって、近日点移動の距離は

$$\Delta L_{\text{dis}} / \text{rev} \sim a(1+e)(\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_{\text{dis}} \quad [\text{m/rev}] \quad (10)$$

である。(永年項については、2-1)~2-4)と同様である.)

### 2-5) 重力定数の時間変化による効果[8]

重力定数の時間変化の存在を仮定し

$$G = G_0 + \dot{G}_0(t - t_0) \quad (11)$$

と表すならば、Newton のポテンシャル以外の摂動のポテンシャルとして、

$$\varphi_1 = \frac{\dot{G}_0 M}{r}(t - t_0) = \frac{\dot{G}_0 M}{nr} l \quad (12)$$

但し、 $n$  は平均角速度

$l$  は、平均運動

を考慮する必要がある。この摂動はやはり軌道6要素に永年項と周期項として影響を及ぼすが、2-1)~2-4)と違って永年項は、 $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $l$  に現れる。

近日点移動の大きさは、

$$(\Delta\omega + \cos i \Delta\Omega)_G \sim \frac{\dot{G}_0 M \times n^2 t^2}{2n^3 a^3 (1-e^2)^{1/2}} \sim \frac{n}{2} \left( \frac{\dot{G}}{G} \right) \times (1-e^2)^{-1/2} t^2 \quad (13)$$

であって、その移動の距離は、

$$\Delta L_G \sim a(1+e) \times \frac{n}{2} \left( \frac{\dot{G}}{G} \right) (1-e^2)^{-1/2} t^2 \quad [\text{m}] \quad (14)$$

である。ここで注意すべきは  $\dot{G}$  については軌道要素の変化の主要項が  $t$  に比例するのではなく  $t^2$  に比例する事であって、このため2-1)~2-4)までの様に1 rev 当りの変化量として現象を捕えるのは適当でない。

### 2-6) 重力以外の力 (radiation pressure 等) による効果

一般に軌道運動をしている質点に対して重力以外の力が働けば、2-5)までと同様に軌道6要素すべて変化する。近日点にのみ着目し、時間  $\Delta T$  の間に加速度  $\sigma_a$  を受けるとすれば近日点は

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{\delta v}{v} \sin \theta \\ &\sim \frac{\sigma_a}{v} \Delta t \end{aligned} \quad (15)$$

但し、 $\theta$ ；力の方向と速度のなす角  
 $v$ ；力を受けた時の質点の速度  
 だけ shift し、その移動の距離は、

$$\Delta L \sim a(1-e) \frac{\sigma_a}{v} \Delta t$$

である (図3)。

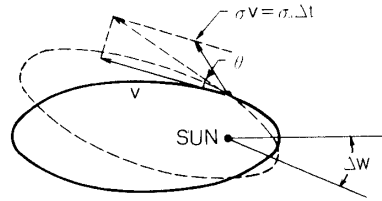


図3 衛星に働く重力以外の力と近日点移動の関係

## 2-7) 各摂動の及ぼす効果に対する評価

前節まで述べてきた様に各摂動は軌道6要素に複雑な変化をもたらすが、ここでは各摂動の大きさを直感的に示すため近日点移動の大きさにのみ着目してオーダー評価する。

表2 水星へのホーマン軌道を持つ衛星に対する各摂動の大きさ

	1 Rev 当りの 近日点移動 [rad]	1 Rev 当りの 近日点移動 [m]
一般相対論	$3.3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^4$
LENSE-THIRING	$7.6 \times 10^{-10}$	$1.1 \times 10^2$
$J_{2..}$	$3.0 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^3$
金星	$9.2 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^7$
地球	$4.5 \times 10^{-5}$	$0.7 \times 10^7$
火星	$1.4 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^5$
木星	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^7$
土星	$5.0 \times 10^{-6}$	$0.7 \times 10^6$
天王星	$0.9 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^4$
海王星	$2.9 \times 10^{-8}$	$0.4 \times 10^4$
** $\dot{G}/G$	$5.7 \times 10^{-11}$	8.6

\*\* $\dot{G}/G \sim 10^{-11}/\text{year}$ として1年間における変化を記述した。  
 これは $\dot{G}/G$ による軌道要素の変化が $\propto t^2$ であって1rev,  
 当たりと言う表現は適当でないためである。



表2は、水星軌道 ( $a=0.7\text{AU}$ ,  $e=0.43$ ) に及ぼす各効果の大きさを示している。 $\dot{G}/G$  による効果は  $t^2$  に比例するため他の効果と大きさを比較する場合は注意が必要である。この表を見れば、衛星に働く力で最も大きいのは木星や金星の引力である事が分かる。

### 3章 実験の概要

#### 3-1) Range/Doppler 計測システムについて[9][10]

我々が実際に取得するデータは、衛星/局間の直距離 (range) と視野方向の衛星の相対速度 (doppler) であって、衛星の位置や速度そのものではない。

range は、地上局の基準コードと衛星搭載のトランスポンダによって地上に打ち返されてきた受信コードとの位相差を計る事で往復時間を計測するものであり、doppler は地上局で受信した電波の周波数と局の standard clock の周波数を比較する事で計測する (トランスポンダは受信した信号を増幅しそしてこれにコヒーレントな信号を地上局に送り返す装置である。)

このシステムで最も大きなノイズ源はプラズマであって range はプラズマによる group velocity の遅れを通し、doppler はプラズマの scintillation を通して影響を受ける。

これを避けるためには、上記の現象が carrier の周波数に依存する事を利用して二つの異なった周波数 (S-band/X-band) で衛星/地上局間の電波リンクを構成する必要がある。つまり、S/X-band で独立に range や doppler を計測しておき両者の結果からプラズマの効果を取り除けば良い。Viking の実際では残念ながら down link のみ S/X-band の二波使用であってその range 精度は 15 m~30 m にとどまっている。

図4に衛星システムのダイアグラムを、図5~図7に地上システムのダイアグラムをのせる (この図は米国の深宇宙 Mission に対する追跡設備である Mu-II [9] システムの図である)。

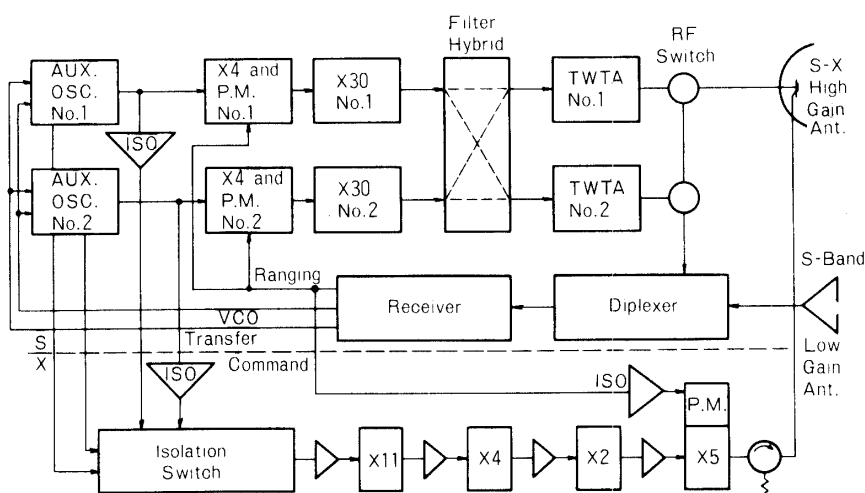


図4 衛星内システム (トランスポンダ) のダイアグラム  
(この図は Viking の軌道船のものである。)

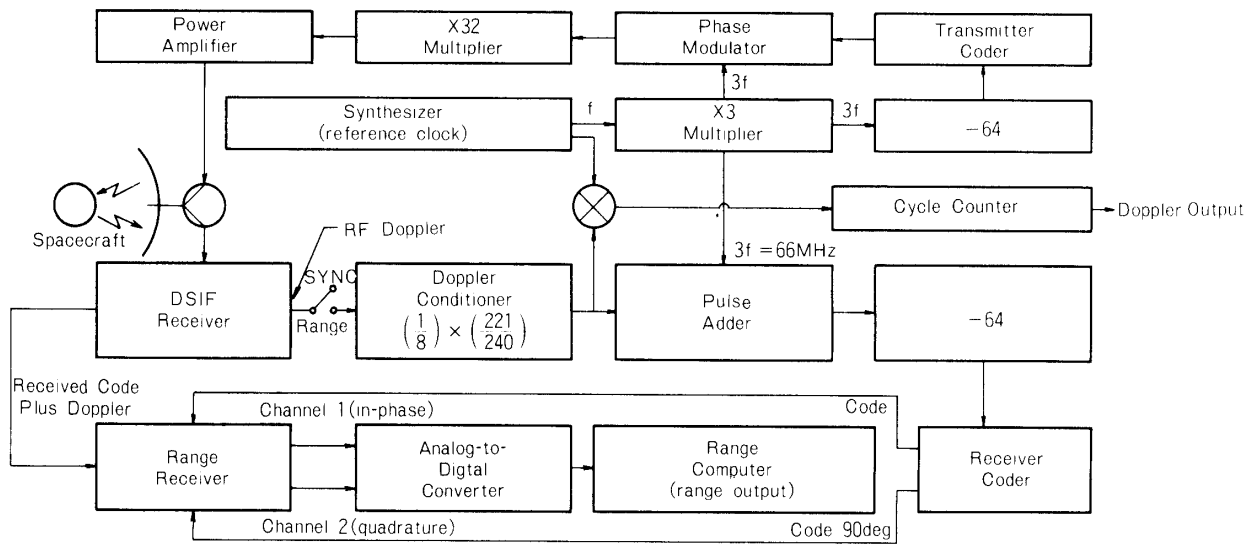


図 5 Binary-coded sequential acquisition ranging (Mu-ranging) system

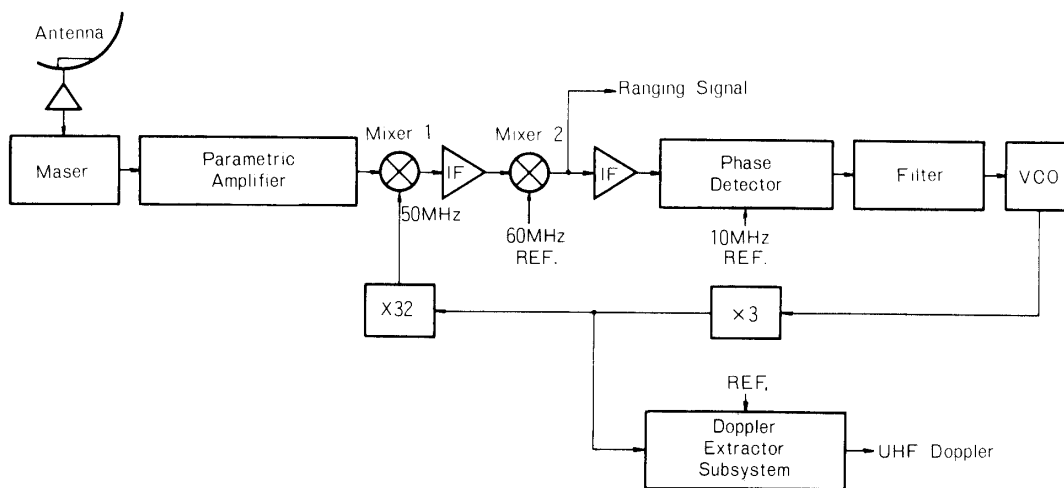


図 6 DSIF receiver block diagram

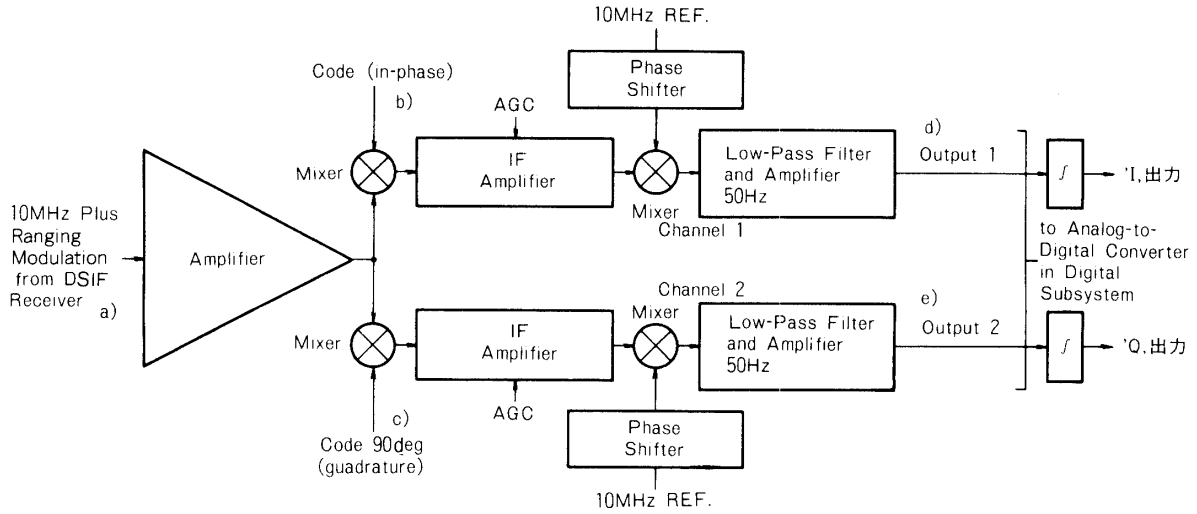


図7 Ranging receiver block diagram

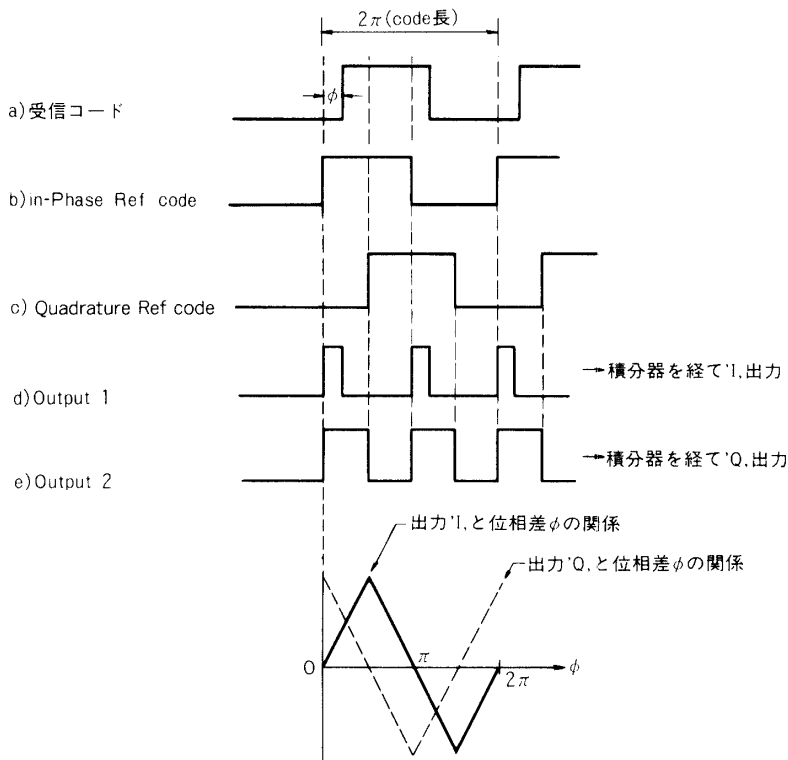


図8 Range Receiver に於ける相関の取り方

Transmitter Coder で作られた ranging code は carrier の PM 変調に使用され衛星に向け送信される (Mu-II では code の周期を 1 Hz~8 MHz まで設定できる)。衛星から送り返された信号は DSIF Receiver によって phase lock され 10 MHz の IF 信号の形で ranging code が測距用に、そして VCO のラインから Doppler 計測用の周波数がそれぞれ出力される。

一方 Receiver Coder は測距用の reference として、送信された Code と同じものを作り出しており、この reference のコードと DSIF からの受信コードとの相関を取る事で電波の往復時間を割り出している。更に具体的には、Receiver Coder によるコードは送信コードと同期して生成される in-phase コードと、in-phase コードに対して位相が  $90^\circ$  ずれている quadrature コードの二つが作られ、この二つの reference コードと受信コードの相関値をある時間の間積分してやった値、 $I/Q$  から表 3 の式により受信コード/reference コードの位相差 (つまり往復時間) を出している (図 8)。

doppler は DSIF Receiver の VCO から出力された信号と地上の reference clock との周波数差を作り出し、cycle counter によってある時間間隔での位相を求めて、この位相をこの時間で割る事により平均周波数を求めている。

range の精度を左右するものは、

- 1) プラズマによる時間遅れ
- 2) 衛星のトランスポンダの jitter
- 3) 地上局の jitter
- 4) 相関の非線形性(システムの持つ周波数特性から受信コードの波形がなまってくる)
- 5) 衛星/地上局システムに対する短期安定性 (ranging code の往復時間内でシステムが大きく変動しない事) 及び長期安定性 (数年間の mission life の間システムが大きく変動しない事)

等である。3) についてはその特性の 1 例を図 9 に示す (但し、図 9 の縦軸 " $\tau$ " は前述の受信/reference コードの相関値を作る際の積分時間である)。

又 4) は、理想的には図 8 に示される様な三角波の特性を持つべき相関が図 10 の様に波形がくずれる事で誤差を生むわけである。5) については、Mu-II システムが短期安定度で 30 ps ( $\Delta T=17$  h)、長期安定度で 4 ns ( $\Delta T\sim 3$  month) の能力を持っている事が報告されている。

しかし、range を数  $m$  の精度で計測しようとする場合の最も大きなノイズ源はプラズマによるものであって、up/down link 両者に対して S/X-band 二波を使用する事が必要であろう。

一方、doppler の精度を左右するものは、

- 1) プラズマの scintillation
- 2) 大気 of scintillation
- 3) reference clock の jitter
- 4) トランスポンダ及び地上の受信器の scintillation
- 5) cycle counter の jitter

表3 相関値 I, Q と delay time の関係[9]

$I > 0, Q > 0$	$\tau = \frac{T}{4} \frac{Q}{I+Q}$
$I < 0, Q > 0$	$\tau = \frac{T}{4} \left( \frac{I}{I-Q} + 1 \right)$
$I < 0, Q < 0$	$\tau = \frac{T}{4} \left( \frac{Q}{I+Q} + 2 \right)$
$I > 0, Q < 0$	$\tau = \frac{T}{4} \left( \frac{I}{I-Q} + 3 \right)$

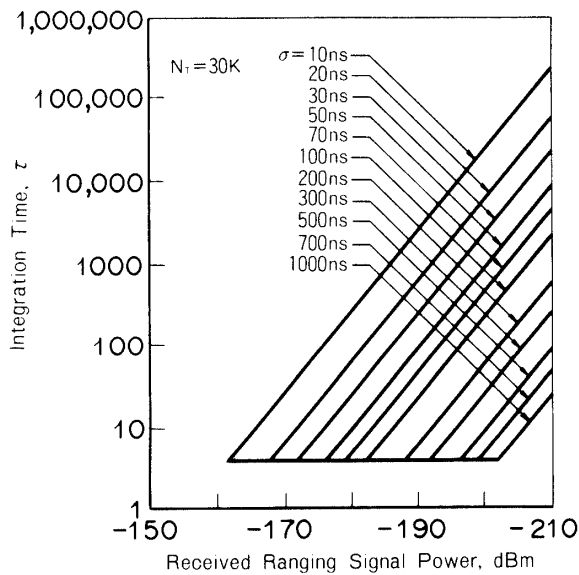


図9 受信信号のパワーと、  
積分時間及び測距精度の関係

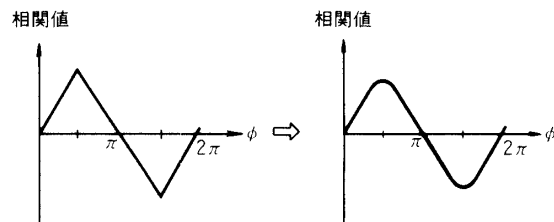


図10 システムの周波数特性  
からくる相関関数のなまり

6) 衛星や局のゆらぎ

等が掲げられる。これらの誤差源の大きさを cycle counter の積分時間に対して plot したものが図 11[11]である(この図は現在の米国の能力と見て良い。但し6)については描かれていない)。

プラズマの scintillation は、衛星・局・太陽間の角度に関してそのレベルが変動するし(図中(S-band, 90°), (S-band, 180°)がこれに対応する。又0°の時が最も悪くなる[12].), 電波リンクの周波数が高くなる程このノイズを押さえる事ができる。(S-band→X-band で1ケタ改善される)。又大気については局のアンテナ仰角によってノイズレベルが変動する[12]。結局現状での最大のノイズは1)と2)によるものでより高い周波数の使用や、water vapour radio meter による大気中の水蒸気の観測によって改善する必要がある。そ

して更に doppler の精度を向上させる方法として fourway doppler link [13] が提案されている (R.F.C. Vessot, M.W. Levine).

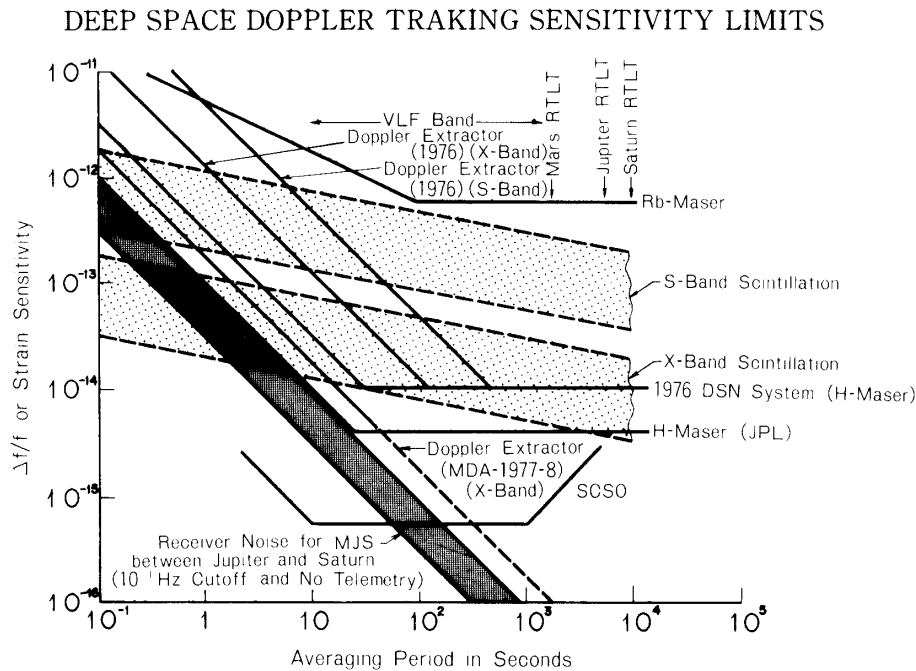


図 11 Fractional Frequency Stability of Various Doppler Elements as a Function of Intergration Time

### 3-2) データ処理について[14][15][16]

序論でも述べた様に、取得された data (range 又は doppler) は kalman filter に入力され、出力として例えばその時点に於ける  $\beta$  の最確値やその偏差が出てくる。kalman filter については後で review するが、この filter を作るに当って必要な物は、

- 1) 衛星の運動方程式
- 2) 地上局の運動の記述
- 3) range 又は doppler に対する表式
- 4) Coordinate Time ↔ Atomic time の変換

である。1) に対しては重力の逆二乗則は勿論、一般相対論、太陽の平偏度、金星や木星の重力等を考慮した運動方程式を作る事で、“unknown” な量として  $\dot{X}_p(t)$ ,  $\dot{V}_p(t)$  (衛星の位置、速度),  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $J_2$ ,  $M_{\text{Venus}}$ ,  $M_{\text{Jupiter}}$  等を kalman filter に導入する。2) に対しては、地球の運動方程式によって  $\dot{X}_e(t)$ ,  $\dot{V}_e(t)$  (地球の中心の位置、速度) がそして地球の Nutation, Precession, Wobble, 自転等の記述を通してこれらの現象を表すパラメーターが、そして最後に局の地球上での位置 ( $R_s$ ,  $\theta_s$ ,  $\varphi_s$ ) が filter の内に導入される。又3) は、その中に衛星の位置、速度や地上局の位置、速度等が含まれてくるので、1), 2) によって記述される衛星1局の運動と、我々が実際に取得する range や doppler のデータとの橋渡し

を行う事になる。4)は衛星と局の運動の記述に於ける時刻  $t$  が一般相対論で言う “Coordinate Time” であるのに対し、我々が実際のデータ取得に際して使用する時間は太陽の重力場の中を運動する地球の上に置かれた原子時計によるもの (“proper time”) であって、データ処理を行うに当って時刻のレツテルの付け変えを行わなければならない。以下 3-2-1)~3-2-4)で上述の4項目についてより詳細に説明を行い、3-2-5)以降で kalman filter と、データ処理の流れについて詳しく解説する。

### 3-2-1) 衛星の運動について

衛星の運動方程式を作るに当っては重力の逆二乗則は勿論、一般相対論、太陽の偏平度、木星等の引力、 $\dot{G}/G$  の効果をすべて考慮する必要がある。但し radiation pressure 等の重力以外の力は、drag free 衛星の使用によってキャンセルされるものと仮定し、誤差として残る加速度以外は考慮しない (誤差加速度の処理については 3-2-5)を参照の事)。

一般相対論による効果は、

$$\begin{aligned} \vec{a}_{GR}[\text{m/sec}^2] = & \frac{GM_{\odot}}{c^2 |\vec{X}_p|^3} \{ [2(\beta + \gamma)\phi - \gamma |\vec{V}_p|^2] \vec{X}_p \\ & + 2(1 + \gamma)(\vec{X}_p \cdot \vec{V}_p) \vec{V}_p \} \quad \left( \text{但し } \phi = \frac{GM_{\odot}}{|\vec{X}_p|} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

によって運動方程式内に取込まれる。

太陽の偏平度 ( $J_2$ ) による効果は、ポテンシャル

$$U_{J_2} = -\frac{GM_{\odot}}{|\vec{X}_p|^3} J_2 P_2(\sin \varphi) \quad (17)$$

によって、又他惑星による引力は逆二乗法則を通して方程式に組み込まれる。そして重力定数の時間変化があるとすれば、ポテンシャル

$$U_{\dot{G}/G} = \frac{\dot{G}_0 M_{\odot}}{|\vec{X}_p|} (t - t_0) \quad (18)$$

を考慮すれば良い。又運動方程式を作る際に使用される座標系は、1950年の地球の平均自転軸を  $Z$  軸に、平均春分点を  $X$  軸に取った系が使用されている。

### 3-2-2) 地上局の運動について

地球の軌道運動は 3-2-1)と同様な事を必要精度で行えば良いが、軌道運動の他に Nutation 等の地球に固有な運動を記述する必要がある。この運動の記述は、地球に固定された座標系 ( $\vec{u}$ ) と 1950年に於ける地球の平均運動を基にした座標系 ( $\vec{X}$ ) の間の座標変換の Matrix として表現され、

$$\vec{X} = W \cdot S \cdot N \cdot P \cdot \vec{u} \quad (19)$$

但し,  $W$ ; Wobble に対する変換行列

$S$ ; 自転に対する変換行列

$N$ ; Nutation に対する変換行列

$P$ ; Precession に対する変換行列

なる関係がある. Ash の論文では,  $W$ ,  $S$ ,  $P$  については “unknown” なパラメータを含めず過去のデータを使用し  $N$  については, “unknown” なパラメータとして  $\Delta\psi$  (経度方向の Nutation) と  $\Delta\varepsilon$  (緯度方向の Nutation) の二つ採用している.

又  $\vec{u}$  には局の地球に対する位置を示すベクトルが対応する. ( $\vec{u} = \vec{u}(R_s, \theta_s, \varphi_s)$ ,  $R_s, \theta_s, \varphi_s$  は “unknown” なパラメータとなる.)

### 3-2-3) Range 又は Doppler に対する表式について

range に対する表式が与えられれば, 時間微分により doppler に対する表式も得られるためここでは range に対する表式のみ紹介する.

Ash によれば測距信号の往復時間は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \tau \sim & 2/c|\vec{w}| - 2/c^2\vec{w} \cdot \dot{\vec{X}}_p + \frac{(\vec{w} \cdot \dot{\vec{X}}_p)^2}{c^3 \cdot |\vec{w}|} + |\vec{w}|(\dot{\vec{X}}_p)^2/c^3 \\ & + |\vec{w}| \cdot (\vec{w} \cdot \dot{\vec{X}}_p)/c^3 + \Delta\tau_{G/R} + \Delta\tau_{\text{plaswa}} + \Delta\tau_{\text{Troposphere}} \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \Delta\tau_{G/R} = \frac{2R_s}{c} \frac{1+\gamma}{2} \log \frac{|\dot{\vec{X}}_p| + |\dot{\vec{X}}_s| + |\dot{\vec{X}}_p - \dot{\vec{X}}_s|}{|\dot{\vec{X}}_p| + |\dot{\vec{X}}_s| - |\dot{\vec{X}}_p - \dot{\vec{X}}_s|} \quad (20)$$

$R_s$ ; 太陽の Schwarzschild 半径

$\dot{\vec{X}}_p$ ; 衛星の位置ベクトル (中心は太陽)

$\dot{\vec{X}}_s$ ; 局の位置ベクトル (中心は太陽)

$\vec{w}$ ;  $\equiv \dot{\vec{X}}_p - \dot{\vec{X}}_s$ , 局/衛星間のベクトル

\* ) 上の表式に使われている時刻 “ $t$ ” は測距信号を受信した時刻である.

つまりこの時に受信された信号は時刻 “ $t - \tau$ ” に発射された信号である.

### 3-2-4) Coordinate Time/Atomic Time の変換について

前にも述べた様に, 3-2-1)~3-2-3) で用意された表式中の “ $t$ ” は一般相対論で言う coordinate time であって, 我々が実際にデータ取得に使う atomic time (=proper time) とは異なる.

地球は太陽のポテンシャルと月のポテンシャルの中で運動しているし, 地球上に固定された局は自転の影響を受ける. この事を考慮して, 次式 (= “red shift”) により CT/AT 変換をしなければならない.

$$\Delta(\text{AT}) = c \int_{t_0}^{t_1} \left( 1 + \frac{2\varphi}{c^2} - \frac{|\vec{V}|^2}{c^2} \right)^{1/2} dt \quad (21)$$



但し、 $\phi$ ；原子時計の位置に於けるポテンシャル

$\dot{V}$ ；原子時計の太陽中心に対する速度

Ash の論文では上式を実行した CT/AT 変換表が載せられている。更に実際的な問題として一般に衛星の追跡に使用される時系である“UT”に対しても UT/AT 及び UT/CT 変換を行う必要がある。

### 3-2-5) Kalman Filter について[16]

今我々が把握したい量（衛星及び地球中心の位置，速度，地上局の位置， $\beta$ ， $\gamma$ ， $\dot{G}/G$ ， $J_2$  etc）を1まとめにして  $\vec{X}$  とする。

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{X}_p(t) \\ \vec{V}_p(t) \\ \vec{X}_e(t) \\ \vec{V}_e(t) \\ \vdots \\ \beta \\ \gamma \\ \dot{G}/G \\ J_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (22)$$

この  $\vec{X}$  の時間微分  $\dot{\vec{X}}$  を  $\vec{X}$  で表現したものを kalman filter で言う“運動方程式”として準備する。

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{f}(\vec{X}(t), t) + \vec{w}(t) \quad (23)$$

但し、1)  $\vec{f}$  については、例えば(22)式の中の衛星の位置/速度に対してのみ記述すれば、

$$\dot{\vec{X}}_p = \vec{V}_p$$

$$\dot{\vec{V}}_p = \frac{GM_{\odot}}{|\vec{X}_p|^3} \times \vec{X}_p + \delta(\beta, \gamma, J_2, \dot{G}/G, \dots)$$

Newton の力      一般相対論等による力

となる。

2) 又  $\beta$ ， $\gamma$ ， $J_2$ ， $\dot{G}/G$  については、これらの“unknown”な量は定数であるから

$$\dot{\beta} = 0$$

$$\dot{\gamma} = 0$$

$$\dot{J}_2 = 0$$

⋮

となる。

3)  $\vec{w}(t)$  は、“dynamics”に対するランダムな“外力”を表わす。drag free 衛星を仮定すれば radiation pressure 等の重力以外の力は理想的には 0 になるはずであるが、drag free の不完全さを示す量である誤差加速度を  $\sigma_a$  [m/sec<sup>2</sup>] とすれば、(23)式は

$$\begin{cases} \vec{X}_q = \vec{V}_p \\ \vec{V}_p = \frac{GM_\odot}{|\vec{X}_p|^3} \vec{X}_p + \delta(\beta, \gamma, J_2, \dot{G}/G \dots) + \\ \vdots \\ \dot{\beta} = 0 \\ \dot{\gamma} = 0 \\ \dot{J}_2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\sigma}_a \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{c} \Downarrow \\ w(t) \end{array}$$

となる。

以上は kalman filter の“運動方程式”であって filter を作るに当って必要なもう1つの式は“観測方程式”である。我々の観測する量は range 又は doppler であって（以前と同様、doppler は range の微分であるので以下 range のみを考える。）観測方程式は(20)式を使って

$$\tau_k = h(\vec{X}_p(t_k), \vec{X}_e(t_k), \gamma, M_\odot) + V_k \quad (24)$$

↑  
“time delay”の項からくる。

但し、1)  $k=0, 1, 2, \dots$  は、観測が discrete に行なわれる事を示す。

2)  $V_k$  はその観測に対する観測誤差である。

range に対しては  $V_k = \sigma_r$  (range の誤差) である。

以上(23)式によって一般相対論等の効果が衛星の軌道にどの様に効いてくるかを表現し、又(24)式が上記の複雑な軌道と我々が実際に取得する衛星/地上局間の直距離を表現する。

次に(23)式と(24)式から kalman filter を作るわけだが(23)式より

$$F(\vec{X}, t) \equiv \frac{\partial \vec{f}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}}$$

を又(24)式より

$$H(\vec{X}, t) \equiv \frac{\partial h(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}}$$

を使えば kalman filter は次の様になる。但し、 $\hat{X}$  は  $\vec{X} = (\vec{X}_p, \dots, \beta, \gamma, \dots)$  の最確値を表わし、 $P(t)$  は  $\hat{X}$  の covariance matrix を表わしている（つまり、 $P(t)$  の対角成分の中に  $\sigma_{\beta}^2(t)$  等が含まれるわけである）。

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = \vec{f}(\hat{X}(t), t) & (25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k[\tau_k - h_k(\hat{X}(-))] & (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = F(\hat{X}(t), t) \cdot p(t) + p(t) \cdot F^T(\hat{X}(t), t) + Q(t) & (27) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned}
 p_k(+)&= [I - K_k H_k(\hat{X}_k(-))] p_k(-) & (28) \\
 \text{但し, } K_k & \text{ ; Kalman Gain} \\
 & \equiv p_k(-) H_k^T(\hat{X}_k(-)) [H_k(\hat{X}_k(-)) p_k(-) H_k^T(\hat{X}_k(-)) + R_k]^{-1} & (29) \\
 Q(t) & ; E[\dot{W}(t)\dot{W}(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau) & (30) \\
 & \text{(random な外力の Filter への導入, } E[\ ] \text{ は平均を表わす.)} \\
 R_k & ; E[V_k V_k^T] = R_k
 \end{aligned} \right\}$$

(計測誤差の Filter への導入)

図 12 はこの filter を使った代表的な出力である。(上式の  $\hat{X}(\pm)$ ,  $p(\pm)$  の定義については図 12 を参照の事)

まず我々は  $\hat{X}$  の初期値 ( $\hat{X}_0(+)$ ) と偏差 ( $\sigma_0(+)$ ) を a priori に入力する。

$$\hat{X}_0(+)= \begin{bmatrix} \hat{X}_{p0}(+) \\ \hat{V}_{p0}(+) \\ \vdots \\ \hat{\beta}_0(+) \\ \hat{\gamma}_0(+) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{及び, } p_0(+)= \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{X}_{p0}}^2(+) & & & & 0 \\ & \sigma_{\hat{V}_{p0}}^2(+) & \cdots & & \\ & & & \sigma_{\hat{\beta}_0}^2(+) & \\ & & 0 & & \sigma_{\hat{\gamma}_0}^2(+) \\ & & & & \cdots \end{bmatrix}$$

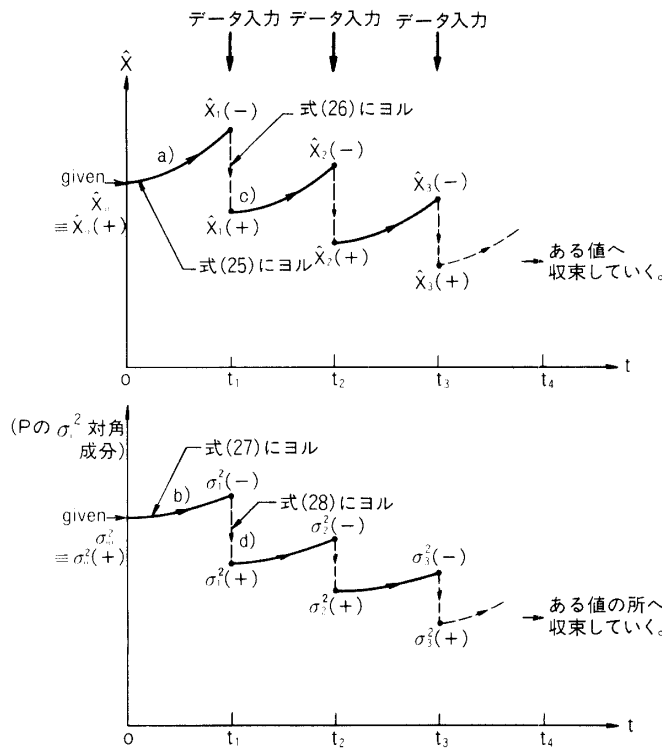


図 12 Kalman Filter の結果例 (その 1)

$t=0$  と  $t=t_1$  の間は観測値が入ってこないから  $\hat{X}(t)$  は初期値  $\hat{X}_0(+)$  を基に運動方程式 (25) 式に従って動いていくし (図 12 中点  $a$ ), 例えば  $\hat{X}_p(t)$  については力学的運動方程式に従って変化するし,  $\hat{\beta}(t)$  については  $\dot{\beta}=0$  であるから変化しない).  $\hat{p}(t)$  は初期値  $p_0(t)$  を基に方程式 (27) 式に従って“悪く”なっていく (図中  $h$ , データがないため偏差が大きくなる). そして  $t=t_1$  に  $\hat{X}(t_1) \equiv \hat{X}_1(-)$ ,  $\hat{p}(t_1) \equiv \hat{p}_1(-)$  まで変化した時データが filter に入力されるため  $t=t_1$  で“突然”  $\hat{X}_1(-) \rightarrow \hat{X}(t_1) \equiv \hat{X}_1(+)$  にそして  $\hat{p}_1(-) \rightarrow \hat{p}(t_1) \equiv \hat{p}_1(+)$  に変化する (図中  $c, d$  及び (26) 式, (28) 式にヨル).  $\hat{p}(t)$  は covariance matrix なので一般にデータ入力された時点で“下に” (偏差の小さくなる方向に) jump するのは当然である. そして  $t=t_1$  以降は以上と同様のプロセスが続いていき, kalman filter を作るために用いたモデルが正しければ ( $\beta/\gamma$  については理論から導かれた質点の運動方程式が正しければ),  $\hat{X}(t)/\hat{p}(t)$  ともある値へ収束していく.

最後に図 14 に  $\beta, \gamma$  等定数に対する (つまり運動方程式が  $\dot{\beta}=0, \dot{\gamma}=0$ ) kalman filter の出力を示す (偏差についても同じ様なグラフであるので省略した).

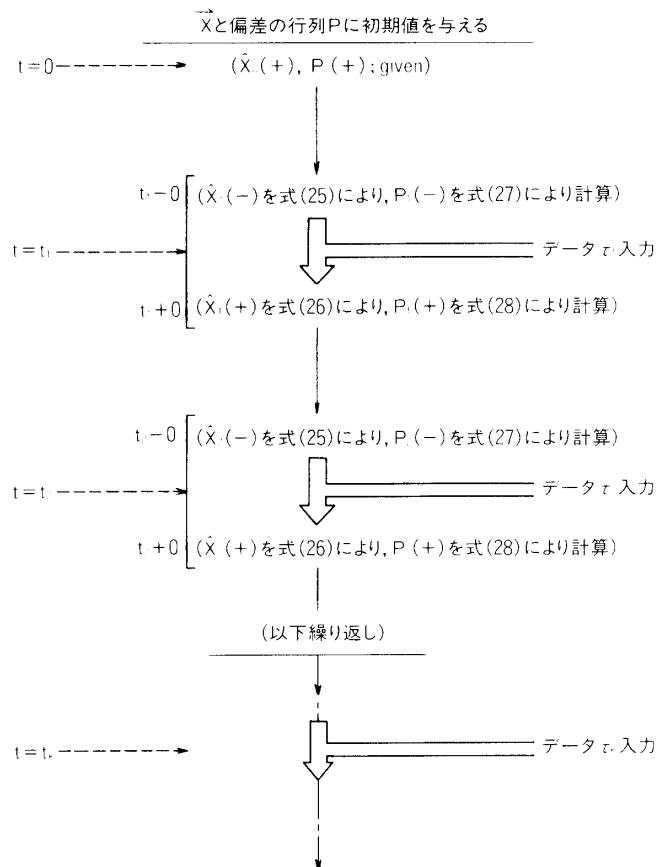


図 13 Kalman Filter の flow

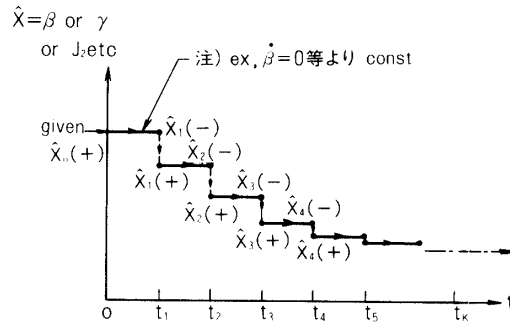


図 14 Kalman Filter の結果例 (その 2)

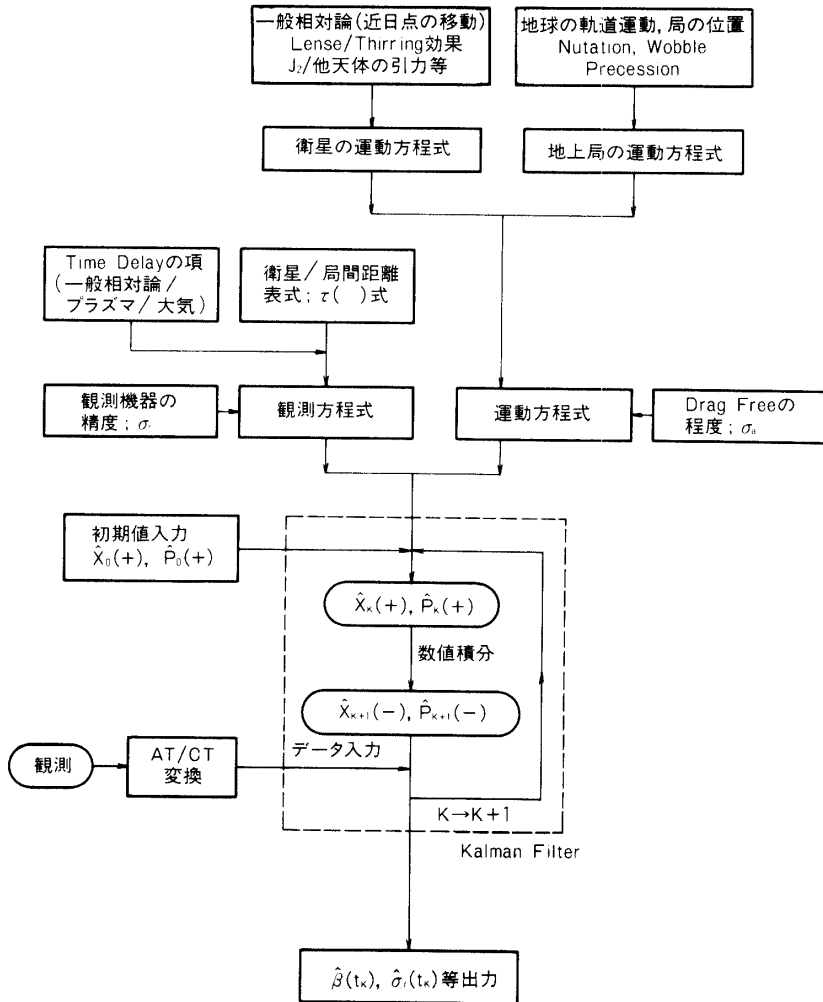


図 15 データ処理の流れ

## 3-2-6) データ処理についてのまとめ

以上までに述べて来た事を図15にまとめる。

準備すべきものは、a)一般相対論的効果 (perihelion shift) や  $J_2$ ,  $\dot{G}/G$  等を考慮した衛星の運動方程式と、b)局の位置や地球の運動 (軌道運動, Nutation, Wobble 等) を考慮した局の運動方程式、c) coordinate time  $\leftrightarrow$  atomic time の変換、d) 衛星/地上局間直距離を表す式(20)以上である。

a)/b)によって kalman filter の“運動方程式”が作られ、データが range の場合 d) と time delay の表式 (必要によってプラズマや大気による time delay も加えるべきである) によって観測方程式が作られる。

そしてこの二つを基に作られた kalman filter に c) によって時間較正されたデータ  $\{\tau_k\}$  が入力され  $\hat{\beta}(t_k)$  や  $\hat{\sigma}_\beta(t_k)$  等が出力される。

最後に我々の考慮すべき“unknown”な量のリストの1例を表4に示す。但し、このリストのものをすべて“unknown”とする必要はないのであって現在知られている値の精度

表4 “unknown”な量のリスト (例)

1) 太陽	1-1) $M_\odot$
	1-2) $R_\odot$
	1-3) $J_2$
	1-4) $\vec{J}$
2) 他天体	2-1) $M_{\text{Planet}}$
	2-2) 6要素 但し、小惑星はトーラスで近似する。
3) 地球	3-1) $M_{\text{earth}}$
	3-2) 6要素
	3-3) Wobble
	3-4) Nutation
	3-5) Precession
	3-6) 自転
	3-7) 局の位置
4) 一般相対論等	4-1) $\beta$
	4-2) $\gamma$
	4-3) $\dot{G}/G$
5) 衛星の位置/速度	$\vec{X}_p(t)/\vec{V}_p(t)$
6) 1 AU の定義	
7) プラズマのモデル	
8) 大気モデル	
9) Dray Free の System に対するパラメーター (例えば、誤差加速度の bias 成分)	

がそれをそのまま使っても実験の精度を壊さない場合がこれに当たる。

#### 4章 実験(計画)のReview

人工惑星を用いた一般相対論の実験は、前述の様に1969~70年に行なわれた火星探査衛星 Mariner 6/7 及び1976年の Viking を用いて行なわれた一般相対論による time delay の計測実験があり、これらの実験で重要な点は、

- 1) 両 Mission とも drag-free 衛星ではなかった。
- 2) Mariner 6/7 では up/down link とも S-band 1波であって太陽コロナによる時間遅れを較正する事ができなかったが、それに対し Viking では downlink が S/X-band の二波を使用しこの点を向上も計ったため range 精度が上り、実験精度の向上につながった。

以上二点である。詳細は reference 1), 2) を参照されたい。

以下本章では、米国及び欧州で計画された人工衛星による一般相対論の実験を review する。

##### 4-1) Solar Probe 計画 (U.S.A)

図16/表5に Solar Probe の軌道を示す。Solar Probe は地球から打上げられた後木星の重力を利用して、太陽に対する最近接距離が  $4R_{\odot}$  の太陽極軌道に投入される衛星で drag-free-system とその mission life 3, 4年分の燃料 30 kg を積んでいる。この Solar Probe を用いた一般相対論の実験に対する mission study (感度評価) が R.D. Reasenberg [17], J.D. Anderson [18], K. Nordtvedt [19] によって行なわれたがその結果は、

- 1) up/down link とも S/X-band 二波を使用し (range の精度~15 m を仮定)
- 2) drag-free のレベルは  $\sim 10^{-10}g$  程度を
- 3) 又観測スケジュールを表6の通り

を仮定し、評価に使用する“unknown”なパラメーターを表7の様に取れば、 $J_2$  については  $\sim 10^{-8}$ 、 $\omega_{G.R} \equiv \frac{2+2\gamma-\beta}{3}$  については  $\sim 10^{-3}$  そして  $\dot{J}$  (Lense Thirring効果による) については、 $\sigma_J/\dot{J} \sim (20\sim 30\%)$  を得る事が可能としている (Anderson et al,  $\sigma_J/\dot{J}$  については Nordtvedt の論文による.)。

又表9は表8のデータを基にして得られた結果であるがこの表と、上記の  $\sigma\omega_{G.R} \sim 10^{-3}$  を比べると  $\sigma_{\beta}/\sigma_{\gamma}$  の方が悪い値を示しているのは興味深い (Anderson et al)。

Reasenberg et al は完全な drag free 衛星を仮定して主に range 又は doppler の計測精度と実験精度の関係を追っている(図17)。この図の横軸は観測時間、縦軸は  $\sigma_{J_2}$  である。Nordtvedt は、定常的なそして in-track (軌道面内) の誤差の存在を仮定しており、 $\sigma_{J_2} \sim 10^{-8}$  を得るためには定常誤差が  $2 \times 10^{-12}g$  以下である必要がある事を、Anderson et al は定常誤差はないが random な誤差加速度的存在を仮定し、この random な誤差が  $\sim 10^{-10}g$  以下であるべき事を指適している。

特に Anderson et al の論文には、nominal な実験諸元 (表8) に対し、 $\sigma_{J_2}$  vs  $\sigma_a$ ,  $\sigma_{J_2}$  vs  $\sigma_v$ ,  $\sigma_{\beta}$  vs  $\sigma_a$ ,  $\sigma_{J_2}$  vs  $i$  等、各パラメーターの変化に対応する到達実験精度が詳しく調べら

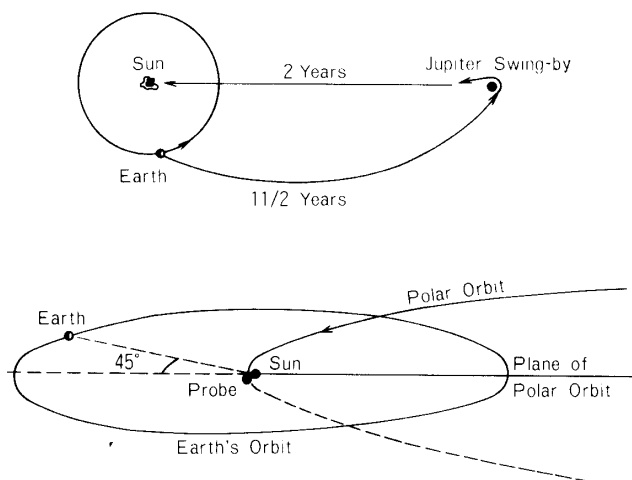


図 16 Geometry of Solar Probe Experiment

表 5 Solar Probe の軌道[22]

Orbital Element	Value (1950.0 Equator and Equinox System)
Semimajor Axis	2.6 a.u.
Eccentricity	0.9982
Inclination	113.5 deg
Argument of Perihelion	0.0 deg
Longitude of Ascending Node	0.0 deg
Time of Perihelion Passage	4 February 1972
Minimum Distance from Sun	1.006 solar radii
Inclination to Ecliptic	90 deg
Angle between Earth-Probe line and Sun-Probe line at Probe Perihelion	~45 deg

表 6 観測スケジュール[22]

Schedule of Probe Observations

Rate (observations/day)	Total Number	Range	Doppler Shift	Time Interval
0.2	148	148		763 to 23 days before encounter
8	265	265		23 days before to 10 days after encounter



表7 mission study に使用された “unknown” なパラメーター[22]

Model Parameters	
Initial Conditions of Probe Orbit	6
Initial Conditions of Earth's Orbit	6
Light-time Equivalent of the Astronomical Unit	1
Coefficient of Model of Solar Corona	1
Effect of General Relativity on Trajectory	1
Effect of General Relativity on Signal Propagation	1
Bias in Range Measurements	1
$J_{2\odot}$	1
TOTAL	18

表8 BASELINE CASE[18]

Independent Variable	Value
1. Doppler error at 10 min sample	0.1 mm/sec
2. Range error at 20 min sample	15 m
3. Length of tracking arc	E-1 mo to E+1 mo
4. Standard deviation of acceleration noise	$10^{-10}g = 10^{-9}m/sec^2$
5. Perihelion distance at solar encounter	$4R_{\odot}$
6. Inclination of probe orbit to ecliptic	$90^{\circ}$
7. Angle between sun-probe line and sun-earth line at encounter	$45^{\circ}$
8. Argument of probe perihelion with respect to ecliptic	$0^{\circ}$

れている (図 18~図 21).

Reasenberg, Anderson et al はその論文の中で, range 及び doppler の計測精度に対して

- 1) range は probe が太陽の近くを通ってもプラズマの影響を受けず観測が可能であり, その精度は uplink が S-band, downlink が S/X-band を使用した場合 Viking の実績から  $\sigma_r \sim 30$  m は可能である (Reasenberg, Anderson et al).
- 2) doppler は, 太陽の近くでプラズマの影響を受けデータの抜けが数多く起こる可能性が強い. データ取得ができた場合その精度  $\Delta v/c$  は, up/downlink とも S/X-band を使用した時  $7 \times 10^{-13}$  である (表 10, Anderson et al).

表9 RESULTS FOR BASELINE CASE[18]

Parameter	A-Priori Error	A-Posteriori Error
$X_E$	1.5 km	0.4 km
$y_E$	1.5 km	0.7 km
$x_K$	1.5 km	1.5 km
$x_E$	0.1 km/s	0.09 mm/s
$y_E$	0.1 mm/s	0.08 mm/s
$x_E$	0.1 mm/s	0.09 mm/s
$x_P$	$10^6$ km	0.4 km
$y_P$	$10^6$ km	1.1 km
$x_P$	$10^6$ km	3.2 km
$x_P$	$10^3$ km/s	0.2 mm/s
$y_P$	$10^3$ km/s	0.1 mm/s
$x_P$	$10^3$ km/s	0.8 mm/s
AU	1.0 km	0.2 km
$\beta$	0.01	0.0088
$\gamma$	0.01	0.0047
$J_2 \times 10^8$	$10^3$	0.5

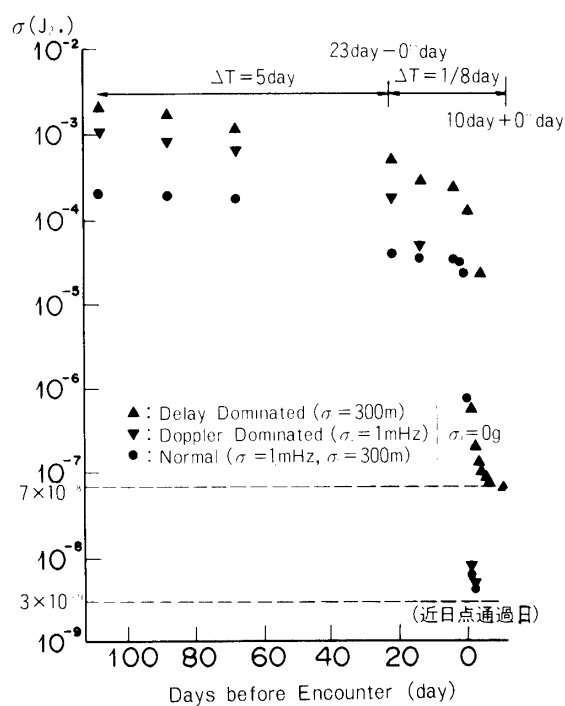


図 17 Time evolution of the uncertainty in the estimate of  $J_{2\odot}$  for various measurement standard errors

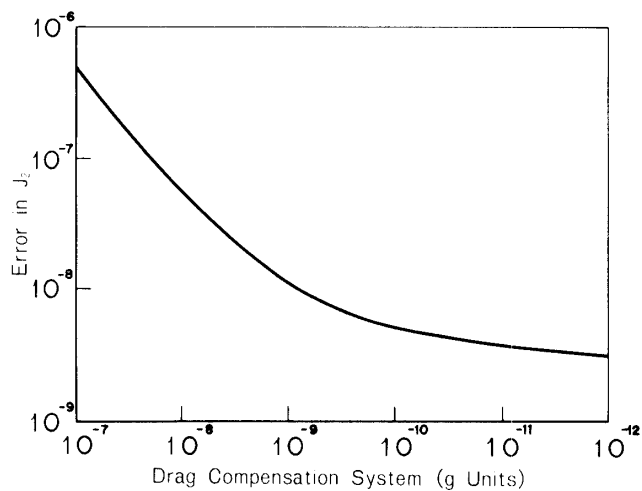


図 18 Error in  $J_2$  as a function of Acceleration Error

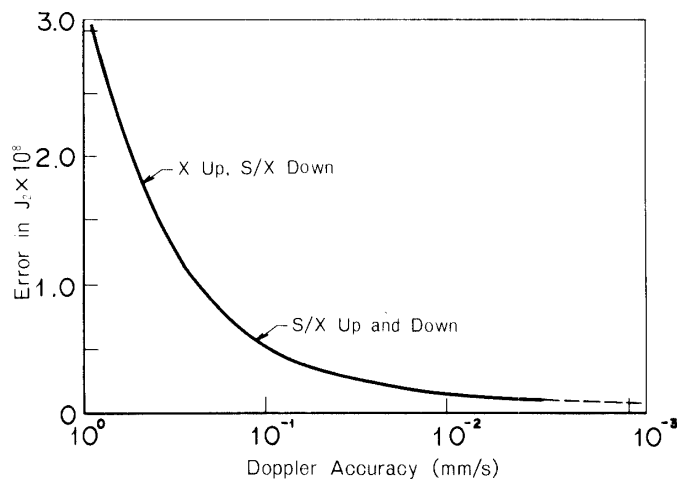


図 19 Error in  $J_2$  as a function of Doppler Error

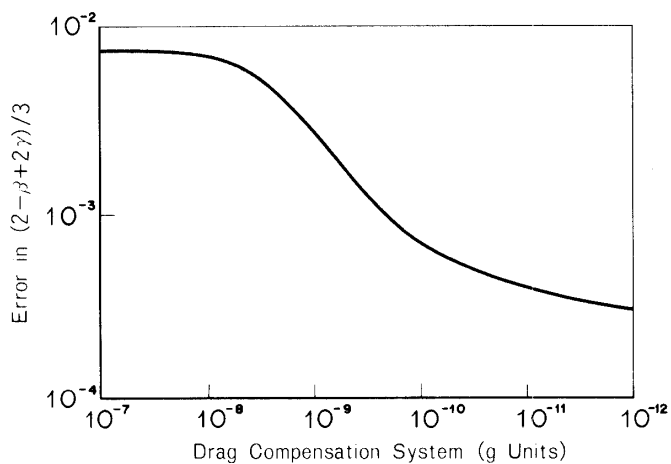


図 20 Error in Relativistic Perihelion Advance as a function of Acceleration Error

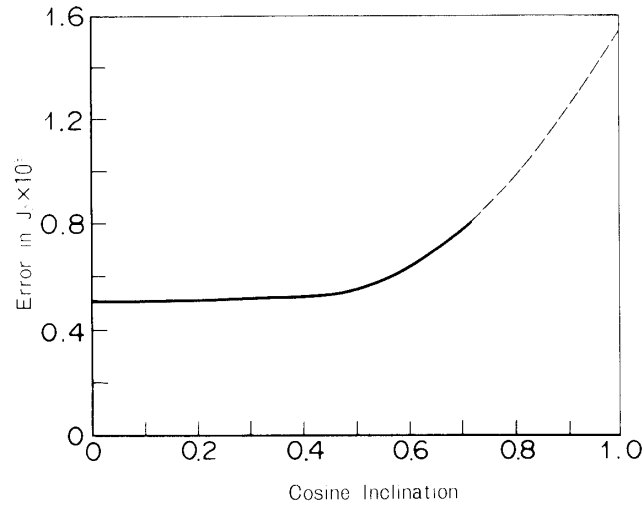


図 21 Error in  $J_2$  as a function of Orbital Inclination

表 10 DOPPLER ACCURACY ASSUMPTION [18]

Two-way Configuration	Error (mm/s)	Error ( $\Delta f/f = 2 v/c$ )
S band up and down	25	$1.7 \times 10^{-10}$
S band up, S/X down	5	$3 \times 10^{-11}$
X band up and down	2.5	$1.7 \times 10^{-11}$
X band up, S/X down	0.5	$3 \times 10^{-12}$
S/X bands up and down	0.1	$7 \times 10^{-13}$

以上を指適している。又 drag free system についてはその誤差加速度が、

- 1) 定常的な bias である場合
- 2) white な random 誤差である場合
- 3) “Color” の付いた誤差である場合

を掲げているが、実験にとって最も危険な誤差は 3) の場合である事を強調している (Reasenberget al)。つまり例えば、データには  $J_2$  の効果に特徴的な周期を持ったさまざまな波が重なり合って乗ってくるわけだが、この  $J_2$  の存在を我々に示す特徴的な周期と同じ周期を持つ誤差(つまり誤差加速度)がデータに乗ってしまえば、全体としていくら drag free の精度が良くても実験を殺してしまう事になる。

上記の事をパワースペクトラムで表現すれば、スペクトル上、 $J_2$  に特徴的なピークを持つ周波数領域で誤差加速度に起因するパワースペクトルが小さければ、全体として誤差加速度がいくら大きくても、 $\sigma_{J_2}$  を計測する事に対しては支障がない等を意味している。

又この意味で C.W.F. Everitt & D.B. Debra [20] は、クリティカルなノイズ源として、

- 1) radiation pressure の変化
- 2) drag-free-system のコントロール部の熱によるゲインやバイアスの変化
- 3) 熱呑みによる衛星の変形

## 4) proof mass の帯電

を掲げている ( $\beta/\gamma/J_2$  等効果が probe が太陽の近くにいる  $\sim 19$  hour 程度の時間変化を持つ事を考えれば、太陽の近くでこの周期  $\sim 19$  hour を持つ誤差加速度を起こしうるのが上記の4つという事になる)。

3)については非-spin型の衛星で  $\sim 10^{-11}g$  程度を得る事ができるとしているが、4)の誤差源については最も厳しい誤差と考えており、proofmass に対する放電機構の必要性にも言及している(彼らの論文の中では、フランスの“CACTUS”を引用している。“CACTUS”[21]はバンアレン帯を通過する間、proof massに  $2 \times 10^{-11}$  coulomb/dayの帯電があり、最悪時  $\sim 10^{-7}g$  の誤差加速度があったと報告している)。

## 4-2) Planet (Mercury) Radar Observation (U.S.A)[22][23]

本実験は既に実行され現在も進行中の実験であり、 $\dot{G}/G$  について  $\sim 10^{-10}y^{-1}$  の精度で0であると報告している (R.D. Reasenberg & I.I. Shapiro)。

実験は地上から測距コードによって変調された信号を惑星に向けて送信し、返ってきた測距コードと地上の reference コードとの相関を取る事で地球/惑星間の直距離を計測している。

測距精度を決定する一番大きなものは惑星表面の起伏であって、これを較正するための二次元の fourier モデルを導入する事で、Arecibo の設備が最良の条件下で  $0.2\mu s$ 、平均  $3\mu s$  の精度を得ている。解析に使われたデータは、1966年 $\sim$ 74年にかけて Haystack 及び Arecibo の電波望遠鏡及び Goldstone の追跡設備で取得された水星/金星に対するデータ 1000 point と火星に対するデータ 5000 point と及び、1971 $\sim$ 72年にかけて Mariner 9 の追跡によって取得された 100 point のデータである。彼らはこれらを軌道解析用のソフトウェア PEP (Planetary Ephemeris Program) にかけて、 $\dot{G}/G$  について評価した。このプログラムに導入された“unknown”な量は、

- 1) 対象惑星の初期条件
- 2) 月/木星の位置
- 3) 月/惑星/主要な小惑星の質量
- 4) 測距における bias 誤差
- 5)  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{G}/G$

6) 対象惑星の起伏を表わす 123 ケのパラメーター (二次元の fourier モデル中に含まれる係数)である。

彼らは上記の項目すべてを PEP に導入するばかりでなく、いくつかの項目に限って PEP に導入したり、PEP に入力するデータの組み合わせを変えてさまざまな場合について解析しているが、この結果から  $\dot{G}/G$  の精度に関して最も影響を及ぼすのが惑星表面の起伏である事を指適している。

最後に彼らの解析結果を表 11 に示す。

この中で火星のデータに対応する結果が他データによるものと比べて劣っているのは、火星の軌道周期が水星/金星より長いため  $\dot{G}/G$  による軌道の変化が小さいためであると

述べている。そして1985年まで水星の観測を続ければ、 $\sim 10^{-11}y^{-1}$ までの精度向上の可能性も指摘している。

表11 Preliminary Results for  $\dot{G}/G$  from Analysis of Radar Interplanetary Time-Delay Data

Data Set	Estimate of $\dot{G}/G^*$
	(units of $10^{-11}yr^{-1}$ )
Earth-Mercury	$6 \pm 4$
Earth-Venus	$6 \pm 6$
Earth-Mars	$25 \pm 33$

\*In an attempt to account for unmodelled systematic effects, we show as uncertainties for the individual results numbers which are threefold larger than the standard errors determined from scaling the rms of the postfit residuals to unity.

#### 4-3) Mercury Orbiter 計画 (U.S.A)[11]

この実験は水星に Orbiter を送り、地球からの Tracking によって水星と地球との距離を（つまり衛星ではなく水星の軌道を）10 m の精度で求める事によって、実験の精度を上げ様とするものである（この衛星は drag free 衛星ではない）。

彼らはこの実験の感度分析を行う際に

- 1) 地球の複数の基準点から、1日に1回のデータが取得できる事(観測期間は $\sim 2$  years)
- 2) 測距精度は10 m である事
- 3) S/X band link を使用する事
- 4) 地球からみて、衛星が衝の位置にある所から  $\pm 5^\circ$  の範囲はデータ取得ができない事

からなる仮定を基に、“unknown”なパラメータとして

- 1) 地球の軌道6要素
- 2) 水星の軌道6要素
- 3)  $\beta, \gamma$
- 4)  $J_2$
- 5) 1A.U

計16ケ

をモデルに含め分析を行った(表12)。結果は  $\beta, \gamma, J_2$  が  $\sigma_\beta \sim 10^{-3}, \sigma_\gamma \sim 10^{-4}, \sigma_{J_2} \sim 10^{-8}$  の精度で得られるとしている。この表で注意すべき点では、任意に与える初期値  $\sigma_\beta(0), \sigma_\gamma(0), \sigma_{J_2}(0)$  の値によって結果が影響を受けている点である。

表 12 PRELIMINARY ERROR ANALYSIS ON THE MERCURY ORBITER [11]

Case	$\beta$		$\gamma$		$J_2$	
	Initial Error	Final Error	Initial Error	Final Error	Initial Error	Final Error
1	$3 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$	$5.8 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-7}$
2	$0.95 \times 10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$0.99 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-7}$
3	$1.1 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$5.6 \times 10^{-4}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$

## 4-4) SOREL 計画 (ESA) [24]

図 22 と表 13 に SOREL の軌道を示す。この軌道は、

- 1) 他惑星の引力による影響を最小にする事
- 2) 地球・惑星の衝の機会をできるだけ大きくする事
- 3) 他惑星の周期が衛星の周期の整数倍にならない事

を基にして決定された。この計画の特徴は

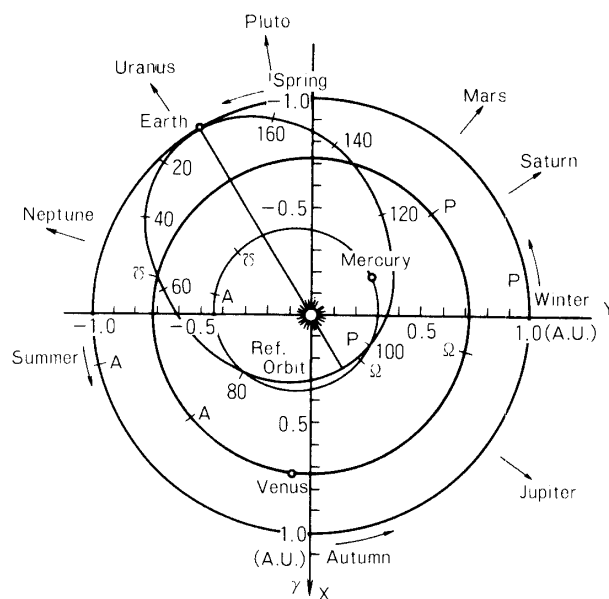


図 22 SOREL の軌道

- 1) Spin 型の drag free 衛星 (軌道面内の誤差加速度は  $\sim 10^{-13}g$  そして軌道面に対して垂直な方向については  $10^{-11}g$  が要求された.)
- 2) up/down link とも S/X-band 使用し, 測距精度  $\sim 3m$  を仮定
- 3) 地球/衛星の衝における測距データを増やすため, Laser-Transponder の整備 (Vik-

表13 SORELの軌道諸元及びその他[24]

Orbital elements	
inclination (ecliptic)	$i_e = 0$ degree
longitude of perihelion	$a^l = 30$ degrees
perihelion distance	$r_p = 0.285$ A.U.
aphelion distance	$r_A = 1.005$ A.U.
semi-major axis	$a = 0.645$ A.U.
eccentricity	$e = 0.558$
parameter	$p = 0.444$ A.U.
orbital period	$T = 189.2$ days
launch date	$t_0 =$ April 20, 1976 ( $JD = 2442889$ )
Minimum distance $d_{\min}$ between the probe and	
Mercury	0.446 A.U. after 650 flight days
Venus	0.175 A.U. after 335 flight days
Earth	0.096 A.U. after 350 flight days
Occultation events ( $\pm 2^\circ$ elongation = $\pm 8$ solar radii)	
1st occultation starting on 115.5th day	duration 11.5 days
1st occultation ending on 127th day	
$\lambda_{\max, \text{le}/t} = -3.7$ degrees on 145th day	
2nd occultation starting on 168th day, aphelion occurring on 189.2th day	duration 24 days
2nd occultation ending on 192.5th day	
3rd occultation starting on 260th day	duration 8 days
3rd occultation ending on 268th day	

ingの実験では衛星/地球/太陽間の角度が $4^\circ$ 以下の時、測距データを取得する事ができなかったが、laser測距の整備でこの間のデータ取得を可能にしている。(SORELのlaser測距の精度は3mと仮定されている。)

- 4) 観測間隔は1日1回
- 5) 観測期間は1~2年間



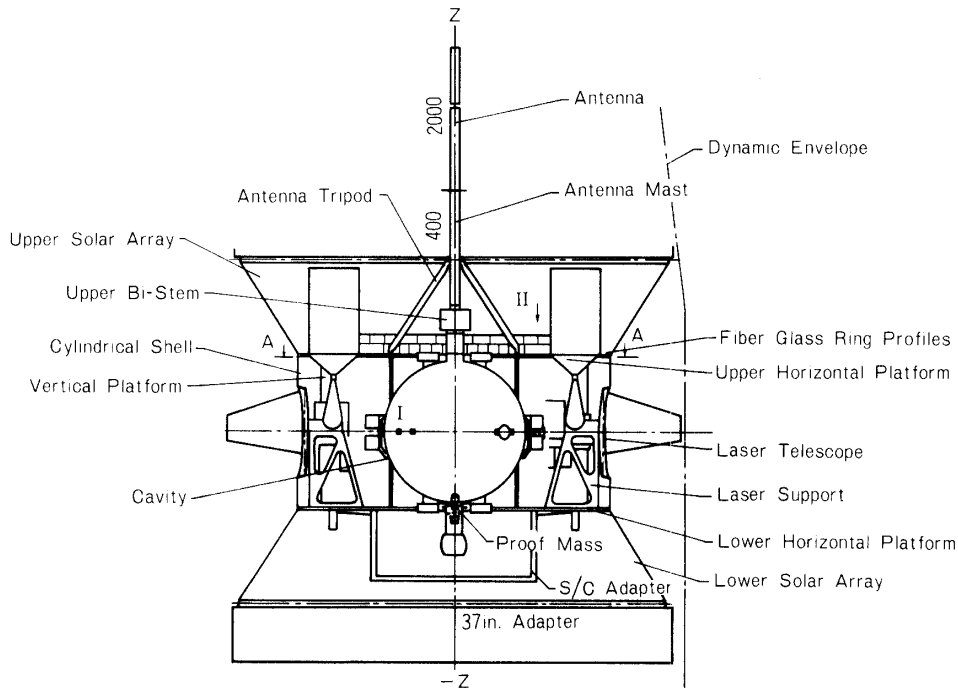


図 23 SOREL の外観

であってこれらを基にした感度評価の結果、400 日後に  $\sigma_\theta \sim 1.91 \times 10^{-3}$ ,  $\sigma_\gamma \sim 8.44 \times 10^{-5}$ ,  $\sigma_{J_2} \sim 4.97 \times 10^{-7}$ ,  $\sigma_{G/G} \sim 1.2 \times 10^{-10}/y$  の精度を得る事ができると報告している。上述の 1) に於ける誤差加速度 ( $10^{-13}g/10^{-11}g$ ) は以上の結果を劣化させないための許容値である。

図 23 に衛星の概要を示す。衛星には、laser 受信器と laser transponder 及び送/受信用の望遠鏡が準備され、又 laser 源は  $CO_2$  laser が想定されている。

衛星の中央部には、直径 85 cm の cavity とプラチナ/金の合金でできた重量 10 kg、直径 10 cm の proofmass が搭載され、光学的に proofmass の位置を検出する。制御用 gas jet の燃料は cold nitrogen が使用される。熱的には 0.28AU の近日点の所で  $\sim 12$  solar constant の熱入力を受けるため図に示す様な形となり、衛星の南北面にはサーマルルーバが付けられているが基本的には passive な熱制御を行っている。

drag free の誤差源については下記に対して検討された。

- 1) 衛星内の質量分布による proofmass に対する引力
- 2) cavity 内の電場による力
- 3) cavity 内の磁場による力
- 4) cavity 内のアウトガスによる力
- 5) cavity 内の熱分子運動
- 6) cavity の不均一温度分布による輻射の力

結果は、

- 1) 軌道面に垂直な方向 (spin 軸方向) の最大誤差は、 $\sim 10^{-11}g$  程度が予想され、その

表14 SOELの感度評価結果[24]

Parameter	Nominal value	$\sigma$	$\sigma_{200d}$	$\sigma_{400d}$	$\sigma_{400d(1st\ exp)}$	
$\beta$	1	0.15	$4.35 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	
$\gamma$	1	0.03	$18.5 \cdot 10^{-5}$	$8.44 \cdot 10^{-3}$	$8.85 \cdot 10^{-5}$	
$J_2$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$11.0 \cdot 10^{-7}$	$4.97 \cdot 10^{-7}$	$8.9 \cdot 10^{-7}$	
$M_{Sun}$	1.32718	$\cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{13}$	$3.75 \cdot 10^{10}$	$1.45 \cdot 10^{10}$	$1.8 \cdot 10^{10}$
$M_{Earth}$	3.98603	$\cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^8$	$11.7 \cdot 10^7$	$2.17 \cdot 10^7$	---
$\dot{G}/G$	1	$\cdot 10^{-17}$	$1 \cdot 10^{-17}$	$0.81 \cdot 10^{-17}$	$0.43 \cdot 10^{-17}$	---
$M_{Moon}$	4.90278	$\cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^7$	$2.24 \cdot 10^5$	$1.31 \cdot 10^5$	---
Venus	3.25658691	$\cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{10}$	$97.6 \cdot 10^5$	$5.00 \cdot 10^8$	---
Mars	4.3049124	$\cdot 10^{13}$	$1.5 \cdot 10^{10}$	$13.2 \cdot 10^9$	$5.04 \cdot 10^9$	---
Jupiter	$1.2690323711 \cdot 10^{17}$		$6 \cdot 10^{11}$	$5.29 \cdot 10^{11}$	$1.07 \cdot 10^{11}$	
Mercury	2.2321768	$\cdot 10^{10}$	$9 \cdot 10^{10}$	$8.38 \cdot 10^9$	$2.67 \cdot 10^9$	$0.74 \cdot 10^9$
$a_{Mercury}$	$0.5790992064 \cdot 10^{11}$	50 km	49.8 km	47.07 km	---	---
$\tau_{Mercury}$	-7.5186	20 s	19.995 s	19.4 s	---	---

Results obtained with the advanced Kalman-filter technique correspond to two different runs performed for 400 days. The results of the second run (experiment II) are given in this Table.

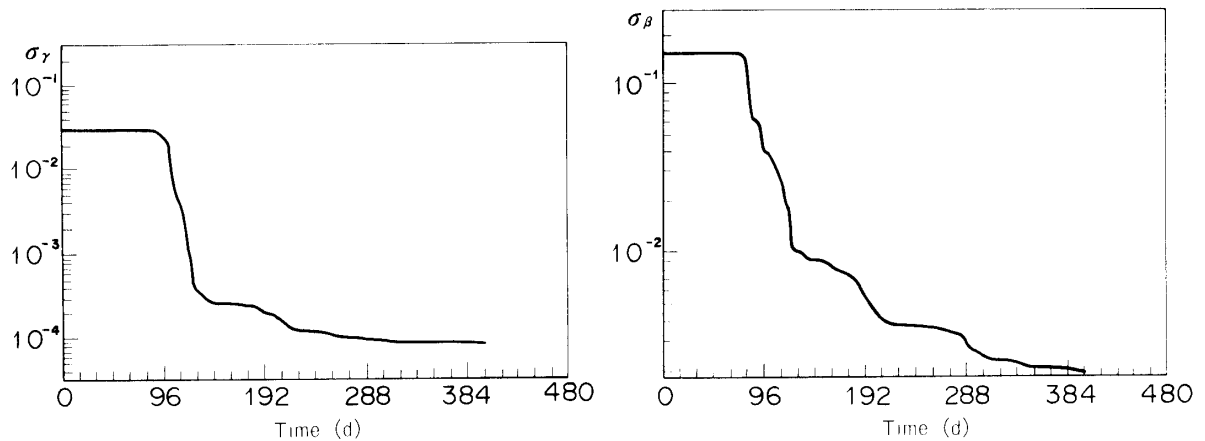


図24 SOELの感度評価結果

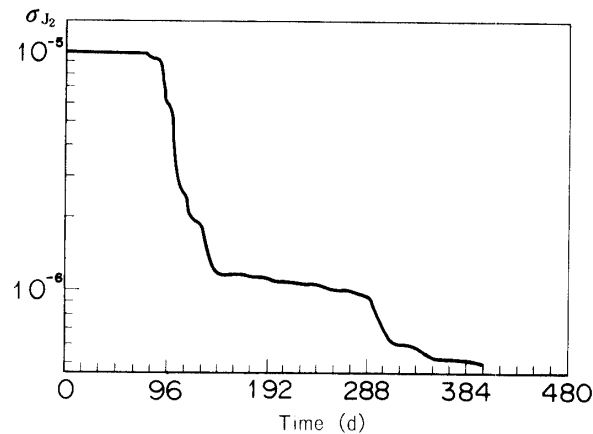


図 25 SOREL の感度評価結果

誤差源は衛星内質量分布による。

- 2) 軌道内方向の誤差は衛星が spin していても  $\sim 10^{-13}g$  程度が予想される。この原因は、衛星の熱分布の不均一性が起こす衛星構体等のひずみからくる引力である。

である。

彼らが解析に使用した “unknown” な量は、

- 1)  $\beta, \gamma$
- 2)  $J_2$
- 3) 太陽, 地球, 月, 水星, 金星, 木星, 土星, 海王星の質量
- 4) 小惑星帯の質量 (リングとして近似)
- 5)  $\dot{G}/G$
- 6) 衛星/地球の位置, 速度

\* ) 但し, 惑星の軌道要素はパラメータとしてモデルに入れるのではなく観測データがそのまま使用された。

以上であり, そしてランダムな項として以下がモデルに導入された。

- 1) 軌道面垂直方向及び軌道面内方向の誤差加速度
- 2) 局の地球中心に対する位置
- 3) 大気の “wet” な成分による測距信号の遅れ

以上のモデル化を基に行なわれた感度評価の結果を表 14 と図 24～図 25 に示す。

#### 4-5) Helios 計画 (西独/U.S.A)[25]

図 26 に近日点距離が 0.2 AU の場合の helios の軌道を示す。

helios を使った重力の実験に対する study が J.D.Anderson, P.B. Esposito et al によって行なわれた。彼らは、

- 1) S-band のみの ranging ( $\sigma_r \sim 275$  nsec)
- 2) 完全な drag free の状態 (helios は drag free 衛星ではない。)
- 3) 1 週間に 1 回の観測

を仮定し, 又近日点距離が 0.2 AU と 0.3 AU の両方について  $\beta$  及び  $J_2$  に対して得られる

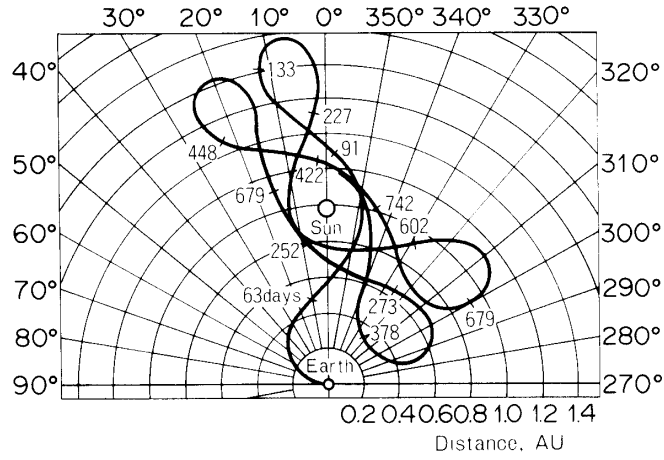


図 26 Helios Trajectory (Launch: March 13, 1974) Perihelion Distance = 0.2 AU

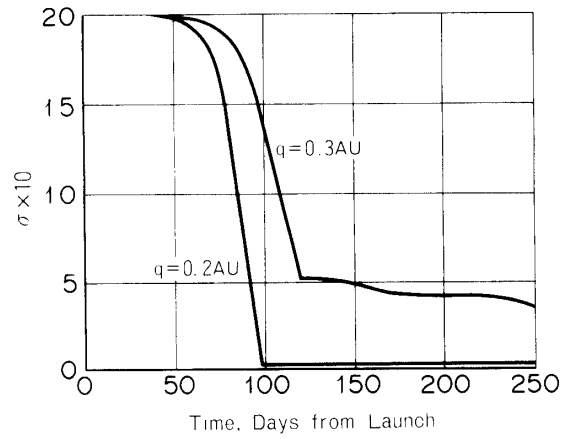


図 27 Standard Deviation of  $\beta$  in Percent for Perihelion Distances  $q=0.2$  AU and  $q=0.3$  AU

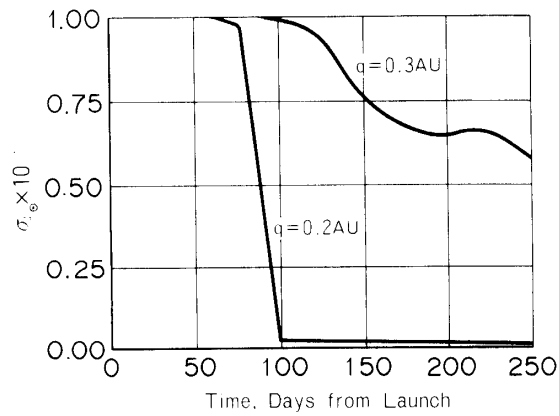


図 28 Standard Deviation of  $J_{2\odot}$  in Units of  $10^{-5}$  for Perihelion Distances  $q=0.2$  AU and  $q=0.3$  AU

精度を評価した。結果は、近日点距離が 0.2 AU の時  $\sigma_\beta \sim 0.1\%$ ,  $\sigma_{J_2} \sim 2 \times 10^{-8}$  を、又 0.3 AU の時  $\sigma_\beta \sim 2.6\%$ ,  $\sigma_{J_2} \sim 0.55 \times 10^{-5}$  を期待できると報告しているが、観測後何日目にこの精度を得るのかははっきりしない。又完全な drag free の仮定を捨て  $\sigma_a \sim 3 \times 10^{-13}g$  程度の力を受ける場合についても評価しており、近日点距離が 0.3 AU の時  $\sigma_\beta$  が 2.6% から 5% へと劣化し  $J_2$  が観測不可能になる ( $\sigma_{J_2}/J_2 \geq 1$  を意味している) と述べている。

図 27~図 28 に  $\sigma_\beta$  vs  $t$ ,  $\sigma_{J_2}$  vs  $t$  のグラフを掲げておく。

私見であるが、range 精度や観測頻度が他 mission に比べて劣るのに  $\sigma_\beta \sim 10^{-3}$  の結果を出している事やグラフの形から、この結果は他の study に比べ信頼度が劣る様に思える。

## 5章 Discussion

4章で review された各実験は、測距精度、軌道、観測期間及び頻度等の configuration が異なる事及び各検討で使用されたモデルや評価すべき量の項目が違う事から一概に比較するのは困難であるが、SOREL や Mercury Orbiter の検討から、

- 1) up/down とも S/X band 二波使用による測距精度~数  $m$  の測距システム又はそれに等価な精度を持つ doppler 計測システム
- 2) 観測期間が数年間、又観測間隔が 1 日程度の観測スケジュール
- 3) 中程度の離心率で、内惑星程度の軌道
- 4) 誤差加速度が  $\leq 10^{-13}g$  程度の drag free システム

により、 $\sigma_\beta \sim 10^{-3}$ ,  $\sigma_\gamma \sim 10^{-4}$ ,  $\sigma_{J_2} \sim 10^{-7}$  程度の精度を期待する事ができる様に思われる。

離心率が非常に 1 に近い ( $e \sim 0.998$ ) 軌道を持つ Solar Probe は近似点が  $4R_\odot$  である事から  $\sigma_{J_2}$  が非常に良くなるが、 $\sigma_\beta/\sigma_\gamma$  がそれぞれ  $8.8 \times 10^{-3}$ ,  $4.7 \times 10^{-3}$  という結果にとどまっているのは興味深い。Solar probe の実験 configuration は SOREL 等のそれとは大きく異なるため詳細な検討が心要であるが、 $\beta$  や  $\gamma$  に対しては離心率を 1 に近づけても大きな改善を期待できないのかも知れない。

$\dot{G}/G$  については、SOREL (計画) 及び Mercury Radar Observation (進行中) 両者でその到達精度が  $10^{-10}/y$  と報告されている。 $\sigma_{\dot{G}/G}$  が  $t^{-5/2}$  に比例する事を考えれば[23], 測距精度の劣る Mercury Radar Observation が、SOREL と同様な結果を生んでいるのは観測期間が長いためであろう。

これは裏を返せば、上述の実験 configuration であっても観測期間を長くしたり、観測間隔を狭くする事で  $10^{-10}/y$  以上の positive な結果を生む可能性がある事を意味している。最後の helios はその測距精度が他計画のそれより大きく劣る事と比べて結果が楽感的すぎる様に思われ、その評価方法に問題があると思われる。

今後はより詳細な検討により、 $\sigma_\beta$ ,  $\sigma_\gamma$  等が実験 configuration に対しどの様に依存するかを明らかにする事を通して具体的な configuration を決める必要がある。

ここで問題になるのは上述の様な検討が実際に比べてどれだけ楽感的になっているかと言う事で、計画より 1~2 ケタ程度悪化すれば実験の意義がなくなってしまう。

実際にはこれを評価する事はできないが、

- 1) range のデータ以外に doppler のデータもこれに加え処理する。

2) 観測期間を長く取って“unknown”な量の間の変動を小さくする。  
等によって (Reasenberg/Shapiro, ref 2) factor 程度, 更に精度を改善できる事が報告されておりリスクを下げる事ができる。又, 各 study 供誤差加速度が white であるとしているが, これは一般にカラーを持つと考えるのが自然である。つまり一般相対論や太陽の偏平度等, 我々が興味を持つ現象がその姿を最も良く現わす周波数帯で誤差加速度が小さければ全体として  $10^{-13}g$  も要求する必要がなくなるかもしれない。今後はどのノイズ源がどのようなカラーを持つかそして更にどのノイズ源が最もクリティカルか検討が必要である。

以下に,  $\sigma_\beta \sim 10^{-3}$ ,  $\sigma_\gamma \sim 10^{-4}$ ,  $\sigma_{J_2} \sim 10^{-7}$ ,  $\sigma_{G/G} \sim 10^{-11}/y$  の実験を行うに当ってより具体的な問題点を整理すると

計測システムに対しては,

- 1) up/down 両 link 供 S/X 二波使用によって, プラズマ及び大気による効果の較正も含めたトータルシステムとしてどの程度の測距精度が得られるか。
- 2) これに伴うトランスポンダや地上系の jitter を押えるため塔載アンテナの大型化及び地上局の受信器の低雑音化等の必要性
- 3) トランスポンダ及び地上系の短期及び長期安定度

drag free のシステムに対しては spin 型の衛星を仮定しても

- 1) 構体の熱否みによる proof mass への引力
- 2) proof mass の charge up

が最も大きなノイズ源とされ検討を要する。又他に, drag free を維持するための燃料の消費による衛星内の質量分布の変化, 衛星内部の温度分布の均一性も問題となる。

そして軌道解析用のソフトウェアとしては

- 1) どの量を“unknown”なものとするか
- 2) 太陽コロナ及び大気モデルに何を使用するか
- 3) 地球表面の tidal な動きをどの様に filter に組み込むか。
- 4) drag free 衛星の持つ誤差加速度に対してどの様なモデルを使用するか。

の検討が必要である。

今後以上の点についてより詳細に検討する必要があるが, これ以外に, 結果は望むべくもないが実際に PLANET-A の追跡及びデータ処理を行う事は非常に貴重な経験となる。

## Reference

- [1] J.D. Anderson, P.B. Esposito et al, Space Reseach XII, Akademie-Verlag, Berlin, p 1623, 1972
- [2] R.D. Reasenberg, I.I. Shapiro et al, Astrophys. J, 234: L219-221, 1979 Dec 15
- [3] John Hopkins apply phys lab & Stanford univ, J.Spacecraft & Rocket 11, 1974
- [4] R.F.C. Vessot, Center for astrophys preprint series No. 1030
- [5] 古在 (東京天文台) 「人工衛星の軌道」
- [6] M.H. Kaplan, 「Modern Spacecraft Dynamics & Contral」, John wiley & Sons press

- [ 7 ] J.Lense, H.Thirring, Physik Zeitschr 19, 1918
- [ 8 ] P.A.M. Derac, Nature, 139 : 323, 1937
- [ 9 ] J.P.L. technical memorandum 33-768
- [10] P.F. Macdoran, P.S. Callahan, A.I. Zygielbaum, J.P.L. technical report 32-1526, vol 1
- [11] NASA, Astrophysics Project Concept Summary
- [12] P.S.Callahan, "A Close up of the Sun, JPL publication 78-70, P 450, 1978
- [13] R.F.C. Vessot, M.W. Levine, "A Close up of the Sun, JPL publication 78-70, P 457, 1978
- [14] J.D. Anderson, scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi" Gravitazione Sperimentale
- [15] M.E. Ash, M.I.T. Lincorn lab technical note 19 April, 1972-5
- [16] "Applied Optimal Estimation" the Analytic Science co. edited by A. Gelb
- [17] R.D. Reasenberg, I.I. Shapiro, "A Close up of the Sun" JPL publication 78-70, P 19, 1978
- [18] J.D.Anderson, E.L.Lau, "A Close up of the Sun" JPL publication 78-70, P 42, 1978
- [19] K.Nordtvedt, "A Close up of the Sun" JPL Publication 78-70, p 58, 1978
- [20] C.W.F. Everitt, D.B. Debra, A Close up of the Sun" JPL publication 78-70 6 60, 1978
- [21] R.Juillerat, JPL technical memorandam 33-499, p 197, Nov 11-13, 1970
- [22] R.D. Reasenberg, "Proceedings of the sixth course of the international school of Cosmology and Gravitation, P.Bergmann ed's
- [23] R.D. Reasenberg, I.I.Shapiro, "Atomic Masses and Fundamental Constants, vol 5 Plenum, New York, 1976, J.H. Sanders ed's
- [24] G. Israel, R.Pacault, scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi" Gravitazionale Sperimentale, p 425
- [25] J.D.Anderson, P.B. Esposito