

惑星間軌道生成プログラム

西村敏充・松尾弘毅
加藤隆二*・三上龍男*

(1983年5月4日受理)

Trajectory Program for Interplanetary Missions

By

Toshimitsu NISHIMURA, Hiroki MATSUO
Takaji KATO and Tatsuo MIKAMI

Abstract: The Planet-A and MS-T5 missions are the first deep-space missions not only for ISAS, but also for Japan. Escaping the gravity field of the Earth, the spacecrafts travel around the Sun for 8 months for the former and 14 months for the latter until the encounter with Halley's comet. During these periods, ISAS is planning to perform its own tracking using the 64 m ϕ antenna which is under construction at Usuda, Nagano prefecture.

For this purpose, precise trajectory of the spacecrafts must be computed, taking into account all the accelerations such as gravity of Sun, Moon, 9 planets, solar pressure, general relativity effect, etc. A large scale software called TRIP has been developed based on such mathematical model, taking advantage of the advanced numerical integration techniques and the basic concept as well as the software structure are described in this report.

* 富士通株式会社

目 次

1. まえがき	2
2. TRIP の開発の背景	
2.1 惑星間軌道計算の特徴	3
2.2 TRIP の位置付け	5
3. 惑星間軌道計算の主要理論	5
3.1 時系	6
3.2 座標系	11
3.3 運動方程式	21
3.4 運動方程式の数値計算	32
4. 惑星間軌道生成システム	
4.1 TRIP の機能概要	43
4.2 SCINF の機能概要	45
4.3 計算結果と検討	46
5. あとがき	49

1. ま え が き

1986年2月に、ハレー彗星が近日点を通過する。このハレー彗星に向け、我が国で初めて惑星間を航行する試験探査機MS-T5が1985年の初頭に、次いで、ハレー彗星探査機PLANET-Aが1985年8月に打ち上げられる。MS-T5は、太陽の周りを1周半し、また、PLANET-Aは太陽の周りを3/4周し、1986年3月、共にハレー彗星に接近し、観測を行う。これらの軌道について図1-1に示す。

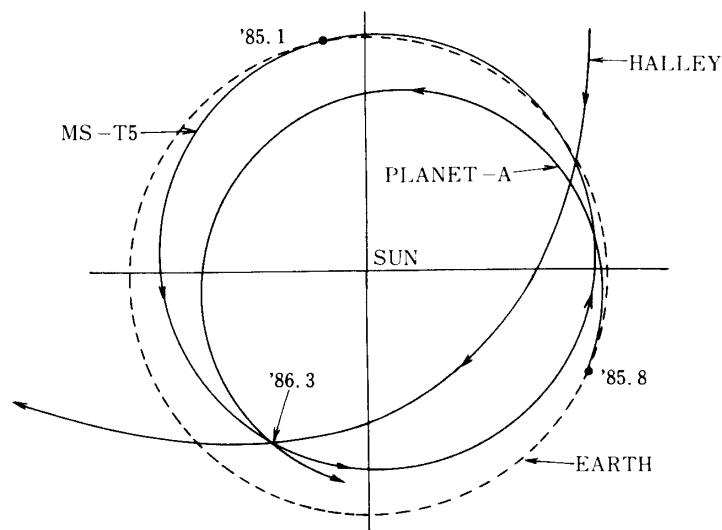


図1-1 MS-T5, PLANET-A の軌道

このミッションの追跡管制システムを構築するに当たり、その基礎となる惑星間航行の軌道生成の調査及びミッションの概要の解析を行うために、惑星間軌道生成プログラム (TRIP) 及び探査機情報出力プログラム (SCINF) が開発された。

本稿では、惑星間軌道計算の特徴、及び TRIP の開発の背景と使用されている主要理論、さらに TRIP のプログラム概要及び解析結果の一部を紹介する。

2. TRIP の開発の背景

2.1 惑星間軌道計算の特徴

MS-T 5, PLANET-A が航行する惑星間軌道について、従来の地球周囲軌道との比較においてその主な特徴をあげると、次の3つになる。

- ① 航行軌道フェーズが変化する。
- ② 有効な解析手法がない。
- ③ 数値積分において、積分の刻み幅が大きく変化する。

以下、この3項目について説明する。

(1) 航行軌道フェーズの変化

従来の地球周囲衛星の軌道は、地球中心の楕円軌道だけであるが、惑星間軌道において

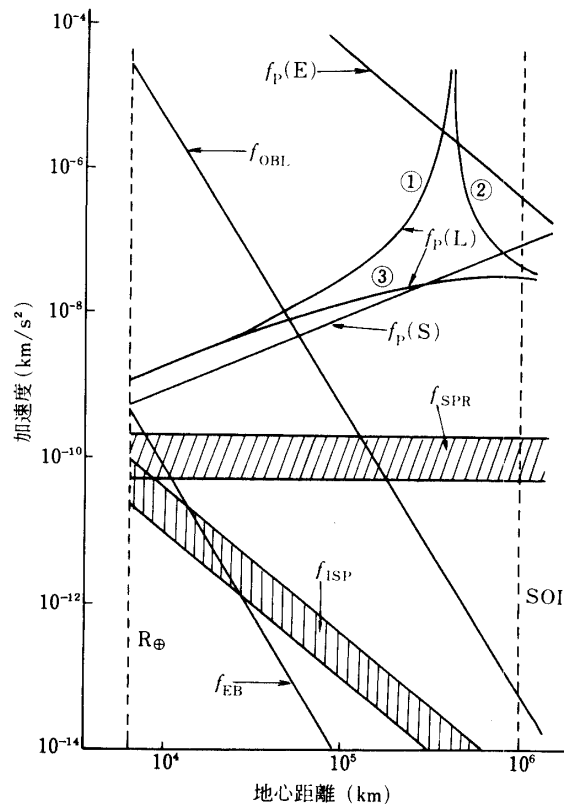


図 2-1 地球近傍航行フェーズにおける加速度項

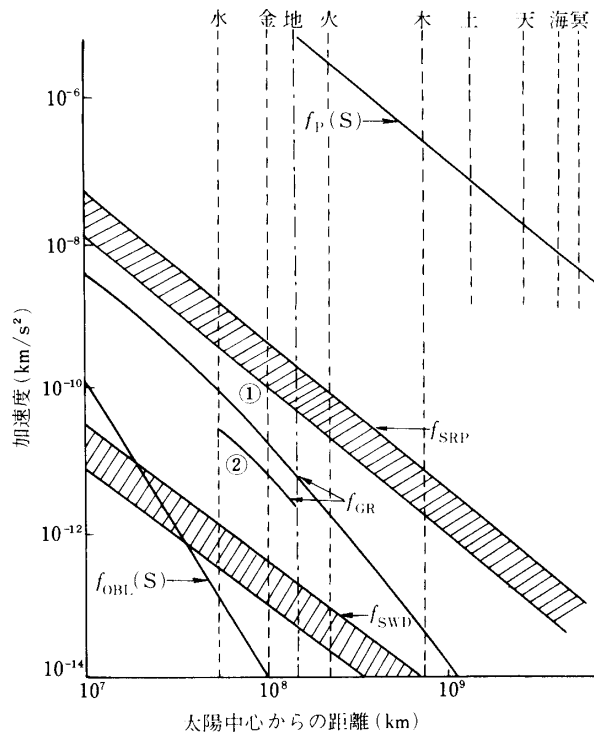


図2-2 太陽中心航行フェーズにおける加速度項

は、初めは地球中心の双曲線軌道、その後太陽中心の楕円軌道と、フェーズが変化する。また、将来のミッションである惑星探査においては、目標惑星近傍で目標惑星中心の双曲線軌道となり、オービタとなる場合には、更に楕円軌道へとフェーズが変化する。

このフェーズの変化に応じて、探査機に働く加速度の振舞も変化する。図2-1に地球近傍、図2-2に太陽中心の、それぞれのフェーズにおける主な加速度項の大きさを示す。ただし、探査機のモータ噴射による加速度は、その大きさが任意なので、除いてある。

図2-1において、 R_{\oplus} は地球赤道半径、 SOI は地球重力の影響圏を示す。また、 $f_p(E)$ 、 $f_p(L)$ 、 $f_p(S)$ はそれぞれ、地球、月、太陽の質点による加速度を示す。 $f_p(L)$ の中で、①、②の曲線は、地球に対して探査機と同方向に月がある場合、③の曲線は、探査機と反対方向に月がある場合の加速度を示す。

f_{OBL} は、地球重力の非球対称成分の中で最も大きな J_2 項による加速度、 f_{EB} は月の潮汐力による加速度のそれぞれ最大見積りを示す。 f_{SRP} 、 f_{ISP} は、それぞれ、直接の太陽輻射圧、地球面反射後の太陽輻射圧の加速度を示し、その斜線部は、探査機の形状等による見積りの範囲（有効断面積/質量 $=10^{-10} \sim 2 \times 10^{-2} \text{ [m}^2\text{kg}^{-1}\text{]}$ 、反射係数 $=0 \sim 1$ とする）を示す。ここで、大気抵抗による加速度については、高度1000 km以上では非常に小さくなるので、省略した。

図2-2において、 $f_p(S)$ 、 $f_{OBL}(S)$ は、それぞれ太陽の質点による加速度、太陽の J_2 項による加速度を示す。 f_{GR} において、①は探査機の軌道を近日点距離が 10^7 kmである放物線軌道とした場合、②はその軌道を地球と水星の軌道間の楕円軌道とした場合の、太陽に

よる一般相対論効果の加速度を示す。

f_{swd} は、太陽風の圧力による加速度を示し、 f_{srp} , f_{swd} の斜線部の意味は、図 2-1 と同じである。

この他に惑星の質点による加速度があり、惑星間航行においては重要な位置を占めるが、探査機との位置関係により大きさが大きく変化するので、図 2-2 では省略してある。参考のために、地球 SOI における外惑星（内惑星は位置関係により大きく変わる）による加速度を求めると、木星 $\sim 10^{-10}$ [km/s²]、土星 $\sim 5 \times 10^{-12}$ [km/s²] となり、天王星以遠の惑星は 10^{-13} [km/s²] 以下となる。

(2) 運動方程式の解法

従来の地球周回軌道では、地球の質点による加速度に比較して他の加速度が非常に小さいため、他の加速度を摂動として扱うことができ、解析的に解くことが可能であるが、惑星間軌道においては、航行軌道フェーズの切り換え近辺では、前述の条件が成立せず、有効な解析手段が存在しない。特に地球の SOI 近傍では、地球、月、太陽の質点による加速度が同程度の大きさとなる(図 2 参照)。したがって、探査機の軌道は、その運動方程式を数値積分法を用いて解くことにより計算されねばならない。

(3) 積分の刻み幅

従来の地球周回軌道においては、運動方程式を数値積分で解く場合、積分精度を一定に保つための積分の刻み幅の変化は、数倍から数十倍であり、固定の刻み幅による計算も可能である。しかし、惑星間軌道においては、刻み幅は地球出発から太陽中心航行フェーズまで数百倍も変化する。このため、固定の刻み幅による積分は不可能となる。

2.2 TRIP の位置付け

このように、惑星間軌道は、地球周回軌道とは大きく異っており、従来の地球周回衛星用のソフトウェアの単なる機能拡張では対処できない。したがって、我が国初の惑星間航行ミッションを迎えるに当り、運用プログラムを直接開発するのではなく、まず、惑星間軌道固有のアルゴリズム等を検討するために、基本となる軌道生成プログラムを作成して解析を行い、それをふまえて、軌道決定用プログラムを開発する必要がある。このような背景をもとに、TRIP を開発した。

3. 惑星間軌道計算の主要理論

本章では、本プログラムで使用されている理論及びアルゴリズムの主なものについて、その概略を記述する。

3.1 時系

本プログラムで使用する時系について、表 3-1 に示す。

以下、各時系及び時系間の変換について記述する。

表3-1 各時系の用途

時系名	略称	プログラム内の用途
暦表時	ET	運動方程式の積分 太陽・惑星・月の位置計算
世界時	UT1	地球自転角の計算
協定世界時	UTC	プログラム外部とのインタフェース

(1) 恒星時 (ST ; Sidereal Time)

恒星時は春分点の時角として定義される。すなわち、ある観測点の子午線から西向きに測った春分点の角度を時間の単位 (360°を24時間とする) で表したものであり (春分点が子午線を通過した時刻は0時となる)、恒星時0時から次の0時までを1恒星日という。基準となる春分点が真春分点の場合には、真の視恒星時、また、平均春分点の場合には、平均恒星時 (MST ; Mean Sidereal Time) と呼ばれる。特に観測点が本初子午線 (グリニッジ子午線) に準拠する恒星時は、グリニッジ恒星時と呼ばれ、その平均恒星時 (GMST ; Greenwich Mean Sidereal Time) は、次に述べる世界時の計算に使用される。

本プログラムでは、地球赤道座標系から地球固定座標系への変換にこのGMSTが用いられ、その値は、世界時から逆に求めている。

(2) 世界時 (UT ; Universal Time)

太陽の時角に12時を加えたものを視太陽時 (光行差を含む) と呼び、視太陽時の0時から次の0時までを1視太陽日と呼ぶ。視太陽時は一様に進まない。その理由は、太陽の赤経が一様に増加せず、したがって時角の増加が均等でないためである。この原因は2つある。

- ①黄道が赤道に対して23.4°傾いている。
- ②地球の公転軌道が楕円である。

この視太陽時を1年を通じて平均し、その不規則さを除いたものが平均太陽時である。これは次のように定義される。天の赤道を均等な速度で進み、1太陽年間に完全に1周する天体を仮想し、これを平均太陽と名づける。平均太陽の赤経は常に視太陽の赤経に前後し、その差は1年を通じて最小になるようにする。この平均太陽の時角に12時を加えたものを平均太陽時、平均太陽の0時から次の0時までを1平均太陽日と呼ぶ。

この平均太陽時のうち、本初子午線に準拠するものは世界時 (UT) と呼ばれ、次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{UT} &= H_G + 12^{\text{h}} = \theta_M - \alpha_{\odot} + 12^{\text{h}} \\ &= \text{MST}_{\lambda} - \lambda - \alpha_{\odot} + 12^{\text{h}} \end{aligned} \quad (3-1)$$

ここで、 H_G ; グリニッジにおける平均太陽の時角

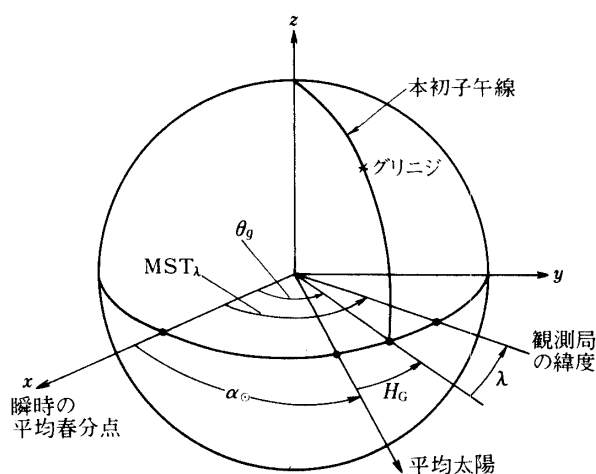


図 3-1 世界時

θ_M ; グリニジ平均恒星時
 α_{\odot} ; 平均太陽の赤経
 MST_{λ} ; 経度 λ (東向き) における MST.

この平均太陽は, S. Newcomb によって導入され, その赤経は次式で与えられる.

$$\alpha_{\odot} = a + bT + cT^2 \quad (3-2)$$

$$a = 18^{\text{h}}38^{\text{m}}45^{\text{s}}.836 = 279^{\circ}41'27''.54 \quad (\text{光行差を考慮})$$

$$b = 8640184^{\text{s}}.542 = 129602768''.13 \quad (\text{黄道上の平均角速度と同じ})$$

$$c = 0^{\text{s}}.0929 = 1''.394$$

ここで, T は 1900 年 1 月 0 日 12 時 UT から起算したユリウス世紀 (36525 平均太陽日) 単位の時間である.

(3-1) 式で定義された世界時は, 地球の自転速度が一定でないため, 一様には進まないことが 1930 年頃から問題になりはじめてきた. 自転速度が不規則になる主な項を次に示す.

- ① 100 年毎に 1 日の長さが 0.001 秒ずつ長くなる永年変化. 地球表面の潮の干満が海底, 峽湾などでひき起す摩擦により起こる.
- ② 1 年を周期とする季節的な自転速度の変化 (0.7 ミリ秒/日). 偏西風や太陽による地球潮汐が原因である.
- ③ 地球の膨張圧縮および内部構造の変動に伴う慣性能率の変化によって起こる不規則変動.

④極運動によるもの。

上記項目のうち，②，④を考慮して世界時を補正することが，1956年以降実施されている。以下に，このことについて示す。

a. UT 0

観測局において， MST_{λ} を観測により求め，(3-1)式および(3-2)式を用いて求めた生の世界時である。

b. T 1

極運動による観測局の経度変動 ($\Delta\lambda$) を補正した時系で，

$$UT\ 1 = UT\ 0 - \Delta\lambda \quad (3-3)$$

で与えられる。本プログラムにおいては，グリニジ平均恒星時 θ_M の計算に，この UT 1 を用いている。

$$\theta_M = UT\ 1 + a_{\odot} - 12^h \quad (3-4)$$

c. UT 2

UT 1 に対して，地球の自転速度の季節変化 (SV) の補正を加えた時系が UT 2 である。

$$UT\ 2 = UT\ 1 + SV \quad (3-5)$$

この SV の量は，国際報時局 (BIH) から発表されている。

(3) 暦表時 (ET; Ephemeris Time) と太陽年 (Tropical Year)

太陽の黄道上での位置，すなわち黄経は一般に次のような形に表すことができる。

$$\text{太陽の黄経} = d + eT + fT^2 + P \quad (3-6)$$

ここで， T ；エポックからの経過時間

P ；地球の章動や地球軌道が完全な円でないために生じる角速度の変動による複雑な周期項。

S. Newcomb は観測データの分析から，周期項を除いた太陽の幾何学的平均黄経 L_M (平均春分点から測った太陽の黄経) を次式で与えた。(但し光行差を含む)

$$L_M = 279^{\circ}41'48''.04 + 12960276''.13 \cdot T + 1''.089 \cdot T^2 \quad (3-7)$$

ここで， T ；1900年1月0日12時 UT から起算した時間経過をユリウス世紀 (36525 平均太陽日) 単位で測る。

ところがその後 (3-7)式から求まる計算値が観測結果と合わないことが指摘された。その原因は，平均太陽時が地球自転速度の変動により一様不変の時系でないために生じたという解釈に落ちつく。そこで観測された L_M に対して (3-7)式が満足されるように T_E (=

$T + \Delta T$)を決める。この T_E は太陽の運動を記述する一様不変な時間を与えてくれる。この時系が暦表時である。

暦表時における起点および秒は、次のように定義されている。

「暦表時は1900年の年初において太陽の幾何学的平均黄経が $279^\circ 41' 48''.04$ に達した瞬時から起算し、その瞬時を1900年1月0日12時暦表時(ET)とする。これは、1900年1月0日12時UTと同じである。」

「暦表時の1秒は、1900年1月0日12時ETにおける1太陽年の $31556925.9747(365.24219878 \times 86400)$ 分の1とする。(1956年国際度量衡委員会により決定)」

ここで、1太陽年とは、太陽の平均黄経がもとにもどるまでの時間であり、(3-2)式より、次のように求められる。

$$\begin{aligned} 1 \text{ 太陽年} &= 360^\circ / \left(\frac{dL_M}{dT} / 36525 \right) \\ &= 365^d.24219878 - 6^d.14 \times 10^{-6} T_E \end{aligned} \quad (3-8)$$

1900年1月0日12時ETにおける1太陽年は、365.24219878日(31556925.9747秒)となる。

また、 ΔT は暦表時と平均太陽時の差に相当し、これは地球の自転速度の変化に対応している。1980年における ΔT の年平均推定値は+50秒で、これは1900年から80年間に角度にして $12'$ ほど自転が遅れたことを意味している。

以上のように、暦表時は天体の運動理論に立脚して定義された一様不変の時系で、月、惑星などの天体暦は、暦表時によって計算されている。現在、暦表時は月の観測により求められている。

(4) 原子時(AT; Atomic Time)

地球の自転に頼れなくなった時系の新たな担い手として暦表時が名乗りを挙げたわけがあるが、ちょうど同じ頃、セシウム元素の原子振動を利用した、いわゆる原子時間が実用化されるようになってきた。

1967年の国際度量衡総会で決定された原子時の秒の定義は次のようなものである。

「国際単位系の1秒は、セシウム133原子の基底状態の2つの超微細構造準位 ($F=4, M=0$ 及び $F=3, M=0$) 間の遷移放射の9192631770周期の継続時間とする」

原子秒は月の観測によって求められる暦表秒を基に決められたものである。原子秒は現在 10^{-12} の高精度で得ることができる。

TAI (International Atomic Time) と呼ばれる原子時は、1958年1月1日0時UT 2においてTAIの時刻をUT 2と一致させたもので、パリ天文台にある国際報時局(BIH)で維持されている。

原子時がスタートした1958年1月1日0時UT 2における暦表時と原子時の差は

$$ET - TAI \approx 32^s \quad (3-9)$$

である。この差は両時系とも一様不変に流れる時系であり、また原子秒は暦表秒に一致させて決められたものであるから一定の値を保ち続けるはずである。ところが現在行なわれている観測によると、多少の変化が認められる。その原因としては、暦表秒を決めた際の観測の誤差と原子時にとっては本質的な問題である相対論の効果等が考えられている。

(5) 協定世界時 (UTC ; Coordinated Universal Time)

協定世界時は、秒の刻みは原子時によって与え、一方時刻については、世界時との差がいつもある範囲にあるように調整されている人工時系である。

1972年から採用されている方式では、UTCの秒の長さは厳密に1原子秒とし、1972年1月1日0時UTCにおいて $UTC = TAI - 10^s$ となるようにUTCを調整し、以降はUTCとUT1の差が1974年までは ± 0.7 秒、1975年からは ± 0.9 秒以内にあるように管理されている。もし $UTC - UT1$ の値がこれらの範囲を超えることが予測される場合には、任意の月末日UTC、ただし第1優先月は6月及び12月、第2優先月は3月及び9月の最後に1秒のうるう秒を挿入したり引抜いたりして $UTC - UT1$ の調整を行なう。この調整は1972年以降12回行なわれ、1983年1月現在、

$$TAI - UTC = 21 \text{ 秒} \quad (3-10)$$

である。

(6) ユリウス日とベッセル年

a. ユリウス日 (JD ; Julian Data)

長い年月にわたって日数を通算するのに便利のように考え出されたものがユリウス日である。西暦紀元前4713年1月1日12^h UTから起算した通日であり時刻は日の端数によって示される。

また、1858年11月17日0時UT (2400000.5 JD)から起算した通日は修正ユリウス日 (MJD ; Modified Julian Data)と呼ばれる。世界時のかわりに暦表時が用いられる場合には、ユリウス暦表日 (JED)、修正ユリウス暦表日 (MJED)となる。

b. ベッセル年 (The Besselian solar year)

暦年は4年に1度うるう年が設けられており、観測や計算を年を単位として行う場合には都合が悪い。便宜上、一様に経過する年としてベッセル年が考案された。

ベッセル年初は、光行差を受けた暦表平均太陽の赤経が $18^h 40^m$ に達した瞬間と定め、普通年号の後に.0をつけて表わす。(例 1950.0)

光行差を受けた暦表平均太陽の赤経 $\alpha_{\odot}^{(E)}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha_{\odot}^{(E)} &= 18^h 38^m 45^s .836 + 8640164^s .542 T_E + 0^s .0929 T_E^2 \\ &= 279^{\circ} 41' 27'' .54 + 129602768'' .13 T_E + 1'' .394 T_E^2 \end{aligned} \quad (3-11)$$

ここで、 T_E ; 1900年1月0.5日ETから36525太陽日を単位として測った時間 (ET)。上式より、ベッセル年初が求められる。以下にその例を示す。

$$\begin{aligned}
 1900.0 &= 1900 \text{年} 1 \text{月} 0 \text{日}.813 \text{ ET} \\
 &= 2415020.313 \text{ (JED)} \\
 &= 15019.813 \text{ (MJED)}
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

$$\begin{aligned}
 1950.0 &= 1950 \text{年} 1 \text{月} 0 \text{日}.923 \text{ ET} \\
 &= 2433282.423 \text{ (JED)} \\
 &= 33281.923 \text{ (MJED)}
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

また、1ベッセル年は、暦表平均太陽の赤経が2度続けて $18^{\text{h}}40^{\text{m}}$ になるまでの間隔であり、(3-11)式より、

$$\begin{aligned}
 1 \text{ベッセル年} &= 360^\circ / \left[\left(\frac{a_{\odot}^{(E)}}{dT_E} \right) / 36525 \right] \\
 &= 365^{\text{d}}.24219878 - 7^{\text{d}}.85 \times 10^{-6} T_E
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

となる。

このベッセル年と前述の太陽年とは、 $1^{\text{d}}.71 \times 10^{-6} T_E$ の差しかない。したがって、ベッセル年=太陽年と考えても通常問題はない。

(7) 時系間の変換

a. ETとTAIの変換式

本プログラムでは、ETとTAIの差として、次式を用いている。

$$ET - TAI = \Delta T_{1958} = 32^{\text{s}}.18 \tag{3-15}$$

b. TAI, UTC, UT 1の変換

(TAI-UTC)及び(TAI-UT 1)の実測値は、国際報時局(BIH)より発表されている。

本プログラムの現バージョンでは、

$$\begin{aligned}
 \text{TAI} - \text{UTC} &= 0 \\
 \text{TAI} - \text{UT } 1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

としている。

3.2 座標系

本プログラムで使用するおもな座標系について表3-2に示す。この他に本プログラムでは、惑星赤道座標系、月固定座標系についても考慮している。

以下、各座標系及びその変換について記述する。

(1) 座標系及び座標の型の定義

本プログラムで使用する主な座標系とその型を以下に示す。

a. 座標系の定義

表3-2 本プログラムで使用する座標系

座標系名称	原点	基準面	基準方向
地球赤道座標系	任意	地球赤道面	地球春分点方向
黄道座標系	〃	黄道面	〃
地球固定座標系	地球質量中心	地球赤道面	本初子午線と地球赤道との交点方向

① 地球赤道座標系

地球赤道座標系は、地球の赤道面を基準面とし、春分点を基準方向とする座標系であり、図3-2に示す。

赤道面と春分点方向は、歳差と章動により時々刻々変化するため、種々の座標系が存在するが、本プログラムでは表3-3に示す2種類の座標系を考慮している。この中で、1950.0年地球平均赤道座標系(EME 50)が本プログラムの内部計算に用いられている基準座標系である。

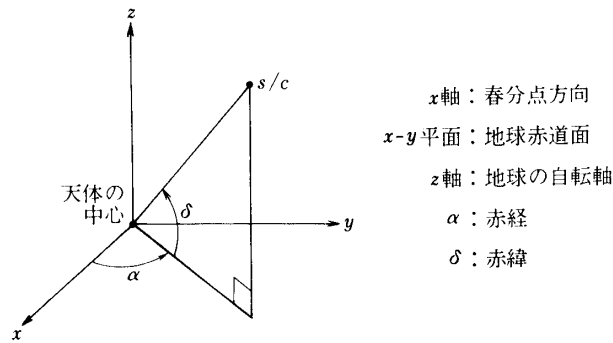


図3-2 地球赤道座標系

② 黄道座標系

黄道座標系は、黄道面を基準面とし、春分点を基準方向にする座標系であり、図3-3に

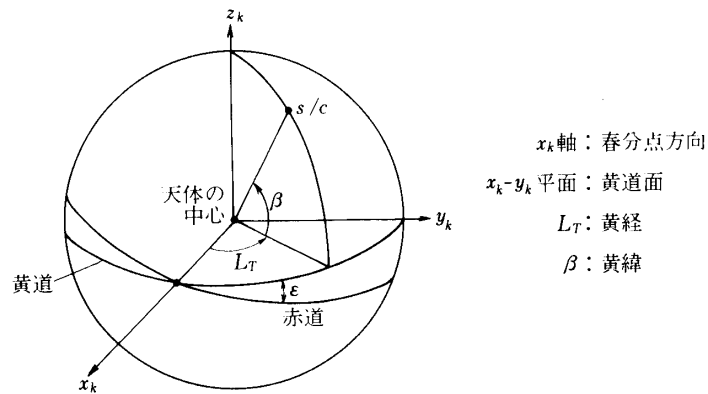


図3-3 黄道座標系

表 3-3 地球赤道座標系と黄道座標系

名 称	基準面と基準方向
1950.0年平均地球赤道座標系 (EME50)	1950.0年における平均赤道面と平均春分点方向
true of date地球赤道座標系	現時刻における真の赤道面と真の春分点方向
1950.0年平均黄道座標系	1950.0年における黄道面と平均春分点方向
true of date黄道座標系	現時刻における黄道面と真の春分点方向

示す。黄道面も歳差により時々刻々変化するため、種々の座標系が存在するが、本プログラムでは表 3-3 に示す 2 種類の座標系を考慮している。

③ 地球固定座標系

地球固定座標系は、地球質量中心を原点とし、現時刻の真赤道面を基準面、本初子午面と基準面との交点方向を基準方向とする座標系であり、図 3-4 に示す。この座標系には、極運動を考慮して慣性国際極原点に準拠した地球固定座標系と真の極に準拠した擬地球固定座標系があるが、ここでは後者のみを扱う。また地球固定座標系は、地球の非球対称成分による加速度を計算する時などに使用される。

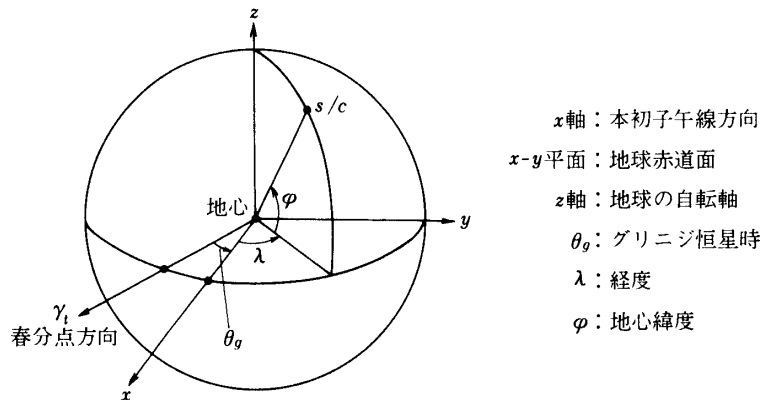


図 3-4 地球固定座標系

b. 座標の型の定義

座標系が決まれば、その x, y, z 軸方向をもとにして、空間に任意の点を記述することができる。S/C (Space Craft) や天体の運動を表現するには、位置及び速度を 3 軸方向の成分 (カルテジアン) で表現すればよい。本プログラムの内部計算 (数値積分法) では、この表現法を用いている。この他に、古典的な表現法や、惑星間航行に便利な表現法がある。本プログラムで取り扱う座標の型 (ただし、カルテジアンを除く) は、次のようなものがある。

- ケプラリアン
- 球座標
- 漸近座標

・到着漸近座標

以下、各座標の型について説明する。

① ケプラリアン

S/C 状態を次の軌道6要素で表現する。

a ; 軌道長半径

e ; 離心率

i ; 軌道面傾斜角

Ω ; 昇交点経度

ω ; 近点引数

M ; 平均近点離角

ω のかわりに次の $\tilde{\omega}$ で表現されることもある。

$\tilde{\omega}$; 近点経度 ($\tilde{\omega} = \omega + \Omega$)

M のかわりに次の Δt 又は ν で表現されることもある。

Δt ; 近点通過後の経過時間

ν ; 真近点離角 (ν と M との変換には、ケプラーの方程式を用いる)

上記パラメータは、図3-5に示すような意味を持つ。

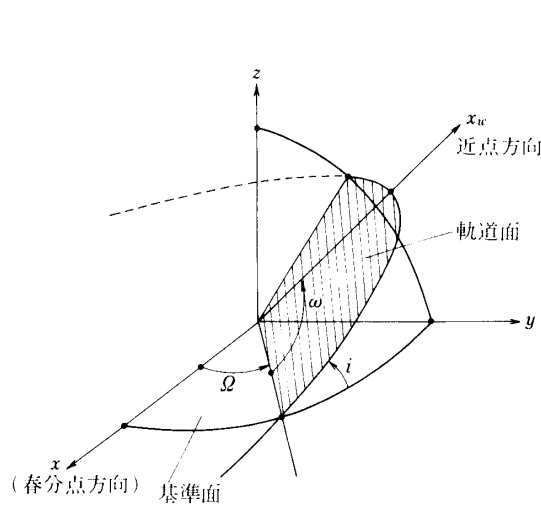


図3-5 a 基準面と軌道面

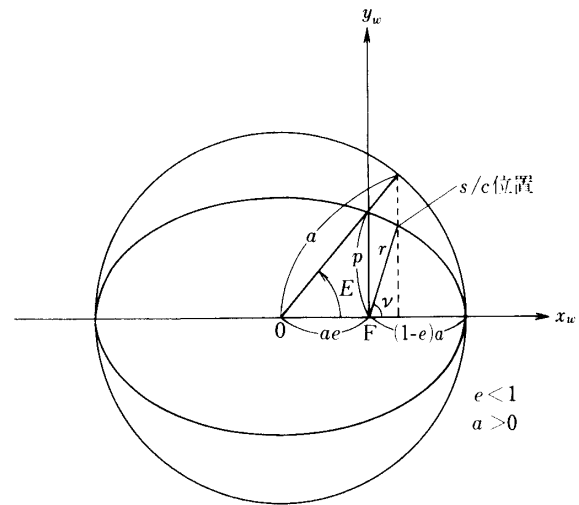


図3-5 b 軌道要素(楕円)

② 球座標

S/C 状態を次の要素で表現する。

R ; 原点から S/C までの距離

θ ; xy 面 (基準面) 上での x 軸 (基準軸) からの角度 (赤経)

ϕ ; xy 面 (基準面) 上からの角度 (赤経)

V ; 速度の大きさ

σ ; 速度空間での方位角 (北方向; S_3 からの角度)

γ ; 速度空間での仰角 (flight path angle)

上記パラメータを図3-6に示す。

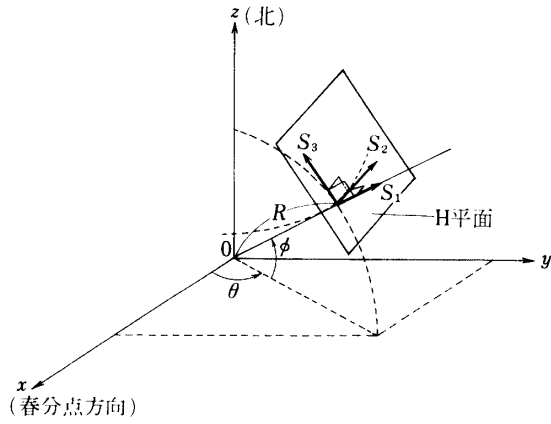


図3-6 a 球座標 (位置空間)

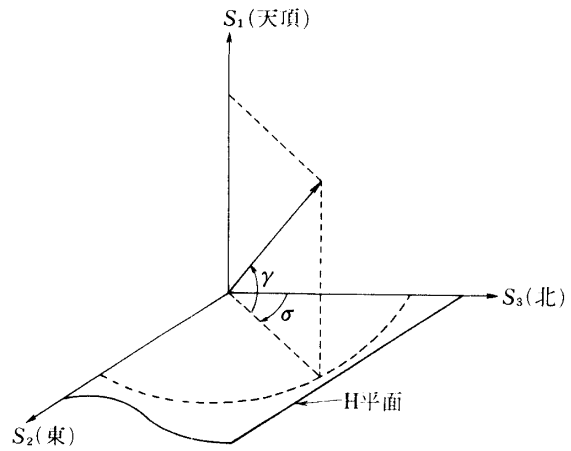


図3-6 b 球座標 (速度空間)

③ 漸近座標

S/C 状態 (打上直後) を次の要素で表現する。

- R ; 投入の半径
- θ_s ; 漸近方向の赤経
- ϕ_s ; 漸近方向の赤緯
- C_3 ; 投入でのエネルギー
- Σ_L ; 打上アジマス
- Γ ; 飛行経路角 (flight path angle)
- ϕ_L ; 打上点の緯度

上記パラメータを図3-7に示す。

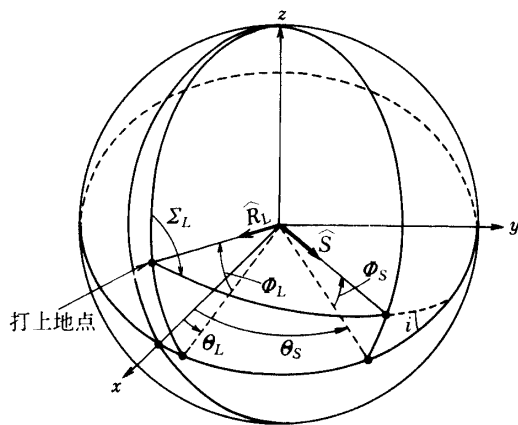


図3-7 a 漸近座標

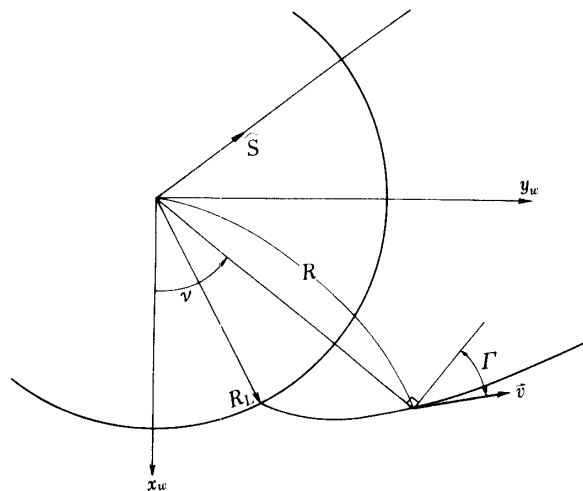


図3-7 b 打上飛行経路

④ 到着漸近座標 (arrival asymptote)

S/Cの状態を目標天体を中心とした条件で表わしたもので ($B, B \cdot T, B \cdot R$) 及び (r_{CA}, i_{CA}, t_{CA}) の2つの表現法がある。

B ; 到着双曲線の漸近線に中心天体から引いた法線の距離

$B \cdot T$; Impact 平面上での \hat{T} 方向成分 (基準面と Impact 面の交線方向)

$B \cdot R$; Impact 平面上での \hat{R} 方向成分 (Impact 面上で \hat{T} に直交する方向)

r_{CA} ; 天体最接近距離

i_{CA} ; S/C 軌道面と基準面 (天体の赤道面) との角

t_{CA} ; 天体最接近通過時刻

上記パラメータを図3-8に示す。

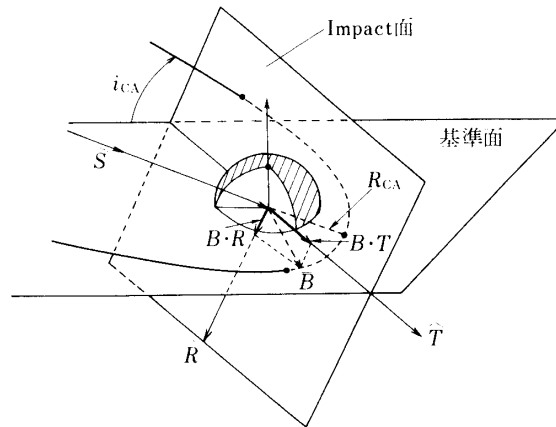


図3-8 到着漸近座標

(2) 地球赤道座標系と黄道座標系との関係

a. 歳差, 章動

地球赤道座標系や黄道座標系は, 春分点方向を基準としている。この春分点は, 赤道面と黄道面との交線の一方向として定義されている。しかし, この春分点は天球上の固定点ではなく, 移動する点であることが知られている。地球が完全球体でなく, 自転軸を軸とする回転楕円体であり, 月や太陽が赤道面上にないことから, 月や太陽の引力は, 地球の自転軸の方向に動かすようなモーメント (回転力) をもたらす。このため赤道面が動きその結果春分点が黄道上を移動するようになる。この春分点の移動は, 1年間に約50秒角であり, 約26000年で黄道上を一周する。これを地球の歳差 (Precession) と呼ぶ。

また, 春分点を定義している黄道面も動いている。これは地球の公転面と, 他の惑星の公転面とが同一平面上にないことが起因している。この黄道面の動きによる春分点の移動は, 1年に約0.12秒角である。赤道面移動と黄道面移動を考慮した春分点の移動を, 一般歳差 (General Precession) と呼ぶ。(以下, 一般歳差を単に歳差と呼ぶ)

春分点の移動は, 実際には一様でなく, 約18年の短周期項を含んでいる。これは, 月や太陽までの距離が一定でなく, 1公転の間に変化することなどが要因であり, この短周期

の成分を章動 (Nutation) と呼ぶ。

春分点や赤道面を定義する際に、歳差と章動を考慮したものを、それぞれ真春分点、真赤道面と呼び、短周期項である章動による変動を無視し、歳差のみを考慮したものを、それぞれ平均春分点、平均赤道面と呼んでいる。

赤道座標系を用いて、S/C の位置及び速度を表現するためには、赤道面や春分点を定義した時刻を指定しなければならない。本プログラムでは、1950.0 年の平均春分点方向を基準方向とし、地球平均赤道面を基準面とした地球赤道座標系 (EME 50) を基準座標系として、使用している。

b. EME 50 から Mean of Date への変換

ここで Mean of Date 赤道座標系とは、現時刻における地球平均赤道面と平均春分点で定義される座標系であり、EME 50 から true of date 地球赤道座標系への橋渡しに用いられる。

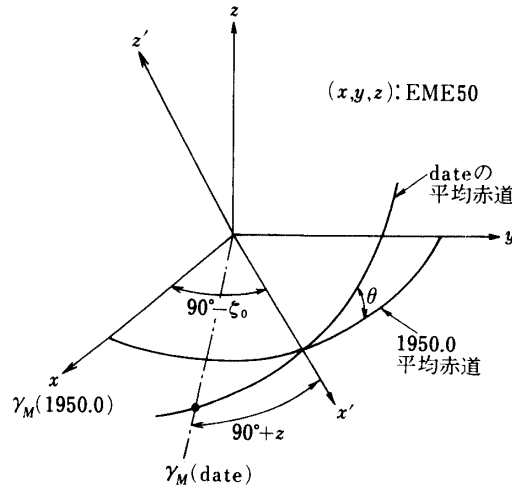


図 3-9 才差

両者とも、地球の歳差運動を考慮した座標系で、次の 3 種の角度で表現される。

θ ; 時刻 t_0 と t の平均赤道面のなす角

$90^\circ - \zeta_0$; 時刻 t_0 から平均赤道面上に測った昇交点赤経のなす角

$90^\circ + z$; 時刻 t における春分点から測った昇交点赤経までのなす角

ζ_0, θ, z は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 2304''.948 T + 0''.302 T^2 + 0''.0179 T^3 \\ \theta &= 2004''.255 T - 0''.426 T^2 - 0''.0416 T^3 \\ z &= 2304''.948 T + 1''.093 T^2 + 0''.0192 T^3 \end{aligned} \quad (3-17)$$

ここで、 T ; 1950.0 年から 100 太陽年で測った時刻であり、次式で与えられる。

$$T = \frac{T_{\text{MJED}} - 33281.923357}{36524.219878} \quad (3-18)$$

T_{MJED} ; 時刻 t の MJED 表現

EME 50 から date の平均赤道座標系に変換するには, 次の3つの座標回転を行う.

- ① z 軸回りに $90^\circ - \zeta_0$ 回転する. (回転行列を P_1 とする)
- ② 回転してできた x' 軸回りにも θ 回転する. (回転行列を P_2 とする)
- ③ 回転してできた z' 軸回りに $-(90^\circ + z)$ 回転する. (回転行列 P_3 とする)

この回転行列は, それぞれ

$$P_1 = \begin{bmatrix} \sin \zeta_0 & \cos \zeta_0 & 0 \\ -\cos \zeta_0 & \sin \zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} -\sin z & -\cos z & 0 \\ \cos z & \sin z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, したがって EME 50 から date の平均赤道座標系への変換行列 P は, 次式となる.

$$P = P_3 P_2 P_1 \quad (3-20)$$

c. Mean of Date から True of Date への変換

Mean of Date 地球赤道座標系と True of Date 地球赤道座標系との変換を考える.

章動は, 月と太陽の引力と地球の形によって起き, このため地球の赤道面を変えるが黄道面は変えない. したがって, 章動運動は次の2つの角度で表現される.

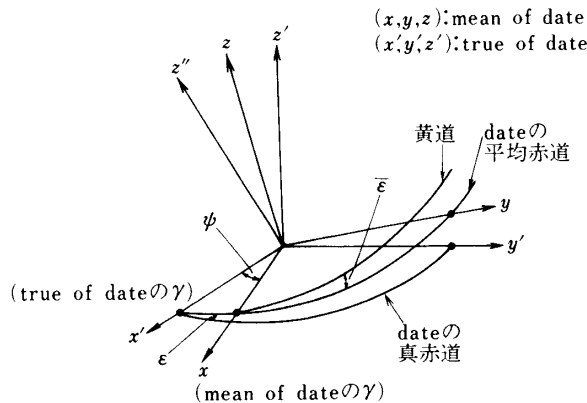


図 3-10 章動

$\delta\psi$; 黄経の章動 (nutation in longitude)

$\delta\varepsilon$; 黄道傾斜角の章動 (nutation in obliquity)

黄道傾角の章動を考慮した真の黄道傾角 (true obliquity of ecliptic) は

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon \quad (3-21)$$

で表される。 $\bar{\varepsilon}$ は平均黄道面から測った平均黄道傾角で次の式から計算される。

$$\bar{\varepsilon} = a_\varepsilon + b_\varepsilon T + c_\varepsilon T^2 + d_\varepsilon T^3 \quad (3-22)$$

$$a_\varepsilon = 23^\circ 27' 08''.26$$

$$b_\varepsilon = -46''.845$$

$$c_\varepsilon = -0''.0059$$

$$d_\varepsilon = 0''.00181$$

ここで、 T は 1900 Jan 0.5 ET から Julian 世紀で測った時刻であり、次式より計算される。

$$T = \frac{T_{\text{MJED}} - 15019.5}{36525} \quad (3-23)$$

T_{MJED} ; 時刻 t の MJED 表現。

黄道傾角の章動 $\delta\varepsilon$ と黄経の章動 $\delta\psi$ は、JPL エフェメリスの値 (現在 DE 96) を採用する。

Mean of Date 地球赤道座標系から True of Date 地球赤道座標系への変換は、次の手順で行われる。

① x 軸のまわりに $\bar{\varepsilon}$ だけ正の方向に回転する。(回転行列 N_1)

② 回転してできた z'' 軸のまわりに $\delta\psi$ だけ負の方向に回転する。(回転行列 N_2)

③ 回転してできた x' 軸のまわりに ε だけ負の方向に回転する。(回転行列 N_3)

これら回転行列は次式で与えられる。

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\varepsilon} & \sin \bar{\varepsilon} \\ 0 & -\sin \bar{\varepsilon} & \cos \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \cos \delta\psi & -\sin \delta\psi & 0 \\ \sin \delta\psi & \cos \delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

したがって、Mean of Date 地球赤道座標系から True of Date 地球赤道座標系への変換行列は、次式で与えられる。

$$N = N_1 N_2 N_3 \quad (3-25)$$

d. 地球赤道座標系から黄道座標系への変換

(a) EME 50 から 1950.0 年平均黄道座標系への変換

EME 50 から 1950.0 年平均黄道座標系への変換行列 $R_X(\bar{\epsilon}_0)$ は、次式で計算される。

$$R_X(\bar{\epsilon}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\epsilon}_0 & \sin \bar{\epsilon}_0 \\ 0 & -\sin \bar{\epsilon}_0 & \cos \bar{\epsilon}_0 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}_0$: 1950.0 年における平均黄道傾角

(b) EME 50 から True of Date 黄道座標系への変換

EME 50 から True of Date 黄道座標系への変換行列 $R_X(\epsilon)$ は、次の3つの座標回転により求まる。

- ① EME 50 から Mean of Date 赤道座標系への変換 : P
- ② Mean of Date 赤道座標系から c. の①への変換 : N_1
- ③ c. の①から c. の②への変換 : N_2

したがって、 $R_X(\epsilon)$ は次式で計算される。

$$R_X(\epsilon) = N_2 \cdot N_1 \cdot P \quad (3-27)$$

(3) 地球赤道座標系と地球固定座標系との関係

True of Date 赤道座標系 (x_T, y_T, z_T) と地球固定座標系 (x_b, y_b, z_b) との間の変換は、 z_T 軸 (z_b 軸) のまわりの回転であり、その回転角は真のグリニジ恒星時 θ_g である。その回転行列は、

$$B(\theta_g) = \begin{bmatrix} \cos \theta_g & \sin \theta_g & 0 \\ -\sin \theta_g & \cos \theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

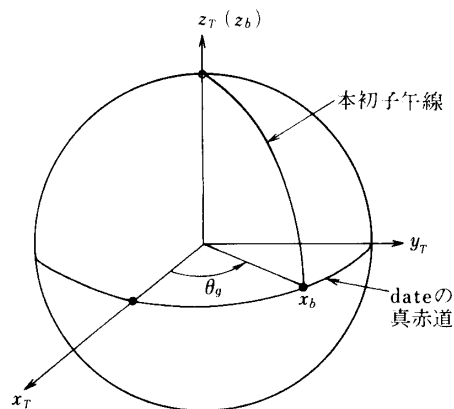


図 3-11 グリニジ恒星時

となる。ここで真のグリニジ恒星時 θ_g は、次式で計算される。

$$\begin{aligned}\theta_g &= \theta_M + \delta\psi \cos \varepsilon \\ &= 100.0755425 + 360.9856473460(T - 33282) \\ &\quad + 0.29015 \times 10^{-12}(T - 33282)^2 + \delta\psi \cos \varepsilon_T\end{aligned}\quad (3-29)$$

ここで、 T ；時刻の MJD 表現 (UT 1)

$\delta\psi$ ；黄道の章動

ε_T ；真の黄道傾角。

3.3 運動方程式

S/C (Space Craft) が惑星間を航行するときに受ける加速度として、次の6つの項を考慮する。

- ①天体 (太陽, 9惑星, 月) を質点としたニュートン力による加速度 ($\ddot{\mathbf{r}}_P$)。
- ②SOI (重力の影響圏) 内の中心天体の非球対称成分による加速度 ($\ddot{\mathbf{r}}_{OBL}$)。
- ③太陽輻射圧による加速度 ($\ddot{\mathbf{r}}_{SRP}$)。
- ④一般相対論の効果による加速度 ($\ddot{\mathbf{r}}_{GR}$)。
- ⑤地球大気の抵抗による加速度 ($\ddot{\mathbf{r}}_{AD}$)。
- ⑥モーター噴射による加速度 ($\ddot{\mathbf{r}}_{FMB}$)。

また、インパルス・マヌーバも考慮している。これら加速度項の選択には、第2章に示す加速度オーダー見積りを参考にした。したがって、S/Cの運動方程式は次式で表される。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \sum_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (3-30)$$

ここで、 $\ddot{\mathbf{r}}_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ：上記①から⑥までの各加速度項

$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ ：S/Cの位置, 速度。

TRIPでは、時間 t を ET (暦表時) の時系にとり、座標系は EME 50 (1950.0年の地球平均赤道座標系) を採用している。座標系の原点は特定の天体の質量中心にとる。通常、地球中心又は太陽中心である。天体のエフェメリスは JPL (ジェット推進研究所) のエフェメリステープ DE 96 を使用している。

(3-30)式は、2階の常微分方程式であり、初期値問題として数値的に解ける。(3.4節を参照) 以下に(3-30)式の右辺である各加速度項の計算式を示す。断わりのない時は、ベクトルは3次元列ベクトルであり、使用する座標系は EME 50 とする。

(1) 天体を質点としたニュートン力による加速度

考慮する重力天体は、太陽, 9惑星, 月である。天体を質点としたニュートン力による加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_P$ は、次のように導かれる。

ニュートンの万有引力の法則から、天体1 (位置 \mathbf{r}_1 , 質量 m_1)、天体2 (位置 \mathbf{r}_2 , 質点

m_2) 間の力 F_{12} (スカラー) は, 次式で表される.

$$F_{12} = \frac{Gm_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \quad (3-31)$$

G は万有引力定数, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ である. 第 i 番めの質点が, 残りの $(n-1)$ 個の質点から受ける力 \mathbf{F}_i (ベクトル) は, 次式で表される.

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3} \quad (3-32)$$

また, ニュートンの第2法則から,

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt^2} \quad (3-33)$$

となり, (3-32)式と(3-33)式から次式が得られる.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \quad (3-34)$$

S/Cの質量 m_s が n 個の天体に及ぼすニュートン力は, 無視できる. n 個の天体による S/Cの加速度は, 次式で表される.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} = -G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j}{r_{sj}^3} \quad (3-35)$$

座標の原点として, 特定の天体にとると, 計算の上で都合がよい. 通常, S/Cの属する SOIの天体を座標原点とする. (3-34)式と(3-35)式から

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j}{r_{sj}^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \quad (3-36)$$

したがって, 座標原点を天体 i とするとき, S/Cの加速度は, 次式で表される.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{is}}{dt^2} = -\mu_i \frac{\mathbf{r}_{is}}{r_{is}^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \left(\frac{\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{is}}{|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{is}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \quad (3-37)$$

ここで, $\mu_i = Gm_i$

$$\mu_j = Gm_j$$

$$\mathbf{r}_{sj} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{is}.$$

(2) 中心天体の非球対称成分による加速度

中心天体の非球対称成分による加速度 $\dot{\mathbf{r}}_{OBL}$ は, 以下のように導かれる.

a. 加速度の導出

重力天体のつくる重力場は、スカラー・ポテンシャル Ψ から導かれ、次の Poisson の方程式を満す。

$$\nabla^2 \Psi(r, \phi, \lambda) = -\rho(r, \phi, \lambda) \quad (3-38)$$

ここで、
 r : 天体の質量中心から S/C までの距離
 ϕ : S/C の直下点の緯度 (地心緯度)
 λ : S/C の直下点の経度
 ρ : 質量分布密度。

S/C は、天体の外側に位置しているので、 $\rho(r, \phi, \lambda) = 0$ である。したがって (3-38) 式は、次の Laplace の方程式となる。

$$\nabla^2 \Psi(r, \phi, \lambda) = 0 \quad (3-39)$$

上式を変数分離法によって解くと、次式を得る。

$$\Psi(r, \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} Y_n(\phi, \lambda) \quad (3-40)$$

ここで、 $Y_n(\phi, \lambda)$ は、 n 次の球面調和関数であり、次式で定義される。

$$Y_n(\phi, \lambda) = A_{n,0} P_n(\sin \phi) + \sum_{m=1}^n (A_{n,m} \cos m\lambda + B_{n,m} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \phi). \quad (3-41)$$

また $P_n(\sin \phi)$ は帯球関数 (zonal harmonics)、 $P_n^m(\sin \phi)$ は縞球関数 (tesseral harmonics) である。(以下 P_n 、 P_n^m と略記する。 $P_n = P_n^0$)

r を天体の赤道半径 a_P で規格化し、 $n=0$ のときは質点による中心力となる条件から、(3-40) 式は次式となる。

$$\Psi(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n P_n^m(C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \right] \quad (3-42)$$

ここで、 $\mu = GM_c$ (M_c は中心天体の質量)。

座標中心を天体の質量中心とすると、 $n=1$ の項はゼロになる。 $m=0$ の係数 $C_{n,0}$ を次の J_n で置き換えると、

$$J_n = -C_{n,0} \quad (3-43)$$

(3-42) 式は次式のように表現される。

$$\Psi(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n P_n$$

$$+\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^n\left(\frac{a_P}{r}\right)^nP_n^m(C_{n,m}\cos m\lambda+S_{n,m}\sin m\lambda) \quad (3-44)$$

ここで、 J_n , $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ は重力ポテンシャルの調和係数である。本プログラムでは、SAO(スミソニアン天文台)のC-7系を使用している。

(3-44)式の右辺第1項は、天体を質点とした重力ポテンシャルである。第2項、第3項が非対称性によるポテンシャルであり、それぞれ $U(J)$, $U(C, S)$ と記述する。

$$U(J)=-\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}J_n\cdot\left(\frac{a_P}{r}\right)^n\cdot P_n \quad (3-45)$$

$$U(C, S)=\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^n\left(\frac{a_P}{r}\right)^nP_n^m(C_{n,m}\cos m\lambda+S_{n,m}\sin m\lambda) \quad (3-46)$$

$$U=U(J)+U(C, S) \quad (3-47)$$

天体の非球対称成分による加速度は、(3-47)式を \mathbf{r}_b (天体固定座標系でのS/Cの位置ベクトル)で偏微分すれば得られる。

$$\ddot{\mathbf{r}}_b=\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\frac{\partial U}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T+\frac{\partial U}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T+\frac{\partial U}{\partial \phi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \quad (3-48)$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\frac{\mathbf{r}_b}{r} \quad (3-49)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\frac{1}{(x_b^2+y_b^2)^2}\left[x_b\left(\frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T-y_b\left(\frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T\right] \quad (3-50)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\frac{1}{(x_b^2+y_b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{z_b\mathbf{r}_b}{r^2}+\left(\frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T\right] \quad (3-51)$$

$$\left(\frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3-52)$$

これらを、(3-48)式に代入すると、 $\ddot{\mathbf{r}}_b=(\dot{x}_b, \dot{y}_b, \dot{z}_b)^T$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{x}_b &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{z_b}{r^2\sqrt{x_b^2+y_b^2}}\frac{\partial U}{\partial \phi}\right)x_b-\left(\frac{1}{x_b^2+y_b^2}\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)y_b \\ \dot{y}_b &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{z_b}{r^2\sqrt{x_b^2+y_b^2}}\frac{\partial U}{\partial \phi}\right)y_b+\left(\frac{1}{x_b^2+y_b^2}\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)x_b \\ \dot{z}_b &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)z_b+\frac{\sqrt{x_b^2+y_b^2}}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3-53)$$

天体固定座標系で表現されるS/Cの加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_b$ は、(3-53)式で計算される。 $\dot{\mathbf{r}}_b$ は、瞬時の

天体固定座標系の基準軸で表現されているが、慣性座標系である。EME 50でのS/Cの加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_{OBL}$ は、 $\ddot{\mathbf{r}}_b$ を座標変換して求める。EME 50から地球固定座標に変換する行列を M とする。 $\ddot{\mathbf{r}}_{OBL}$ は次式で求められる。

$$\ddot{\mathbf{r}}_{OBL} = M^{-1} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_b \quad (3-54)$$

b. $\partial U/\partial r$, $\partial U/\partial \lambda$, $\partial U/\partial \phi$ の計算式

次に $\partial U/\partial r$, $\partial U/\partial \lambda$, $\partial U/\partial \phi$ の計算式を以下に示す。

$U(J)$ については、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(J)}{\partial r} &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n (n+1) P_n \\ \frac{\partial U(J)}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial U(J)}{\partial \phi} &= -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n \cos \phi \cdot P'_n \end{aligned} \quad (3-55)$$

ここで、 $P'_n = \frac{dP_n(\sin \phi)}{d(\sin \phi)}$ である。

また、 $U(C, S)$ については、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(C, S)}{\partial r} &= -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n (n+1) P_n^m (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \\ \frac{\partial U(C, S)}{\partial \lambda} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n P_n^m \cdot m (-C_{n,m} \sin m\lambda + S_{n,m} \cos m\lambda) \\ \frac{\partial U(C, S)}{\partial \phi} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_P}{r} \right)^n \cos \phi P_n^{m'} (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \end{aligned} \quad (3-56)$$

ここで、 $P_n^{m'} = \frac{dP_n^m(\sin \phi)}{d(\sin \phi)}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{\partial U(J)}{\partial r} + \frac{\partial U(C, S)}{\partial r} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= \frac{\partial U(J)}{\partial \lambda} + \frac{\partial U(C, S)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= \frac{\partial U(J)}{\partial \phi} + \frac{\partial U(C, S)}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3-57)$$

$P_n, P'_n, P_n^m, P_n^{m'}$ の計算を、以下に示す。

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1 = \sin \phi \\ P_n &= \left(\frac{2n-1}{n} \right) \sin \phi \cdot P_{n-1} + \left(\frac{n-1}{n} \right) P_{n-2} \end{aligned} \quad (3-58)$$

$$\begin{aligned} P'_1 &= 1 \\ P'_n &= \sin \phi P'_{n-1} + n P_{n-1} \end{aligned} \quad (3-59)$$

P_n^m については、まず P_m^m を計算してから P_n^m を求める。

$$\begin{aligned} \sec \phi P_1^1 &= 1 \\ \sec \phi P_m^m &= (2m-1) \cos \phi (\sec \phi P_{m-1}^{m-1}) \\ \sec \phi P_n^m &= \left(\frac{2n-1}{n-m} \right) \sin \phi (\sec \phi P_{n-1}^{m-1}) - \left(\frac{n+m-1}{n-m} \right) (\sec \phi P_{n-2}^m) \quad (3-60) \end{aligned}$$

ここで、 $b > a$ のとき、 $P_a^b = 0$ とする。

$$\cos \phi P_n^{m'} = -n \sin \phi (\sec \phi P_n^m) + (n+m) (\sec \phi P_{n-1}^m)$$

(3) 太陽輻射圧による加速度

太陽輻射圧による加速度として、簡略化したモデルと詳細なモデルの2つを考慮する。

a. 簡略モデル

簡略モデルによる S/C の加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_{SRP}$ は、以下の式で計算される。

$$\ddot{\mathbf{r}}_{SRP} = \frac{S_0}{c} (1 + \Gamma) \cdot \frac{A_s}{m_s} \cdot \left(\frac{R_0}{r_{SP}} \right)^2 \cdot \mathbf{u}_{SP} \quad (3-61)$$

ここで、

- S_0 : 太陽定数 ($= 1.35 \times 10^3 \text{ W/m}^2$)
- c : 光速
- Γ : S/C の反射係数
- A_s : S/C の実効断面積
- m_s : S/C の質量
- R_0 : 太陽から地球までの平均距離 (1 A.U.)
- r_{SP} : 太陽から S/C までの距離
- \mathbf{u}_{SP} : 太陽から S/C 方向への単位ベクトル。

図 3-12 に、太陽と S/C の位置関係を図示する。

b. 詳細モデル

詳細モデルによる S/C の加速度は、以下の3つのモデルに分けて計算される。

- バスモデル (球, 円筒)
- パネルモデル (平板)

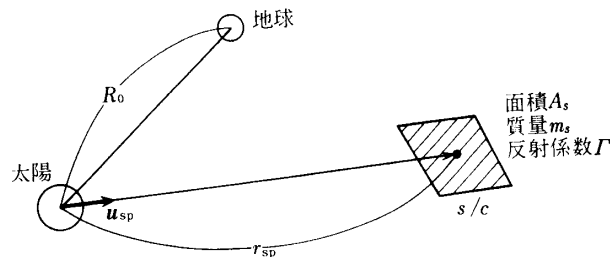


図 3-12 太陽輻射圧の簡略モデル

・アンテナモデル (パラボラ)

各モデルとも、S/C 固定座標系 ($x^*y^*z^*$ 系) で計算される。この座標系は次のように決められる。S/C の基準軸 (スピン軸) \hat{S} が入力されるとき、瞬時の S/C から見た太陽方向 \hat{x} を x^* 軸、 $\hat{S} \times \hat{x}$ 方向を y^* 軸、右手直交系をなすように z^* 軸をとる。 $x^*y^*z^*$ 系での各モデルの計算式は、参考文献 [8] を参照されたい。

(4) 一般相対性理論の効果による加速度

C. Brans と R.H. Dicke の式によると、天体 j による、天体 i の一般相対論の効果による加速度は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i(j) = & \frac{\mu_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \left\{ -\frac{2(1+\gamma)}{c^2} \phi_i - \frac{1}{c^2} \phi_j + \gamma \left(\frac{\dot{s}_i}{c} \right)^2 + (1+\gamma) \left(\frac{\dot{s}_j}{c} \right)^2 \right. \\ & - \frac{2(1+\gamma)}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j \left. \right\} \\ & + \frac{1}{c^2} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \{ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) [(2+2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_i - (1+2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_j] \cdot (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + \frac{3+4\gamma}{2c^2} \frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \} \end{aligned} \quad (3-62)$$

ここで、 r_{ij} : 天体 i と天体 j の距離

$(\dot{s}_i)^2$: 天体 i の速度の2乗

$(\dot{s}_j)^2$: 天体 j の速度の2乗

ϕ_i : 天体 i のニュートン・ポテンシャル

$$\phi_i = \sum_{l \neq i} \frac{\mu_l}{r_{il}}$$

ϕ_j : 天体 j のニュートン・ポテンシャル

$$\phi_j = \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{m \neq j} \frac{\mu_m (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)}{r_{mj}^3}$$

γ : Brans & Dike のパラメータ ($1/2 \leq \gamma \leq 1$). $\gamma = (1+\omega)/(2+\omega)$ で与えられる ($0 \leq \omega \leq \infty$). スカラーの重力場は $1/(4+2\omega)$, テンソル場は $1-1/(4+2\omega)$ で与えられる。

太陽による天体 i の相対論による加速度は、主要項のみ考慮して、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu_s}{c^2 \gamma^3} \{ [2(1+\gamma)\phi - \gamma \dot{s}^2] \mathbf{r} + 2(1+\gamma)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \} \quad (3-63)$$

ここで、 μ_s : 太陽の重力定数

c : 光速

$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$: 太陽中心の天体 i の位置と速度

- r : \mathbf{r} の大きさ
 \dot{s} : $\dot{\mathbf{r}}$ の大きさ
 ϕ : ニュートン・ポテンシャル (μ/r).

天体 C (地球, 月を除く) を座標中心とすると, 一般相対論による S/C の加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_{GR}$ は,

$$\ddot{\mathbf{r}}_{GR} = \ddot{\mathbf{r}}_{SC}(S) - \ddot{\mathbf{r}}_C(S) \quad (3-64)$$

となる. 上式の右辺第1項, 第2項は, (3-63)式から計算する. (座標中心が太陽のときは, 右辺第2項はゼロとなる.) (3-63)式で使う ϕ は, 次式から計算する.

① 天体 i が S/C のとき:

$$\phi_{SC} = \phi_i = \frac{\mu_S}{r} + \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}} \quad (j: \text{考慮天体}). \quad (3-65)$$

② 天体 i が惑星のとき:

$$\phi_P = \phi_i = \frac{\mu_S}{r}. \quad (3-66)$$

一方, 積分中心天体が, 地球又は月のときは, 一般相対論の加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_{GR}$ は, 次式で計算される.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{GR} = \ddot{\mathbf{r}}_{SC}(S) - \ddot{\mathbf{r}}_C(S) + \sum_j^{\text{地球, 月}} \ddot{\mathbf{r}}_{SC}(j) - \ddot{\mathbf{r}}_C(n) \quad (3-67)$$

第3項は, 地球と月による S/C への加速度であり, (3-62)式から計算する. 第4項は, 積分中心が地球のときは, 月による地球の受ける加速度である.

(5) 大気抵抗による加速度

大気の抵抗によって受ける加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_{AD}$ は, S/C の形状や飛行中の姿勢を考えないものとし, 地球中心の慣性系で表現すると, 次式で表される.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{AD} = -\frac{1}{2} \rho C_D \left(\frac{A_S}{m_S} \right) \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r \quad (3-68)$$

ここで, A_S : S/C の実効断面積

m_S : S/C の質量

C_D : S/C の大気抵抗係数

ρ : S/C の位置での大気密度.

また \mathbf{v}_r は, 大気に対する S/C の相対速度で

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega}_\omega \times \mathbf{r} \quad (3-69)$$

で表される。 Ω_ω は反対称行列で、次式で表される。

$$\Omega_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

ここで、 $\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$: 地球の角速度ベクトル (EME 50)

\mathbf{r} : S/C 位置ベクトル (EME 50)

$\dot{\mathbf{r}}$: S/C 速度ベクトル (EME 50)。

(3-68)式の ρ の計算は、Jacchia-Nicolet 大気密度モデルを使用する。このモデルは、下式に示すように高度 120 km から 160 km では高度 h のみの関数とし、高度 160 km 以上では高度 h と外気圏温度 T として、指数関数近似する。

① $h < 160$ km のとき

$$\rho = \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^3 A_i h^{(i-1)}\right) \right] \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3-71)$$

② $160 \text{ km} \leq h < 420$ km のとき

$$\rho = \left[\exp\left(-\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 B_{ij} T'^{(i-1)} h'^{(j-1)}\right) \right] \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3-72)$$

③ $420 \text{ km} \leq h < 1000$ km のとき

$$\rho = \left[\exp\left(-\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_{ij} T'^{(i-1)} h'^{(j-1)}\right) \right] \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3-73)$$

ここで、 $h' = h(\text{m}) / 100000(\text{m})$, $T' = T(^{\circ}\text{K}) / 1000(^{\circ}\text{K})$ 。

上式の多項式の係数 A_i, B_{ij}, C_{ij} を表 3-4 に示す。

表 3-4 Jacchia-Nicolet 大気密度モデル係数

		i	1	2	3	4
		j				
A _i	—	—	-1.1335948	31.858566	-8.7827269	—
B _{ij}	1	—	-0.514627	36.8141	-22.6334	4.47654
	2	—	26.46222	-37.5137	23.9095	-4.83017
	3	—	-6.28711	9.994692	-6.780537	1.41853
	4	—	0.604854	-1.00192	0.695452	-0.148026
C _{ij}	1	—	-61.5177	173.970	-111.908	23.3864
	2	—	48.60687	-93.4870	60.34177	-12.64406
	3	—	-6.87280	14.1203	-9.349784	1.989456
	4	—	0.305394	-0.651270	0.440330	-0.0950336

外気圏温度 T については次の要因を考慮する.

- 太陽活動による変化
- 半年周期変化
- 日周変化

以下に各要因の計算式を説明する.

① 太陽活動による変化

$$\bar{T}_0 = 418(^{\circ}\text{K}) + 3.60(^{\circ}\text{K}/\text{flux}) \times \bar{F}_{10.7} \quad (3-74)$$

\bar{T}_0 : 54 日間 (2 太陽自転周期) の平均全地球夜間最低温度

$\bar{F}_{10.7}$: 54 日間の地表面における 10.7 cm 太陽電波の輻射流束密度

特定の日に対する全地球夜間最低温度は次式で計算される.

$$T'_0 = \bar{T}_0 + 1.8(F_{10.7} - \bar{F}_{10.7})$$

本プログラムでは, 近似式として次式を使用する.

$$T'_0 = \bar{T}(F_{10.7} - \bar{F}_{10.7}) \quad (3-75)$$

② 半年周期変化の補正

半年周期変化に対して補正された全地球夜間最低温度 T_0 は, 次式で計算する.

$$T = T'_0 + 2.41 + \bar{F}_{10.7} \{0.349 + 0.206 \sin(2\pi\tau + 226^{\circ}.5)\} \sin(4\pi\tau + 247^{\circ}.6) \quad (3-76)$$

ここで, τ は年初からの日数 d を用いて次式で表される.

$$\tau = \frac{d}{365.2422}$$

③ 日周変化

日周変化を考慮した任意の地点における外気圏温度 T は, 次式で計算される.

$$T = T_0(1 + R \sin^m \theta) \left(1 + R \frac{\cos^m \eta - \sin^m \theta}{1 + R \sin^m \theta} \cos^n \frac{\tau}{2} \right) \quad (3-77)$$

ここで,

$$\eta = 0.5(\varphi - \delta_{\odot})$$

$$\theta = 0.5(\varphi + \delta_{\odot})$$

$$\tau = H + \beta + P \sin(H + \alpha_{\odot})$$

δ_{\odot} : 太陽赤緯

φ : 衛星直下点緯度

$$H = \alpha_s - \alpha_{\odot}$$

α_s : 衛星赤経

α_{\odot} : 太陽赤経.

定数は次の値を用いる.

$$R=0.26 \quad m=n=2.5 \quad \beta=-45^\circ \quad P=12^\circ \quad \gamma=45^\circ$$

(6) モーター噴射による加速度 (連続噴射)

モーター噴射による加速度は, 次式で計算される.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{MB} = \left(\frac{F}{M} \cdot C_{PF} \right) \mathbf{u} \quad (3-78)$$

ここで,

F : モーターの推力である. $F = F(t)$

M : S/C の質量である. $M = M(t)$

C_{PF} : 単位変換係数

\mathbf{u} : モーターの推力の方向 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$.

F, M, \mathbf{u} は, 時間の多項式展開として次式で計算される.

$$M = m_0 - \{ \dot{M}_0 t + \dot{M}_1 t^2 + \dots + \dot{M}_{n-1} t^n \} \quad (3-79)$$

$$F = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \dots + F_n t^n \quad (3-80)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n \quad (3-81)$$

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \dots + \delta_n t^n \quad (3-82)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3-83)$$

ここで,

m_0 : S/C のノミナル質量

t : マヌーバ開始時刻からの通算秒.

(7) インパルス・マヌーバの計算

マヌーバの時刻を t_n とし, マヌーバ前の位置, 速度を $\mathbf{r}(t_n), \dot{\mathbf{r}}(t_n)$, マヌーバ後のそれらを $\tilde{\mathbf{r}}(t_n), \tilde{\dot{\mathbf{r}}}(t_n)$ とする. インパルス・マヌーバの計算は, 次式を使う.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}(t_n) = \mathbf{r}(t_n) \\ \tilde{\dot{\mathbf{r}}}(t_n) = \dot{\mathbf{r}}(t_n) + \Delta \dot{\mathbf{r}} \end{cases} \quad (3-84)$$

ここで, $\Delta \dot{\mathbf{r}}$ は速度増分である.

3.4 運動方程式の数値計算

前節(3.3)で述べたように、S/Cの運動を記述する運動方程式は、二階の非線形微分方程式になっている。したがって、時刻 t におけるS/Cの位置及び速度を知るためには、ある時刻 t_0 (エポック)におけるS/Cの位置(\mathbf{r}_0)および速度($\dot{\mathbf{r}}_0$)を与えて、運動方程式を積分して解を求めなければならない。この数値積分法の設計はその精度要求を充し、かつ計算時間を短縮するために細心の注意を払う必要がある。本プログラムでは、多段法のAdams-Cowellの予測子-修正子法を採用している。この方法の概要は、次のようになる。

- ① 探査機の位置座標に関しては、Störmerの予測子およびCowellの修正子を用いる。
- ② 探査機の速度座標に関しては、Adams-Bashforthの予測子とAdams-Moltonの修正子を用いる。
- ③ 多段法の出発値の計算は2体近以て求めるか、又は8次のRunge-Kutta法を用いる。
- ④ 積分刻み幅内の補間は積分公式を用いる。
- ⑤ 積分刻み幅を局所打切り誤差の制御により可変にする。

特に⑤の局所打切り誤差制御法の採用によって、PLANET-Aの軌道を例にとれば、初期の急激に曲る双曲線軌道から巡航期の太陽のまわりの大きな楕円軌道に至るまで刻み幅は10秒から1.9日まで変化し、7ヶ月間軌道生成に要する時間はM-200計算機を使用し、数秒程度と能力の良いプログラムとなっている。

(1) Adams-Cowellの公式

ここでは、軌道生成問題に用いられる多段積分法の導出の概略について述べる。

軌道生成問題は、次の2階常微分方程式の初期値問題と言い換えることができる。

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= f(t, y(t), \dot{y}(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (3-85)$$

上式は、1階の常微分方程式に対する初期値問題

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3-86)$$

と、特殊な2階の常微分方程式に対する初期値問題

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (3-87)$$

とに分けて考えることができる。

いま、(3-86)式を解くことを考える。 t_0 から t_n までは、値が求まっていると仮定し、 t_n から t_{n+s} まで積分すれば

$$y(t_{n+s}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+s}} f(t, y(t)) dt \quad (3-88)$$

となる。この式の右辺を計算するために、 $f(t, y(t))$ を、 $t_{n-p}, \dots, t_{n-p-r}$ での値を用いた補間式で近似する。補間式には、種々あるがここでは、Newton 後退補間多項式を用いて、(3-88)式を計算する。したがって、 $\dot{y}_{n-p}, \dot{y}_{n-p-1}, \dots, \dot{y}_{n-p-r}$ と y_n の値から y_{n+s} は求められる。

同様にして、(3-87)式を解くことができる。(3-87)式を t_n から t_{n+s} まで2回積分すれば、

$$y(t_{n+s}) - y(t_n) - (t_{n+s} - t_n)\dot{y}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+s}} (t_{n+s} - t)f(t, y(t))dt \quad (3-89)$$

となる。この式は \dot{y} を含んでいるので、これを消去する。

まず t_{n+s} を t_{n-s} で置き換える。

$$y(t_{n-s}) - y(t_n) - (t_{n-s} - t_n)\dot{y}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n-s}} (t_{n-s} - t)f(t, y(t))dt \quad (3-90)$$

(3-89)式と(3-90)式を辺々加えると、

$$y(t_{n+s}) - 2y(t_n) + y(t_{n-s}) = \int_{t_n}^{t_{n+s}} (t_{n+s} - t)\{f(t) + f(2t_n - t)\}dt \quad (3-91)$$

となる。この右辺を求めるために、1階の時と同じように、 $f(t, y(t))$ をNewton 後退補間多項式で近似すればよい。したがって $\dot{y}_{n-p}, \dot{y}_{n-p-1}, \dots, \dot{y}_{n-p-r}$ と y_n, y_{n-s} の値から y_{n+s} は求められる。

a. 1階微分方程式の積分公式

1階微分方程式に対する積分公式は、(3-88)式にNewton 後退補間多項式を代入することにより求められる。Newton 後退補間多項式は、次式で表される。

$$f(t) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m f_p \quad (3-92)$$

ここで、
 $f_p = f(t_p)$
 $t_p = t_0 + ph$
 $t = t_0 + (s+p)h$
 $\nabla f_p = f_p - f_{p-1}$ 。

(3-92)式を(3-88)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} y(t_{n+s}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+s}} \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m \dot{y}_p dt \\ &= h \sum_{m=0}^q (-1)^m \nabla^m \dot{y}_p \int_{n-p}^{n-p+s} \binom{-s}{m} ds \\ &= h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m \dot{y}_p \end{aligned} \quad (3-93)$$

$$\text{ただし, } \gamma_m(s) = (-1)^m \int_{n-p}^{n-p+s} \binom{-s'}{m} ds' \quad (3-94)$$

となる。ここで、 $p=n$ とすれば、

$$y(t_{n+s}) - y(t_n) = h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m \dot{y}_n \quad (3-95)$$

$$\gamma_m(s) = (-1)^m \int_0^s \binom{-s'}{m} ds' \quad (3-96)$$

となる。

次に、Summed Form の公式の導出を考える。

まず、Shift 演算子 E を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} Ey_m &= y_{n+1} \\ E^s y_m &= y_{n+s} \end{aligned} \quad (3-97)$$

この E と差分演算子 ∇ との関係は、次式で表される。

$$E = (I - \nabla)^{-1} \quad (3-98)$$

したがって、

$$y_n = E^{-s} y_{n+s} = (1 - \nabla)^s y_{n+s} \quad (3-99)$$

となる。この式を(3-95)式に代入すると次のようになる。

$$(1 - (1 - \nabla)^s) y_{n+s} = h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m \dot{y}_n \quad (3-100)$$

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h \sum_{m=0}^q \frac{(-1)^m \int_0^s \binom{-s'}{m} ds'}{1 - (1 - \nabla)^s} \nabla^m \dot{y}_n \\ &= h \sum_{m=-1}^{q-1} \gamma'_m(s) \nabla^m \dot{y}_n \end{aligned} \quad (3-101)$$

$$\text{ただし, } \gamma'_m(s) \nabla^m = \frac{(-1)^{m+1} \int_0^s \binom{-s'}{m} ds'}{1 - (1 - \nabla)^s} \nabla^{m+1} \quad (3-102)$$

この $\gamma'_m(s)$ は次の様にして求められる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma'_m(s) \nabla^m = \sum_{m=-1}^{\infty} (-1)^{m+1} \int_0^s \binom{-s'}{m+1} ds' \times \frac{\nabla^{m+1}}{1 - (1 - \nabla)^s} \quad (3-103)$$

両辺に ∇ を作用させる。

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{m-1}(s) \nabla^m &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \int_0^s \binom{-s'}{m} ds' \times \nabla^m \frac{\nabla}{1-(1-\nabla)^s} \\
&= \int_0^s (1-\nabla)^{-s'} ds' \times \frac{\nabla}{1-(1-\nabla)^s} \\
&= -\frac{(1-\nabla)^{-s} \times \nabla}{\log(1-\nabla)} \tag{3-104}
\end{aligned}$$

$$-\frac{\log(1-\nabla)}{\nabla} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma'_{m-1}(s) \nabla^m = (1-\nabla)^{-s} \tag{3-105}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \dots\right) (\gamma'_{-1} + \gamma'_0 \nabla + \gamma'_1 \nabla^2 + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m \tag{3-106}$$

ここで ∇^{m+1} の係数を比較すれば,

$$\gamma'_m + \frac{1}{2}\gamma'_{m-1} + \frac{1}{3}\gamma'_{m-2} + \dots + \frac{1}{m+2}\gamma'_{-1} = (-1)^{m+1} \binom{-s}{m+1}.$$

すなわち

$$\gamma'_m = (-1)^{m+1} \binom{-s}{m+1} - \sum_{i=-1}^{m-1} \frac{\gamma'_i}{m+1-i} \tag{3-107}$$

となる。

また, (3-101)式において, $\nabla^m y_n$ のかわりに

$$\nabla^m y_n = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} y_{n-i} \quad m=0, 1, \dots$$

を用いる形を *ordinate form* と呼び, 本プログラムでは, これを用いている。

以上, まとめると,

$$\begin{aligned}
y_{n+s} &= h \left[\nabla^{-1} y_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(s) y_{n-m} \right] \\
\gamma_m^*(s) &= (-1)^m \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} \gamma'_k(s) \\
\gamma'_k(s) &= (-1)^{k+1} \binom{-s}{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma'_i(s)}{k+1-i} \\
\gamma'_{-1}(s) &= 1
\end{aligned} \tag{3-108}$$

となる。

上式で $s=1$ の時, Adams-Boshforth の予測子, $s=0$ の時, Adams-Molton の修正子と

なる。すなわち、

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= h \left[\nabla^{-1} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(1) \dot{y}_{n-m} \right] \\ y_n &= h \left[\nabla^{-1} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(0) \dot{y}_{n-m} \right] \end{aligned} \quad (3-109)$$

である。

b. 2階微分方程式の積分公式

2階微分方程式に対する積分公式は、1階微分方程式の場合と同様に Newton 後退補間式を代入することにより求められる。補間式は、

$$f(t, y(t)) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m \dot{y}_p \quad (3-110)$$

となる。ここで $\dot{y}_p = f(t_p, y(t_p))$, $t = t_p + sh$ である。また、

$$f(2t_n - t) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{s+2p-2n}{m} \nabla^m \dot{y}_p \quad (3-111)$$

であり、したがって、

$$\begin{aligned} & y(t_{n+s}) - 2y(t_n) + y(t_{n-s}) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+s}} (t_{n+s} - t) \{f(t) + f(2t_n - t)\} dt \\ &= h^2 \sum_{m=0}^q (-1)^m \nabla^m \dot{y}_p \int_{n-p}^{n-p+s} (n-p+s-s') \left[\binom{-s'}{m} + \binom{s'+2p-2n}{m} \right] ds' \\ &= h^2 \sum_{m=0}^q \sigma_m \nabla^m \dot{y}_p \end{aligned} \quad (3-112)$$

となる。ここで

$$\sigma_m(s, p) = (-1)^m \int_{n-p}^{n-p+s} (n-p+s-s') \left[\binom{-s'}{m} + \binom{s'+2p-2n}{m} \right] ds' \quad (3-113)$$

である。

次に、Summed Form の公式の導出を考える。a.と同様に y_n, y_{n-s} は次のように表される。

$$y_n = E^{-s} y_{n+s} = (1 - \nabla)^s y_{n+s} \quad (3-114)$$

$$y_{n-s} = E^{-s} y_n = E^{-2s} y_{n+s} = (1 - \nabla)^{2s} y_{n+s} \quad (3-115)$$

これらの式を(3-112)式に代入する。ただし、 $p=n$ とする。

$$\{1 - 2(1 - \nabla)^s + (1 - \nabla)^{2s}\} y_{n+s} = h^2 \sum_{m=0}^q \sigma_m \nabla^m j_n \quad (3-116)$$

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h^2 \sum_{m=0}^q \frac{(-1)^m \int_0^s (s-s') \left[\binom{-s'}{m} + \binom{s'}{m} \right] ds'}{1 - 2(1 - \nabla)^s + (1 - \nabla)^{2s}} \nabla^m j_n \\ &= h^2 \sum_{m=-2}^{q-2} \sigma'_m(s) \nabla^m j_n \end{aligned} \quad (3-117)$$

$$\text{ここで, } \sigma'_m(s) \nabla^m = \frac{(-1)^{m+2} \int_0^s (s-s') \left[\binom{-s'}{m+2} + \binom{s'}{m+2} \right] ds'}{1 - 2(1 - \nabla)^s + (1 - \nabla)^{2s}} \nabla^{m+2} \quad (3-118)$$

である。この $\sigma'_m(s)$ は次の様にして求められる。

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-2}^{\infty} \sigma'_m(s) \nabla^m \\ &= \sum_{m=-2}^{\infty} (-1)^{m+2} \int_0^s (s-s') \left[\binom{-s'}{m+2} + \binom{s'}{m+2} \right] ds' \times \frac{\nabla^{m+2}}{1 - 2(1 - \nabla)^s + (1 - \nabla)^{2s}} \end{aligned} \quad (3-119)$$

両辺に ∇^2 を作用させる。

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sigma'_{m-2}(s) \nabla^m \\ &= \int_0^s (s-s') \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left[\binom{-s'}{m} + \binom{s'}{m} \right] (-\nabla)^m \right\} ds' \times \frac{\nabla^2}{1 - 2(1 - \nabla)^s + (1 - \nabla)^{2s}} \\ &= \frac{\nabla^2}{(\log(1 - \nabla))^2} (1 - \nabla)^{-s} \end{aligned} \quad (3-120)$$

したがって、

$$\frac{(\log(1 - \nabla))^2}{\nabla^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma'_{m-2}(s) \nabla^m = (1 - \nabla)^{-s} \quad (3-121)$$

$$\left(H_1 + \frac{2}{3} H_2 \nabla + \frac{2}{4} H_3 \nabla^2 + \dots \right) (\sigma'_{-2} + \sigma'_{-1} \nabla + \sigma'_0 \nabla^2 + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s}{m} (-\nabla)^m \quad (3-122)$$

となる。ただし $H_i = \sum_{j=1}^i (1/j)$ とする。ここで ∇^{m+2} の係数を比較すれば

$$\sigma'_m + \frac{2}{3}H_2\sigma'_{m-1} + \frac{2}{4}H_3\sigma'_{m-2} + \cdots + \frac{2}{m+4}H_{m+3}\sigma'_{-2} = (-1)^m \binom{-s}{m+2} \quad (3-123)$$

すなわち、

$$\sigma'_m = (-1)^m \binom{-s}{m+2} - \sum_{i=-2}^{m-1} \frac{2\sigma_i}{m+2-i} H_{m+1-i} \quad (3-124)$$

となる。

また a. の場合と同様に差分形式から ordinate 形式に書き直し、まとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h^2 \left[\nabla^{-2} \dot{y}_n + (s-1) \nabla^{-1} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(s) \dot{y}_{n-m} \right] \\ \sigma_m^*(s) &= (-1)^m \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} \sigma'_k(s) \\ \sigma'_k(s) &= (-1)^k \binom{-s}{k+2} - \sum_{i=-2}^{k-1} \frac{2H_{k+1-i}}{k+2-i} \sigma'_i(s) \\ H_i &= \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \\ \sigma'_{-2}(s) &= 1 \end{aligned} \quad (3-125)$$

上式で $s=1$ の時、Störmer の予測子、 $s=0$ の時、Cowell の修正子となる。すなわち、

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= h^2 \left[\nabla^{-2} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(1) \dot{y}_{n-m} \right] \\ y_n &= h^2 \left[\nabla^{-2} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(0) \dot{y}_{n-m} \right] \end{aligned} \quad (3-126)$$

である。

(2) 計算手順

運動方程式を解くために、先に示した Adams-Cowell の公式をどのように使用するかを、以下に示す。

前項で示した公式は、解 y, \dot{y} がスカラーであるときのものであった。それらをベクトルに拡張しても、公式はそのまま成り立つ。運動方程式が次式で与えられるとき、

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{cases} \quad (3-127)$$

Adams-Cowell の公式は次のように示される。(q は公式の次数)

① 予測子：

$$\begin{aligned} \text{位置：} \mathbf{r}_{n+1} &= h^2 \left(\nabla^{-2} \ddot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(1) \ddot{\mathbf{r}}_{n-m} \right) \\ \text{速度：} \dot{\mathbf{r}}_{n+1} &= h \left(\nabla^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(1) \ddot{\mathbf{r}}_{n-m} \right) \end{aligned} \quad (3-128)$$

②修正子：

$$\begin{aligned} \text{位置：} \mathbf{r}_{n+1} &= h^2 \left(\nabla^{-2} \ddot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(0) \ddot{\mathbf{r}}_{n+1-m} \right) \\ \text{速度：} \dot{\mathbf{r}}_{n+1} &= h \left(\nabla^{-1} \dot{\mathbf{r}}_n + \dot{\mathbf{r}}_{n+1} + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(0) \dot{\mathbf{r}}_{n+1-m} \right) \end{aligned} \quad (3-129)$$

この公式を用いて、時刻 t_n の解 $\mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n$ から時刻 t_{n+1} の解 $\mathbf{r}_{n+1}, \dot{\mathbf{r}}_{n+1}$ を計算する手順を、図 3-13 に示す。

(3) 刻み幅制御法

本プログラムでは、要求精度を満すように局所打切り誤差を計算して、刻み幅の制御を行っている。このため、要求精度を満す範囲内の適切な刻み幅が選択され、効率の良い計算が行われる。

局所打切り誤差 $\varepsilon_n = \varepsilon(t_n)$ は、次式で計算される。

$$\varepsilon_n = \frac{C |\mathbf{r}_n^{(p)} - \mathbf{r}_n^{(c)}|}{|\mathbf{r}_n^{(c)}|} \quad (3-130)$$

ここで、 C ：積分次数に依存した定数

$\mathbf{r}_n^{(p)}$ ： t_n での予測子の位置

$\mathbf{r}_n^{(c)}$ ： t_n での修正子の位置。

この ε_n が、指定された T_L, T_u に対して、

$$T_L \leq \varepsilon_n \leq T_u \quad (3-131)$$

となるように、刻み幅が制御される。

ε_n が(3-131)式の範囲を越えたとき、次の処理を行う。

① $\varepsilon_n > T_u$ のとき

次式で定まる刻み幅 h_{NEW} を求め、刻み幅の縮小を行う。

$$h_{\text{NEW}} = h \left[\frac{T_c}{\varepsilon_n} \right]^{\frac{1}{q+3}} \quad (3-132)$$

ここで、 T_c ： $T_L \leq T_c \leq T_u$ を満す値

q ：積分公式の次数。

新しい刻み幅 h_{NEW} に対応するバックポイントを、補間により計算する。

② $\varepsilon_n < T_L$ のとき

刻み幅 h を 2 倍に拡大する。

$$h_{\text{NEW}} = 2h \quad (3-133)$$

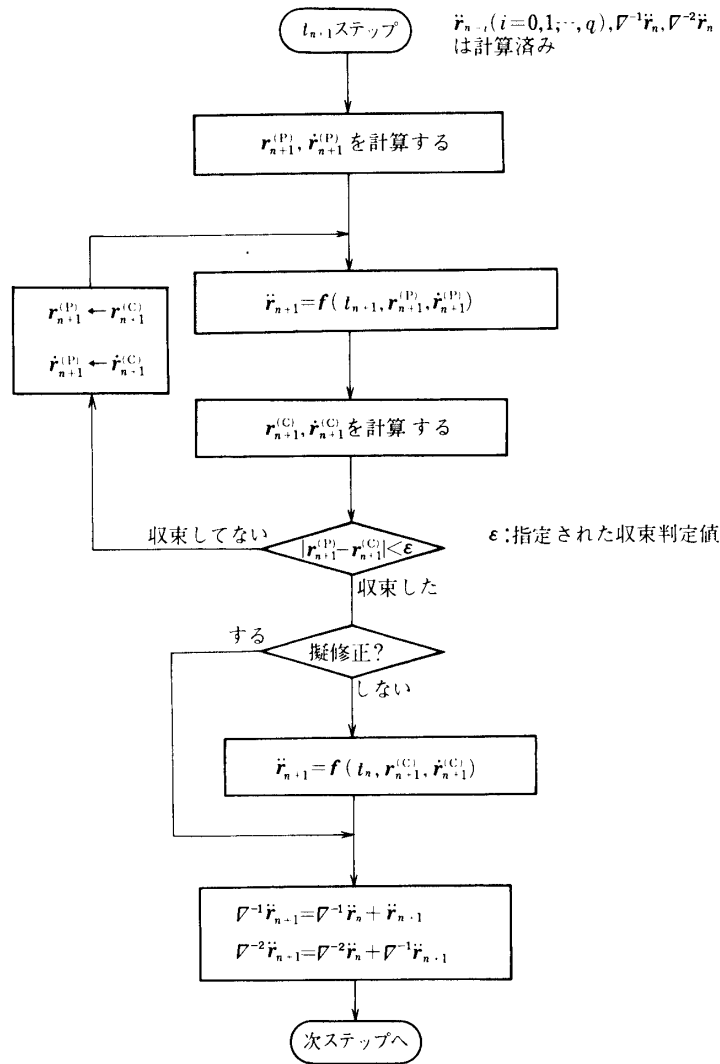


図 3-13 予測子-修正子の計算手順

新しい刻み幅 h_{NEW} に対応するバックポイントは、対応する古いバックポイントを採用する。

上記①の処理では、バックポイントの補間が必要となる。補間点 t_i に対応する値 \ddot{r}_i は、(3-108)式、(3-125)式を使用して、以下の手順で計算される。

① s の計算

$$s = \frac{t_i - t_n}{h}$$

ここで、 t_n : バックポイントの \ddot{r}_n に対応する時刻
 h : バックポイントに対応する刻み幅。

② r_i, \dot{r}_i の計算

$$r_i = h^2 \left[\nabla^{-2} \ddot{r}_n + (s-1) \nabla^{-1} \ddot{r}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(s) \ddot{r}_{n-m} \right]$$

$$\dot{r}_i = h \left[\nabla^{-1} \ddot{r}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(s) \ddot{r}_{n-m} \right]$$

③ \ddot{r}_i の計算

運動方程式から計算する。

$$\ddot{r}_i = f(t_i, r_i, \dot{r}_i)$$

(4) 出発値計算

多段法では、初期時刻におけるバックポイントを別に計算する必要がある。本プログラムでは、次の2つの方法が可能である。

- ・ 2体近似による方法
 - ・ 8次の Runge-Kutta による方法
- a. 2体近似による方法

この方法は関数の評価回数が少なく、計算時間が短いという長所がある。SOI 付近で出発計算をすると、収束が遅くなる時があるが、運動方程式の解法における多段法の出発値計算としては、2体近似による方法は有効な方法であるといえる。以下に手順を示す。

- ① 運動方程式を2体近似し、解析的にバックポイント時刻における加速度を求める。
- ② (3-108)式、(3-125)式において、 $s = -1, -2, \dots$ とおき、バックポイントにおける位置、速度を求める。
- ③ 運動方程式に②の値を代入し、加速度を求める。
- ④ ①と②の値を比較、収束しなければ②に戻り、収束するまで繰り返す。

b. 8次の Runge-Kutta 公式による方法

8次の Runge-Kutta 法は高精度の計算に向いている。反面、関数の評価回数が多く、計算時間がかかる。以下に、本プログラムで使用している、8次の Runge-Kutta 法の公式を示す。

ここで、 h_R は Runge-Kutta 法の刻み幅、運動方程式は、

$$\dot{r} = f(t, r, \dot{r})$$

で与えられるとする。

公式は以下の通りである。

$$r(t_0 + h_R) = r_0 + \frac{1}{840} (41k_{01} + 27k_{31} + 272k_{41} + 27k_{51} + 216k_{61} + 216k_{81} + 41k_{91}) \quad (3-134)$$

$$\dot{r}(t_0 + h_R) = \dot{r}_0 + \frac{1}{840} (41k_{02} + 27k_{32} + 272k_{42} + 27k_{52} + 216k_{62} + 216k_{82} + 41k_{92}) \quad (3-135)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{01} &= h_R \dot{\mathbf{r}}_0 \\
\mathbf{k}_{02} &= h_R \mathbf{f}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) \\
\mathbf{k}_{11} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{4}{27} \mathbf{k}_{02} \right) \\
\mathbf{k}_{12} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + \frac{4}{27} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{4}{27} \mathbf{k}_{01}, \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{4}{27} \mathbf{k}_{02} \right) \\
\mathbf{k}_{21} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{18} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{12}) \right) \\
\mathbf{k}_{22} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + \frac{2}{9} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{18} (\mathbf{k}_{01} + 3\mathbf{k}_{11}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{18} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{12}) \right) \\
\mathbf{k}_{31} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{12} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{22}) \right) \\
\mathbf{k}_{32} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + \frac{1}{3} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{12} (\mathbf{k}_{01} + 3\mathbf{k}_{21}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{12} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{22}) \right) \\
\mathbf{k}_{41} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{8} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{32}) \right) \\
\mathbf{k}_{42} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + \frac{1}{2} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{8} (\mathbf{k}_{01} + 3\mathbf{k}_{31}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{8} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{32}) \right) \\
\mathbf{k}_{51} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{54} (13\mathbf{k}_{02} - 27\mathbf{k}_{22} + 42\mathbf{k}_{32} + 8\mathbf{k}_{42}) \right) \\
\mathbf{k}_{52} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + \frac{2}{3} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{54} (13\mathbf{k}_{01} - 27\mathbf{k}_{21} + 42\mathbf{k}_{31} + 8\mathbf{k}_{41}), \right. \\
&\quad \left. \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{54} (13\mathbf{k}_{02} - 27\mathbf{k}_{22} + 42\mathbf{k}_{32} + 8\mathbf{k}_{42}) \right) \\
\mathbf{k}_{61} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{4320} (389\mathbf{k}_{02} - 54\mathbf{k}_{22} + 966\mathbf{k}_{32} - 824\mathbf{k}_{42} + 243\mathbf{k}_{52}) \right) \\
\mathbf{k}_{62} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + \frac{1}{6} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{4320} (389\mathbf{k}_{01} - 54\mathbf{k}_{21} + 966\mathbf{k}_{31} - 824\mathbf{k}_{41} + 243\mathbf{k}_{51}), \right. \\
&\quad \left. \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{4320} (389\mathbf{k}_{02} - 54\mathbf{k}_{22} + 966\mathbf{k}_{32} - 824\mathbf{k}_{42} + 243\mathbf{k}_{52}) \right) \\
\mathbf{k}_{71} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{20} (-231\mathbf{k}_{02} + 81\mathbf{k}_{22} - 1164\mathbf{k}_{32} + 656\mathbf{k}_{42} - 122\mathbf{k}_{52} + 800\mathbf{k}_{62}) \right) \\
\mathbf{k}_{72} &= h_R \mathbf{f} \left(t_0 + h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{20} (-231\mathbf{k}_{01} + 81\mathbf{k}_{21} - 1164\mathbf{k}_{31} + 656\mathbf{k}_{41} - 122\mathbf{k}_{51} \right. \\
&\quad \left. + 800\mathbf{k}_{61}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{20} (-231\mathbf{k}_{02} + 81\mathbf{k}_{22} - 1164\mathbf{k}_{32} + 656\mathbf{k}_{42} - 122\mathbf{k}_{52} \right. \\
&\quad \left. + 800\mathbf{k}_{62}) \right) \\
\mathbf{k}_{81} &= h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{288} (-127\mathbf{k}_{02} + 18\mathbf{k}_{22} - 678\mathbf{k}_{32} + 456\mathbf{k}_{42} - 9\mathbf{k}_{52} + 576\mathbf{k}_{62} \right. \\
&\quad \left. + 4\mathbf{k}_{72}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{82} = h_R f \left(t_0 + \frac{5}{6} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{288} (-127 \mathbf{k}_{01} + 18 \mathbf{k}_{21} - 678 \mathbf{k}_{31} + 456 \mathbf{k}_{41} - 9 \mathbf{k}_{51} \right. \\
 \left. + 576 \mathbf{k}_{61} + 4 \mathbf{k}_{71}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{288} (-127 \mathbf{k}_{02} + 18 \mathbf{k}_{22} - 678 \mathbf{k}_{32} + 456 \mathbf{k}_{42} - 9 \mathbf{k}_{52} \right. \\
 \left. + 576 \mathbf{k}_{62} + 4 \mathbf{k}_{72}) \right) \\
 \mathbf{k}_{91} = h_R \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{820} (1481 \mathbf{k}_{02} - 81 \mathbf{k}_{22} + 7104 \mathbf{k}_{32} - 3376 \mathbf{k}_{42} + 72 \mathbf{k}_{52} - 5040 \mathbf{k}_{62} \right. \\
 \left. - 60 \mathbf{k}_{72} + 720 \mathbf{k}_{82}) \right) \\
 \mathbf{k}_{92} = h_R f \left(t_0 + h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{820} (1481 \mathbf{k}_{01} - 81 \mathbf{k}_{21} + 7104 \mathbf{k}_{31} - 3376 \mathbf{k}_{41} + 72 \mathbf{k}_{51} \right. \\
 \left. - 5040 \mathbf{k}_{61} - 60 \mathbf{k}_{71} + 720 \mathbf{k}_{81}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{820} (1481 \mathbf{k}_{02} - 81 \mathbf{k}_{22} + 7104 \mathbf{k}_{32} \right. \\
 \left. - 3376 \mathbf{k}_{42} + 72 \mathbf{k}_{52} - 5040 \mathbf{k}_{62} - 60 \mathbf{k}_{72} + 720 \mathbf{k}_{82}) \right)
 \end{aligned}$$

である。

4. 惑星間軌道生成システム

本システムは、惑星間を航行する探査機 (S/C) の軌道を生成するプログラム (TRIP) と、その結果をもとに S/C と各天体及び地上局との関係を図示するプログラム (SCINF) から構成されている。この関係について図 4-1 に示す。

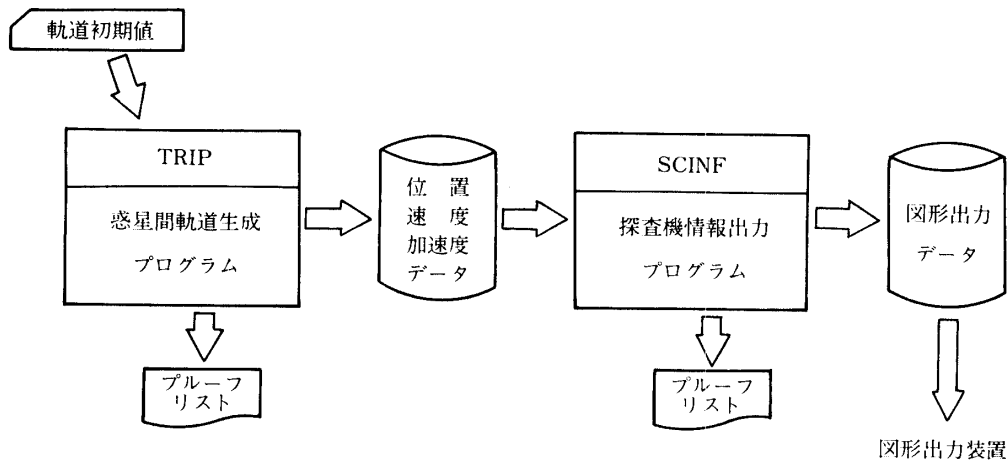


図 4-1 惑星間軌道生成システム

4.1 TRIP の機能概要

本プログラムは、惑星間を航行する S/C の運動方程式を数値積分を用いて解くことによりその軌道を生成し、時々刻々の S/C の位置と速度及び S/C に働く加速度に関するイベント情報を求める機能を持つ。また、本プログラムは、簡単な解析用として、2 体近似の

運動方程式を解析的に解くことにより S/C の軌道を生成する機能を持つ。以下では、数値積分を用いた軌道生成機能について、考慮した加速度、使用した数値積分法及びイベント出力項目について示す。

(1) 考慮加速度

本プログラムでは、以下の加速度項が考慮可能である。

- ①太陽、9惑星及び月を質点とした重力による加速度
- ②地球 SOI (重力の影響圏) 内において、地球重力の非球状成分による加速度
- ③太陽輻射圧による加速度
- ④一般相対論の効果による加速度
- ⑤地球の大気抵抗による加速度
- ⑥モーター噴射による加速度

(2) 数値積分法

本プログラムでは、運動方程式を解く数値積分法として、次の2つの方法が可能である。

- ① Adams-Cowell Ordinate Second Sun 法 (以下、Adams-Cowell 法と略す)
 - ② 可変次数可変刻み幅型 Adams 法 (以下、Adams 法と略す) (SSL II ルーチン)
- ①の Adams-Cowell 法で解く場合、多段法の出発値の計算法として次の2つの方法が可能である。
- ・解析的 (2体近似) に解いた後、積分公式により修正する方法
 - ・8次の Runge-Kutta 法による方法

ただし、現在までの解析結果では、2体近似を用いた方法が最も計算時間が短くなっている。

また、同じ Adams-Cowell 法の場合、積分刻み幅の制御方法として次の2つの方法が可能である。

- ・固定ステップ方法 (刻み幅を固定する)
- ・局所誤差制御方法 (局所打ち切り誤差をもとに刻み幅を制御する)

打上げから、惑星間航行にいたるまで、つづけて一度に軌道計算を行う場合は、局所誤差制御方式が有効である。例として、PLANET-A の打上げからハレー彗星接近まで軌道計算した場合、積分精度を相対位置誤差で $10^{-11} \sim 10^{-14}$ とすると、積分の刻み幅は10秒から1.9日まで変化する。

(3) イベント情報

本プログラムでは、次に示すイベントについて考慮可能であり、それぞれについて、時刻および S/C の軌道要素等を出力できる。

- ・マヌーバ
- ・SOI 通過
- ・天体衝突

- ・レンジ打切 (S/C が地球から一定以上に遠ざかるイベント)
- ・天体の影への出入
- ・地球大気への出入

ただし、最後の2項目は Adams 法の場合は考慮不可である。

4.2 SCINF の機能概要

本プログラムは、TRIP で作成した S/C の軌道情報 (位置、速度及び加速度をもとに、次の情報を、LP (ラインプリンタ)、GD (グラフィックディスプレイ) および XY プロッタに出力する機能を持つ。

- ・S/C のイベント情報
- ・S/C 及び天体の軌道情報
- ・S/C を中心とする角度情報
- ・地上局に対する S/C の情報
- ・S/C の加速度項の項目別情報

ただし、考慮天体は、9 惑星、月及び太陽である。以下では、始めの4項目について説明する。

(1) S/C のイベント情報

本プログラムで出力するイベント情報 (ただし、時刻情報のみ) は以下の通りである。

- ・S/C が天体の影 (本影または半影) に出入りした時刻
- ・地上局での S/C の可視時刻 (見え始めと見え終わり時刻)。ただし、地球の自転による場合、地上局から見て天体の後側になることによる場合の2つの場合を考慮している。
- ・S/C が天体から一定距離を通過する時刻
- ・S/C が天体に最接近した時刻
- ・S/C が行ったマヌーバ時刻

(2) S/C 及び天体の軌道情報

本プログラムで出力する軌道情報は以下の通りである。

ただし、最後の項目を除いて、座標系 (1950.0 年地球平均赤道座標系など5種)、座標中心 (太陽、9 惑星及び月) は任意に指定できる。

- ・S/C 及び天体の位置、速度及び加速度
- ・S/C 及び天体のケプラーリアン軌道要素
- ・S/C 球座標における軌道要素
- ・S/C の到着漸近線座標 (B, B・T, B・R 等) における軌道要素
- ・S/C の地球における直下点経度、緯度及び高度

(3) S/Cを中心とする角度情報

本プログラムで出力する角度情報は以下の通りである。

- S/Cと2天体（第2のS/Cも可）のなす角
- S/Cのスピンの面に対する天体の仰角

(4) 地上局に対するS/Cの情報

本プログラムで出力する局情報は以下のとおりである。

- 地上局からのS/Cの距離（Range）および距離変化率（Range Rate）
- 地上局に対するS/Cの方位角（Az）と仰角（El）
- 地上局，S/C及び天体のなす角
- S/Cのスピンの面に対する地上局の仰角

4.3 計算結果と検討

本システムを使用して計算した結果と検討について、以下に示す。

(1) 計算結果

PLANET-AとMS-T5の軌道の例を図4-2に示す。図中の軌道は打上げからハレー彗星最接近までを太陽中心の黄道面座標系で示した。参考に地球の軌道と金星の軌道が示されている。

また、観測局における、角度データの例を図4-3に示す。これは、ハレー彗星最接近時における臼田局から見たPLANET-Aの方位角（Az）と仰角（El）を示す。

(2) 検討

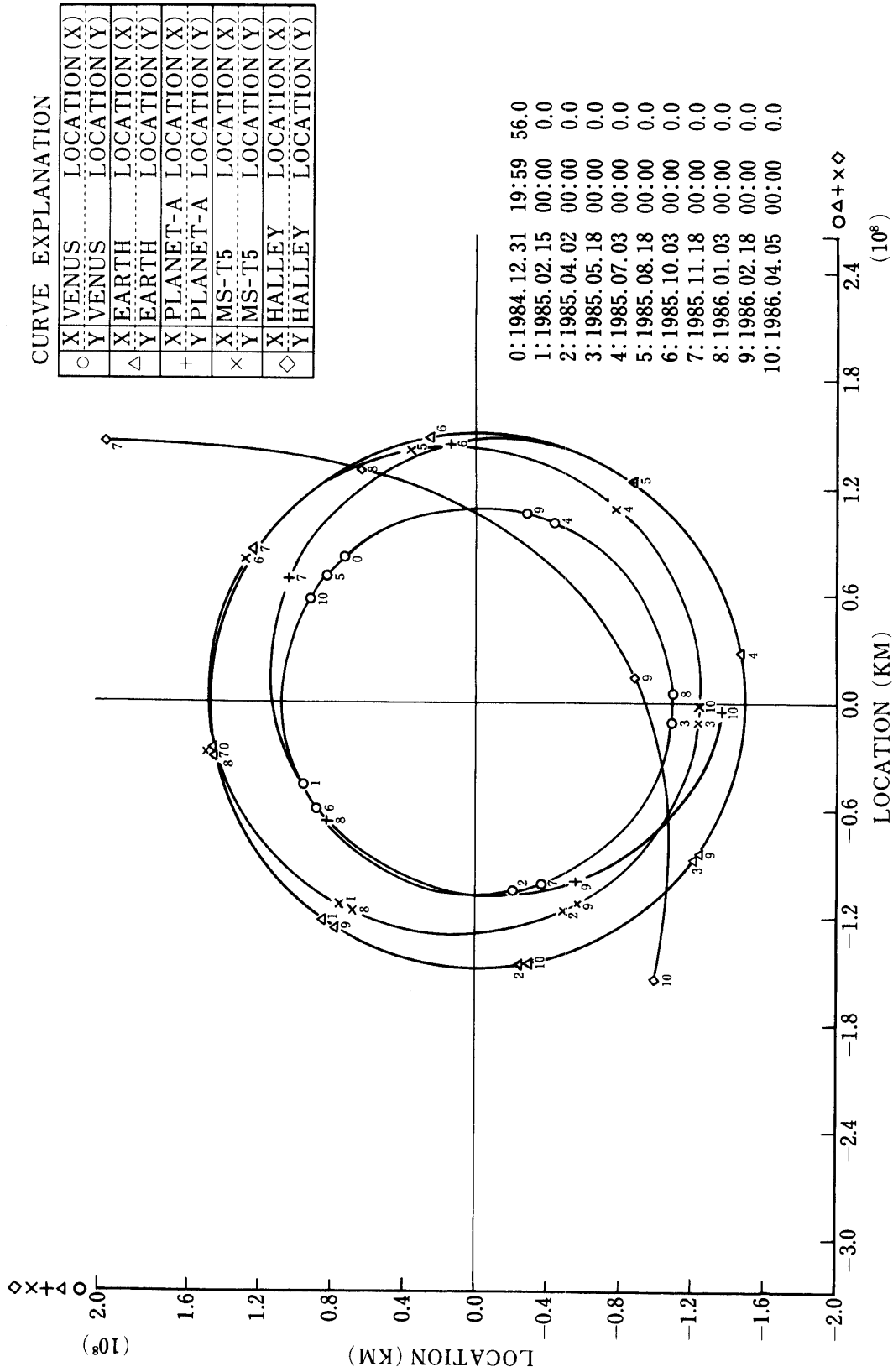
打上げからハレー彗星接近までの軌道を考えた場合地球近傍では地球、惑星間航行時では太陽が主天体となるため、両天体による加速度の考慮は必須となっている。したがって、以下では、その他の加速度について、PLANET-A（1985年8月に打上げられ、1986年3

表4-1 各摂動力の軌道に及ぼす影響

(地球, 月, 太陽) + 摂動力	(地球, 月, 太陽)との差(距離)
木星を質点とした重力	16,000 km
金星を質点とした重力	7,400
その他の惑星を質点とした重力	180
地球の非球対称成分の重力(9.9)	210,000
太陽軸射圧	8,900
一般相対論の効果	100

((地球, 太陽)と(地球, 月, 太陽)との距離の差: 130,000km)

PROG. NA=SCINF (V01/L01) RUN-NO.=023 DATE=82-04-03 PAGE=002
 ++ 3-PLANETS AND MS-T5 PLANET-A ORBIT (X-Y) ++



PROG. NA=SCINF (VO1/LO1) RUN-NO.=049 DATE=82-05-20 PAGE=003

++ STATION INFORMATION (AZIMUTH AND ELEVATION) ++

CUFIVE EXPLANATION

○	X	TIME (UTC)
	Y	AZIMUTH S/C:ST1
△	X	TIME (UTC)
	Y	ELEVATION S/C:ST1

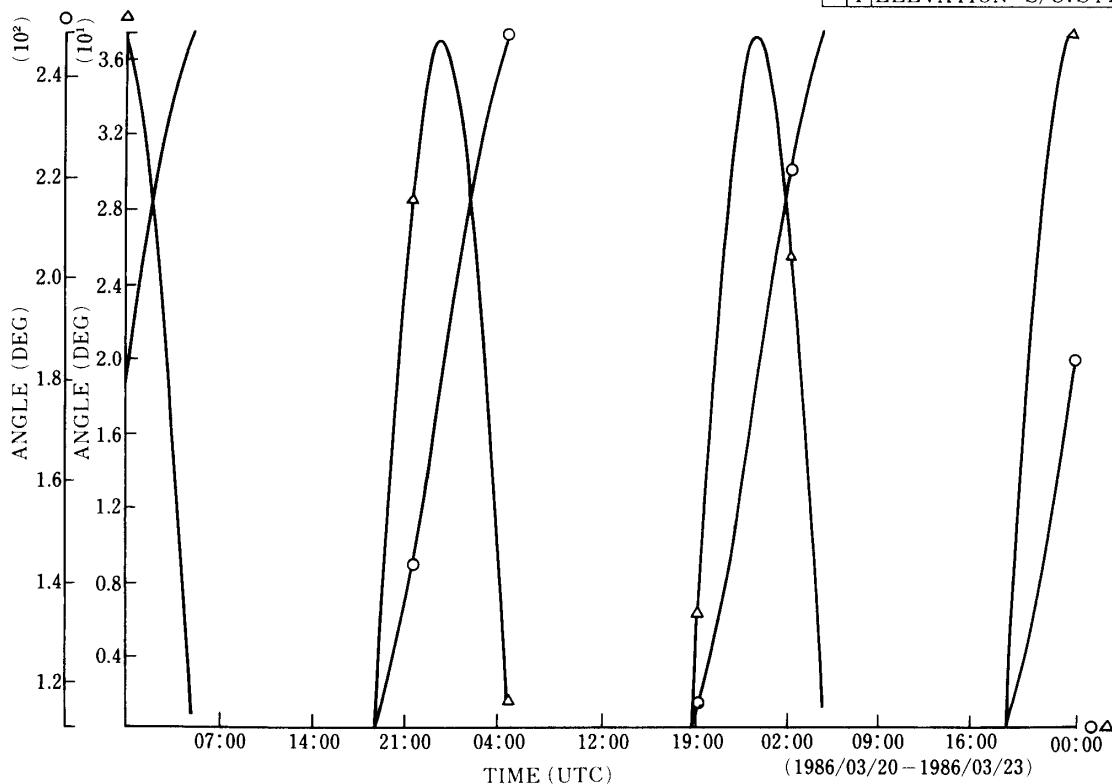


図4-3 白田局から見た PLANET-A の Az, El

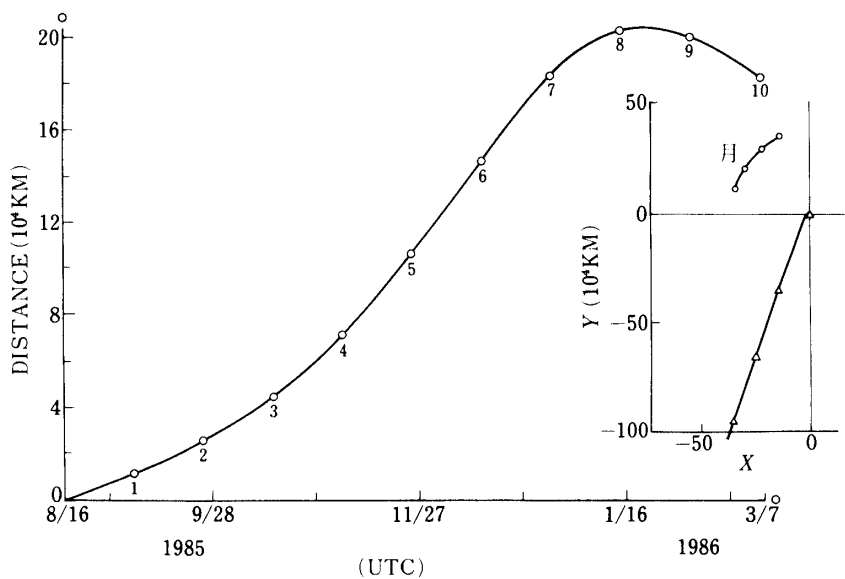


図4-4 (地, 太) と ((地, 太)+月) との差 (距離)

月にハレー彗星に接近する)の軌道を例にして、その影響を検討する。

図4-4に、月の影響について示す。ここで打上げ時における月とS/Cの位置関係は、同図の右図(地球中心の黄道座標で表されている)に示してある。また、その他の加速度(摂動力)の影響については、ハレー彗星接近時における位置の差(距離)として、表4-1に示す。ただし、大気抵抗による影響は、それが太陽活動状況に大きく依存し予測が困難であることと、その作用期間が短い(地上1000kmまで)ことにより、ここでは省略した。この表から、ハレー彗星接近時における軌道精度を1万kmとした場合、考慮する加速度項は、地球、月、太陽、金星および木星を質点とした重力加速度、地球重力の非球状成分による加速度及び太陽輻射圧による加速度であるといえる。

5. あとがき

本プログラムにおいて行なわれた種々の解析結果をもとに、現在、深宇宙用軌道決定ソフトウェアシステムを開発中である。

参 考 文 献

- [1] Spiev, G. W., Design and Implementation of Models for the Double Precision Trajectory Program (DPTRAJ), Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., April 15, 1971
- [2] Moyer, T. D., Mathematical Formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPÖDP), Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., May 15, 1971
- [3] Henrici, P., Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, Univ. of California, Los Angeles, John Wiley & Sons, INC, 1962
- [4] Gear, C. W., Numerical Initial Problem in Ordinary Differential Equations, Univ. of Illinois, Prentice-Hall, INC, 1971
- [5] Shampine, L. F., Gordon, M. K., Computer Solution of Ordinary Differential Equations, Sandia Lab, & Univ. of New Mexico, W. H. Freeman and Company, 1975
- [6] 村田正秋, 常微分方程式のためのソフトウェアパッケージ, 航空宇宙技術研究所, 1978年6月, NAL TM-353
- [7] 松島引一, 衛生運動シミュレーションシステムにおける世界時の予測, 航空宇宙技術研究所, 1975年10月, NAL TR-430
- [8] 惑星間軌道生成システム, 解説書, 1982年3月