

“さきがけ”，“すいせい”の軌道決定と  
軌道決定プログラム ISSOP

西村 敏充・加藤 隆二\*・牛越 淳雄\*

(1986年9月20日受理)

Tracking of Sakigake and Suisei and Development  
of Software package ISSOP for Orbit Determination

By

T. NISHIMURA, T. KATO and A. USHIKOSHI

**Abstract :** The first Japanese deepspace probes called Sakigake and Suisei were launched from the Uchinoura Launching Site, located at 1,500 km south-west of Tokyo, respectively on January 8 and August 19, 1985. The Institute of Space and Astronautical Science has developed new four-stage solid propellant boosters called MS3-II for this purpose and constructed a gigantic antenna-64 m in diameter-in Usuda, located at 150 km north-west of Tokyo. These probes successfully encountered Halley's comet in March, 1986.

Tracking and orbit determination of these probe's have been smoothly carried out throughout this period using Usuda antenna which has maintained perfect communication linkage with the probes. In preparing for this mission, a large scale software called ISSOP had been developed for use of orbit determination, spending more than five years.

In this report the structure of ISSOP is first described. Then the operation as well as the results of orbit determination in this deepspace mission is discussed in detail.

---

\* 富士通株式会社

## はじめに

76年ぶりに太陽に近づくハレー彗星を観測するために、宇宙科学研究所は PLANET-A ミッションを立案し我が国初めての惑星間探査機「さきがけ」「すいせい」を相次いでハレー彗星に向けて打ち上げた。これらの探査機は今年の3月ハレー彗星に近づき、数々の輝かしい成果を収めたのであるが、宇宙科学研究所ではこれに伴って、遠距離にある探査機の追跡業務を担当するため新たに深宇宙用追跡管制システムを構築した。深宇宙用軌道決定ソフトウェアシステム ISSOP は、この深宇宙追跡システムの中核をなすソフトウェアとして開発され、探査機の軌道決定およびアンテナ角度予報を行っている。

本稿では、PLANET-A ミッションの概要、ISSOP 開発の目的、使用されている主要理論、更に ISSOP のシステム概要および精度評価、実運用状況等について述べる。

## 第1章 PLANET-A ミッションの概要

今年の2月、ハレー彗星が76年ぶりに太陽に最接近した。これは彗星の謎を解明しひいては太陽系の起源を知る絶好の機会となり、日本をはじめとする4つの機関はこぞって6機の探査機を打ち上げてハレー彗星の観測に臨んだ(表1.1)。それらの探査機が今年の3月

表1.1 ハレー彗星探査機の概要

探査機名	さきがけ	すいせい	ジオット	ベガ1号	ベガ2号	アイス
国又は機関	日本	日本	ESA (欧州宇宙機関)	ソ連	ソ連	アメリカ
打上げ日	1985年 1月8日	1985年 8月19日	1985年 7月2日	1984年 12月15日	1984年 12月21日	1978年 8月12日
最接近日	1986年 3月11日	1986年 3月8日	1986年 3月13日	1986年 3月6日	1986年 3月9日	1986年 3月28日
最接近距離	700万 km	15万 km	500 km	1万 km	3000 km	3200万 km
目的	<ul style="list-style-type: none"> <li>・M-3S II型ロケットの性能確認</li> <li>・各種搭載機器の性能評価</li> <li>・惑星間磁場観測</li> <li>・太陽風プラズマ波動観測</li> <li>・太陽風イオン観測</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・水素コロナの遠紫外線撮影</li> <li>・太陽風観測</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・核のテレビ撮影</li> <li>・コマ内のガスやダストの質量分析</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・核のテレビ撮影</li> <li>・コマ内のガスやダストの質量分析</li> </ul>	同 左	<ul style="list-style-type: none"> <li>・太陽風観測</li> </ul>

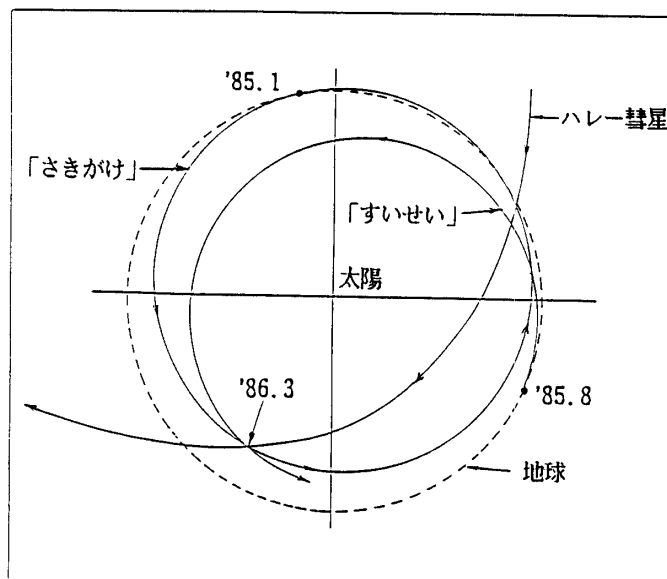


図 1.1 ハレー彗星と「さきがけ」「すいせい」の軌道

上旬～中旬にかけて相次いでハレー彗星に接近し、様々な観測を行っていずれも素晴らしい成果を挙げた事は今だ記憶に新しいところである。

我が国でも宇宙科学研究所が、昨年の1月に「さきがけ」を、続いて8月に「すいせい」を打ち上げ、それぞれ太陽の周りを4/3周、2/3周まわって今年の3月11日と3月8日にハレー彗星に最接近した(図1.1)。これら2機の探査機(Space Craft; 以下S/Cと略す)の目的は、表1.1に示すように「さきがけ」と「すいせい」では多少その用途が異なっているが、ハレー彗星接近時には互いに補い合って彗星と太陽風との相互作用に関する貴重なデータを取得した。このような科学的・工学的目的もさることながら、これらのS/Cが我が国で初めて地球重力圏を振り切って深宇宙に飛び出し、我が国の惑星探査時代の扉をおし開いた意義はまことに大きい。

宇宙科学研究所では、これに伴ってS/Cの追跡管制業務も独自に開始することになったが、そのため長野県臼田町郊外に通信用64φmアンテナおよび地上通信設備を、そして東京・駒場の宇宙科学研究所内に深宇宙管制センターを設置して業務に当たった。地球からS/Cまでの距離は、ハレー彗星との会合時で約1.1Au(約1億6千万km)と静止衛星のそれに比べると一挙に4000倍の遠さになり、受信電力は約1600万分の1に減少する。しかもS/Cの送信電力は種々の制約から従来通りの小電力しか割り当てられないので、深宇宙探査機との通信の確保は従来地球周回衛星の場合に比べて格段にむづかしい問題となった。そのため、追跡管制システムを構成するハードウェア・ソフトウェアにはそれぞれ最新の技術が導入された。このようにして出来上がった追跡管制システムは順調に機能して、「さきがけ」「すいせい」との通信の確保に一度として失敗したこともなく現在に至っている。

## 第2章 ISSOP 開発の目的と問題点

第1章で述べたように、「さきがけ」「すいせい」は従来の地球周回衛星とは異なり、我が国で初めて地球重力圏を脱出して太陽の周りを巡る深宇宙探査機であり、したがって、その追跡業務も我が国にとっては初めての経験となった。

ハレー彗星との会合時で約1.1 Au (Au:天文単位, 1 Au=約1億5千万 km) のかなたにある探査機から送られてくる微弱な電波信号を捉えて交信を確立するためには、臼田深宇宙観測所の64φm アンテナのような指向性の高い巨大アンテナや高利得受信器を用いて受信利得を高くとり、しかもアンテナを正確に探査機の方に向けてやらねばならない。このような機器を使ってもなお受信レベルは低いので、アンテナ指向制御方式としては、受信レベルの最大点となる方向を自動的に捉えてアンテナ方向を制御する「自動追尾方式」は使えず、「プログラム追尾方式」が採用された。この方式は、探査機の位置情報に基づいて計算された時々刻々のアンテナ角度予報データを使ってアンテナを駆動するものである。

このプログラム追尾方法では、特に信頼性の高い探査機軌道決定情報(位置・速度)が必要となる。ところが、この軌道決定を行うに当たって、以下の「2.2 ISSOP 開発の問題点」で述べるような「深宇宙軌道決定特有の問題」が極めて深刻な影響を及ぼし、既存の地球周回衛星用の軌道決定ソフトウェアではとても精度の良い軌道情報を得ることは望めない。したがって、このような問題に対処する新しい深宇宙探査機用の軌道決定ソフトウェアの開発が必要になったわけである。深宇宙用軌道決定ソフトウェア ISSOP はこのような背景と要求に応じて開発されたプログラムである。

### 2.1 ISSOP 開発の目的

ISSOP は、次の事項を目的として開発された；

- (1) 観測データ(測距データ)を用いて深宇宙探査機の軌道を高精度に決定し、それに基づいてアンテナ角度予報データを作成する。
- (2) 軌道決定値を用いて、他システムの入力データを作成する。

### 2.2 ISSOP 開発の問題点

#### 2.2.1 深宇宙軌道決定特有の問題

深宇宙軌道決定に特有な問題として考えられるものは全て、S/C が地上観測局から遠距離にあることに起因する；

- (1) 測距データの観測性の悪さ

軌道決定に使用可能な観測データ(測距データ)は、主としてレンジデータ、ドップラーデータ(特に2-way ドップラーデータ)である。地球周回衛星の場合、他に角度データ(方位角、仰角)を三角測量的に軌道決定に利用できるが、深宇宙探査機の場合、その遠距離性のためほとんど役に立たない。

レンジデータ、ドップラーデータは、地上観測局と S/C を結ぶ直線方向の距離と距離変

化率を与える。これは一次元的情報であって、それと直角の横方向の距離および速度に関する情報はほとんど零であり、S/Cの三次元的な位置・速度を決定するには非常に不完全なものである。ところが幸いなことに地球はかなり大きな半径を持った回転体であり、自転速度も比較的大きい。したがって、ドップラーのベクトルはS/Cの速度ベクトルと地上局の回転ベクトルの合成ベクトルとなり自転方向の位置情報がその中に含まれてくる。結局、地球赤道面方向の二次元的な情報で三次元的な情報を統計的に求めることになる。その上、S/Cは惑星間空間にあってほとんど等速直線運動をしているので、解くべき連立方程式群は極めて類似したものになり、データの性質を反映した情報行列がランク落ちする可能性がある。

このようなデータは「観測性の悪い」データと呼ばれ、しばしば推定フィルタの数値的不安定性や発散を引き起こす。

### (2) 時刻付けの不確定性

測距信号は地上観測局から送信されS/Cで受信・再送信されて再び同じ地上観測局で受信されるが、その往復信号伝播時間は地球周回衛星の場合せいぜい数分の1秒であるのに対して、深宇宙探査機の場合、例えばハレー会合時で約17分もかかり、その間S/C・地上観測局共にかかなりの距離移動する。各観測量の統計量の計算には、地上観測局からの送信時刻、S/Cでの受信・再送信時刻、地上観測局での受信時刻の3つの時刻での地上観測局、S/Cの位置・速度・加速度等の値を正確に知る必要があるが、それらの値はデータに付随して送られてくる地上観測局での受信時刻からlight time equationを解いて求めなければならない(「3.4 Light Time Equation」の項参照)

### (3) 一般相対論効果の影響

地球周回衛星の場合には無視できた太陽重力による相対論力が、惑星間航行においてS/Cの軌道に無視できない影響を及ぼす。この現象には、運動モデルにこの力を考慮して対処する。

他方、一般相対論効果は、S/Cとの通信手段である電波の伝播経路や電波の送受信時刻を計測する地上観測局の時計の刻みにも著しい影響を与える。前者は測距信号が太陽重力場による時空の歪みによって直進せずに曲がって進む現象である。その結果、測距信号はS/Cと地上観測局を結ぶ直線経路よりも長い距離を進むことになり、伝播遅れが生ずる。後者は、地上観測局にある時計の刻みが地球の公転・自転運動や太陽・惑星の重力場が原因で暦表時の刻みに比べて変動を生じる現象である。レンジデータ、ドップラーデータの計測は本質的には全て時計を通じて行われるので、これは測距データの誤差となって現われる。

## 2.2.2 軌道決定一般に関わる問題

上に述べた問題とは別に、軌道決定一般に次のような問題が考えられる：

### (1) 運動モデルの不確定性

S/Cには様々な力が働き、それがS/Cの軌道を決定づけるわけであるが、それらの力が正確に表現されていないと、軌道情報をもとに計算した観測量の計算値が測距データにうまくフィットせず誤まった軌道決定値を算出してしまふ。それはとりも直さず、正しくな

いアンテナ角度予報データの作成につながる重要な問題である。ところが一般には、その力をあらわすパラメタがあらかじめわかっていない場合が多い。

### (2) 伝播媒体効果

測距信号が地上観測局とS/C間を伝播する際、大気圏・プラズマ圏・惑星間プラズマ等いくつかの伝播媒体を通過する。その際測距信号は媒体からの影響を受け、伝播遅れや屈折が起こる。特にその効果が著しいのは、対流圏での伝播遅れ・屈折、電離層での伝播遅れである。これらの値は仰角の大きさにも依るが、伝播遅れでそれぞれ数10 m、仰角で $1/10^\circ \sim 1/100^\circ$ にもなる。やっかいな事に、対流圏・電離層の状態は極めて不規則かつ激しく変動するので、これをモデル化することはほとんど不可能であり、信号伝播経路に沿った実測に待つ他はない。

### (3) 装置系からの誤差の混入

測距信号は測距装置・アンテナ系・S/Cのトランスポンダ等様々な装置を通過するので、当然、誤差が混入する。誤差には、ランダムな誤差とバイアス的な誤差がある。ランダムな誤差は統計的な処理を施して除去できるが、バイアス的な誤差は除去できず軌道決定に影響を及ぼす。

### 2.2.3 その他の問題

PLANET-A ミッションの業務に関連した問題あるいはソフトウェア一般に関わる問題として次の点があげられる；

#### (1) S/C 打ち上げ時の緊急性・信頼性

定常運用段階では時間的余裕があるため、システムの各資源にはさほど過酷な要求はなされないが、例えば、S/Cの打ち上げ時・軌道制御時・ハレー会合時等、時間に著しい制限が加えられた場合、システムの各資源には高度の信頼性と能力が要求される。軌道決定業務の場合、特に問題になるのはS/Cの打ち上げ時である。この段階では、素早い軌道決定・アンテナ角度予報データ作成が要求されるので、システムの処理時間を短縮し操作をより簡便にする必要がある。また、システム・ダウン等の不慮の事故に対処する工夫が要求される。

#### (2) 豊富な機能

「さきがけ」「すいせい」の追跡業務は宇宙科学研究所としても日本として初の業務であり、ノウハウの蓄積がなされていないというのが現状である。そこで、豊富な機能を装備して不測の事態に対処したり実データを用いた事後解析を行って、将来のためのノウハウ蓄積にあてたりする必要がある。

#### (3) 操作性・拡張性・保守性

不良データを含む観測データを用いた軌道決定は、まちがった決定値を導出するばかりでなく、いたずらに処理時間を長びかせる。したがって、データを使用する以前の段階あるいは軌道決定処理の途中で出来るだけ不良データを取除く作業が不可欠となる。そこで問題になるのは、不良データの認識と除去の方法である。不良データ棄却の自動化のみならず、視覚による認識・ヒューリスティックな取扱いが要求される。これらの操作性は、システム実行時間を大きく左右する。同様に、入力パラメタの設定・出力結果の表示等も

取扱いの容易さが要求される。

また，将来ミッションでの使用も考慮して，任意の探査機・地上観測局・使用データタイプにも適用可能なようなシステムの構造・拡張性を持たなければならない。

ドキュメントも含めたシステムのメンテナンスの問題は，その重要性にもかかわらず余り認識されていない。特に本ミッションのように，少人数による運用，長期にわたるデータ・出力結果の蓄積や追跡業務のノウハウ増加に伴うシステム改修要求が予想される状況では，メンテナンスの容易さが考慮されねばならない。

### 2.3 ISSOP の開発目標

ISSOP は次の3点を目標として開発された；

- ① 軌道決定精度は，アンテナ角度にして  $1/100^\circ$  以内とする。
- ② 種々のモデル・パラメタ，バイアス量を推定できる。
- ③ 豊富な軌道決定解析機能を持つ。

## 第3章 ISSOP 主要理論

本章では，本プログラムで使用されている理論およびアルゴリズムの主なものについて，その概略を述べる。

### 3.1 時系と座標系

#### 3.1.1 時系

本プログラムで使用する時系について表3.1に示す。以下，各時系および時系間の変換について記述する。

##### (1) 恒星時 (ST ; Sidereal Time)

恒星時は春分点の時角として定義される。すなわち，ある観測点の子午線から西向きに測った春分点の角度を時間の単位 ( $360^\circ$  を 24 時間とする) で表したものであり (春分点が子午線を通過した時刻は 0 時となる)，恒星時 0 時から次の 0 時までを 1 恒星日という。基準となる春分点が真春分点の場合には，真の視恒星時，また，平均春分点の場合には，平均恒星時 (MST ; Mean Sidereal Time) と呼ばれる。特に観測点の本初子午線 (グリニ

表 3.1 各時系の用途

時系名	略称	プログラム内における用途
暦表時	ET	推定の計算および運動方程式の積分 天体エフェメリスの計算
世界時	UT 1	地球自転角の計算
協定世界時	UTC	プログラム外部とのインタフェース
局時	ST	観測データのタイム・タグ

ジ子午線)に準拠する恒星時は、グリニジ恒星時と呼ばれ、その平均恒星時 (GMST ; Greenwich Mean Sidereal Time) は、次に述べる世界時の計算に使用される。

本プログラムでは、地球赤道座標系から地球固定座標系への変換にこの GMST が用いられ、その値は、世界時から逆に求めている。

## (2) 世界時 (UT ; Universal Time)

太陽の時角に 12 時を加えたものを視太陽時 (光行差を含む) と呼び、視太陽時の 0 時から次の 0 時までを 1 視太陽日と呼ぶ。視太陽時は一様に進まない。その理由は、太陽の赤経が一様に増加せず、したがって時角の増加が均等でないためである。この原因は 2 つある。

- ① 黄道が赤道に対して  $23.4^\circ$  傾いている。
- ② 地球の公転軌道が楕円である。

この視太陽時を 1 年を通じて平均し、その不規則さを除いたものが平均太陽時である。これは次のように定義される。天の赤道上を均等な速度で進み、1 太陽年間に完全に 1 周する天体を仮想し、これを平均太陽と名づける。平均太陽の赤経は常に視太陽の赤経に前後し、その差は 1 年を通じて最小になるようにする。この平均太陽の時角に 12 時を加えたものを平均太陽時、平均太陽の 0 時から次の 0 時までを 1 平均太陽日と呼ぶ。

この平均太陽時のうち、本初子午線に準拠するものは世界時 (UT) と呼ばれ、次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{UT} &= H_G + 12^{\text{h}} = \theta_M - \alpha_{\odot} + 12^{\text{h}} \\ &= \text{MST}_{\lambda} - \lambda - \alpha_{\odot} + 12^{\text{h}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、 $H_G$  ; グリニジにおける平均太陽の時角  
 $\theta_M$  ; グリニジ平均恒星時  
 $\alpha_{\odot}$  ; 平均太陽の赤経  
 $\text{MST}_{\lambda}$  ; 経度  $\lambda$  (東向き) における MST.

この平均太陽は、S. Newcomb によって導入され、その赤道は次式で与えられる。

$$\alpha_{\odot} = a + bT + cT^2 \quad (3.2)$$

$$a = 18^{\text{h}}38^{\text{m}}45^{\text{s}}.836 = 279^{\circ}41'27''.54 \quad (\text{光行差を考慮})$$

$$b = 8640184^{\text{s}}.542 = 129602768''.13 \quad (\text{黄道上の平均角速度と同じ})$$

$$c = 0^{\text{s}}.0929 = 1''.394$$

ここで、 $T$  は 1900 年 1 月 0 日 12 時 UT から起算したユリウス世紀 (36525 平均太陽日) 単位の時間である。

(3.1)式で定義された世界時は、地球の自転速度が一定でないため、一様には進まないこ



とが1930年頃から問題になりはじめてきた。自転速度が不規則になる主な項を次に示す。

- ① 100年毎に1日の長さが0.001秒ずつ長くなる永年変化。地球表面の潮の干満が海底、峡湾などでひき起す摩擦により起こる。
- ② 1年を周期とする季節的な自転速度の変化(0.7ミリ秒/日)。偏西風や太陽による地球潮汐が原因である。
- ③ 地球の膨張圧縮および内部構造の変動に伴う慣性能率の変化によって起こる不規則変動。
- ④ 極運動によるもの。

上記項目のうち、②、④を考慮して世界時を補正することが、1956年以降実施されている。以下に、このことについて示す。

a. UT 0

観測局において、 $MST_{\lambda}$ を観測により求め、(3.1)式および(3.2)式を用いて求めた生の世界時である。

b. UT 1

極運動による観測局の経度変動( $\Delta\lambda$ )を補正した時系で、

$$UT1 = UT0 - \Delta\lambda \quad (3.3)$$

で与えられる。本プログラムにおいては、グリニジ平均恒星時 $\theta_M$ の計算に、このUT 1を用いている。

$$\theta_M = UT1 + \alpha_{\odot} - 12^h \quad (3.4)$$

c. UT 2

UT 1に対して、地球の自転速度の季節変化(SV)の補正を加えた時系がUT 2である。

$$UT2 = UT1 + SV \quad (3.5)$$

このSVの量は、国際報時局(BIH)から発表されている。

(3) 暦表時(ET: Ephemeris Time)と太陽年(Tropical Year)

太陽の黄道上での位置、すなわち黄経は一般に次のような形に表すことができる。

$$\text{太陽の黄経} = d + eT + fT^2 + P \quad (3.6)$$

ここで、 $T$ ; エポックからの経過時間

$P$ ; 地球の章動や地球軌道が完全な円でないために生じる角速度の変動による複雑な周期項。

S. Newcombは観測データの分析から、周期項を除いた太陽の幾何学的平均黄経 $L_M$ (平均春分点から測った太陽の黄経)を次式で与えた。(但し光行差を含む)

$$L_M = 279^{\circ}41'48''.04 + 12960276''.13 \cdot T + 1''.089 \cdot T^2 \quad (3.7)$$

ここで、 $T$ ；1900年1月0日12時UTから起算した時間経過をユリウス世紀（36525平均太陽日）単位で測る。

ところがその後(3.7)式から求まる計算値が観測結果と合わないことが指摘された。その原因は、平均太陽時が地球自転速度の変動により一様不変の時系でないために生じたという解釈に落ちつく。そこで観測された $L_M$ に対して(3.7)式が満足されるように $T_E (= T + \Delta T)$ を決める。この $T_E$ は太陽の運動を記述する一様不変な時間を与えてくれる。この時系が暦表時である。

暦表時における起点および秒は、次のように定義されている。

「暦表時は1900年の年初において太陽の幾何学的平均黄経が $279^{\circ}41'48''.04$ に達した瞬時から起算し、その瞬時を1900年1月0日12時暦表時(ET)とする。これは、1900年1月0日12時UTと同じである。」

「暦表時の1秒は、1900年1月0日12時ETにおける1太陽年の31556925.9747 (365.24219878 $\times$ 86400)分の1とする。(1956年国際度量衡委員会により決定)」

ここで、1太陽年とは、太陽の平均黄経がもとにもどるまでの時間であり、(3.2)式より、次のように求められる。

$$\begin{aligned} 1 \text{ 太陽年} &= 360^{\circ} / \left( \frac{dL_M}{dT} / 36525 \right) \\ &= 365^{\text{d}}.24219878 - 6^{\text{d}}.14 \times 10^{-6} T_E \end{aligned} \quad (3.8)$$

1900年1月0日12時ETにおける1太陽年は、365.24219878日(31556925.9747秒)となる。

また、 $\Delta T$ は暦表時と平均太陽時の差に相当し、これは地球の自転速度の変化に対応している。1980年における $\Delta T$ の年平均推定値は+50秒で、これは1900年から80年間に角度にして $12'$ ほど自転が遅れたことを意味している。

暦表時は、太陽系を扱う際には、一般相対論における座標時と同等となる。すなわち、暦表時は4次元時空座標系(本プログラムでは、太陽中心1950.0年平均地球赤道座標系+座標時)の独立変数の1つであり、座標系のどの領域においても一様に流れる。この時系は測定することができない抽象的な時系という意味で、他の時系と異なっていることに注意しなければならない。惑星・月などの天体エフェメリス及びS/Cエフェメリスは暦表時によって計算される。現在、暦表時は月の観測により求められている。

#### (4) 原子時(AT: Atomic Time)

セシウム原子の固有振動数を積算して時刻を決める時系である。1967年の国際度量衡総会で決定された原子時の秒の定義は次のようなものである；

「国際単位系の1秒は、セシウム133原子の基底状態の2つの超微細構造準位(F=4, M=0およびF=3, M=0)間の遷移における放射の9,192,631,770周期の継続時間とする」

原子秒は月の観測によって求められる暦表秒をもとに決められたものであるが、原子秒は現在  $10^{-12}$  sec の高精度で得ることができる。

原子時及び暦表時は共に一様に流れる時系であるので、両者の差は一定の値を保ち続けるはずである。ところが現在行われている観測によると、多少の変化が認められる。その原因としては相対論の効果 etc. が考えられる。本プログラムでは、この相対論効果が極めて本質的な役割を演じる。太陽・惑星等の重力場中にあり太陽中心座標系に対して加速度運動をしている観測局に固定された時計は、座標時  $t$  (暦表時) と異なる時間、すなわち、固有時  $\tau$  を刻む。それらの刻みの比  $d\tau/dt$  は、弱い重力場中で、

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[ 1 - \frac{2U}{c^2} - \left( \frac{\dot{s}}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{U}{c^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{s}}{c} \right)^2 + O\left( \frac{1}{c^4} \right) \quad (3.9)$$

$U = -\phi$  : 原子時計のある地点での Newton ポテンシャル

$$\dot{s}^2 = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt}$$

となる。 $U$  と  $\dot{s}^2$  の時間平均は正、i.e.  $\bar{U} > 0$ ,  $\bar{\dot{s}^2} > 0$  より固有時 (原子時計の示す時刻) の秒の平均長は、座標時 (暦表時) の秒の平均長よりも長い。そこで各局で測定される原子時計の刻みにあるファクターをかけて、暦表時の刻みの平均長と刻みを同じくしたのが TAI (International Atomic Time)  $\tau^*$  と呼ばれる原子時である。TAI と暦表時の刻みの比  $d\tau^*/dt$  は、

$$\frac{d\tau^*}{dt} = 1 - \frac{U - \bar{U}}{c^2} - \frac{\dot{s}^2 - \bar{\dot{s}^2}}{c^2} + O\left( \frac{1}{c^4} \right) \quad (3.10)$$

$$\bar{U} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U dt \quad \text{etc.}$$

となる。 $(U - \bar{U})/c^2$ ,  $(\dot{s}^2 - \bar{\dot{s}^2})/c^2$  は時計の位置・速度によって変動するので、暦表時からみると TAI の刻みは変動しているわけで、それらは ET と TAI の時系変換における相対論的付加項としてあらわれる。TAI は 1958 年 1 月 1 日 0<sup>h</sup>UT2 において、TAI の時刻と UT 2 の時刻を一致させたものでパリ天文台にある国際報時局 BIH (Bureau International de l'Heure) で維持されている。

#### (5) 協定世界時 (UTC ; Coordinated Universal Time)

協定世界時は、秒の刻みは原子時によって与え、一方時刻については、世界時との差がいつもある範囲にあるように調整されている人工時系である。

1972 年から採用されている方式では、UTC の秒の長さは厳密に 1 原子秒とし、1972 年 1 月 1 日 0 時 UTC において  $UTC = TAI - 10^s$  となるように UTC を調整し、以降は UTC と UT 1 の差が 1974 年までは  $\pm 0.7$  秒、1975 年からは  $\pm 0.9$  秒以内にあるように管理されている。もし  $UTC - UT 1$  の値がこれらの範囲を超えることが予測される場合には、任意

の月末日 UTC (ただし第1優先月は6月及び12月, 第2優先月は3月及び9月の最後) に1秒のうるう秒を挿入したり引抜いたりして UTC-UT 1 の調整を行なう。この調整は 1972 年以降 14 回行なわれ, 1986 年 12 月現在,

$$\text{TAI}-\text{UTC}=23 \text{ 秒} \quad (3.11)$$

である。

#### (6) 局時 (ST : Station Time)

局時(略号:ST)は各観測局に設置された原子時計によってつくられる時刻表現であり, 実際の観測データに付加される時刻である。各原子時計の個性性により, 局時の秒の刻みは, UTC のそれとは多少ずれたものとなるが, 理想的にはそれらは一致する。本プログラムでは, 両者の秒刻みは一致しているものと見做している。局時は携帯時計あるいは時刻合わせのための信号によって UTC の標準時刻と合わせられている。それらの間のオフセットは通常  $100 \mu\text{s}$  以下, 標準では  $10\sim 20 \mu\text{s}$  位である。本プログラムでは,

$$\text{UTC}-\text{ST}=a \quad (3.12)$$

として,  $a$  を推定パラメタ (タイミング・バイアス) として計算する。

#### (7) ユリウス日とベッセル年

##### a. ユリウス日 (JD ; Julian Date)

長い年月にわたって日数を通算するのに便利なように考え出されたものがユリウス日である。西暦紀元前 4713 年 1 月 1 日  $12^{\text{h}}$  UT から起算した通日であり時刻は日の端数によって示される。

また, 1858 年 11 月 17 日 0 時 UT ( $2400000.5 \text{ JD}$ ) から起算した通日は修正ユリウス日 (MJD ; Modified Julian Date) と呼ばれる。世界時のかわりに暦表時が用いられる場合には, ユリウス暦表日 (JED), 修正ユリウス暦表日 (MJED) となる。

##### b. ベッセル年 (The Besselian solar year)

暦年は 4 年に 1 度うるう年が設けられており, 観測や計算を年を単位として行う場合には都合が悪い。便宜上, 一様に経過する年としてベッセル年が考案された。

ベッセル年初は, 光行差を受けた暦表平均太陽の赤経が  $18^{\text{h}}40^{\text{m}}$  に達した瞬間と定め, 普通年号の後に .0 をつけて表わす。(例 1950.0)

光行差を受けた暦表平均太陽の赤経  $\alpha_{\odot}^{(E)}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha_{\odot}^{(E)} &= 18^{\text{h}}38^{\text{m}}45^{\text{s}}.836 + 8640164^{\text{s}}.542 T_E + 0^{\text{s}}.0929 T_E^2 \\ &= 279^{\circ}41'27''.54 + 129602768''.13 T_E + 1''.394 T_E^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで,  $T_E$  ; 1900 年 1 月 0.5 日 ET から 36525 太陽日を単位として測った時間 (ET)。上式より, ベッセル年初が求められる。以下にその例を示す。

$$\begin{aligned}
1900.0 &= 1900 \text{年} 1 \text{月} 0 \text{日} .813 \text{ ET} \\
&= 2415020.313 \text{ (JED)} \\
&= 15019.813 \text{ (MJED)}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
1950.0 &= 1950 \text{年} 1 \text{月} 0 \text{日} .923 \text{ ET} \\
&= 2433282.423 \text{ (JED)} \\
&= 33281.923 \text{ (MJED)}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

また，1ベッセル年は，暦表平均太陽の赤経が2度続けて $18^{\text{h}}40^{\text{m}}$ になるまでの間隔であり，(3.13)式より，

$$\begin{aligned}
1 \text{ベッセル年} &= 360^\circ / \left[ \left( \frac{d\alpha_{\odot}^{(E)}}{dT_E} \right) / 36525 \right] \\
&= 365^{\text{d}}.24219878 - 7^{\text{d}}.85 \times 10^{-6} T_E
\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。

このベッセル年と前述の太陽年とは， $1^{\text{d}}.71 \times 10^{-6} T_E$ の差しかない。したがって，ベッセル年＝太陽年と考えても通常問題はない。

#### (8) 時系変換

本プログラムでは，内部計算，入出力表示等に対して，それぞれ異なる時系を用いている。したがって，各時系間をわたりあう変換式あるいは変換テーブルが必要である：

##### a. ETとTAIの時系変換

ETとTAIの時系変換は

$$\begin{aligned}
\text{ET} - \text{TAI} &= \Delta T_A - (t - 252,460,800) \frac{\Delta f_{cs}}{f_{cs}} \\
&+ 1.658 \times 10^{-3} \sin E \\
&+ 0.317679 \times 10^{-9} u \sin(\text{UT} + \lambda) \\
&+ 5.341 \times 10^{-12} u \sin(\text{UT} + \lambda - M) \\
&+ 1.01 \times 10^{-13} u \sin(\text{UT} + \lambda - 2M) \\
&- 1.3640 \times 10^{-11} u \sin(\text{UT} + \lambda + 2L) \\
&- 2.27 \times 10^{-13} u \sin(\text{UT} + \lambda + 2L + M) \\
&+ 1.672 \times 10^{-6} \sin D
\end{aligned}$$

$$+1.38 \times 10^{-13} u \sin(UT + \lambda - D) \quad (3.17)$$

$f_{cs}$ ,  $\Delta f_{cs}$  = セシウム原子時計の周波数及び周波数のずれ (Hz)

$\Delta T_A = 32.184$  sec ; オフセットの定数項

$t = 1950$  年 1 月 1 日 0<sup>h</sup>UT からの通算秒 (sec)

$252,460,800 = 1950$  年 1 月 1 日 0<sup>h</sup>UT から 1958 年 1 月 1 日 0<sup>h</sup>UT までの通算秒  
(sec)

$M =$  地球・月重心の mean anomaly (rad)

$E =$  地球・月重心の eccentric anomaly (rad)

$L =$  平均黄道面座標での太陽の geometric mean longitude (rad)

$D = \odot - L$  (rad)

$\odot =$  平均黄道面座標の平均春分点方向から、月の昇交点経度まで行って、それから軌道に沿って測られた月の平均経度 (rad)

$u =$  地球のスピンの軸から原子時計までの距離 (km)

$\lambda =$  原子時計の東経 (rad)

$$UT = 2\pi \cdot \frac{UT1}{86400} \quad (\text{rad})$$

右辺第1項は、1958年1月1日0<sup>h</sup>UT2(TAIの起点)におけるET-TAIの差、第2項はセシウム原子時計の補正項、第3項以降は相対論効果による日周期・月周期・年周期項である。本プログラムの時系変換ルーチンでは、第3項の年周期項を除くすべての相対論的付加項はとり入れられていない。けれどもレンジ観測量に対する観測方程式には、相対論的付加項のうちいくつかはとり入れている。

$M$ ,  $L$  及び  $D$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M &= 6.248291 + 1.99096871 \times 10^{-7} t \\ L &= 4.888339 + 1.99106383 \times 10^{-7} t \quad (\text{rad}) \\ D &= 2.518410 + 2.462600818 \times 10^{-6} t \end{aligned} \quad (3.18)$$

eccentric anomaly  $E$  は十分な近似で、次式であらわされる。

$$E \approx M + e \sin M \quad (3.19)$$

$M$  : mean anomaly

表 3.2 本プログラムで使用する座標系

座標系名称	原 点	基準面	基準方向
地球赤道座標系	任 意	地球赤道面	地球春分点方向
黄道座標系	任 意	黄道面	地球春分点方向
地球固定座標系	地球質量中心	地球赤道面	本初子午線と赤道との交点方向
地表面座標系	各観測局	地表面	天頂方向

表 3.3 本プログラムで使用する座標型

座標型名称	独 立 変 数
カルテジアン	位置 $R(x, y, z)$ , 速度 $V(V_x, V_y, V_z)$
ケプラーリアン	$a, e, i, \Omega, \omega, M$

$e$  ; 太陽中心軌道における地球・月重心の離心率 (=0.01672)

#### b. TAI, UTC, UT 1, ST 間の変換

本プログラムにおいては、(TAI-UTC) および (TAI-UT 1) の補正量のテーブルを用意しておき、そのテーブルの値を使って変換を行う。(TAI-UTC) および (TAI-UT 1) の実測値は、国際報時局 (BIH) より発表される。

また (UTC-ST) については

$$\text{UTC} - \text{ST} = a \quad (3.20)$$

として、タイミング・バイアスパラメタ  $a$  を推定する。

#### 3.1.2 座標系

本プログラムで使用する座標系および座標型について、表 3.2, 表 3.3 に示す。本プログラムの内部計算では、座標系としては 1950.0 年地球平均赤道座標系 (EME 50), 座標型としてはカルテジアンを用いている。

以下、各座標系およびそれら間の変換について記述する。

##### (1) 座標系および座標型の定義

本プログラムで使用する主な座標系と座標型を以下に示す。

##### a. 座標系の定義

##### ① 地球赤道座標系

地球赤道座標系は、地球の赤道面を基準面とし、春分点を基準方向とする座標系であり、図 3-2 に示す。

赤道面と春分点方向は、歳差と章動により時々刻々変化するため、表 3.4 に示すような、

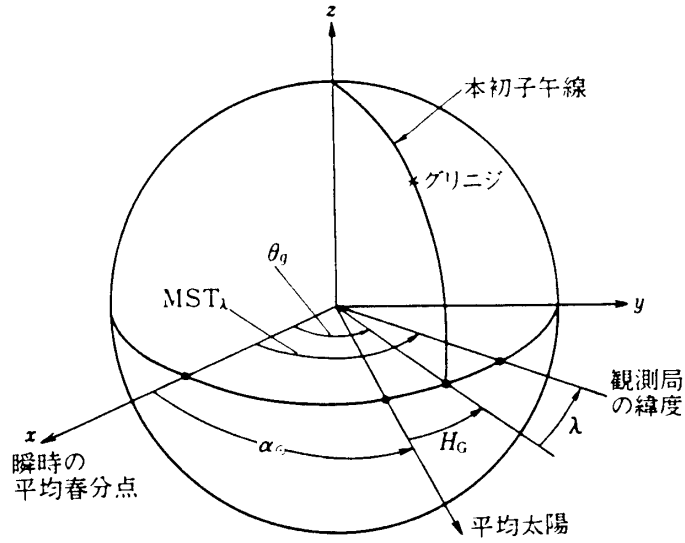


図 3.1 世界時

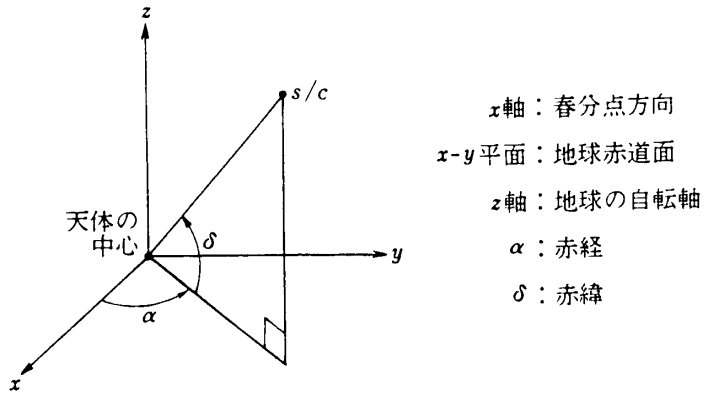


図 3.2 地球赤道座標系

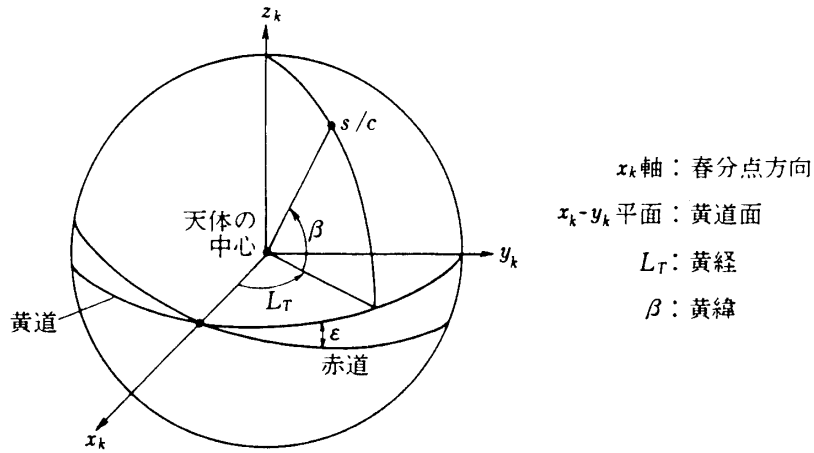


図 3.3 黄道座標系



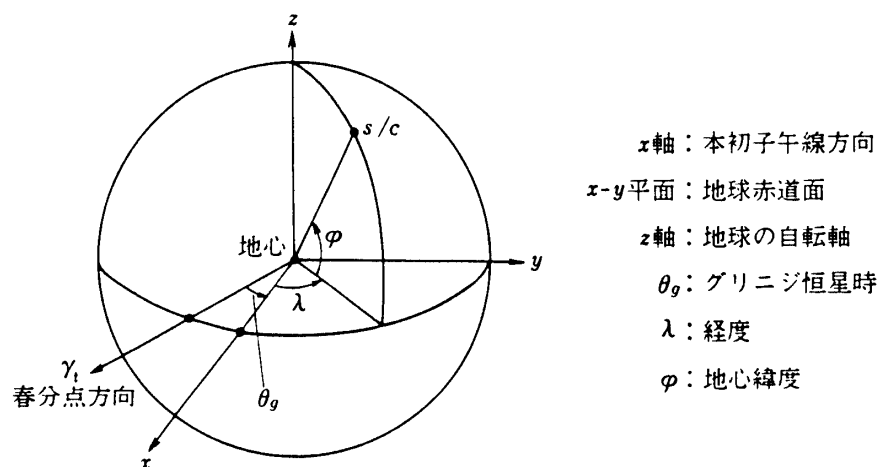


図 3.4 地球固定座標系

表 3.4 地球赤道座標系

名 称	基 準 面 と 基 準 方 向
1950.0年平均地球赤道座標系	1950.0年における平均赤道面と平均春分点方向
mean of date 地球赤道座標系	現時刻における平均赤道面と平均春分点方向
true of date 地球赤道座標系	現時刻における真の赤道面と真の春分点方向

表 3.5 擬地球固定座標系と地球固定座標系

名 称	基 準 面	Z 軸方向	X 軸方向
擬地球固定座標系	現時刻における真の赤道面	現時刻における真の地球自転軸	本初子午線と赤道面の交点
地球固定座標系	1903.0年における平均の赤道面	1903.0年における平均の地球自転軸	同 上

3つの座標系が考えられる。この中で、1950.0年地球平均赤道座標系(EME 50)が本プログラムの内部計算に用いられている基準座標系である。

## ② 黄道座標系

黄道座標系は、黄道面を基準面とし、春分点を基準方向にする座標系であり、図 3.3 に示す。黄道面も歳差により時々刻々変化するため、種々の座標系が存在するが、本プログラムでは true of date 黄道座標系を採用している。

## ③ 地球固定座標系

地球固定座標系は、地球質量中心を原点とし、現時刻の真赤道面を基準面、本初子午面と基準面との交点方向を基準方向とする座標系であり、図 3.4 に示す。

地球固定座標系には、擬地球固定座標系と、いわゆる地球固定座標系がある。前者は極運動の効果を考慮に入れている。基準面 ( $x$ - $y$  平面) と基準方向 ( $x$  軸と  $z$  軸) のとり方

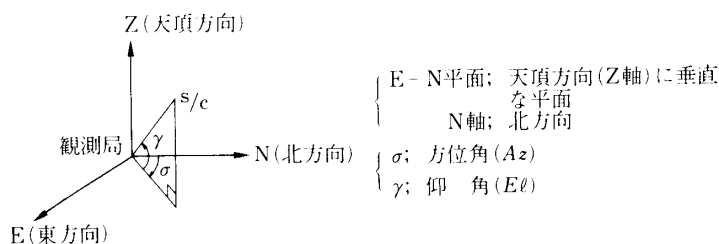


図 3.5 地表面座標系

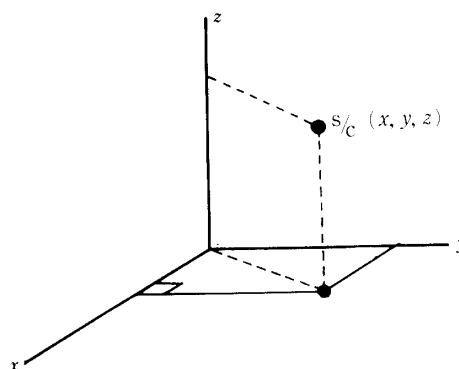


図 3.6 カルテジアン

を表 3.5 に示す。

地球固定座標系は、地球の非球対称成分による加速度の計算や、局位置の表示に用いられる。

表示方法としては

- ① カルテジアンによる表示； $(X, Y, Z)$
- ② 測地座標系による表示； $(\phi_g, \lambda, h)$

が一般的である。

- ④ 地表面座標系

地表面座標系は、地球表面上のある 1 点（例えば観測局アンテナ位置）を原点として、天頂方向、北方向、東方向をそれぞれ軸とする座標系であり、図 3.5 に示す。

地表面座標系は、S/C の方向（方位角  $\sigma$ 、仰角  $\gamma$ ）を表わす際用いられる。

#### b. 座標の型の定義

座標系が決まれば、その  $x, y, z$  軸方向をもとにして、空間に任意の点を記述することができる。S/C (Space Craft) や天体の運動を表現するには、位置及び速度を 3 軸方向の成分（カルテジアン）で表現すればよい。本プログラムの内部計算では、この表現法を用いている。本プログラムでは、その他の座標型の表示方向としてケプラリアンを用いている。

- ① カルテジアン

S/C の状態は、S/C の位置  $\mathbf{r}(x, y, z)$ 、速度  $\dot{\mathbf{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  で表現される。

- ② ケプラリアン

S/C 状態を次の軌道 6 要素で表現する。

- $a$  ; 軌道長半径
- $e$  ; 離心率
- $i$  ; 軌道面傾斜角
- $\Omega$  ; 昇交点経度
- $\omega$  ; 近点引数
- $M$  ; 平均近点離角

$\omega$  のかわりに次の  $\bar{\omega}$  で表現されることもある。

$\bar{\omega}$  ; 近点経度 ( $\bar{\omega} = \omega + \Omega$ )

$M$  のかわりに次の  $\Delta t$  又は  $\nu$  で表現されることもある。

$\Delta t$  ; 近点通過後の経過時間

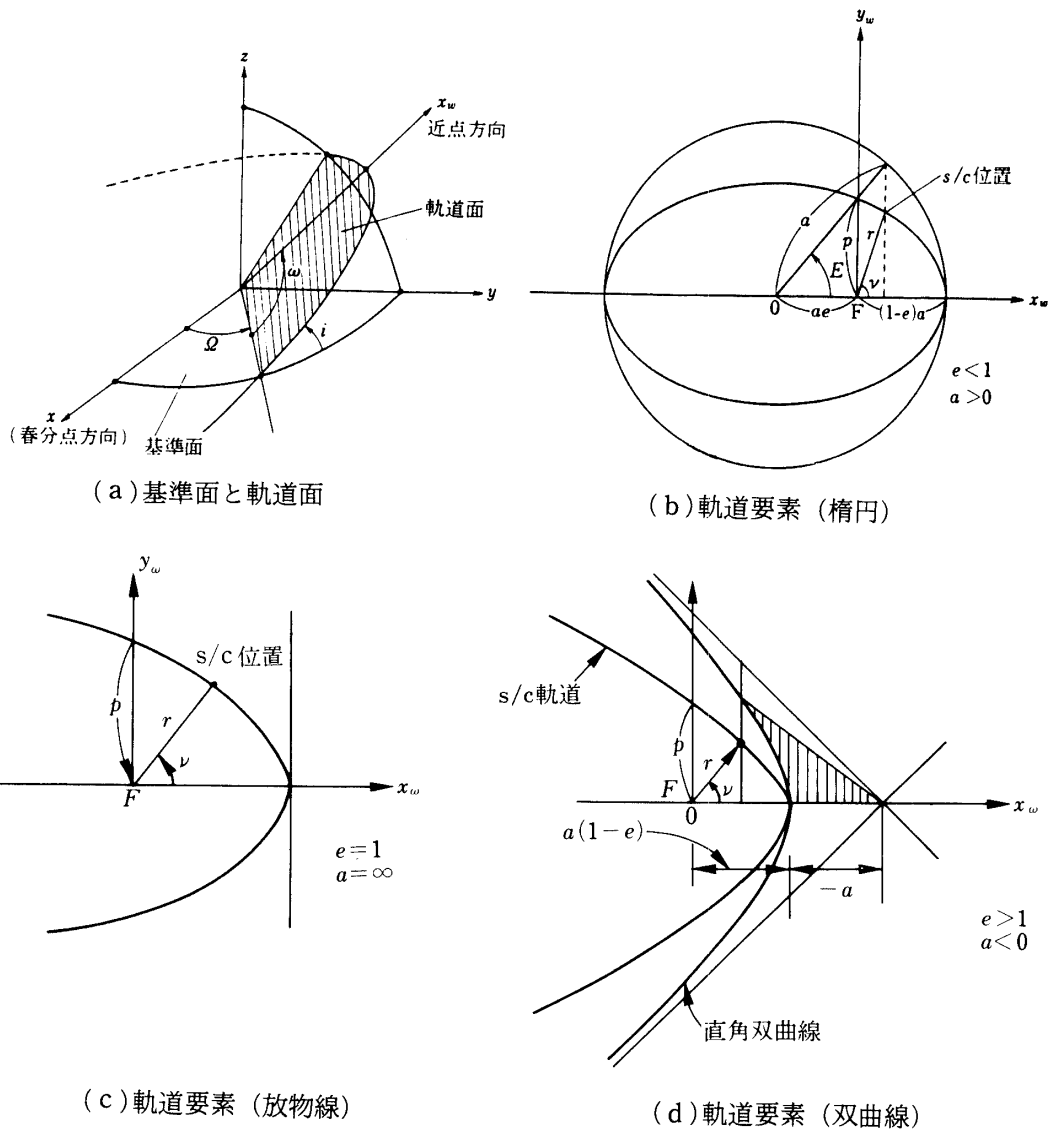


図 3.7

$\nu$ ; 真近点離角 ( $\nu$  と  $M$  との変換には, ケプラーの方程式を用いる)  
 上記パラメタは図 3.7 a~3.7 d のような意味を持つ。

## (2) 地球赤道座標系と黄道座標系との関係

### a. 歳差, 章動

地球赤道座標系や黄道座標系は, 春分点方向を基準としている。この春分点は, 赤道面と黄道面との交線の一方向として定義されている。しかし, この春分点は天球上の固定点ではなく, 移動する点であることが知られている。地球が完全球体でなく, 自転軸を軸とする回転楕円体であり, 月や太陽が赤道面上にないことから, 月や太陽の引力は, 地球の自転軸の方向に動かすようなモーメント (回転力) をもたらす。このため赤道面が動きその結果春分点が黄道上を移動するようになる。この春分点の移動は, 1年間に約 50 秒角であり, 約 26000 年で黄道上を一周する。これを地球の歳差 (Precession) と呼ぶ。

また, 春分点を定義している黄道面も動いている。これは地球の公転面と, 他の惑星の公転面とが同一平面上にないことが起因している。この黄道面の動きによる春分点の移動は, 1年に約 0.12 秒角である。赤道面移動と黄道面移動を考慮した春分点の移動を, 一般歳差 (General Precession) と呼ぶ。(以下, 一般歳差を単に歳差と呼ぶ)

春分点の移動は, 実際には一様でなく, 約 18 年の短周期項を含んでいる。これは, 月や太陽までの距離が一定でなく, 1公転の間に変化することなどが要因であり, この短周期の成分を章動 (Nutation) と呼ぶ。

春分点や赤道面を定義する際に, 歳差と章動を考慮したものを, それぞれ真春分点, 真赤道面と呼び, 短周期項である章動による変動を無視し, 歳差のみを考慮したものを, それぞれ平均春分点, 平均赤道面と呼んでいる。

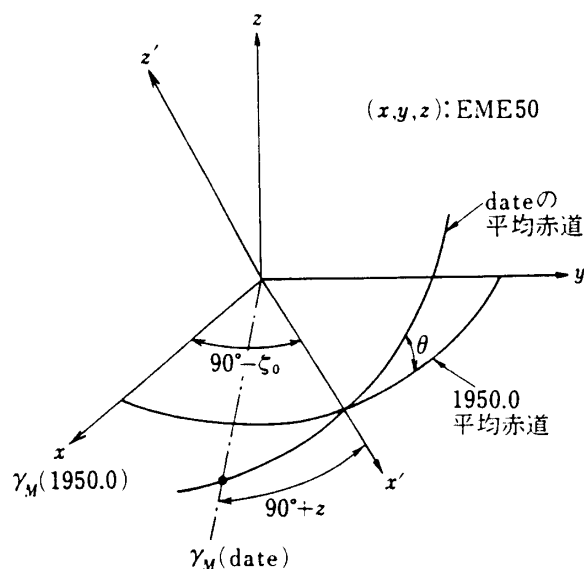


図 3.8 歳差

赤道座標系を用いて, S/C の位置及び速度を表現するためには, 赤道面や春分点を定義した時刻を指定しなければならない. 本プログラムでは, 1950.0 年の平均春分点方向を基準方向とし, 地球平均赤道面を基準面とした地球赤道座標系 (EME 50) を基準座標系として, 使用している.

b. EME 50 から Mean of Date への変換

ここで Mean of Date 赤道座標系とは, 現時刻における地球平均赤道面と平均春分点で定義される座標系であり, EME 50 から true of date 地球赤道座標系への橋渡しに用いられる.

両者とも, 地球の歳差運動を考慮した座標系で, 次の3種の角度で表現される.

$\theta$ ; 時刻  $t_0$  と  $t$  の平均赤道面のなす角

$90^\circ - \zeta_0$ ; 時刻  $t_0$  から平均赤道面上に測った昇交点赤経のなす角

$90^\circ + z$ ; 時刻  $t$  における春分点から測った昇交点赤経までのなす角

$\zeta_0$ ,  $\theta$ ,  $z$  は次式で与えられる.

$$\zeta_0 = 2304''.948 T + 0''.302 T^2 + 0''.0179 T^3$$

$$\theta = 2004''.255 T - 0''.426 T^2 - 0''.0416 T^3 \quad (3.21)$$

$$z = 2304''.948 T + 1''.093 T^2 + 0''.0192 T^3$$

ここで,  $T$ ; 1950.0 年から 100 太陽年で測った時刻であり, 次式で与えられる.

$$T = \frac{T_{\text{MJED}} - 33281.923357}{36524.219878} \quad (3.22)$$

$T_{\text{MJED}}$ ; 時刻  $t$  の MJED 表現

EME 50 から date の平均赤道座標系に変換するには, 次の3つの座標回転を行う.

- ①  $z$  軸回りに  $90^\circ - \zeta_0$  回転する. (回転行列を  $P_1$  とする)
- ② 回転してできた  $x'$  軸回りにも  $\theta$  回転する. (回転行列を  $P_2$  とする)
- ③ 回転してできた  $z'$  軸回りに  $-(90^\circ + z)$  回転する. (回転行列  $P_3$  とする)

この回転行列は, それぞれ

$$P_1 = \begin{bmatrix} \sin \zeta_0 & \cos \zeta_0 & 0 \\ -\cos \zeta_0 & \sin \zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

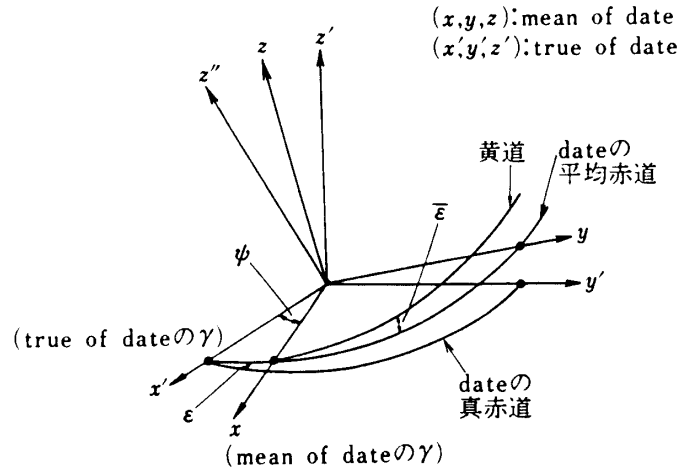


図 3.9 章動

$$P_3 = \begin{bmatrix} -\sin z & -\cos z & 0 \\ \cos z & \sin z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、したがって EME 50 から date の平均赤道座標系への変換行列  $P$  は、次式となる。

$$P = P_3 P_2 P_1 \quad (3.24)$$

### c. Mean of Date から True of Date への変換

Mean of Date 地球赤道座標系と True of Date 地球赤道座標系との変換を考える。

章動は、月と太陽の引力と地球の形によって起き、このため地球の赤道面を変えるが黄道面は変えない。したがって、章動運動は次の2つの角度で表現される。

$\delta\psi$ ；黄経の章動 (nutation in longitude)

$\delta\epsilon$ ；黄道傾斜角の章動 (nutation in obliquity)

黄道傾角の章動を考慮した真の黄道傾角 (true obliquity of ecliptic) は

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon \quad (3.25)$$

で表される。 $\bar{\epsilon}$  は平均黄道面から測った平均黄道傾角で次の式から計算される。

$$\bar{\epsilon} = a_\epsilon + b_\epsilon T + c_\epsilon T^2 + d_\epsilon T^3 \quad (3.26)$$

$$a_\epsilon = 23^\circ 27' 08''.26$$

$$b_\epsilon = -46''.845$$

$$c_\epsilon = -0''.0059$$

$$d_\epsilon = 0''.00181$$

ここで、 $T$  は 1900 Jan 0.5 ET からユリウス世紀で測った時刻であり、次式より計算され

る。

$$T = \frac{T_{\text{MJED}} - 15019.5}{36525} \quad (3.27)$$

$T_{\text{MJED}}$ ; 時刻  $t$  の MJED 表現.

黄道傾角の章動  $\delta\varepsilon$  と黄経の章動  $\delta\psi$  は, JPL エフェメリスの値 (現在 DE 118) を採用する。

Mean of Date 地球赤道座標系から True of Date 地球赤道座標系への変換は, 次の手順で行われる。

- ①  $x$  軸のまわりに  $\bar{\varepsilon}$  だけ正の方向に回転する。(回転行列  $N_1$ )
- ② 回転してできた  $z''$  軸のまわりに  $\delta\psi$  だけ負の方向に回転する。(回転行列  $N_2$ )
- ③ 回転してできた  $x'$  軸のまわりに  $\varepsilon$  だけ負の方向に回転する。(回転行列  $N_3$ )

これら回転行列は次式で与えられる。

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\varepsilon} & \sin \bar{\varepsilon} \\ 0 & -\sin \bar{\varepsilon} & \cos \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \cos \delta\psi & -\sin \delta\psi & 0 \\ \sin \delta\psi & \cos \delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

したがって, Mean of Date 地球赤道座標系から True of Date 地球赤道座標系への変換行列は, 次式で与えられる。

$$N = N_3 N_2 N_1 \quad (3.29)$$

### (3) 地球赤道座標系と地球固定座標系との関係

#### a. true of date 地球赤道座標系と擬地球固定座標系との関係

true of date 地球赤道座標系 ( $x_T, y_T, z_T$ ) と擬地球固定座標系 ( $X', Y', Z'$ ) との間の変換は,  $Z_T$  軸 ( $Z$  軸) のまわりの回転であり, その回転角は真のグリニッジ恒星時  $\theta_g$  である。

その回転行列は,

$$B(\theta_g) = \begin{bmatrix} \cos \theta_g & \sin \theta_g & 0 \\ -\sin \theta_g & \cos \theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

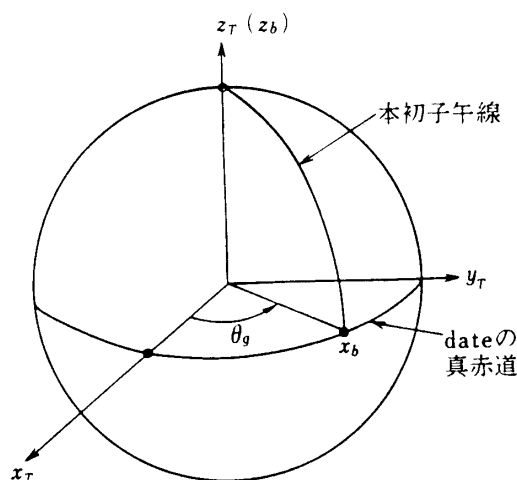


図 3.10 グリニジ恒星時

となる。ここで真のグリニジ恒星時  $\theta_g$  は、次式で計算される。

$$\begin{aligned}\theta_g &= \theta_M + \delta\psi \cos \varepsilon \\ &= 100.0755425 + 360.9856473460(T - 33282) \\ &\quad + 0.29015 \times 10^{-12}(T - 33282)^2 + \delta\psi \cos \varepsilon_T\end{aligned}\quad (3.31)$$

ここで、 $T$ ；時刻の MJD 表現 (UT 1)

$\delta\psi$ ；黄道の章動

$\varepsilon_T$ ；真の黄道傾角。

#### b. 擬地球固定座標系と地球固定座標系の関係

##### (a) 極運動

地球を概ね回転楕円体と見做すと、慣性主軸の方向は、楕円体の回転軸方向と赤道方向 (2本) となる。回転軸方向の主慣性モーメントの大きさは赤道方向のそれとわずかながら異なるため、地球には自由章動が生ずる。すなわち、地球自転軸のまわりを楕円体の回転軸がある周期をもって回る。地上にいる者にとっては、これは逆に、地球自転軸が回転軸のまわりを回るように見える。したがって、ある時刻における自転軸で定義された極は、任意の時刻における自転軸で定義された極と一致しない。これは極運動と呼ばれる。

時刻  $t$  における自転軸と地表面との交点を時刻  $t$  における真の極とする。地表面での真の極の軌跡は、ほぼ規則的な成分と不規則な成分を持っていて予測できない。この不規則成分は地球が完全な剛体でないこと等のために生ずる。なお、真の極は、慣用国際極原点と呼ばれる地点から半径約 10 m の領域内を運動していることが知られている。

慣用国際極原点を基準極  $P_A$  とする。一般には  $P_A$  は 1903.0 年の平均極がとられる。更に、1903.0 年平均赤道面と本初子午線の交点方向及び 1903.0 年平均地球自転軸をそれぞれ  $x$  軸、 $z$  軸として、地球固定座標系が構成される。



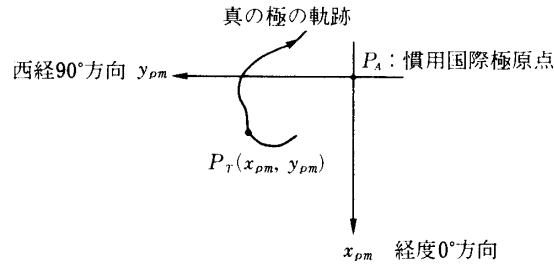


図 3.11 極運動

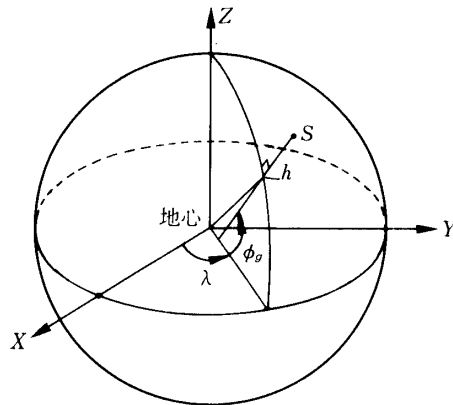


図 3.12 測地座標

北極において、 $P_A$  を原点とした左手系の平面直交座標を考える。すなわち、 $x_{pm}$  軸方向を本初子午線に沿って取り、 $y_{pm}$  軸を西経  $90^\circ$  の子午線に沿って取る。時刻  $t$  における真の極  $P_T$  の座標を  $(x_{pm}, y_{pm})$  とすると、この値を用いて擬地球固定座標系と地球固定座標系の変換行列が計算できる。 $x_{pm}$ 、 $y_{pm}$  の値は、国際報時局 (BIH) から角度秒単位で発表されている。

(b) 擬地球固定座標系から地球固定座標系への変換

擬地球固定座標系  $(X', Y', Z')$  と地球固定座標系  $(X, Y, Z)$  の間の変換は  $x_{pm}$ 、 $y_{pm}$  が微小量であるので次のように表わされる。

$$\mathbf{r}_0 = B_2(x_{pm}, y_{pm}) \mathbf{r}'_0 \tag{3.32}$$

ここに

$$B_2(x_{pm}, y_{pm}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{pm} \\ 0 & 1 & -y_{pm} \\ -x_{pm} & y_{pm} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_0 = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

## c. 地球固定座標系におけるカルテジアン表現と測地座標表現の関係

地球固定座標系における位置ベクトルの表示方法には、カルテジアン表現  $(X, Y, Z)$  と測地座標表現  $(\phi_g, \lambda, h)$  が一般的である。

地球は、地球自転軸を中心とした回転楕円体に近い形をしている。そこで地球を回転楕円体でモデル化し(ジオイド)、位置  $S$  から、ジオイド上におろした垂線と赤道面のなす角  $\phi_g$ 、経度  $\lambda$ 、及び  $S$  のジオイド上からの高度  $h$  で位置  $S$  を記述したのが測地座標である。 $\phi_g$  は測地緯度と呼ばれる。

測地座標表現からカルテジアン表現への変換式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi_g\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi_g\sin\lambda \\ (N+h-Ne^2)\sin\phi_g \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

ここに

$$N = \frac{a_e}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi_g}} \quad (3.35)$$

$\phi_g$  ; 測地緯度

$\lambda$  ; 経度 (東経)

$h$  ; ジオイド (平均海面) からの高度

$a_e$  ; 平均地球赤道半径

$e = \sqrt{f(2-f)}$   $f$  ; 地球偏平率

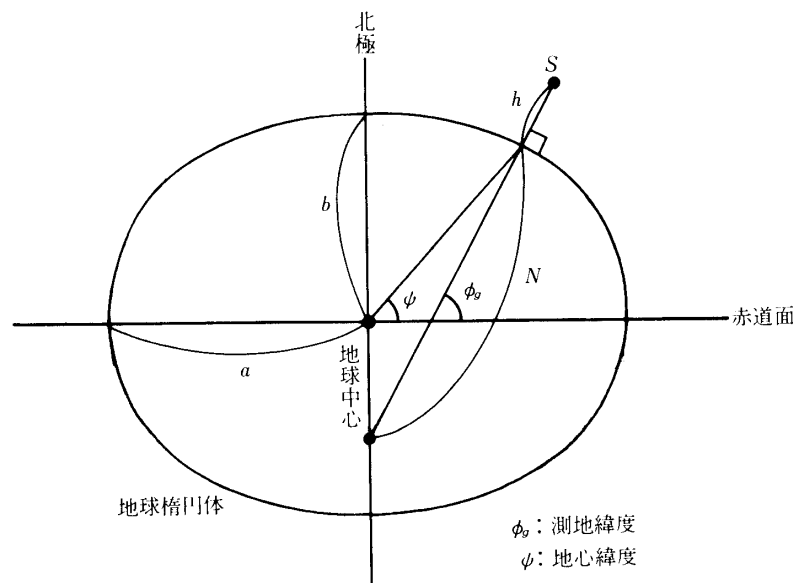


図 3.13 経度  $\lambda$  における地球断面

カルテジアン表現から測地座標表現への変換はイタレーションを用いる。初期値を

$$t_0 = e^2 Z \tag{3.36}$$

として

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i = Z + t_i \\ (N+h)_i = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z_i^2} \\ \sin \phi_g^i = \frac{Z_i}{(N+h)_i} \\ N_i = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_g^i}} \\ t_{i+1} = N_i e^2 \sin^2 \phi_g^i \end{array} \right. \tag{3.37}$$

を  $|t_i| < \varepsilon$  となるまで繰り返す。

経度  $\lambda$ ，測地緯度  $\phi_g$ ，高度  $h$  は，

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \tan^{-1}(Y/X) \\ \phi_g = \sin^{-1}\left(\frac{Z_i}{(N+h)_i}\right) \\ h = (N+h)_i - N_i \end{array} \right\} \tag{3.38}$$

(4) 地球固定座標系と地表面座標系との関係

地球固定座標系と地表面座標系との関係を図 3.14 に示す。地表面座標系は、ほとんどが観測局の局位置  $S$  を原点として用いるので位置ベクトルを表示する場合は、地球原点  $O$  から局位置  $S$  までの座標の並進が必要である。並進ベクトル  $r_t$  とすると、その表現は、

$$\mathbf{r}_t = \begin{bmatrix} (N+h)\cos \phi_g \cos \lambda \\ (N+h)\cos \phi_g \sin \lambda \\ \{N(1-e^2)+h\}\sin \phi_g \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

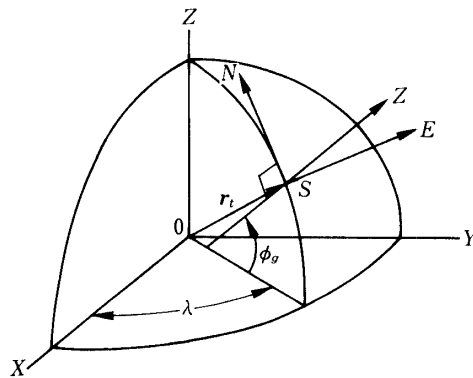


図 3.14 地球固定座標系と地表面座標系

ここに,

$$N = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_g}}$$

$h$  = 観測局  $S$  のジオイドからの高度

$\phi_g$  = 観測局  $S$  の測地緯度

$\lambda$  = 観測局  $S$  の経度 (東経)

$e$  = 地球離心率

$a_e$  = 平均地球赤道半径

となる。

地球固定座標系 (XYZ 系) から地表面座標系 (ZEN 系) への変換行列は, 次式であらわされる。

$$\mathbf{r}_{ZEN} = T \mathbf{r}_{XYZ} \quad (3.40)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi_g & \sin \lambda \cos \phi_g & \sin \phi_g \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \phi_g & -\sin \lambda \sin \phi_g & \cos \phi_g \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

(5) カルテジアンとケプラリアンとの関係

a. 基準面と軌道面の間の変換 (カルテジアン)

$$\mathbf{r}(X, Y, Z) \rightarrow \mathbf{r}_\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega) : \mathbf{r}_\omega = T \mathbf{r} \quad (3.42)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega & \cos \omega \sin \Omega & \sin \omega \sin i \\ -\sin \omega \cos i \sin \Omega & +\sin \omega \cos i \cos \Omega & \\ -\sin \omega \cos \Omega & -\sin \omega \sin \Omega & \cos \omega \sin i \\ -\cos \omega \cos i \sin \Omega & +\cos \omega \cos i \cos \Omega & \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \sin \Omega & \cos i \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

b. カルテジアンと  $\mathbf{r}_\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$  の関係

(a) 楕円 ( $0 < e < 1$ )

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \nu} = a(1 - e \cos E) \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} x_\omega = r \cos \nu = a(\cos E - e) \\ y_\omega = r \sin \nu = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ z_\omega = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\text{ここに } P = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu^2}$$

$E$  ; 離心近点離角

$M$  と  $E$  の関係は, Kepler 方程式,

$$M = n\Delta t = E - e \sin E \quad (3.46)$$

$$n = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} \quad ; \text{平均運動 (rad/sec)}$$

であらわされる.

(b) 放物線 ( $e=1$ )

$$r = 2q \sec^2 \frac{1}{2} \nu \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} x_\omega = r \cos \nu \\ y_\omega = r \sin \nu \\ z_\omega = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\text{ここに } 2q = \lim_{e \rightarrow 1} P$$

$M_p$  とパラメータ

$$D \equiv \sqrt{2q} \tan \frac{\nu}{2} \quad (3.49)$$

の関係は

$$M_p = n\Delta t = qD + \frac{D^3}{6} \quad (3.50)$$

$$n = \mu^{1/2} \quad ; \text{平均運動}$$

となる.

(c) 双曲線 ( $e > 1$ )

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \nu} = a(1 - e \cosh F) \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} x_\omega = r \cos \nu = a(\cosh F - e) \\ y_\omega = r \sin \nu = -a\sqrt{e^2 - 1} \sinh F \\ z_\omega = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\text{ここに } P = (-a)(e^2 - 1) \quad (a < 0)$$

$$F = \frac{2 \times (\text{図 3-7(d) の斜線の面積})}{a^2}$$

$M_H$  と  $F$  の関係は, 双曲線における Kepler 方程式,

$$M_H = n\Delta t = e \sinh F - F \quad (3.53)$$

$$n = \frac{\mu^{1/2}}{(-a)^{3/2}}; \text{平均運動}$$

で与えられる。

### 3.2 運動方程式

#### 3.2.1 加速度

S/Cが惑星間を航行する時に受ける加速度として、次の8つの項を考慮する。

- ① 天体（太陽，9惑星，月）を質点としたニュートン力による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_P$ ).
- ② SOI（重力の影響圏）内の中心天体の非球対称成分による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_{OBL}$ ).
- ③ 太陽輻射圧による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_{SRP}$ ).
- ④ ガスリークなどの微小力による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_{SF}$ ).
- ⑤ 一般相対論の効果による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_{GR}$ ).
- ⑥ 地球大気の抵抗による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_{AD}$ ).
- ⑦ 瞬時的なマヌーバによる速度変化 ( $\dot{\mathbf{r}}_{IM}$ ).
- ⑧ モーター噴射による加速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_{FMB}$ ).

S/Cの運動方程式は次式で表される。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (3.54)$$

ここで， $\dot{\mathbf{r}}_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ：上記①から⑧までの各加速度項

$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ ：S/Cの位置，速度。

本プログラムでは，時間  $t$  を ET（暦表時）の時系にとり，座標系は EME 50（1950.0年の地球平均赤道座標系）を採用している。座標系の原点は特定の天体の質量中心にとる。通常，地球中心又は太陽中心である。天体のエフェメリスは JPL（ジェット推進研究所）のエフェメリステープ DE 118 を使用している。

(3.54)式は，2階の常微分方程式であり，初期値問題として数値的に解ける。以下に(3.54)式の右辺である各加速度項の計算式を示す。断わりのない時は，ベクトルは3次元列ベクトルであり，使用する座標系は EME 50 とする。

(1) 天体を質点としたニュートン力による加速度

考慮する重力天体は，太陽，9惑星，月である。天体を質点としたニュートン力による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_P$  は，次のように導かれる。

ニュートンの万有引力の法則から，天体1（位置  $\mathbf{r}_1$ ，質量  $m_1$ ），天体2（位置  $\mathbf{r}_2$ ，質量  $m_2$ ）間の力  $F_{12}$ （スカラー）は，次式で表される。

$$F_{12} = \frac{Gm_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \quad (3.55)$$

$G$  は万有引力定数,  $r_{12}=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$  である. 第  $i$  番めの質点が, 残りの  $(n-1)$  個の質点から受ける力  $\mathbf{F}_i$  (ベクトル) は, 次式で表される.

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3} \quad (3.56)$$

また, ニュートンの第2法則から,

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt^2} \quad (3.57)$$

となり, (3.56)式と(3.57)式から次式が得られる.

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \quad (3.58)$$

S/Cの質量  $m_s$  が  $n$  個の天体に及ぼすニュートン力は, 無視できる.  $n$  個の天体による S/Cの加速度は, 次式で表される.

$$\frac{d^2\mathbf{r}_s}{dt^2} = -G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j}{r_{sj}^3} \quad (3.59)$$

座標の原点を特定の天体にとると, 計算の上で都合がよい. 通常, S/Cの属する SOIの天体を座標原点とする. (3.58)式と(3.59)式から

$$\frac{d^2\mathbf{r}_s}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j}{r_{sj}^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \quad (3.60)$$

したがって, 座標原点を天体  $i$  とするとき, S/Cの加速度は, 次式で表される.

$$\frac{d^2\mathbf{r}_{is}}{dt^2} = -\mu_i \frac{\mathbf{r}_{is}}{r_{is}^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \left( \frac{\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{is}}{|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{is}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \quad (3.61)$$

ここで,  $\mu_i = Gm_i$

$$\mu_j = Gm_j$$

$$\mathbf{r}_{sj} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{is}.$$

## (2) 中心天体の非球対称成分による加速度

中心天体の非球対称成分による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{OBL}$  は, 以下のように導かれる.

### a. 加速度の導出

重力天体のつくる重力場は, スカラーポテンシャル  $\Psi$  から導かれ, 次の Poisson の方程式を満す.

$$\nabla^2 \Psi(r, \phi, \lambda) = -\rho(r, \phi, \lambda) \quad (3.62)$$

ここで、 $r$ ：天体の質量中心から S/C までの距離  
 $\phi$ ：S/C の直下点の緯度（地心緯度）  
 $\lambda$ ：S/C の直下点の経度  
 $\rho$ ：質量分布密度。

S/C は、天体の外側に位置しているので、 $\rho(r, \phi, \lambda) = 0$  である。したがって(3.62)式は、次の Laplace の方程式となる。

$$\nabla^2 \Psi(r, \phi, \lambda) = 0 \quad (3.63)$$

上式を変数分離法によって解くと、次式を得る。

$$\Psi(r, \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} Y_n(\phi, \lambda) \quad (3.64)$$

ここで、 $Y_n(\phi, \lambda)$  は、 $n$  次の球面調和関数であり、次式で定義される。

$$Y_n(\phi, \lambda) = A_{n,0} P_n(\sin \phi) + \sum_{m=1}^n (A_{n,m} \cos m\lambda + B_{n,m} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \phi). \quad (3.65)$$

また  $P_n(\sin \phi)$  は帯球関数 (zonal harmonics)、 $P_n^m(\sin \phi)$  は縞球関数 (tesseral harmonics) である。(以下  $P_n$ 、 $P_n^m$  と略記する。 $P_n = P_n^0$ )

$r$  を天体の赤道半径  $a_P$  で規格化し、 $n=0$  のときは質点による中心力となる条件から、(3.64)式は次式となる。

$$\Psi(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n P_n^m(C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \right] \quad (3.66)$$

ここで、 $\mu = GM_c$  ( $M_c$  は中心天体の質量)。

座標中心を天体の質量中心とすると、 $n=1$  の項はゼロになる。 $m=0$  の係数  $C_{n,0}$  を次の  $J_n$  で置き換えると、

$$J_n = -C_{n,0} \quad (3.67)$$

(3.66)式は次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \Psi(r, \phi, \lambda) = & \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n P_n \\ & + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n P_n^m(C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \end{aligned} \quad (3.68)$$

ここで、 $J_n$ 、 $C_{n,m}$ 、 $S_{n,m}$  は重力ポテンシャルの調和係数である。本プログラムでは、SAO (スミソニアン天文台) の C-7 系を使用している。

(3.68)式の右辺第1項は、天体を質点とした重力ポテンシャルである。第2項、第3項



が非対称性によるポテンシャルであり，それぞれ  $U(J)$ ， $U(C,S)$  と記述する．

$$U(J) = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{a_p}{r}\right)^n \cdot P_n \quad (3.69)$$

$$U(C,S) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_p}{r}\right)^n P_n^m (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \quad (3.70)$$

$$U = U(J) + U(C,S) \quad (3.71)$$

天体の非球対称成分による加速度は，(3.71)式を  $\mathbf{r}_b$  (天体固定座標系での S/C の位置ベクトル) で偏微分すれば得られる．

$$\dot{\mathbf{r}}_b = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \frac{\partial U}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T + \frac{\partial U}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T + \frac{\partial U}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \quad (3.72)$$

ここで，

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \frac{\mathbf{r}_b}{r} \quad (3.73)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ x_b \left(\frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T - y_b \left(\frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \right] \quad (3.74)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ -\frac{z_b \mathbf{r}_b}{r^2} + \left(\frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T \right] \quad (3.75)$$

$$\left(\frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

これらを，(3.72)式に代入すると， $\dot{\mathbf{r}}_b = (\ddot{x}_b, \ddot{y}_b, \ddot{z}_b)^T$  は次のように表される．

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{z_b}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) x_b - \left( \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) y_b \\ \ddot{y}_b &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{z_b}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) y_b + \left( \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) x_b \\ \ddot{z}_b &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) z_b + \frac{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3.77)$$

天体固定座標系で表現される S/C の加速度  $\dot{\mathbf{r}}_b$  は，(3.77)式で計算される． $\dot{\mathbf{r}}_b$  は，瞬時の天体固定座標系の基準軸で表現されているが，慣性座標系である．EME 50 での S/C の加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{OBL}$  は， $\dot{\mathbf{r}}_b$  を座標変換して求める．EME 50 から地球固定座標に変換する行列を  $M$  とする． $\dot{\mathbf{r}}_{OBL}$  は次式で求められる．

$$\dot{\mathbf{r}}_{OBL} = M^{-1} \cdot \dot{\mathbf{r}}_b \quad (3.78)$$

b.  $\partial U/\partial r$ ,  $\partial U/\partial \lambda$ ,  $\partial U/\partial \phi$  の計算式

次に  $\partial U/\partial r$ ,  $\partial U/\partial \lambda$ ,  $\partial U/\partial \phi$  の計算式を以下に示す.

$U(J)$  については,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(J)}{\partial r} &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n (n+1) P_n \\ \frac{\partial U(J)}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial U(J)}{\partial \phi} &= -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n \cos \phi \cdot P'_n\end{aligned}\tag{3.79}$$

ここで,  $P'_n = \frac{dP_n(\sin \phi)}{d(\sin \phi)}$  である.

また,  $U(C, S)$  については,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(C, S)}{\partial r} &= -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n (n+1) P_n^m (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \\ \frac{\partial U(C, S)}{\partial \lambda} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n P_n^m \cdot m (-C_{n,m} \sin m\lambda + S_{n,m} \cos m\lambda) \\ \frac{\partial U(C, S)}{\partial \phi} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_P}{r} \right)^n \cos \phi P_n^{m'} (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda)\end{aligned}\tag{3.80}$$

ここで,  $P_n^{m'} = \frac{dP_n^m(\sin \phi)}{d(\sin \phi)}$  である. したがって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{\partial U(J)}{\partial r} + \frac{\partial U(C, S)}{\partial r} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= \frac{\partial U(J)}{\partial \lambda} + \frac{\partial U(C, S)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= \frac{\partial U(J)}{\partial \phi} + \frac{\partial U(C, S)}{\partial \phi}\end{aligned}\tag{3.81}$$

$P_n$ ,  $P'_n$ ,  $P_n^m$ ,  $P_n^{m'}$  の計算を, 以下に示す.

$$\begin{aligned}P_0 &= 1, \quad P_1 = \sin \phi \\ P_n &= \left( \frac{2n-1}{n} \right) \sin \phi \cdot P_{n-1} + \left( \frac{n-1}{n} \right) P_{n-2}\end{aligned}\tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}P'_1 &= 1 \\ P'_n &= \sin \phi P'_{n-1} + n P_{n-1}\end{aligned}\tag{3.83}$$

$P_n^m$  については, まず  $P_n^m$  を計算してから  $P_n^m$  を求める.

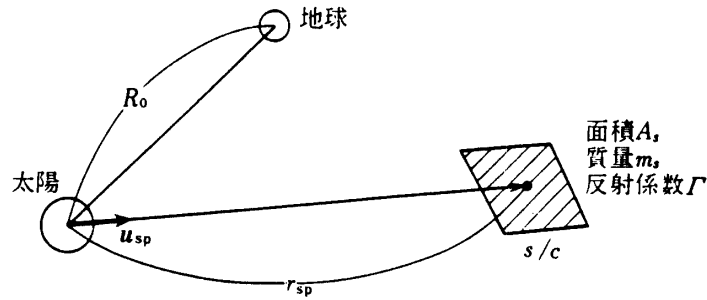


図 3.15 太陽輻射圧の簡略モデル

$$\sec \phi P_1^1 = 1$$

$$\sec \phi P_m^m = (2m-1) \cos \phi (\sec \phi P_{m-1}^{m-1})$$

$$\sec \phi P_n^m = \left( \frac{2n-1}{n-m} \right) \sin \phi (\sec \phi P_{n-1}^m) - \left( \frac{n+m-1}{n-m} \right) (\sec \phi P_{n-2}^m) \quad (3.84)$$

ここで,  $b > a$  のとき,  $P_a^b = 0$  とする.

$$\cos \phi P_n^{m'} = -n \sin \phi (\sec \phi P_n^m) + (n+m) (\sec \phi P_{n-1}^m)$$

### (3) 太陽輻射圧による加速度

太陽輻射圧による加速度として, 簡略化したモデルと詳細なモデルの2つを考慮する.

#### a. 簡略モデル

簡略モデルによる S/C の加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{SRP}$  は, 以下の式で計算される.

$$\dot{\mathbf{r}}_{SRP} = \frac{S_0}{c} (1 + \Gamma) \cdot \frac{A_s}{m_s} \cdot \left( \frac{R_0}{r_{SP}} \right)^2 \cdot \mathbf{u}_{SP} \quad (3.85)$$

ここで

$S_0$ : 太陽定数 ( $= 1.35 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ )

$c$ : 光速度

$\Gamma$ : S/C の反射係数

$A_s$ : S/C の実効断面積

$m_s$ : S/C の質量

$R_0$ : 太陽から地球までの平均距離 (1 A.U.)

$r_{SP}$ : 太陽から S/C までの距離

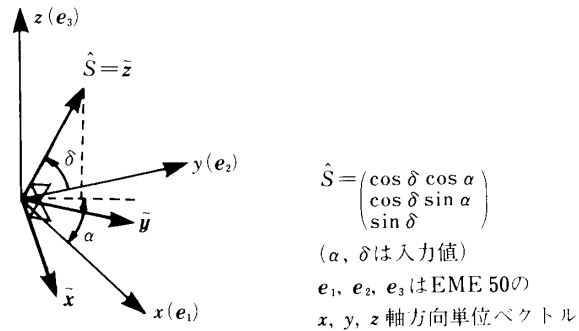
$\mathbf{u}_{SP}$ : 太陽から S/C 方向への単位ベクトル.

図 3.15 に, 太陽と S/C の位置関係を図示する.

#### b. 詳細モデル

詳細モデルによる S/C の加速度は, 以下の3つのモデルに分けて計算される.

- バスモデル (球, 円筒)

図 3.16  $\tilde{x}-\tilde{y}-\tilde{z}$  座標系

- パネルモデル (平板)
- アンテナモデル (パラボラ)

各モデルとも、S/C 固定座標系 ( $x^*y^*z^*$  系) で計算される。この座標系は次のように決められる。S/C の基準軸 (スピン軸)  $\hat{S}$  が入力されるとき、瞬時の S/C から見た太陽方向  $\hat{x}$  を  $x^*$  軸、 $\hat{S} \times \hat{x}$  方向を  $y^*$  軸、右手直交系をなすように  $z^*$  軸をとる。

(4) ガスリークなどの微小力による加速度

( $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ ) 系での微小力による加速度を  $\tilde{\mathbf{r}}$  と記す。EME 50 での加速度  $\dot{\mathbf{r}}$  は、

$$\dot{\mathbf{r}} = \tilde{T} \tilde{\mathbf{r}} \quad (3.86)$$

ここで、

$\tilde{T}$  = S/C 固定系 ( $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ ) から EME 50 に変換する行列

$$\tilde{T} = (\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_x & \tilde{y}_x & \tilde{z}_x \\ \tilde{x}_y & \tilde{y}_y & \tilde{z}_y \\ \tilde{x}_z & \tilde{y}_z & \tilde{z}_z \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

また、 $\tilde{\mathbf{r}}$  は、

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

$\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  は定数

$\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  は、以下のように定義される。

$$\begin{cases} \tilde{z} = \hat{S} \\ \tilde{y} = \frac{\tilde{z} \times \mathbf{e}_1}{|\tilde{z} \times \mathbf{e}_1|} \\ \tilde{x} = \tilde{y} \times \tilde{z} \end{cases} \quad (3.89)$$

EME 50 での  $\tilde{x}$  の成分  $= (x_x, x_y, x_z)^T$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  も同様である。

(5) 一般相対性理論の効果による加速度

C. Brans と R. H. Dicke の式によると, 天体  $j$  による, 天体  $i$  の一般相対論の効果による加速度は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i(j) = & \frac{\mu_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \left\{ -\frac{2(1+\gamma)}{c^2} \phi_i - \frac{1}{c^2} \phi_j + \gamma \left( \frac{\dot{s}_i}{c} \right)^2 + (1+\gamma) \left( \frac{\dot{s}_j}{c} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{2(1+\gamma)}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j \right\} \\ & + \frac{1}{c^2} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \{ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) [(2+2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_i - (1+2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_j] \cdot (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + \frac{3+4\gamma}{2c^2} \frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \} \end{aligned} \quad (3.90)$$

ここで,  $r_{ij}$ : 天体  $i$  と天体  $j$  の距離

$(\dot{s}_i)^2$ : 天体  $i$  の速度の2乗

$(\dot{s}_j)^2$ : 天体  $j$  の速度の2乗

$\phi_i$ : 天体  $i$  のニュートン・ポテンシャル

$$\phi_i = \sum_{l \neq i} \frac{\mu_l}{r_{il}}$$

$\phi_j$ : 天体  $j$  のニュートン・ポテンシャル

$$\phi_j = \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{m \neq j} \frac{\mu_m (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)}{r_{mj}^3}$$

$\gamma$ : Brans と Dicke のパラメータ ( $1/2 \leq \gamma \leq 1$ ).  $\gamma = (1+\omega)/(2+\omega)$  で与えられる ( $0 \leq \omega \leq \infty$ ). スカラーの重力場は  $1/(4+2\omega)$ , テンソル場は  $1-1/(4+2\omega)$  で与えられる.

太陽による天体  $i$  の相対論による加速度は, 主要項のみ考慮して,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu_s}{c^2 \gamma^3} \{ [2(1+\gamma)\phi - \gamma \dot{s}^2] \mathbf{r} + 2(1+\gamma)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \} \quad (3.91)$$

ここで,  $\mu_s$ : 太陽の重力定数

$c$ : 光速

$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ : 太陽中心の天体  $i$  の位置と速度

$r$ :  $\mathbf{r}$  の大きさ

$\dot{s}$ :  $\dot{\mathbf{r}}$  の大きさ

$\phi$ : ニュートン・ポテンシャル ( $\mu/r$ ).

天体  $C$  (地球, 月を除く) を座標中心とすると, 一般相対論による  $S/C$  の加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{GR}$  は,

$$\dot{\mathbf{r}}_{GR} = \dot{\mathbf{r}}_{SC}(S) - \ddot{\mathbf{r}}_C(S) \quad (3.92)$$

となる. 上式の右辺第1項, 第2項は, (3.91)式から計算する. (座標中心が太陽のときは, 右辺第2項はゼロとなる.) (3.91)式で使う  $\phi$  は, 次式から計算する.

① 天体  $i$  が  $S/C$  のとき;

$$\phi_{SC} = \phi_i = \frac{\mu_S}{r} + \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}} \quad (j: \text{考慮天体}). \quad (3.93)$$

② 天体  $i$  が惑星のとき;

$$\phi_P = \phi_i = \frac{\mu_S}{r}. \quad (3.94)$$

一方, 積分中心天体が地球又は月のときは, 一般相対論の加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{GR}$  は次式で計算される.

$$\dot{\mathbf{r}}_{GR} = \dot{\mathbf{r}}_{SC}(S) - \ddot{\mathbf{r}}_C(S) + \sum_j^{\text{地球, 月}} \dot{\mathbf{r}}_{SC}(j) - \ddot{\mathbf{r}}_C(n) \quad (3.95)$$

第3項は, 地球と月による  $S/C$  への加速度であり, (3.90)式から計算する. 第4項は, 積分中心が地球のときは, 月による地球の受ける加速度である.

(6) 大気抵抗による加速度

大気の抵抗によって受ける加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{AD}$  は,  $S/C$  の形状や飛行中の姿勢を考えないものとし, 地球中心の慣性系で表現すると, 次式で表される.

$$\dot{\mathbf{r}}_{AD} = -\frac{1}{2} \rho C_D \left( \frac{A_S}{m_S} \right) v_r \cdot \mathbf{v}_r \quad (3.96)$$

ここで,  $A_S$ :  $S/C$  の実効断面積

$m_S$ :  $S/C$  の質量

$C_D$ :  $S/C$  の大気抵抗係数

$\rho$ :  $S/C$  の位置での大気密度.

また,  $\mathbf{v}_r$  は, 大気に対する  $S/C$  の相対速度で

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega}_\omega \times \mathbf{r} \quad (3.97)$$

で表される.  $\boldsymbol{\Omega}_\omega$  は反対称行列で, 次式で表される.

$$\boldsymbol{\Omega}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

表 3.6 Jacchia-Nicolet 大気密度モデル係数

	$i \backslash j$	1	2	3	4
$A_i$	—	-1.1335948	31.858566	-8.7827269	—
$B_{ij}$	1	-0.514627	36.8141	-22.6334	4.47654
	2	26.46222	-37.5137	23.9095	-4.83017
	3	-6.28711	9.994692	-6.780537	1.41853
	4	0.604854	-1.00192	0.695452	-0.148026
$C_{ij}$	1	-61.5177	173.970	-111.908	23.3864
	2	48.60687	-93.4870	60.34177	-12.64406
	3	-6.87280	14.1203	-9.349784	1.989456
	4	0.305394	-0.651270	0.440330	-0.0950336

ここで,  $\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ : 地球の角速度ベクトル (EME 50)

$\mathbf{r}$ : S/C 位置ベクトル (EME 50)

$\dot{\mathbf{r}}$ : S/C 速度ベクトル (EME 50).

(3.96)式の  $\rho$  の計算は, Jacchia-Nicolet 大気密度モデルを使用する. このモデルは, 下式に示すように高度 120 km から 160 km では高度  $h$  のみの関数とし, 高度 160 km 以上では高度  $h$  と外気圏温度  $T$  として, 指数関数近似する.

①  $h < 160$  km のとき

$$\rho = \left[ \exp\left(-\sum_{i=1}^3 A_i h^{(i-1)}\right) \right] \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3.99)$$

②  $160 \text{ km} \leq h < 420 \text{ km}$  のとき

$$\rho = \left[ \exp\left(-\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 B_{ij} T^{(i-1)} h^{(j-1)}\right) \right] \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3.100)$$

③  $420 \text{ km} \leq h < 1000 \text{ km}$  のとき

$$\rho = \left[ \exp\left(-\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_{ij} T^{(i-1)} h^{(j-1)}\right) \right] \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3.101)$$

ここで,  $h' = h(\text{m})/100000(\text{m})$ ,  $T' = T(^{\circ}\text{K})/1000(^{\circ}\text{K})$ .

上式の多項式の係数  $A_i$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  を表 3.6 に示す.

外気圏温度  $T$  については次の要因を考慮する.

- 太陽活動による変化

- ・半年周期変化
- ・日周変化

以下に各要因の計算式を説明する。

① 太陽活動による変化

$$\bar{T}_0 = 418(^{\circ}\text{K}) + 3.60(^{\circ}\text{K}/\text{flux}) \times \bar{F}_{10.7} \quad (3.102)$$

$\bar{T}_0$  : 54 日間 (2 太陽自転周期) の平均全地球夜間最低温度

$\bar{F}_{10.7}$  : 54 日間の地表面における 10.7 cm 太陽電波の輻射流束密度

特定の日に対する全地球夜間最低温度は次式で計算される。

$$T'_0 = \bar{T}_0 + 1.8(F_{10.7} - \bar{F}_{10.7}) \quad (3.103)$$

本プログラムでは、近似式として次式を使用する。

$$T'_0 = \bar{T}(F_{10.7} - \bar{F}_{10.7}) \quad (3.104)$$

② 半年周期変化の補正

半年周期変化に対して補正された全地球夜間最低温度  $T_0$  は、次式で計算する。

$$T = T'_0 + 2.41 + \bar{F}_{10.7} \{0.349 + 0.206 \sin(2\pi\tau + 226^{\circ}.5)\} \sin(4\pi\tau + 247^{\circ}.6) \quad (3.105)$$

ここで、 $\tau$  は年初からの日数  $d$  を用いて次式で表される。

$$\tau = \frac{d}{365.2422}$$

③ 日周変化

日周変化を考慮した任意の地点における外気圏温度  $T$  は、次式で計算される。

$$T = T_0(1 + R \sin^m \theta) \left( 1 + R \frac{\cos^m \eta - \sin^m \theta}{1 + R \sin^m \theta} \cos^n \frac{\tau}{2} \right) \quad (3.106)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0.5(\varphi - \delta_{\odot}) \\ \theta &= 0.5(\varphi + \delta_{\odot}) \\ \tau &= H + \beta + P \sin(H + \alpha_{\odot}) \end{aligned} \right\} \quad (3.107)$$

$\delta_{\odot}$  : 太陽赤緯

$\varphi$  : 衛星直下点緯度

$H = \alpha_s - \alpha_{\odot}$

$\alpha_s$  : 衛星赤経

$\alpha_{\odot}$  : 太陽赤経.



定数は次の値を用いる.

$$R=0.26 \quad m=n=2.5 \quad \beta=-45^\circ \quad P=12^\circ \quad \gamma=45^\circ$$

(7) 瞬時的なマヌーバによる速度変化

瞬時的なマヌーバによってS/Cの速度および重量が変化する. マヌーバの時刻  $t_n$  とし, マヌーバ前の位置, 速度, 重量を  $\mathbf{r}(t_n)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t_n)$ ,  $M(t_n)$ , マヌーバ後のそれらを  $\tilde{\mathbf{r}}(t_n)$ ,  $\tilde{\dot{\mathbf{r}}}(t_n)$ ,  $\tilde{M}(t_n)$  とする. 瞬時的なマヌーバの計算は次式を用いる.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}(t_n) &= \mathbf{r}(t_n) \\ \tilde{\dot{\mathbf{r}}}(t_n) &= \dot{\mathbf{r}}(t_n) + \Delta\dot{\mathbf{r}} \\ \tilde{M}(t_n) &= M(t_n) - \Delta M \end{aligned} \right\} \quad (3.108)$$

ここに,

$\Delta\dot{\mathbf{r}}$ : 速度増分 (EME 50; km/s)

$\Delta M$ : 重量減少量 (kg)

(8) モーター噴射による加速度 (連続噴射)

モーター噴射による加速度は, 次式で計算される.

$$\dot{\mathbf{r}}_{MB} = \left( \frac{F}{M} \cdot C_{PF} \right) \mathbf{u} \quad (3.109)$$

ここで,

$F$ : モーターの推力である.  $F = F(t)$

$M$ : S/Cの質量である.  $M = M(t)$

$C_{PF}$ : 単位変換係数

$\mathbf{u}$ : モーターの推力の方向  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ .

$F$ ,  $M$ ,  $\mathbf{u}$  は, 時間の多項式展開として次式で計算される.

$$M = m_0 - \{ \dot{M}_0 t + M_1 t^2 + \cdots + \dot{M}_{n-1} t^n \} \quad (3.110)$$

$$F = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots + F_n t^n \quad (3.111)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n \quad (3.112)$$

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \cdots + \delta_n t^n \quad (3.113)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

ここで,

$m_0$  : S/C のノミナル質量

$t$  : マヌーバ開始時刻からの通算秒.

### 3.2.2 運動方程式の数値計算

前節で述べたように、S/C の運動を記述する運動方程式は、二階の非線形微分方程式になっている。したがって、時刻  $t$  における S/C の位置及び速度を知るためには、ある時刻  $t_0$  (エポック) における S/C の位置 ( $\mathbf{r}_0$ ) および速度 ( $\dot{\mathbf{r}}_0$ ) を与えて、運動方程式を積分して解を求めなければならない。この数値積分法の設計はその精度要求を充し、かつ計算時間を短縮するために細心の注意を払う必要がある。本プログラムでは、多段法の Adams-Cowell の予測子-修正子法を採用している。この方法の概要は、次のようになる。

- ① 探査機の位置座標に関しては、Störmer の予測子および Cowell の修正子を用いる。
- ② 探査機の速度座標に関しては、Adams-Bashforth の予測子と Adams-Molton の修正子を用いる。
- ③ 多段法の出発値の計算は 2 体近似で求めるか、又は 8 次の Runge-Kutta 法を用いる。
- ④ 積分刻み幅内の補間は積分公式を用いる。
- ⑤ 積分刻み幅を局所打ち切り誤差の制御により可変にする。

#### (1) Adams-Cowell の公式

ここでは、軌道生成問題に用いられる多段積分法の導出の概略について述べる。軌道生成問題は、次の 2 階常微分方程式の初期値問題と言い換えることができる。

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t), \dot{y}(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

上式は、1 階の常微分方程式に対する初期値問題

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

と、特殊な 2 階の常微分方程式に対する初期値問題

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

とに分けて考えることができる。

いま、(3.116) 式を解くことを考える。  $t_0$  から  $t_n$  までは、値が求まっていると仮定し、  $t_n$  から  $t_{n+s}$  まで積分すれば

$$y(t_{n+s}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+s}} f(t, y(t)) dt \quad (3.118)$$

となる。この式の右辺を計算するために、 $f(t, y(t))$  を、 $t_{n-p}, \dots, t_{n-p-r}$  での値を用いた補間式で近似する。補間式には、種々あるがここでは、Newton 後退補間多項式を用いて、(3.118)式を計算する。したがって、 $\dot{y}_{n-p}, \dot{y}_{n-p-1}, \dots, \dot{y}_{n-p-r}$  と  $y_n$  の値から  $y_{n+s}$  は求められる。

同様にして、(3.117)式を解くことができる。(3.117)式を  $t_n$  から  $t_{n+s}$  まで2回積分すれば、

$$y(t_{n+s}) - y(t_n) - (t_{n+s} - t_n) \dot{y}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+s}} (t_{n+s} - t) f(t, y(t)) dt \quad (3.119)$$

となる。この式は  $\dot{y}$  を含んでいるので、これを消去する。

まず  $t_{n+s}$  を  $t_{n-s}$  で置き換える。

$$y(t_{n-s}) - y(t_n) - (t_{n-s} - t_n) \dot{y}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n-s}} (t_{n-s} - t) f(t, y(t)) dt \quad (3.120)$$

(3.119)式と(3.120)式を辺々加えると、

$$y(t_{n+s}) - 2y(t_n) + y(t_{n-s}) = \int_{t_n}^{t_{n+s}} (t_{n+s} - t) \{f(t) + f(2t_n - t)\} dt \quad (3.121)$$

となる。この右辺を求めるために、1階の時と同じように、 $f(t, y(t))$  を Newton 後退補間多項式で近似すればよい。したがって  $\dot{y}_{n-p}, \dot{y}_{n-p-1}, \dots, \dot{y}_{n-p-r}$  と  $y_n, y_{n-s}$  の値から  $y_{n+s}$  は求められる。

#### a. 1階微分方程式の積分公式

1階微分方程式に対する積分公式は、(3.118)式に Newton 後退補間多項式を代入することにより求められる。Newton 後退補間多項式は、次式で表される。

$$f(t) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m f_p \quad (3.122)$$

ここで、 $f_p = f(t_p)$

$$t_p = t_0 + ph$$

$$t = t_0 + (s+p)h$$

$$\nabla f_p = f_p - f_{p-1}.$$

(3.122)式を(3.118)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} y(t_{n+s}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+s}} \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m \dot{y}_p dt \\ &= h \sum_{m=0}^q (-1)^m \nabla^m \dot{y}_p \int_{n-p}^{n-p+s} \binom{-s}{m} ds \end{aligned}$$

$$= h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m \dot{y}_p \quad (3.123)$$

$$\text{ただし, } \gamma_m(s) = (-1)^m \int_{n-p}^{n-p+s} \binom{-s'}{m} ds' \quad (3.124)$$

となる。ここで、 $p=n$  とすれば、

$$y(t_{n+s}) - y(t_n) = h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m \dot{y}_n \quad (3.125)$$

$$\gamma_m(s) = (-1)^m \int_0^s \binom{-s'}{m} ds' \quad (3.126)$$

となる。

次に、Summed Form の公式の導出を考える。

まず、Shift 演算子  $E$  を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} E y_m &= y_{n+1} \\ E^s y_m &= y_{n+s} \end{aligned} \quad (3.127)$$

この  $E$  と差分演算子  $\nabla$  との関係は、次式で表される。

$$E = (I - \nabla)^{-1} \quad (3.128)$$

したがって、

$$y_n = E^{-s} y_{n+s} = (1 - \nabla)^s y_{n+s} \quad (3.129)$$

となる。この式を (3.125) 式に代入すると次のようになる。

$$(1 - (1 - \nabla)^s) y_{n+s} = h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m \dot{y}_n \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h \sum_{m=0}^q \frac{(-1)^m \int_0^s \binom{-s'}{m} ds'}{1 - (1 - \nabla)^s} \nabla^m \dot{y} \\ &= h \sum_{m=-1}^{q-1} \gamma'_m(s) \nabla^m \dot{y}_n \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\text{ただし, } \gamma'_m(s) \nabla^m = \frac{(-1)^{m+1} \int_0^s \binom{-s'}{m} ds'}{1 - (1 - \nabla)^s} \nabla^{m+1} \quad (3.132)$$

この  $\gamma'_m(s)$  は次の様にして求められる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma'_m(s) \nabla^m = \sum_{m=-1}^{\infty} (-1)^{m+1} \int_0^s \binom{-s'}{m+1} ds' \times \frac{\nabla^{m+1}}{1-(1-\nabla)^s} \quad (3.133)$$

両辺に  $\nabla$  を作用させる。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{m-1}(s) \nabla^m &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \int_0^s \binom{-s'}{m} ds' \times \nabla^m \frac{\nabla}{1-(1-\nabla)^s} \\ &= \int_0^s (1-\nabla)^{-s'} ds' \times \frac{\nabla}{1-(1-\nabla)^s} = -\frac{(1-\nabla)^{-s} \times \nabla}{\log(1-\nabla)} \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$-\frac{\log(1-\nabla)}{\nabla} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{m-1}(s) \nabla^m = (1-\nabla)^{-s} \quad (3.135)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \dots\right) (\gamma'_{-1} + \gamma'_0\nabla + \gamma'_1\nabla^2 + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m \quad (3.136)$$

ここで  $\nabla^{m+1}$  の係数を比較すれば，

$$\gamma'_m + \frac{1}{2}\gamma'_{m-1} + \frac{1}{3}\gamma'_{m-2} + \dots + \frac{1}{m+2}\gamma'_{-1} = (-1)^{m+1} \binom{-s}{m+1}.$$

すなわち

$$\gamma'_m = (-1)^{m+1} \binom{-s}{m+1} - \sum_{i=-1}^{m-1} \frac{\gamma'_i}{m+1-i} \quad (3.137)$$

となる。

また，(3.131)式において， $\nabla^m y_n$  のかわりに

$$\nabla^m y_n = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} y_{n-i} \quad m=0,1,\dots$$

を用いる形を *ordinate form* と呼び，本プログラムでは，これを用いている。以上，まとめると，

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h \left[ \nabla^{-1} y_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(s) y_{n-m} \right] \\ \gamma_m^*(s) &= (-1)^m \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} \gamma'_k(s) \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\gamma'_k(s) = (-1)^{k+1} \binom{-s}{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\gamma'_i(s)}{k+1-i}$$

$$\gamma'_{-1}(s) = 1$$

となる。

上式で  $s=1$  の時, Adams-Boshforth の予測子,  $s=0$  の時, Adams-Molton の修正子となる。すなわち,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= h \left[ \nabla^{-1} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(1) \dot{y}_{n-m} \right] \\ y_n &= h \left[ \nabla^{-1} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(0) \dot{y}_{n-m} \right] \end{aligned} \quad (3.139)$$

である。

b. 2階微分方程式の積分公式

2階微分方程式に対する積分公式は, 1階微分方程式の場合と同様に Newton 後退補間式を代入することにより求められる。補間式は,

$$f(t, y(t)) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m \dot{y}_p \quad (3.140)$$

となる。ここで  $\dot{y}_p = f(t_p, y(t_p))$ ,  $t = t_p + sh$  である。また,

$$f(2t_n - t) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{s+2p-2n}{m} \nabla^m \dot{y}_p \quad (3.140)$$

であり, したがって,

$$\begin{aligned} & y(t_{n+s}) - 2y(t_n) + y(t_{n-s}) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+s}} (t_{n+s} - t) \{f(t) + f(2t_n - t)\} dt \\ &= h^2 \sum_{m=0}^q (-1)^m \nabla^m \dot{y}_p \int_{n-p}^{n-p+s} (n-p+s-s') \left[ \binom{-s'}{m} + \binom{s'+2p-2n}{m} \right] ds' \\ &= h^2 \sum_{m=0}^q \sigma_m \nabla^m \dot{y}_p \end{aligned} \quad (3.142)$$

となる。ここで

$$\sigma_m(s, p) = (-1)^m \int_{n-p}^{n-p+s} (n-p+s-s') \left[ \binom{-s'}{m} + \binom{s'+2p-2n}{m} \right] ds' \quad (3.143)$$

である。

次に, Summed Form の公式の導出を考える。a.と同様に  $y_n$ ,  $y_{n-s}$  は次のように表される。

$$y_n = E^{-s} y_{n+s} = (1 - \nabla)^s y_{n+s} \quad (3.144)$$

$$y_{n-s} = E^{-s} y_n = E^{-2s} y_{n+s} = (1 - \nabla)^{2s} y_{n+s} \quad (3.145)$$

これらの式を(3.142)式に代入する。ただし,  $p=n$  とする。

$$\{1-2(1-\nabla)^s+(1-\nabla)^{2s}\}y_{n+s}=h^2\sum_{m=0}^q\sigma_m\nabla^m\dot{y}_n \quad (3.146)$$

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h^2\sum_{m=0}^q \frac{(-1)^m \int_0^s (s-s') \left[ \binom{-s'}{m} + \binom{s'}{m} \right] ds'}{1-2(1-\nabla)^s+(1-\nabla)^{2s}} \nabla^m \dot{y}_n \\ &= h^2 \sum_{m=-2}^{q-2} \sigma'_m(s) \nabla^m \dot{y}_n \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\text{ここで, } \sigma'_m(s) \nabla^m = \frac{(-1)^{m+2} \int_0^s (s-s') \left[ \binom{-s'}{m+2} + \binom{s'}{m+2} \right] ds'}{1-2(1-\nabla)^s+(1-\nabla)^{2s}} \nabla^{m+2} \quad (3.148)$$

である。この  $\sigma'_m(s)$  は次の様にして求められる。

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-2}^{\infty} \sigma'_m(s) \nabla^m \\ &= \sum_{m=-2}^{\infty} (-1)^{m+2} \int_0^s (s-s') \left[ \binom{-s'}{m+2} + \binom{s'}{m+2} \right] ds' \times \frac{\nabla^{m+2}}{1-2(1-\nabla)^s+(1-\nabla)^{2s}} \end{aligned} \quad (3.149)$$

両辺に  $\nabla^2$  を作用させる。

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sigma'_{m-2}(s) \nabla^m \\ &= \int_0^s (s-s') \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \binom{-s'}{m} + \binom{s'}{m} \right] (-\nabla)^m \right\} ds' \times \frac{\nabla^2}{1-2(1-\nabla)^s+(1-\nabla)^{2s}} \\ &= \frac{\nabla^2}{(\log(1-\nabla))^2} (1-\nabla)^{-s} \end{aligned} \quad (3.150)$$

したがって,

$$\frac{(\log(1-\nabla))^2}{\nabla^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma'_{m-2}(s) \nabla^m = (1-\nabla)^{-s} \quad (3.151)$$

$$\left( H_1 + \frac{2}{3} H_2 \nabla + \frac{2}{4} H_3 \nabla^2 + \dots \right) (\sigma'_{-2} + \sigma'_{-1} \nabla + \sigma'_0 \nabla^2 + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s}{m} (-\nabla)^m \quad (3.152)$$

となる。ただし  $H_i = \sum_{j=1}^i (1/j)$  とする。ここで  $\nabla^{m+2}$  の係数を比較すれば

$$\sigma'_m + \frac{2}{3} H_2 \sigma'_{m-1} + \frac{2}{4} H_3 \sigma'_{m-2} + \dots + \frac{2}{m+4} H_{m+3} \sigma'_{-2} = (-1)^m \binom{-s}{m+2} \quad (3.153)$$

すなわち、

$$\sigma'_m = (-1)^m \binom{-s}{m+2} - \sum_{i=2}^{m-1} \frac{2\sigma_i}{m+2-i} H_{m+1-i} \quad (3.154)$$

となる。

また a. の場合と同様に差分形式から ordinate 形式に書き直し、まとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= h^2 \left[ \nabla^{-2} \ddot{y}_n + (s-1) \nabla^{-1} \dot{y}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(s) \ddot{y}_{n-m} \right] \\ \sigma_m^*(s) &= (-1)^m \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} \sigma'_k(s) \\ \sigma'_k(s) &= (-1)^k \binom{-s}{k+2} - \sum_{i=2}^{k-1} \frac{2H_{k+1-i}}{k+2-i} \sigma'_i(s) \\ H_i &= \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \\ \sigma'_{-2}(s) &= 1 \end{aligned} \quad (3.155)$$

上式で  $s=1$  の時、Störmer の予測子、 $s=0$  の時、Cowell の修正子となる。すなわち、

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= h^2 \left[ \nabla^{-2} \ddot{y}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(1) \ddot{y}_{n-m} \right] \\ y_n &= h^2 \left[ \nabla^{-2} \ddot{y}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(0) \ddot{y}_{n-m} \right] \end{aligned} \quad (3.156)$$

である。

## (2) 計算手順

運動方程式を解くために、先に示した Adams-Cowell の公式をどのように使用するかを、以下に示す。

前項で示した公式は、解  $y$ 、 $\dot{y}$  がスカラーであるときのものであった。それらをベクトルに拡張しても、公式はそのまま成り立つ。運動方程式が次式で与えられるとき、

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{cases} \quad (3.157)$$

Adams-Cowell の公式は次のように示される。(  $q$  は公式の次数 )

### ① 予測子：

$$\text{位置： } \mathbf{r}_{n+1} = h^2 \left( \nabla^{-2} \ddot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(1) \ddot{\mathbf{r}}_{n-m} \right) \quad (3.158)$$



$$\text{速度: } \dot{\mathbf{r}}_{n+1} = h \left( \nabla^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(1) \ddot{\mathbf{r}}_{n-m} \right)$$

②修正子:

$$\text{位置: } \mathbf{r}_{n+1} = h^2 \left( \nabla^{-2} \ddot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(0) \ddot{\mathbf{r}}_{n+1-m} \right)$$

$$\text{速度: } \dot{\mathbf{r}}_{n+1} = h \left( \nabla^{-1} \ddot{\mathbf{r}}_n + \dot{\mathbf{r}}_{n+1} + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(0) \ddot{\mathbf{r}}_{n+1-m} \right)$$

(3.159)

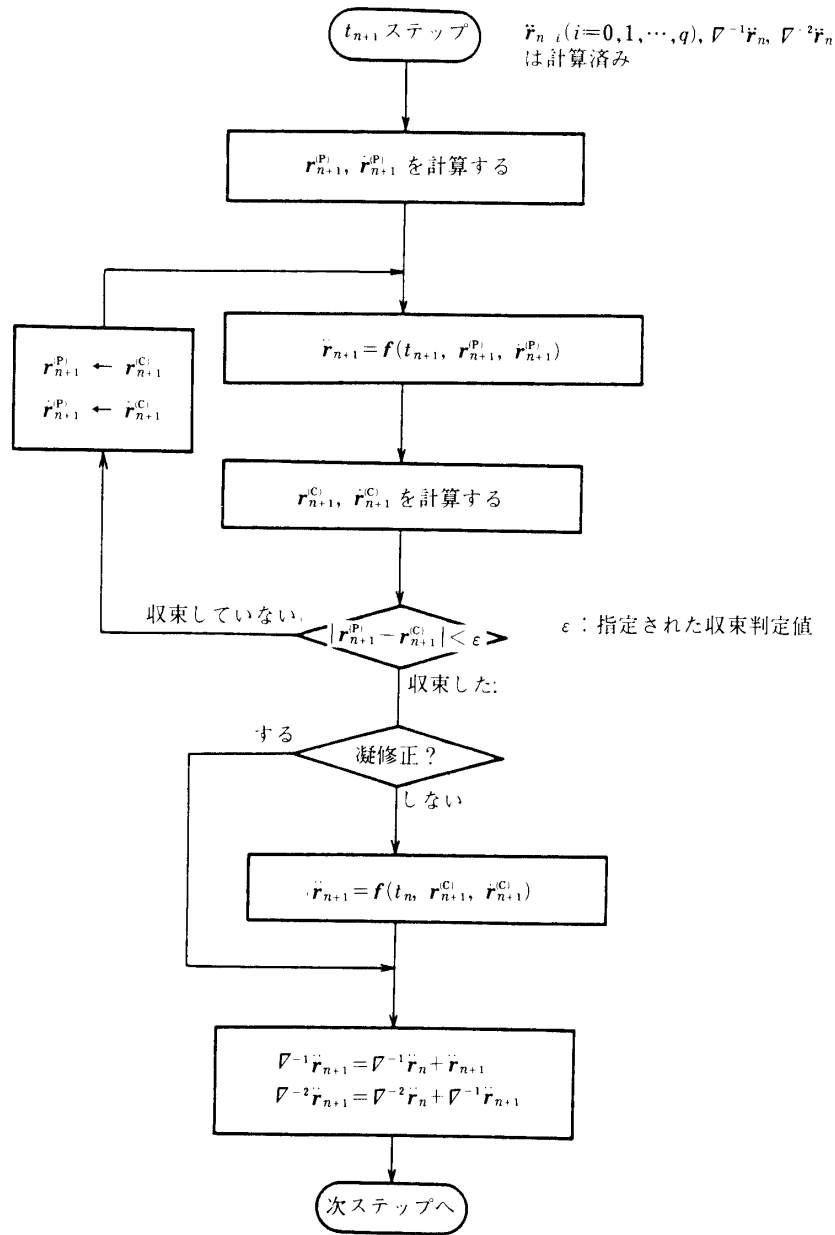


図 3.17 予測子-修正子の計算手順

この公式を用いて、時刻  $t_n$  の解  $\mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n$  から時刻  $t_{n+1}$  の解  $\mathbf{r}_{n+1}, \dot{\mathbf{r}}_{n+1}$  を計算する手順を、図 3.17 に示す。

### (3) 刻み幅制御法

本プログラムでは、要求精度を満すように局所打ち切り誤差を計算して、刻み幅の制御を行っている。このため、要求精度を満す範囲内の適切な刻み幅が選択され、効率の良い計算が行われる。

局所打ち切り誤差  $\varepsilon_n = \varepsilon(t_n)$  は、次式で計算される。

$$\varepsilon_n = \frac{C|\mathbf{r}_n^{(p)} - \mathbf{r}_n^{(c)}|}{|\mathbf{r}_n^{(c)}|} \quad (3.160)$$

ここで、 $C$ ：積分次数に依存した定数

$\mathbf{r}_n^{(p)}$ ： $t_n$  での予測子の位置

$\mathbf{r}_n^{(c)}$ ： $t_n$  での修正子の位置。

この  $\varepsilon_n$  が、指定された  $T_L, T_u$  に対して、

$$T_L \leq \varepsilon_n \leq T_u \quad (3.161)$$

となるように、刻み幅が制御される。

$\varepsilon_n$  が(3.161)式の範囲を越えたとき、次の処理を行う。

①  $\varepsilon_n > T_u$  のとき

次式で定まる刻み幅  $h_{\text{NEW}}$  を求め、刻み幅の縮小を行う。

$$h_{\text{NEW}} = h \left[ \frac{T_c}{\varepsilon_n} \right]^{\frac{1}{q+3}} \quad (3.162)$$

ここで、 $T_c$ ： $T_L \leq T_c \leq T_u$  を満す値

$q$ ：積分公式の次数。

新しい刻み幅  $h_{\text{NEW}}$  に対応するバックポイントを、補間により計算する。

②  $\varepsilon_n < T_L$  のとき

刻み幅  $h$  を2倍に拡大する。

$$h_{\text{NEW}} = 2h \quad (3.163)$$

新しい刻み幅  $h_{\text{NEW}}$  に対応するバックポイントは、対応する古いバックポイントを採用する。

上記①の処理では、バックポイントの補間が必要となる。補間点  $t_i$  に対応する値  $\dot{\mathbf{r}}_i$  は、(3.138)式、(3.155)式を使用して、以下の手順で計算される。

①  $s$  の計算

$$s = \frac{t_i - t_n}{h}$$

ここで， $t_n$ ：バックポイントの  $\dot{\mathbf{r}}_n$  に対応する時刻

$h$ ：バックポイントに対応する刻み幅。

②  $\mathbf{r}_i$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_i$  の計算

$$\mathbf{r}_i = h^2 \left[ \nabla^{-2} \ddot{\mathbf{r}}_n + (s-1) \nabla^{-1} \dot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \sigma_m^*(s) \ddot{\mathbf{r}}_{n-m} \right]$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = h \left[ \nabla^{-1} \dot{\mathbf{r}}_n + \sum_{m=0}^q \gamma_m^*(s) \dot{\mathbf{r}}_{n-m} \right]$$

③  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  の計算

運動方程式から計算する。

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$$

(4) 出発値計算

多段法では，初期時刻におけるバックポイントを別に計算する必要がある。本プログラムでは，次の2つの方法が可能である。

- ・ 2体近似による方法
- ・ 8次の Runge-Kutta による方法

a. 2体近似による方法

この方法は関数の評価回数が少なく，計算時間が短いという長所がある。SOI 付近で出発計算をすると，収束が遅くなる時があるが，運動方程式の解法における多段法の出発値計算としては，2体近似による方法は有効な方法であるといえる。以下に手順を示す。

- ① 運動方程式を2体近似し，解析的にバックポイント時刻における加速度を求める。
- ② (3.138)式，(3.155)式において， $s = -1, -2, \dots$ とおき，バックポイントにおける位置，速度を求める。
- ③ 運動方程式に②の値を代入し，加速度を求める。
- ④ ①と②の値を比較，収束しなければ②に戻り，収束するまで繰り返す。

b. 8次の Runge-Kutta 公式による方法

8次の Runge-Kutta 法は高精度の計算に向いている。反面，関数の評価回数が多く，計算時間がかかる。以下に，本プログラムで使用している。8次の Runge-Kutta 法の公式を示す。

ここで， $h_R$  は Runge-Kutta 法の刻み幅，運動方程式は，

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

で与えられるとする。

公式は以下の通りである。

$$\mathbf{r}(t_0 + h_R) = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{840}(41\mathbf{k}_{01} + 27\mathbf{k}_{31} + 272\mathbf{k}_{41} + 27\mathbf{k}_{51} + 216\mathbf{k}_{61} + 216\mathbf{k}_{81} + 41\mathbf{k}_{91}) \quad (3.164)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0 + h_R) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{840}(41\mathbf{k}_{02} + 27\mathbf{k}_{32} + 272\mathbf{k}_{42} + 27\mathbf{k}_{52} + 216\mathbf{k}_{62} + 216\mathbf{k}_{82} + 41\mathbf{k}_{92}) \quad (3.165)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{01} &= h_R \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \mathbf{k}_{02} &= h_R \mathbf{f}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) \\ \mathbf{k}_{11} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{4}{27} \mathbf{k}_{02} \right) \\ \mathbf{k}_{12} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{4}{27} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{4}{27} \mathbf{k}_{01}, \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{4}{27} \mathbf{k}_{02} \right) \\ \mathbf{k}_{21} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{18} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{12}) \right) \\ \mathbf{k}_{22} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{2}{9} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{18} (\mathbf{k}_{01} + 3\mathbf{k}_{11}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{18} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{12}) \right) \\ \mathbf{k}_{31} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{12} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{22}) \right) \\ \mathbf{k}_{32} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{1}{3} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{12} (\mathbf{k}_{01} + 3\mathbf{k}_{21}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{12} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{22}) \right) \\ \mathbf{k}_{41} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{8} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{32}) \right) \\ \mathbf{k}_{42} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{1}{2} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{8} (\mathbf{k}_{01} + 3\mathbf{k}_{31}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{8} (\mathbf{k}_{02} + 3\mathbf{k}_{32}) \right) \\ \mathbf{k}_{51} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{54} (13\mathbf{k}_{02} - 27\mathbf{k}_{22} + 42\mathbf{k}_{32} + 8\mathbf{k}_{42}) \right) \\ \mathbf{k}_{52} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{2}{3} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{54} (13\mathbf{k}_{01} - 27\mathbf{k}_{21} + 42\mathbf{k}_{31} + 8\mathbf{k}_{41}), \right. \\ &\quad \left. \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{54} (13\mathbf{k}_{02} - 27\mathbf{k}_{22} + 42\mathbf{k}_{32} + 8\mathbf{k}_{42}) \right) \\ \mathbf{k}_{61} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{4320} (389\mathbf{k}_{02} - 54\mathbf{k}_{22} + 966\mathbf{k}_{32} - 824\mathbf{k}_{42} + 243\mathbf{k}_{52}) \right) \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{62} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{1}{6} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{4320} (389 \mathbf{k}_{01} - 54 \mathbf{k}_{21} + 966 \mathbf{k}_{31} - 824 \mathbf{k}_{41} + 243 \mathbf{k}_{51}), \right. \\
&\quad \left. \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{4320} (389 \mathbf{k}_{02} - 54 \mathbf{k}_{22} + 966 \mathbf{k}_{32} - 824 \mathbf{k}_{42} + 243 \mathbf{k}_{52}) \right) \\
\mathbf{k}_{71} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{20} (-231 \mathbf{k}_{02} + 81 \mathbf{k}_{22} - 1164 \mathbf{k}_{32} + 656 \mathbf{k}_{42} - 122 \mathbf{k}_{52} + 800 \mathbf{k}_{62}) \right) \\
\mathbf{k}_{72} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{20} (-231 \mathbf{k}_{01} + 81 \mathbf{k}_{21} - 1164 \mathbf{k}_{31} + 656 \mathbf{k}_{41} - 122 \mathbf{k}_{51} \right. \\
&\quad \left. + 800 \mathbf{k}_{61}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{20} (-231 \mathbf{k}_{02} + 81 \mathbf{k}_{22} - 1164 \mathbf{k}_{32} + 656 \mathbf{k}_{42} - 122 \mathbf{k}_{52} + 800 \mathbf{k}_{62}) \right) \\
\mathbf{k}_{81} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{288} (-127 \mathbf{k}_{02} + 18 \mathbf{k}_{22} - 678 \mathbf{k}_{32} + 456 \mathbf{k}_{42} - 9 \mathbf{k}_{52} + 576 \mathbf{k}_{62} + 4 \mathbf{k}_{72}) \right) \\
\mathbf{k}_{82} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + \frac{5}{6} h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{288} (-127 \mathbf{k}_{01} + 18 \mathbf{k}_{21} - 678 \mathbf{k}_{31} + 456 \mathbf{k}_{41} - 9 \mathbf{k}_{51} \right. \\
&\quad \left. + 576 \mathbf{k}_{61} + 4 \mathbf{k}_{71}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{288} (-127 \mathbf{k}_{02} + 18 \mathbf{k}_{22} - 678 \mathbf{k}_{32} + 456 \mathbf{k}_{42} - 9 \mathbf{k}_{52} \right. \\
&\quad \left. + 576 \mathbf{k}_{62} + 4 \mathbf{k}_{72}) \right) \\
\mathbf{k}_{91} &= h_R \left( \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{820} (1481 \mathbf{k}_{02} - 81 \mathbf{k}_{22} + 7104 \mathbf{k}_{32} - 3376 \mathbf{k}_{42} + 72 \mathbf{k}_{52} - 5040 \mathbf{k}_{62} \right. \\
&\quad \left. - 60 \mathbf{k}_{72} + 720 \mathbf{k}_{82}) \right) \\
\mathbf{k}_{92} &= h_R \mathbf{f} \left( t_0 + h_R, \mathbf{r}_0 + \frac{1}{820} (1481 \mathbf{k}_{01} - 81 \mathbf{k}_{21} + 7104 \mathbf{k}_{31} - 3376 \mathbf{k}_{41} + 72 \mathbf{k}_{51} \right. \\
&\quad \left. - 5040 \mathbf{k}_{61} - 60 \mathbf{k}_{71} + 720 \mathbf{k}_{81}), \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{820} (1481 \mathbf{k}_{02} - 81 \mathbf{k}_{22} + 7104 \mathbf{k}_{32} \right. \\
&\quad \left. - 3376 \mathbf{k}_{42} + 72 \mathbf{k}_{52} - 5040 \mathbf{k}_{62} - 60 \mathbf{k}_{72} + 720 \mathbf{k}_{82}) \right)
\end{aligned}$$

である。

### 3.3 変分方程式

S/Cの加速度  $\dot{\mathbf{r}}$  を推定パラメタ  $\mathbf{q}$  で偏微分することにより、変分方程式が得られる。この変分方程式を数値積分すると、

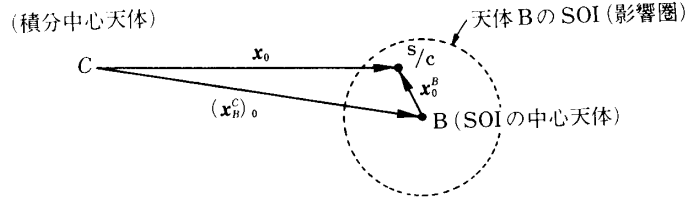


図 3.18 中心天体と S/C

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} : \text{S/C の状態ベクトル}$$

が得られるが、これは、推定パラメタ  $\mathbf{q}$  を単位量変位させた時の状態ベクトル  $\mathbf{X}(t)$  の変位量をあらわしている。 $\partial \mathbf{X}(t)/\partial \mathbf{q}$  は、観測行列（「3.5 観測モデルと観測行列」の項参照）を求める際に必要となる。S/C の加速度モデル、数値積分法については、「3.2 運動方程式」の項を参照されたい。

### 3.3.1 変分方程式の導出と数値積分

#### (1) 変分方程式の導出

積分中心を原点とする座標系での S/C の加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  は、次の函数であらわされる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{q}; t) \quad (3.168)$$

$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$  : 積分中心 EME 50 での S/C の位置・速度・加速度。時刻  $t$  は ET 表現

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0^B \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} : \text{推定パラメタ}$$

$$\mathbf{X}_0^B = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^B(t_0) \\ \dot{\mathbf{r}}^B(t_0) \end{bmatrix} : \text{時刻 } t_0(\text{ET}) \text{ における, 天体 } B \text{ を中心とした S/C の状態ベクトル}$$

$\boldsymbol{\alpha}$  : S/C の軌道に影響に与える力学系パラメタ。

時刻  $t_0$  における積分中心を原点とする座標系での S/C の状態ベクトル  $\mathbf{X}_0$  は、

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0^B + (\mathbf{X}_B^C)_0 \quad (3.169)$$

$(\mathbf{X}_B^C)_0$  : 時刻  $t_0$  における積分中心  $C$  に対する天体  $B$  の状態ベクトルとなる。

(3.168) を  $\mathbf{q}$  で偏微分して、

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} = \text{定数}} \quad (3.170)$$

ここで、行列  $A, B, C, Z, \dot{Z}, \ddot{Z}$  を次のように定義する。

$$A \equiv \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

$$B \equiv \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

$$C \equiv \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{r, \dot{r} = \text{定数}} = \left[ \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}_0^B}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0^B}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right]_{r, \dot{r} = \text{定数}} = \left[ 0, 0, \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right]_{r, \dot{r} = \text{定数}}$$

$$Z \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} \right]$$

$$\dot{Z} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.172)$$

$$\ddot{Z} \equiv \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}$$

(3.171), (3.172)を(3.170)に代入して,

$$\ddot{Z} = A \cdot Z + B \cdot \dot{Z} + C \quad (3.173)$$

を得る。(3.173)は、変分方程式と呼ばれる。 $Z, \dot{Z}$ は、この変分方程式を数値積分して求められる。

(2) 変分方程式の数値積分

(3.173)を、時刻  $t_0$  から時刻  $t$  まで数値積分して次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} Z \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \equiv [U : V] \quad (3.174)$$

$$U \equiv \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}_0^B} = \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_0)} = U(t, t_0) \quad (6 \times 6 \text{ 行列})$$

$$V \equiv \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (6 \times l \text{ 行列}; l \text{ は力学系パラメタの数})$$

時刻  $t_0$  における  $\partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{q}$  の初期値  $\left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \right]_0$  は、

① 積分中心  $C$  に対して初期値が与えられる時、

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \right]_0 = \left[ \frac{\partial \mathbf{X}(t_0)}{\partial \mathbf{X}(t_0)}, \frac{\partial \mathbf{X}(t_0)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] = [I : 0] \quad (3.175)$$

$I$ : 単位行列 (6×6次元)

② 積分中心  $C$  以外の天体  $B$  に対して初期値が与えられる時,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \right]_0 &= \left[ \frac{\partial \mathbf{X}(t_0)}{\partial \mathbf{X}_0^B}, \frac{\partial \mathbf{X}(t_0)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] = \left[ I : \frac{\partial \mathbf{X}^B}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbf{X}_B^C}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] \\ &= \left[ I : \frac{\partial (\mathbf{X}_B^C)_0}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (3.176)$$

$\frac{\partial (\mathbf{X}_B^C)_0}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$  は、力学系パラメタ  $\boldsymbol{\alpha}$  の中に、天体  $B$  のエフェメリスに影響を与えるパラメタ (例えば、Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$ ) が含まれている時には、0 とならない。

時刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  で積分が再出発を行う時、 $U$  行列には次の chain rule が存在する；

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_0)} = \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_n)} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(t_n)}{\partial \mathbf{X}(t_{n-1})} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(t_{n-1})}{\partial \mathbf{X}(t_{n-2})} \cdots \frac{\partial \mathbf{X}(t_1)}{\partial \mathbf{X}(t_0)} \\ &= U(t, t_n) U(t_n, t_{n-1}) \cdots U(t_1, t_0) \end{aligned} \quad (3.177)$$

$V$  行列については、条件に応じて次のようにする。

① 積分の全区間に対して、 $c_i = \partial \ddot{\mathbf{r}} / \partial a_i \neq 0$  の時；

$\partial \mathbf{X}(t) / \partial a_i$  は全区間を数値積分して求める。

②  $t_a < t < t_b$  の区間で  $c_i \neq 0$ 、その他の区間で  $c_i = 0$  の時；

$t < t_a$  に対して； $\partial \mathbf{X}(t) / \partial a_i = 0$

$t_a < t < t_b$  に対して；数値積分して  $\partial \mathbf{X}(t) / \partial a_i$  を求める。

$t_b < t$  に対して； $\partial \mathbf{X}(t) / \partial a_i = U(t, t_b) \cdot \partial \mathbf{X}(t_b) / \partial a_i$  (3.178)

ここで、 $\partial \mathbf{X}(t_b) / \partial a_i$  は、積分のストップ時刻  $t_b$  での  $\partial \mathbf{X}(t) / \partial a_i$  の値、 $U(t, t_b)$  は(3.177)より求める。

③ 時刻  $t_b$  で  $c_i \neq 0$ 、その他の時刻で  $c_i = 0$  の時；

(3.178)を用いる。 $\partial \mathbf{X}(t_b) / \partial \boldsymbol{\alpha}$  は既にわかっているので、このパラメタに対する数値積分は行う必要はない。

### 3.3.2 A 行列の計算

A 行列は、加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に関する偏微分、

$$A = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.179)$$

である。「3.2 運動方程式」の項で述べた加速度項のうち、位置ベクトルの関数であるものは、

- ① 天体を質点としたニュートン力加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_p$
- ② 地球重力の非球対称成分による加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}}$



- ③ 太陽輻射圧による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}}$
- ④ 大気抵抗による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{ADG}}$
- ⑤ 一般相対論による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{GR}}$

A 行列は，これらの加速度の位置ベクトルに関する偏微分の和，

$$A = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_p}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{ADG}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{GR}}}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.180)$$

としてあらわされる．

- (1) 天体を質点としたニュートン力加速度  $\dot{\mathbf{r}}_p$  の偏微分  $\partial \dot{\mathbf{r}}_p / \partial \mathbf{r}$   
 天体  $i (i=1, 2, \dots, n)$  を質点とした時のニュートン力による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_p$  は，(3.59)より，

$$\dot{\mathbf{r}}_p = - \sum_{i=1}^N \mu_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^c)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^c\|^3} \quad (3.181)$$

$\mathbf{r}$  : 積分中心を原点とした時の S/C の位置  
 $\mathbf{r}_i^c$  : 積分中心を原点とした時の天体  $i$  の位置  
 $\mu_i$  : 天体  $i$  の重力定数

(3.181)を位置ベクトル  $\mathbf{r}$  で偏微分して，

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_p}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{3\mu_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^c)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^c)^T}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^c\|^5} - \frac{\mu_i I}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^c\|^3} \right\} \quad (3.182)$$

$I$  : 単位行列 (3×3 行列)

- (2) 地球重力の非球対称成分による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}}$  の偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}}}{\partial \mathbf{r}}$

地球固定座標系での地球重力の非球対称成分による加速度  $(\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b$  は，位置ベクトル  $\mathbf{r}_b$  のみの関数である．したがって，積分中心 EME 50 での加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}}$  は(座標中心変更に伴う加速度を除く)，

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}} = T^t(t)(\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b \quad (3.183)$$

$T(t)$  : 時刻  $t$ (ET) における EME 50 →地球固定座標系の変換行列

(3.183)を位置ベクトル  $\mathbf{r}$  で偏微分して，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}}}{\partial \mathbf{r}} &= T^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b = T^t \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial \mathbf{r}} \\ &= T^t \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b}{\partial \mathbf{r}_b} T \end{aligned} \quad (3.184)$$

$(\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b$  は、ポテンシャル  $U_{\text{OBL}}$  を用いて、

$$(\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b = \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \mathbf{r}_b} \quad (3.185)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{OBL}} &= U(J) + U(C, S) \\ U(J) &= -\frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \\ U(C, S) &= \frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_n^m(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (3.186)$$

$\mu_E$  : 地球の重力定数

$a_e$  : 平均地球赤道半径 = 6378.14 km

$r, \phi, \lambda$  : 地球固定座標系での S/C の距離, 地心緯度, 経度

$P_n(\sin \phi)$  :  $n$  次の第1種 Legendre 関数

$P_n^m(\sin \phi)$  :  $n$  次の第1種 Legendre 陪関数

とあらわされる。(3.185)を位置ベクトル  $\mathbf{r}_b$  で偏微分して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}_{\text{OBL}})_b}{\partial \mathbf{r}_b} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \mathbf{r}_b} \right) \\ &= \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial r} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \lambda} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 r}{\partial \mathbf{r}_b \partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{r}_b \partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{r}_b \partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \quad (3.187)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial r} \right) &= \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r \partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r \partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r \partial \phi} \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \phi^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \phi \partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r \partial \lambda} \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \phi \partial \lambda} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b} \end{aligned} \right\} \quad (3.188)$$

各偏微分項は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_b} &= \frac{\mathbf{r}_b}{r} = \hat{\mathbf{r}}_b \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_b} &= \frac{1}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \left\{ -\frac{z_b}{r} \hat{\mathbf{r}}_b + \hat{z}_b \right\} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}_b} &= \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} \{ x_b \hat{y}_b - y_b \hat{x}_b \} = \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} (-y_b, x_b, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.189)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial \mathbf{r}_b \partial \mathbf{r}_b} &= \frac{1}{r} (\vec{I} - \hat{\mathbf{r}}_b \hat{\mathbf{r}}_b^T) \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{r}_b \partial \mathbf{r}_b} &= -\frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)^{3/2}} (\hat{z}_b - \frac{z_b}{r} \hat{\mathbf{r}}_b) (x_b \hat{y}_b + y_b \hat{x}_b)^T \\
&\quad - \frac{1}{r \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} (\hat{\mathbf{r}}_b \hat{z}_b^T + z_b \vec{I} - \frac{2z_b}{r} \hat{\mathbf{r}}_b \hat{\mathbf{r}}_b^T) \\
\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{r}_b \partial \mathbf{r}_b} &= -\frac{2}{(x_b + y_b)^2} (x_b \hat{y}_b - y_b \hat{x}_b) (x_b \hat{y}_b + y_b \hat{x}_b)^T \\
&\quad - \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} (\hat{x}_b \hat{y}_b^T - \hat{y}_b \hat{x}_b^T) \\
&= \frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)^2} \begin{bmatrix} 2x_b y_b & y_b^2 - x_b^2 & 0 \\ y_b^2 - x_b^2 & -2x_b y_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (3.190)$$

$$\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{y}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_b = \frac{\mathbf{r}_b}{r}$$

$r = \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}$  : 地球中心地球固定座標系での S/C の位置

$\vec{I}$  : 単位行列 (3×3)

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial r} &= \frac{\partial U(J)}{\partial r} + \frac{\partial U(C,S)}{\partial r} \\
\frac{\partial U(J)}{\partial r} &= \frac{\mu_E}{r^2} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (n+1) P_n(\sin \phi) \\
\frac{\partial U(C,S)}{\partial r} &= -\frac{\mu_E}{r^2} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (n+1) P_n^m(\sin \phi) \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \\
\frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \phi} &= \frac{\partial U(J)}{\partial \phi} + \frac{\partial U(C,S)}{\partial \phi} \\
\frac{\partial U(J)}{\partial \phi} &= -\frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \cos \phi P_n'(\sin \phi) \\
\frac{\partial U(C,S)}{\partial \phi} &= \frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \cos \phi P_n^{m'}(\sin \phi) \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \\
\frac{\partial U_{\text{OBL}}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial U(J)}{\partial \lambda} + \frac{\partial U(C,S)}{\partial \lambda}
\end{aligned} \right\} \quad (3.191)$$

$$\frac{\partial U(J)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial U(C,S)}{\partial \lambda} = \frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin \phi) m \{-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda\}$$

$n_1$ : 考慮する  $J$  項の次数

$n_2$ : 考慮する Tesseral/Sectorial 項の次数

$$\frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U(J)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 U(J)}{\partial r^2} = -\frac{\mu_E}{r^3} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (n+2)(n+1) P_n(\sin \phi)$$

$$\frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial r^2} = -\frac{\mu_E}{r^2} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (n+2)(n+1) P_n^m(\sin \phi) \\ \times \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r \partial \phi} = \frac{\partial^2 U(J)}{\partial r \partial \phi} + \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial r \partial \phi}$$

$$\frac{\partial^2 U(J)}{\partial r \partial \phi} = \frac{\mu_E}{r^2} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (n+1) \cos \phi P_n^{m'}(\sin \phi)$$

$$\frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial r \partial \phi} = -\frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (n+1) \cos \phi P_n^{m'}(\sin \phi) \\ \times \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial r \partial \lambda} = \frac{\partial^2 U(J)}{\partial r \partial \lambda} + \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial r \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 U(J)}{\partial r \partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial r \partial \lambda} = -\frac{\mu_E}{r^2} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (n+1) m P_n^m(\sin \phi) \\ \times \{-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda\}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 U(J)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial \phi^2}$$

$$\frac{\partial^2 U(J)}{\partial \phi^2} = -\frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \{-\sin \phi P_n''(\sin \phi) + \cos^2 \phi P_n''(\sin \phi)\}$$

$$\frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial \phi^2} = \frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \{-\sin \phi P_n^{m'}(\sin \phi) + \cos^2 \phi P_n^{m'}(\sin \phi)\} \\ \times (C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \phi \partial \lambda} = \frac{\partial^2 U(J)}{\partial \phi \partial \lambda} + \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial \phi \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 U(J)}{\partial \phi \partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial \phi \partial \lambda} = \frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n m \cos \phi P_n^{m'}(\sin \phi) \\ \times \{-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda\}$$

(3.192)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{\text{OBL}}}{\partial \lambda^2} &= \frac{\partial^2 U(J)}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial \lambda^2} \\ \frac{\partial^2 U(J)}{\partial \lambda^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(C,S)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{\mu_E}{r} \sum_{n=2}^{n_2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n m^2 P_n^m(\sin \phi) \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \end{aligned}$$

(3) 太陽輻射圧による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}}$  の偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}}}{\partial \mathbf{r}}$

太陽輻射圧による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}}$  は，(3.85)より，

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}} = c_1 \frac{(1+\Gamma)A_s}{m_s r^{s^2}} \hat{\mathbf{r}}^s \quad (3.193)$$

$r^s = \|\mathbf{r}^s\|$  : 太陽-S/C間の距離

$\hat{\mathbf{r}}^s = \frac{\mathbf{r}^s}{r^s}$  : 太陽からS/Cに向かう単位ベクトル。

$\mathbf{r}^s$  : 太陽中心系でのS/Cの位置ベクトル。

$$c_1 = \frac{S_0 R_0^2}{c} = 1.01 \times 10^8 \frac{\text{km}^3 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}$$

$\Gamma$  : 平均反射係数 ( $0 \leq \Gamma \leq 1$ )

$A_s$  : S/Cの有効断面積 ( $\text{m}^2$ )

$m_s$  : S/Cの重量 (kg)

$S_0$  : 太陽定数 =  $1.35 \times 10^3 \text{W/m}^2$

$R_0$  : 太陽-地球間平均距離 = 1 AU

$c$  : 光速度 (km/s)

(3.193)を位置ベクトル  $\mathbf{r}$  で偏微分して，

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{SRP}}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{c_1(1+\Gamma)A_s}{m_s r^{s^3}} \{ \vec{I} - 3\hat{\mathbf{r}}^s \hat{\mathbf{r}}^{sT} \} \quad (3.194)$$

$\vec{I}$  : 単位行列 (3×3行列)

(4) 大気抵抗による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{ADG}}$  の偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{ADG}}}{\partial \mathbf{r}}$

地球中心 EME 50 での大気抵抗による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{ADG}}$  は，(3.96)より，

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{ADG}}^E = -\frac{1}{2} \rho \left( \frac{C_D \times S}{m_s} \right) V_r^2 \hat{\mathbf{V}}_r \quad (3.195)$$

$\mathbf{V}_r = \dot{\mathbf{r}}^E - \vec{\omega} \times \mathbf{r}^E = \dot{\mathbf{r}}^E - \vec{\Omega}_\omega \cdot \mathbf{r}^E$  : 地球固定座標系でのS/Cの速度

$\hat{\mathbf{V}}_r = \frac{\mathbf{V}_r}{V_r}$ ,  $V_r = \|\mathbf{V}_r\|$

$\mathbf{r}^E$ ,  $\dot{\mathbf{r}}^E$  : S/Cの位置・速度 (地球中心 EME 50)

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} : \text{地球の角速度ベクトル (EME 50)}$$

$$\vec{\Omega}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho$ : 大気密度. (3.99)~(3.101)参照

(3.195)を位置ベクトル  $\mathbf{r}$  で偏微分して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{ADG}^E}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}^E}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^E}{\partial \mathbf{r}^E} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^E}{\partial \mathbf{r}^E} \\ &= \frac{1}{2} \rho \left( \frac{C_D \times S}{m_s} \right) V_r (\vec{I} + \hat{\mathbf{V}}_r \hat{\mathbf{V}}_r^T) \vec{\Omega}_\omega - 10^{-2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \tilde{h}} \dot{\mathbf{r}}_{ADG}^E \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \mathbf{r}^E} \end{aligned} \quad (3.196)$$

$\partial \ln \rho / 2\tilde{h}$ ,  $\partial \tilde{h} / \partial \mathbf{r}^E$  は次式で表現される:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial \tilde{h}} = \begin{cases} -(A_2 + 2A_3 \tilde{h}) & h < 160 \text{ km} \\ -\left\{ \sum_{i=1}^4 B_{i2} \tilde{T}^{(i-1)} + 2 \sum_{i=1}^4 B_{i3} \tilde{T}^{(i-1)} \tilde{h} + 3 \sum_{i=1}^4 B_{i4} \tilde{T}^{(i-1)} \tilde{h}^2 \right\} & 160 \text{ km} \leq h < 420 \text{ km} \\ -\left\{ \sum_{i=1}^4 C_{i2} \tilde{T}^{(i-1)} + 2 \sum_{i=1}^4 C_{i3} \tilde{T}^{(i-1)} \tilde{h} + 3 \sum_{i=1}^4 C_{i4} \tilde{T}^{(i-1)} \tilde{h}^2 \right\} & 420 \text{ km} \leq h < 1000 \text{ km} \end{cases} \quad (3.197)$$

$$\tilde{h} = 10^{-2} h, \quad h: \text{高度 (km)}$$

$$\tilde{T} = 10^{-3} T, \quad T: \text{温度 (K)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \mathbf{r}^E} &= \frac{(\mathbf{r}^E)^T}{r^E} + (a_e f + \frac{3}{2} a_e f^2) \frac{\partial \sin^2 \phi}{\partial \mathbf{r}^E} - \frac{3}{2} a_e f^2 \frac{\partial \sin^4 \phi}{\partial \mathbf{r}^E} \\ \frac{\partial \sin^2 \phi}{\partial \mathbf{r}^E} &= -\frac{2z^2}{(r^E)^4} (\mathbf{r}^E)^T + \left( 0, 0, \frac{2z}{(r^E)^2} \right) \\ \frac{\partial \sin^4 \phi}{\partial \mathbf{r}^E} &= -\frac{4z^4}{(r^E)^6} (\mathbf{r}^E)^T + \left( 0, 0, \frac{4z^3}{(r^E)^4} \right) \end{aligned} \quad (3.198)$$

$a_e$ : 地球平均赤道半径 = 6378.14 km

$f$ : 地球の偏平率 = 1/298.257

$\phi$ : S/C の直下点経度

(5) 一般相対論効果による加速度  $\dot{\mathbf{r}}_{GR}$  の偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \mathbf{r}}$

太陽による S/C あるいは天体  $i$  の一般相対論効果による加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_{GR}$  は, 太陽中心系では次のように表現される.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{GR} = \frac{\mu_s}{c^2 \gamma^3} [ \{ 2(1+\gamma)\phi - \gamma \dot{s}^2 \} \mathbf{r} + 2(1+\gamma)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} ] \quad (3.199)$$

天体  $i$  を積分中心とすると, 加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_{GR}$  は天体  $i$  に働くものも考慮しなければならないが, 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に関する偏微分では無視できて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \mathbf{r}^c} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_{GR}^s}{\partial \mathbf{r}} \\ &= \frac{\mu_s}{c^2 \gamma^3} \left[ -\frac{1}{\gamma^2} \{ 8(1+\gamma)\phi - 3\gamma \dot{s}^2 \} \mathbf{r} \mathbf{r}^T + 6(1+\gamma)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}^T \right] \\ &\quad + \{ 2(1+\gamma)\phi - \gamma \dot{s}^2 \} \vec{I} + 2(1+\gamma) \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}^T \end{aligned} \quad (3.200)$$

- $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  : 太陽中心系での S/C の位置・速度
- $r = \|\mathbf{r}\|, \dot{s}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2$
- $\phi$  : S/C の位置での Newton ポテンシャル
- $\mu_s$  : 太陽重力定数
- $\gamma$  : Brans-Dicke の自由パラメタ ( $1/2 \leq \gamma \leq 1$ )
- $\vec{I}$  : 単位行列 (3×3 行列)

### 3.3.3 B 行列の計算

B 行列は, 加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  の速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  に関する偏微分

$$B = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad (3.201)$$

である. 速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  を explicit に含む加速度は,

- ① 大気抵抗による加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_{ADG}$
- ② 一般相対論による加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_{GR}$

B 行列は, これらの加速度の速度ベクトルに関する偏微分の和,

$$B = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_{ADG}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad (3.202)$$

であらわされる.

- (1) 大気抵抗による加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_{ADG}$  の偏微分  $\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_{ADG}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$

(3.195)を速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  で偏微分して,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{ADG}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^E}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{ADG}^E}{\partial \dot{\mathbf{r}}^E} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{ADG}^E}{\partial \dot{\mathbf{r}}^E} = -\frac{1}{2} \rho \left( \frac{C_D \times S}{m_s} \right) V_r (\bar{I} + \hat{\mathbf{V}}_r \hat{\mathbf{V}}_r^T) \quad (3.203)$$

$\bar{I}$  : 単位行列 (3×3 次元)

$$\mathbf{V}_r = \dot{\mathbf{r}}^E - \bar{\Omega}_\omega \cdot \mathbf{r}^E$$

$$V_r = \|\mathbf{V}_r\|, \quad \hat{\mathbf{V}}_r = \frac{\mathbf{V}_r}{V_r}$$

(2) 一般相対論効果による加速度の偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$

(3.199)を速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  で偏微分して,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{GR}^C}{\partial \dot{\mathbf{r}}^C} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{2\mu_s}{c^2 \gamma^3} [-\gamma \mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}^T + (1+\gamma)\{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \bar{I} + \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}^T\}] \quad (3.204)$$

### 3.3.4 C 行列の計算

C 行列は, 加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  の状態ベクトル  $\mathbf{X}(t)$  以外の力学系パラメタ  $\mathbf{a}$  に関する偏微分,

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{a}} \quad (\mathbf{a} \text{ は状態ベクトル以外の力学系パラメタ})$$

を用いて構成される.

$$C = \left[ 0, 0, \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{a}} \right] \quad (3.205)$$

パラメタ  $\mathbf{a}$  の種類は,

- ① 微小加速度パラメタ  $\vec{a}$
- ② 瞬時マヌーバ・パラメタ  $\Delta \mathbf{V}$
- ③ 太陽輻射圧の平均反射係数  $\Gamma$
- ④ 大気抵抗係数×有効断面積  $C_D \times S$
- ⑤ Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$

(1) 微小加速度パラメタ  $\vec{a}$ に関する偏微分  $\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \vec{a}}$

微小加速度パラメタ  $\vec{a}$  (EME 50) を含む加速度は,

$$\dot{\mathbf{r}}_{sf} = \vec{a} \quad (3.206)$$

なので, したがって,



$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{SF}}{\partial \vec{\mathbf{a}}} = \vec{\mathbf{I}} \quad (3.207)$$

$\vec{\mathbf{I}}$  : 単位行列 (3×3 行列)

積分においては，初期値を

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \vec{\mathbf{a}}} \right)_{t=t_0} = 0 \quad (3.208)$$

とし，積分終了時刻まで積分する。

(2) 瞬時マヌーバ・パラメタ  $\Delta \mathbf{V}$

マヌーバ時刻  $t_n$  での瞬時マヌーバの速度増分  $\Delta \mathbf{V}$  とすると，

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_+(t_n) = \mathbf{r}_-(t_n) \\ \dot{\mathbf{r}}_+(t_n) = \dot{\mathbf{r}}_-(t_n) + \Delta \mathbf{V} \end{array} \right\} \quad (3.209)$$

$\mathbf{r}_-(t_n), \dot{\mathbf{r}}_-(t_n)$  : マヌーバ前の S/C の位置・速度 (EME 50)

$\mathbf{r}_+(t_n), \dot{\mathbf{r}}_+(t_n)$  : マヌーバ後の S/C の位置・速度 (EME 50)

である。パラメタ  $\Delta \mathbf{V}$  に関する積分は行わない。すなわち， $t < t_n$  では，

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \Delta \mathbf{V}} = 0 \quad (3.210)$$

とし， $t > t_n$  では， $t = t_n$  での初期値，

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Delta \mathbf{V}} \right)_{t=t_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 \\ & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6 \times 3 \text{ 次元}) \quad (3.211)$$

として，

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \Delta \mathbf{V}} = U(t, t_n) \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Delta \mathbf{V}} \right)_{t=t_n} \quad (3.212)$$

$$U(t, t_n) = \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_n)} : \text{状態ベクトルの遷移行列}$$

とあらわされる。

(3) 太陽輻射圧の平均反射係数  $\Gamma$  に関する偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{SRP}}{\partial \Gamma}$

(3.192) を平均反射係数  $\Gamma$  で偏微分して，

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{SRP}}{\partial \Gamma} = \frac{C_1 A_s}{m_s (r^s)^2} \hat{\mathbf{r}}^s \quad (3.213)$$

積分においては、初期値を、

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Gamma} \right)_{t=t_0} = 0 \quad (3.214)$$

として、積分終了時刻まで積分するが、途中で影の出入りによる不連続が生ずる場合には、積分は再出発計算される。時刻  $t_1$  で影に入り、時刻  $t_2$  で影から出る時、

- ① 時刻  $t_1$  までは、(3.214)を初期値として(2.213)を積分して  $\partial \mathbf{X}(t_1)/\partial \Gamma$  を求める。
- ② 時刻  $t_2$  までは、 $U(t_2, t_1)$  を用いて、

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t_2)}{\partial \Gamma} = U(t_2, t_1) \frac{\partial \mathbf{X}(t_1)}{\partial \Gamma} \quad (3.215)$$

とする。

- ③ 時刻  $t$  までは、(3.215)を初期値として(3.213)を積分して  $\partial \mathbf{X}(t)/\partial \Gamma$  を求める。

という順序で計算がなされる。

- (4) 大気抵抗係数×有効断面積  $C_D \times S$  に関する偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial (C_D \times S)}$  (3.195)をパラメタ  $C_D \times S$  で偏微分して、

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{ADG}}{\partial (C_D \times S)} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{m_s} V_r^2 \hat{\mathbf{V}}_r \quad (3.216)$$

積分においては、初期値を、

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial (C_D \times S)} \right)_{t=t_0} = 0 \quad (3.217)$$

として積分を行なう。大気抵抗は高度 1000 km までしか働かないので、多くの積分では不連続処理がなされる。典型的な例として S/C が地球重力圏から脱出していくケースを考えると、時刻  $t_1$  で S/C が大気を脱出する時、

- ① 時刻  $t_1$  までは、(3.217)を初期値として積分を行い  $\partial \mathbf{X}(t_1)/\partial (C_D \times S)$  を求める。
- ② 時刻  $t > t_1$  での  $\partial \mathbf{X}(t)/\partial (C_D \times S)$  は、 $U(t, t_1)$  を用いて、

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial (C_D \times S)} = U(t, t_1) \frac{\partial \mathbf{X}(t_1)}{\partial (C_D \times S)} \quad (3.218)$$

とする。

(5) Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$  に関する偏微分  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \gamma}$

(3.199) をパラメタ  $\gamma$  で偏微分して,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{GR}}{\partial \gamma} = \frac{\mu_s}{c^2 \gamma^3} \{ (2\phi - s^2) \mathbf{r} + 2(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \} \quad (3.219)$$

積分においては, 初期値を,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \gamma} \right)_{t=t_0} = 0 \quad (3.220)$$

として積分終了時刻まで積分する. 積分中心  $C$  以外の天体  $B$  に対して初期値が与えられる場合,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{X}_B^C}{\partial \gamma} \right)_{t=t_0} \neq 0 \quad (3.221)$$

なので, (3.221) を初期値として積分を行う.

### 3.4 Light Time Equation

種々の観測量を計算するためには, 信号送信・受信時刻における観測局及びS/Cの位置・速度等を知る必要がある. light time equation を解くことは, それらの値を求める最初のステップである. 2点の位置座標と, 光(電磁波)が2点のうちの1点から他の1点に伝播するのに要する時間(ET表現)を結びつける方程式は, light time equation と呼ばれる.

時刻  $t_i(ET)$  に点  $i$  から発信し, 時刻  $t_j(ET)$  に点  $j$  に伝播する光の light time equation は, Brans-Dicke の理論では,

$$t_j - t_i = \frac{r_{ij}}{c} + \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^3} \ln \left[ \frac{r_i + r_j + r_{ij}}{r_i + r_j - r_{ij}} \right] \quad (3.222)$$

$$r_i = \|\mathbf{r}^s(t_i)\|, \quad r_j = \|\mathbf{r}^s(t_j)\|, \quad r_{ij} = \|\mathbf{r}^s(t_j) - \mathbf{r}^s(t_i)\|$$

$\mathbf{r}^s(t_i)$ : 時刻  $t_i(ET)$  における位置ベクトル (太陽中心系)

$\gamma$ : Brans-Dicke の自由パラメタ ( $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$ )

$\mu_s$ : 太陽の重力定数

となる. 右辺第2項は, 相対論付加項である. この式を用いて, 観測局での信号受信時刻  $t_3$  から, 観測局からの送信時刻  $t_1$ , S/Cでの受信・再送信時刻  $t_2$  を計算する. 各時刻での観測局及びS/Cの位置・速度等は, 天体エフェメリス, S/Cエフェメリスから算出できる. light time equation を解く手続きは, 次の様になる.

- ① 受信時刻  $t_3(ET)$  を既知として, down leg に対して light time equation を逐次代

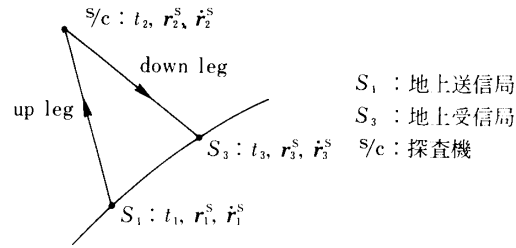


図 3.19 up leg と down leg

入法 (Newton-Raphson 法) で解いて, S/C での受信・再送信時刻  $t_2(ET)$  を導出する. すなわち,

$$\text{初期値: } t_2^{(0)} = t_3$$

として,

$$\left. \begin{aligned} t_2^{(k+1)} &= t_2^{(k)} + \Delta^{(k)} \\ \Delta^{(k)} &= \frac{t_3 - t_2^{(k)} - \frac{r_{23}^{(k)}}{c} - \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^3} \ln \left[ \frac{r_2^{(k)} + r_3 + r_{23}^{(k)}}{r_2^{(k)} + r_3 - r_{23}^{(k)}} \right]}{1 - \frac{\mathbf{r}_{23}^{(k)}}{r_{23}^{(k)}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_2^S(t_2^{(k)})} \end{aligned} \right\} \quad (3.223)$$

$$\mathbf{r}_{23}^{(k)} = \mathbf{r}_3^S(t_3) - \mathbf{r}_2^S(t_2^{(k)})$$

$$r_2^{(k)} = \|\mathbf{r}_2^S(t_2^{(k)})\|, \quad r_{23}^{(k)} = \|\mathbf{r}_{23}^{(k)}\|$$

を,  $|\Delta^{(k)}| < \epsilon$  ( $\epsilon$ : 収束判定値) になるまでイタレーションを繰り返して  $t_2$  を求める.

- ② ①で計算して求めた  $t_2$  を用いて, up leg に対しても同様に light time equation を逐次代入法で解き ((3.223) で  $3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$  とする), 送信時刻  $t_1(ET)$  を求める.

このようにして求められた各時刻  $t_1, t_2, t_3$  及びそれらの時刻での, 観測局・S/C の位置・速度等は, 観測モデル式・観測行列の計算に用いられる.

### 3.5 観測モデルと観測行列

以下に, 本プログラムで取扱う観測モデルと観測行列について述べる. 観測モデル及び観測行列は, 観測量  $z$  をあらわす式,

$$z_0 = z(\mathbf{q}; t) + n \quad (3.224)$$

$z_0$ : 観測量の測定値

$\mathbf{q}$ : 推定パラメタ

$n$ : 観測ノイズ

を線型化した式,

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \cdot \Delta \mathbf{q} + n \tag{3.225}$$

$$\Delta z = z_0 - z_c$$

$z_c = z(\mathbf{q}_0; t)$ : 観測量の計算式

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$$

$\mathbf{q}_0$ : ノミナル軌道での推定パラメタ値

を用いて推定を行う際に必要となる。観測モデル式は、観測量の計算値  $z_c$  を S/C 及び観測局の位置・速度等を用いて表現する際用いられる。また、観測行列  $\partial z / \partial \mathbf{q}$  は観測量の推定パラメタ  $\mathbf{q}$  に対する偏微分をあらわす。

### 3.5.1 観測モデル

S/C の軌道を決定するためには、S/C の位置・速度に関する情報が必要である。それらの情報を得るために、地上の観測局から追跡を実施しようとする S/C の方向や距離及び運動状態を電波的手段で観測する。そのようにして得られた量は観測量と呼ばれるが、この値を表現するのが観測モデルである。

本プログラムで取扱う観測量を表 3.7 に示す。

表 3.7 各観測量

観測量	本プログラムで 取り扱う観測量	記号	説明
レンジ	レンジ	$\rho$	観測局と S/C 間の距離
ドップラー	1-way ドップラー	F 1	S/C から送信された信号のドップラー・シフト
	2-way ドップラー	F 2	観測局から送信され、S/C で受信・再送信された信号のドップラー・シフト
角度	方位角 (Az)	$\sigma$	観測局で受信された信号の到達方向
	仰角 (El)	$\gamma$	

表 3.8 各追跡システムの変換因子 F と法数 M

追跡システム	変換因子 F	法数 M
UDSC (Usuda Deep Space Center)	$c$ (光速)	$f_{UP} / 2^N$ (lowest tone)
KSC (Kagoshima Space Center)	$c \times 10^9$	—

## (1) レンジ観測量

レンジ観測量 (Range Observable) は、観測局から送信された電波を S/C で中継させて観測局に送り返し、往復に要した伝播時間 (RTL T; Round Trip Light Time) を測定することによって求められる。すなわち、時刻  $t_1$  (ST; 局時刻) に観測局から送信され、時刻  $t_2$  (ST) に S/C で受信・再送信され、時刻  $t_3$  (ST) に同じ観測局で受信されたとする、レンジ観測量  $\rho$  は、

$$\rho \equiv (t_3 - t_1)_{ST} \times F \pmod{M} \quad (3.226)$$

ここで、

$(t_3 - t_1)_{ST}$ : 観測局の局時刻 (ST) で測った信号の往復時間

$F$ : 局時からレンジ観測量の単位に変換する変換因子

$M$ : 法数

と表現される。変換因子  $F$  及び法数  $M$  は追跡システムによって異なる。表 3.8 に、各追跡システムでの  $F$ ,  $M$  の値を示す。

レンジ観測量に対する観測式は、受信時刻が  $t_3$  (ET; 暦表時) であるような light time equation の往復路に対する解 (ET 表現; 「3.4 Light Time Equation」の項参照) と、暦表時 ET から局時 ST への時系変換の式 (「3.1 時系と座標系」の項参照) を用いて、

$$\begin{aligned} \rho \equiv & \left\{ \frac{r_{12}}{c} + \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^3} \ln \left[ \frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right] + \frac{r_{23}}{c} + \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^3} \ln \left[ \frac{r_2 + r_3 + r_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}} \right] \right. \\ & - (ET - TAI)_{t_3} + (ET - TAI)_{t_1} \\ & - \delta(ET - TAI)_{t_3} + \delta(ET - TAI)_{t_1} \\ & - (TAI - UTC)_{t_3} + (TAI - UTC)_{t_1} \\ & - (UTC - ST)_{t_3} + (UTC - ST)_{t_1} \\ & \left. + \frac{1}{c} [R_c + \Delta(t_1) + \Delta(t_2)] \right\} \times F \pmod{M} \quad (3.227) \end{aligned}$$

ここで、

$(ET - TAI)_{t_i}$ : 時刻  $t_i$  (ET) での  $ET \rightarrow TAI$  の時系変換定数 ( $ET - TAI$ ) の値

$(TAI - UTC)_{t_i}$ : 時刻  $t_i$  (ET) での  $TAI \rightarrow UTC$  の時系変換定数 ( $TAI - UTC$ ) の値

$(UTC - ST)_{t_i}$ : 時刻  $t_i$  (ET) での  $UTC \rightarrow ST$  の時系変換定数 ( $UTC - ST$ ) の値

$\delta(ET - TAI)_{t_i}$ : 時刻  $t_i$  (ET) での時系変換 ( $ET - TAI$ ) のうち  $\sin E$  の項を除く相対論補正項

$\mu_s$ : 太陽の重力定数 ( $= 1.32712438 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$ )

- $c$  : 光速度 (km/s)  
 $\gamma$  : Brans-Dicke の自由パラメタ  
 $R_c$  : レンジ・バイアス値 (km)  
 $\Delta(t)$  : up leg ( $t=t_1$ ), down leg ( $t=t_3$ ) でのレンジ補正量。詳細は「3.5 観測量の補正」参照。  
 $r_i = \|r_i^s\|$  : 時刻  $t_i$  ( $i=1,3$ ) での観測局の位置 (太陽中心 EME 50)  
 $r_2 = \|r_2^s\|$  : 時刻  $t_2$  での S/C の位置 (太陽中心 EME 50)  
 $r_{12} = \|r_{12}\| = \|r_2^s - r_1^s\|$ ,  $r_{23} = \|r_{23}\| = \|r_3^s - r_2^s\|$

とあらわされる。相対論補正項，

$$\begin{aligned}
 \delta(ET - TAI) = & 0.317679 \times 10^{-9} u \sin(UT + \lambda) \\
 & + 5.341 \times 10^{-12} u \sin(UT + \lambda - M) \\
 & + 1.01 \times 10^{-13} u \sin(UT + \lambda - 2M) \\
 & - 1.3640 \times 10^{-11} u \sin(UT + \lambda + 2L) \\
 & - 2.27 \times 10^{-13} u \sin(UT + \lambda + 2L - M) \\
 & + 1.672 \times 10^{-6} \sin D \\
 & + 1.38 \times 10^{-13} u \sin(UT + \lambda - D)
 \end{aligned} \tag{3.228}$$

$M$  : 地球・月重心の平均近点離角

$E$  : 地球・月重心の離心近点離角

$L$  : 平均黄道座標系での太陽の geometric mean longitude

$D = -L$

: 平均黄道座標の平均春分点方向から測られた昇交点経度 + それから軌道に沿って測られた月の平均経度

$u$  : 地球自転軸から観測局 (正確には, 観測局に設置された時計) までの距離 (km)

$\lambda$  : 観測局 (時計) の東経 (rad)

$UT$  : 世界時 (rad)

は、普通、省略されるか、あるいは 2, 3 の項を除いて省略される。これらの項及び  $\sin E$  を含む項の、レンジ (片道) への寄与を表 3.9 に示す。

本プログラムでは (3.228) の第 1 項, 第 4 項及び第 6 項を考慮に入れている。

## (2) ドップラー観測量

ドップラー観測とは、基本的には、S/C から連続的に送信された電波のドップラー効果による周波数のずれ (i.e. ドップラー・シフト量) を測定して、観測局と S/C 間の距離変

表 3.9  $\delta(\text{ET-TAI})$  の各項の 1-way レンジへの寄与

相 対 論 補 正 項	1-way レンジへの寄与
$1.658 \times 10^{-3} \sin E$	50 m/AU
$0.317679 \times 10^{-9} u \sin (UT + \lambda)$	22
$5.341 \times 10^{-12} u \sin (UT + \lambda - M)$	0.4
$1.01 \times 10^{-13} u \sin (UT + \lambda - 2 M)$	0.007
$1.3640 \times 10^{-11} u \sin (UT + \lambda + 2 L)$	1
$2.27 \times 10^{-13} u \sin (UT + \lambda + 2 L + M)$	0.02
$1.672 \times 10^{-6} \sin D$	0.6
$1.38 \times 10^{-13} u \sin (UT + \lambda - D)$	0.01

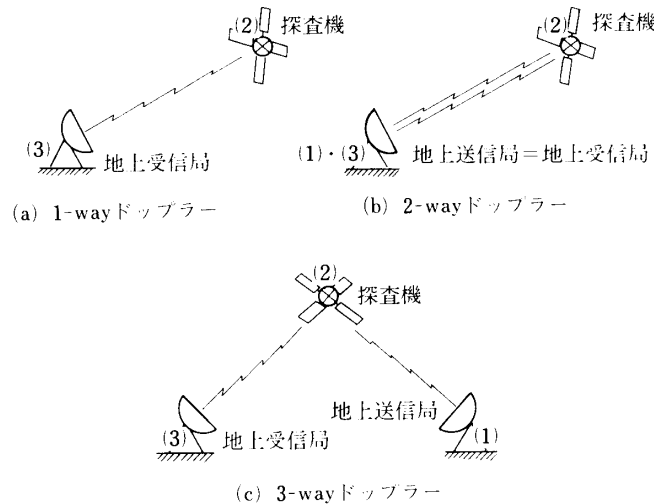


図 3.20 ドップラー観測法の観測方法

化率を求めるものである。方法に応じて、図 3.20 のように、1-way ドップラー、2-way ドップラー及び 3-way ドップラーの 3 種類がある。

1-way ドップラーは、S/C に搭載された発信器から送信された信号を観測局で受信するもので、装置が簡便であるのが長所であるが、欠点として、発信器の発振周波数が極めて不安定であることと、送信時刻が不明確であることが挙げられる。

2-way ドップラーは、信号は観測局から連続的に送信され、S/C で受信・再送信されて同じ観測局で連続的に受信される。この信号は他の観測局でも受信することができて、そのような場合、3-way ドップラーと呼ばれる。2-way ドップラーは、発振周波数を安定にすることができ、また同じカウンタ・クロックを用いて測定されるため、精度は最も良い。3-way ドップラーは、2つの観測局のカウンタ・クロックのくいちがい分だけ、2-way ドップラーより劣る。



受信局で得られる出力は，受信されたドップラー・シフト量  $\Delta f_d(t_3)$  に，観測値を正に保つためのバイアス周波数  $f_{\text{bias}}$  を加えた周波数，

$$f(t_3) = f_{\text{bias}} + \Delta f_d(t_3) \quad (3.229)$$

の波数を，カウント時間間隔  $T_c$  にわたってカウントしたカウント数  $N$  である。それゆえ，得られたドップラー観測量 (Doppler Observable)  $F = \overline{\Delta f_d} = \overline{(f - f_{\text{bias}})}$  は，

$$F = \frac{N}{T_c} - f_{\text{bias}} = \frac{1}{T_c} \int_{t_{3m} - \frac{1}{2}T_c}^{t_{3m} + \frac{1}{2}T_c} (f - f_{\text{bias}}) dt_3 (ST) \quad (3.230)$$

ここで，

- $T_c$  : カウント時間 (sec)
- $N$  : カウント時間  $T_c$  中にカウントされた波数
- $f_{\text{bias}}$  : バイアス周波数 (Hz)
- $t_{3m}$  : カウント時間  $T_c$  の中点時刻 (ST)

となる。これは， $T_c$  にわたってのドップラー・シフト量の平均値を与える。

ドップラー観測量に対する観測式は，(3.230)で  $(f - f_{\text{bias}})$  を  $T_c$  の中点時刻  $t_{3m}$  の近傍で Taylor 展開し，4次以上の導関数を打ち切って得られる。本プログラムでは，1-way ドップラー及び 2-way ドップラー観測量を扱っているので，それぞれの観測式を以下に示す。

(a) 1-way ドップラー観測量

$$F1 = C_1 f_{S/C} \left\{ \left( 1 - \frac{F_R}{F_T} \right)^* + \Delta \right\} - C_1 [\Delta f_{T_0} + f_{T_1}(t_2 - t_0)] \quad (3.231)$$

ここで，

$$f_{S/C} = f_{T_0} + \Delta f_{T_0} + f_{T_1}(t_2 - t_0) \quad (3.232)$$

: UTC で測った S/C の発信周波数 (Hz)

$f_{T_0}$  : S/C からの発信周波数のノミナル値 (Hz)

$\Delta f_{T_0}$  : S/C からの発振周波数のオフセット値 (Hz; 推定パラメタ)

$f_{T_1}$  : S/C からの発振周波数の変化率 (Hz/s; 推定パラメタ)

$$\Delta = \frac{1}{cT_c} \{ \Delta \rho(t_{3e}) - \Delta \rho(t_{3s}) \} \quad (3.233)$$

$$\Delta \rho(t) = \Delta_T \rho(t) - \Delta_I \rho(t) + \Delta_A \rho(t) + \Delta_D \rho(t) \quad (3.234)$$

$\Delta_T \rho(t)$ ,  $\Delta_I \rho(t)$ ,  $\Delta_A \rho(t)$ ,  $\Delta_D \rho(t)$  については「3.5 観測量の補正」の項参照。

$t_{3s} = t_{3m} - \frac{1}{2}T_c$  : カウント開始時刻 (ST)

$t_{3e} = t_{3m} + \frac{1}{2} T_c$  : カウント終了時刻 (ST)

$C_1$  : 定数

$c$  : 光速度

$$\left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^* = \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) + \frac{T_c^2}{24} \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) \ddot{\phantom{x}} \quad (3.235)$$

$\left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)$ ,  $\left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) \ddot{\phantom{x}}$  の式は,

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) &= \frac{1}{c} \dot{r}_{23} + \frac{1}{c^2} \left[ \dot{r}_{23} \dot{p}_{23} + (\phi_2 - \phi_3) + \frac{1}{2} (\dot{s}_2^2 - \dot{s}_3^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{c^3} \left\{ \dot{r}_{23} \dot{p}_{23}^2 - \dot{r}_{23} \left[ (\phi_2 - \phi_3) + \frac{1}{2} (\dot{s}_2^2 - \dot{s}_3^2) \right] - (1 + \gamma) \mu_s \epsilon_{23} \right\} \\ \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) \ddot{\phantom{x}} &= \frac{1}{c} \ddot{r}_{23} + \frac{1}{c^2} \left[ \ddot{r}_{23} \dot{p}_{23} + 3(\dot{r}_{23} \ddot{p}_{23} + \ddot{r}_{23} \dot{p}_{23}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.236)$$

ここに,

$\phi_2 = \sum_j \frac{\mu_j}{r_{2j}}$  : S/C の位置での Newton ポテンシャル

$\phi_3 = \frac{\mu_s}{r_3} + \frac{\mu_E}{r_3^E}$  :  $r_3^E$  は地球中心から観測局までの距離 (km)

$\dot{r}_{23}$ ,  $\ddot{r}_{23}$ ,  $\ddot{\phantom{x}}$ ,  $\dot{p}_{23}$ ,  $\ddot{p}_{23}$ ,  $\ddot{\phantom{x}}$ ,  $\epsilon_{23}$  : (3.241) 参照

$\dot{s}_2^2 = \|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2$ ,  $\dot{s}_3^2 = \|\dot{\mathbf{r}}_3\|^2$

$\mu_s$  : 太陽の重力定数 ( $\text{km}^3/\text{s}^2$ )

$\gamma$  : Brans-Dicke の自由パラメタ

(b) 2-way ドップラー観測量

$$F2 = C_2 K f_{up} \left\{ \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^* + \Delta \right\} + F_c \quad (3.237)$$

ここで,

$f_{up}$  : アップリンク周波数 (Hz)

$K$  : トランスポンダでの周波数変換比

$$\Delta = \frac{1}{c T_c} \{ \Delta \rho(t_{3e}) + \Delta \rho(t_{1e}) - \Delta \rho(t_{3s}) - \Delta \rho(t_{1s}) \} \quad (3.238)$$

$$\Delta \rho(t) = \Delta_T \rho(t) - \Delta_I \rho(t) + \Delta_A \rho(t) + \Delta_D \rho(t) \quad (3.239)$$

$\Delta_T \rho(t)$ ,  $\Delta_I \rho(t)$ ,  $\Delta_A \rho(t)$ ,  $\Delta_D \rho(t)$  については, 「3.5 観測量の補正の項」参照.

$t_{1s}, t_{1e}$  : 受信時刻  $t_{3s}, t_{3e}$  に対応する送信時刻 (ST)

$C_2$  : 定数

$c$  : 光速度

$F_c$ : レンジレート・バイアス (Hz)

$$\left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^* = \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) + \frac{T_C^2}{24} \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)''$$

$$\left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right), \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)'' \text{ の式は,}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right) &= \frac{1}{c}(\dot{r}_{12} + \dot{r}_{23}) + \frac{1}{c^2} \left[ \dot{r}_{12} \dot{p}_{12} + \dot{r}_{23} \dot{p}_{23} - \dot{r}_{12} \dot{r}_{23} + (\phi_1 - \phi_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\dot{s}_1^2 - \dot{s}_3^2) \right] + \frac{1}{c^3} \{ \dot{r}_{12} \dot{p}_{12}^2 + \dot{r}_{23} \dot{p}_{23}^2 - \dot{r}_{12} \dot{r}_{23} (\dot{p}_{12} + \dot{p}_{23}) \\ &\quad - (\dot{r}_{12} + \dot{r}_{23}) \left[ (\phi_1 - \phi_3) + \frac{1}{2}(\dot{s}_1^2 - \dot{s}_3^2) \right] - (1 + \gamma) \mu_s (\epsilon_{12} + \epsilon_{23}) \} \\ \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)'' &= \frac{1}{c}(\ddot{r}_{12} + \ddot{r}_{23}) + \frac{1}{c^2} [\ddot{r}_{12}(\dot{p}_{12} - 3\dot{r}_{23}) + \ddot{r}_{23}(\dot{p}_{23} - \dot{r}_{12}) \\ &\quad + 3(\dot{r}_{12} \ddot{p}_{12} + \dot{r}_{23} \ddot{p}_{23} + \ddot{r}_{12} \dot{p}_{12} + \ddot{r}_{23} \dot{p}_{23} - \ddot{r}_{12} \dot{r}_{23})] \end{aligned}$$

(3.240)

ここに,

$$\phi_1 = \frac{\mu_s}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_1^E} : r_1^E \text{ は時刻 } t_{1m}(ET) \text{ における地球中心から観測局までの距離 (km)}$$

$$\phi_3 = \frac{\mu_s}{r_3} + \frac{\mu_E}{r_3^E} : r_3^E \text{ は時刻 } t_{3m}(ET) \text{ における地球中心から観測局までの距離 (km)}$$

$\dot{r}, \ddot{r}, \dot{p}, \ddot{p}, \epsilon$  に対する式は,

$$\begin{aligned} \dot{r}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12} && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \ddot{r}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{12} + \dot{\mathbf{r}}_{12} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12} - \dot{r}_{12}^2}{r_{12}} && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \ddot{r}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{12} + 3\dot{\mathbf{r}}_{12} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12} - 3\dot{r}_{12} \ddot{r}_{12}}{r_{12}} && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \dot{p}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \ddot{p}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12} - \dot{p}_{12} \dot{r}_{12}}{r_{12}} && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \ddot{p}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 + 2\dot{\mathbf{r}}_{12} \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12} - 2\dot{r}_{12} \ddot{p}_{12} - \dot{p}_{12} \dot{r}_{12}}{r_{12}} && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \\ \epsilon_{12} &= \frac{\dot{r}_1 + \dot{r}_2 - \dot{r}_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} - \frac{\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \dot{r}_{12}}{r_1 + r_2 + r_{12}} && \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.241)$$

となる。

上に述べた観測式の打ち切り誤差のオーダーは、 $\sim(1-F_R/F_T)^{(4)}T_c^4$ である。それゆえ、カウント時間  $T_c$  には上限があることに留意すべきである。 $T_c$  の上限は太陽巡航モードで $\sim 1000$  sec, 惑星近傍で $\sim 10$  sec 程度である。

### (3) 角度観測量

角度観測量 (Angular Observable) は、観測局から S/C に向かう視線ベクトルの方向角を観測することによって求められる。角度の組み合わせとしては、アンテナ軸の構成によって Az-El 角, X-Y 角, X'-Y' 角等があるが、本プロジェクトで使用するアンテナは Az-El 角を観測するので、以下に Az-El 角に関する観測式を述べる。

角度観測で用いられる座標系は地表面座標系と地球中心 true of date 地球赤道座標系であり、一方、内部計算では、太陽中心 (あるいは座標中心) 1950.0 年平均地球赤道座標系を用いているので、両座標系間の変換が必要である。座標中心を変更する際、光行差の効果があらわれる。極運動の効果は、測定精度に対して無視できる程微小なので (極運動の効果は、赤道面で $\sim 1''$ )、本プログラムでは考慮されていない。

信号受信時刻  $t_3$ (ET) における局位置  $\mathbf{r}_3$  から、S/C での受信・再送信時刻  $t_2$ (ET) における S/C の位置  $\mathbf{r}_2$  に向かう単位ベクトル  $\mathbf{L}$  とする。すなわち、

$$\mathbf{L} = -\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}; \quad \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \quad r_{23} = \|\mathbf{r}_{23}\| \quad (3.242)$$

地表面座標系では、 $\mathbf{L}$  は方位角  $\sigma$ , 仰角  $\gamma$  として、

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sin \gamma \\ \cos \gamma \sin \sigma \\ \cos \gamma \cos \sigma \end{bmatrix} \quad (3.243)$$

とあらわされる。また、地球中心 true of date 地球赤道座標系における  $\mathbf{L}$  の表現は、

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sin \gamma \cos(\theta_g + \lambda) \cos \phi_g - \cos \gamma \{ \sin \sigma \sin(\theta_g + \lambda) + \cos \sigma \cos(\theta_g + \lambda) \sin \phi_g \} \\ \sin \gamma \sin(\theta_g + \lambda) \cos \phi_g + \cos \gamma \{ \sin \sigma \cos(\theta_g + \lambda) - \cos \sigma \sin(\theta_g + \lambda) \sin \phi_g \} \\ \sin \gamma \sin \phi_g + \cos \gamma \cos \sigma \cos \phi_g \end{bmatrix} \quad (3.244)$$

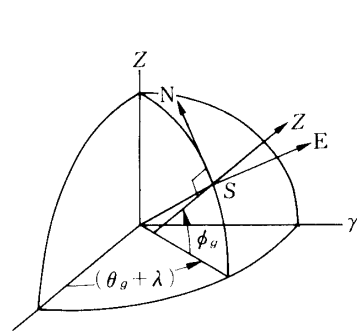


図 3.21 地表面座標系

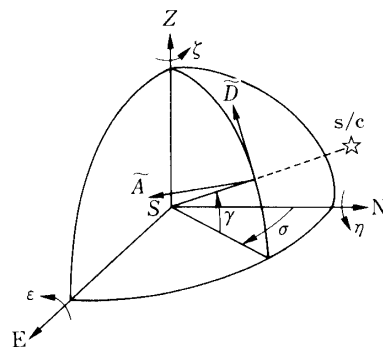


図 3.22 方位角  $\sigma$  と仰角  $\gamma$

ここで，

$\theta_g$ ：時刻  $t_3$  における真のグリニッジ時角（真の恒星時）

$\lambda$ ：真の極に関する観測局の東経

$\phi_g$ ：真の極に関する観測局の測地緯度

である。

(観測局中心) 地球固定座標系におけるベクトル  $\mathbf{L}_{BF}$  と太陽中心 (座標中心) 1950.0 年平均地球赤道座標系における  $\mathbf{L}_{50}$  との関係は，

$$\mathbf{L}_{BF} = T(t_3)(\mathbf{L}_{50} + \Delta\mathbf{L}_{50}) \quad (3.245)$$

ここで，

$\Delta\mathbf{L}_{50}$ ：座標中心変更（太陽→観測局）による光行差補正

$T(t_3)$ ：時刻  $t_3$ (ET) における，1950.0 年平均地球赤道座標系→地球固定座標系への変換行列

$\Delta\mathbf{L}_{50}$  は，次式であらわされる；

$$\Delta\mathbf{L}_{50} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{r}}_3 - (\dot{\mathbf{r}}_3 \cdot \mathbf{L}_{50}) \mathbf{L}_{50}] \quad (3.246)$$

$\dot{\mathbf{r}}_3$ ：元の座標中心から測った観測局の速度 (EME 50；km/s)

求める方向角  $\sigma$ ，仰角  $\tilde{\gamma}$  は，次式で与えられる；

$$\left. \begin{aligned} \sin \tilde{\gamma} &= \mathbf{L}_{BF} \cdot \mathbf{Z}_{BF} & 0^\circ \leq \tilde{\gamma} \leq 90^\circ \\ \sin \sigma &= \frac{\mathbf{L}_{BF} \cdot \mathbf{E}_{BF}}{\cos \tilde{\gamma}} & 0^\circ \leq \sigma \leq 360^\circ \\ \cos \sigma &= \frac{\mathbf{L}_{BF} \cdot \mathbf{N}_{BF}}{\cos \tilde{\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (3.247)$$

$\mathbf{Z}_{BF}$ ， $\mathbf{E}_{BF}$ ， $\mathbf{N}_{BF}$  は，地表面座標系での天頂方向，東方向，北方向の単位ベクトルを地球固定座標系で表現したもので，次式で与えられる；

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_{BF} &= \begin{bmatrix} -\sin \phi_g \cos \lambda \\ -\sin \phi_g \sin \lambda \\ \cos \phi_g \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{BF} &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z}_{BF} &= \begin{bmatrix} \cos \phi_g \cos \lambda \\ \cos \phi_g \sin \lambda \\ \sin \phi_g \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.248)$$

ここに,

$\phi_g$ ; 観測局の測地緯度

$\lambda$ ; 観測局の東経

仰角  $\gamma$  については, 対流圏屈折効果による補正  $\Delta_r\gamma$  (「3.6 観測量の補正」の項参照) を考慮に入れて,

$$\gamma = \tilde{\gamma} + \Delta_r\gamma \quad (3.249)$$

となる.

### 3.5.2 観測行列

観測行列は, 観測量  $z$  の推定パラメタ  $\mathbf{q}$  に関する偏微分係数 (Regression Partial Derivatives)  $\partial z / \partial \mathbf{q}$  で構成される.

本プログラムで取扱う推定パラメタを表 3.10 に示す. これらのパラメタのうち, 各観測モデル式に explicit にも implicit にも依存していないものについては, 偏微分係数  $\partial z / \partial \mathbf{q}$  は 0 となる. Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$  については, 実際には天体エフェメリス, S/C エフェメリス等がこのパラメタに密接に関連しているが, 偏微分は light time equation の相対論項に関するものしか考慮しない近似式を用いている.

(1) レンジ観測量  $\rho$  に関する偏微分

レンジ観測量  $\rho$  の計算式は (3.226) で与えられる. すなわち,

$$\begin{aligned} \rho = & F\{(t_3 - t_1)_{ET} + (ET \rightarrow ST \text{ への時系変換項}) \\ & + (\text{レンジ・バイアス } R_c) + (\text{補正項})\} \pmod{M} \end{aligned} \quad (3.250)$$

レンジ・バイアス  $R_c$ , タイミング・バイアス  $a$ , Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$  以外の推定パラメタ  $\mathbf{q}$  は, (3.227) の第 1 項の偏微分によって得られる. 信号受信時刻  $t_3(ET)$  は, タイミング・バイアス  $a$  を変化させない限り, 固定されているので, したがって, それらのパラメタ  $\mathbf{q}$  に関する偏微分は,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}} = -F \frac{\partial t_1(ET)}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.251)$$

となる. ここに,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1}{c} \left[ \frac{\{(1+K)\hat{\mathbf{r}}_{23} - L\hat{\mathbf{r}}_2\} \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{q}} - \{(1+K)\hat{\mathbf{r}}_{23} + L\hat{\mathbf{r}}_3\} \frac{\partial \mathbf{r}_3^s}{\partial \mathbf{q}}}{1 - \frac{1}{c}\{(1+K)\dot{p}_{23} - L\dot{r}_2\}} \right. \\ \frac{\partial t_1}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)(\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N\dot{r}_2\}}{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)\dot{p}_{12} - N\dot{r}_1\}} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \right\} \quad (3.252)$$

表 3.10 推定パラメタの種類

推定パラメタ	記号	観測量 Z					備考
		$\rho$	F 1	F 2	$\sigma$	$\gamma$	
エポックでの状態ベクトル	$X(t_0)$	●	●	●	●	●	
局位置	$\phi_g, \lambda, h$	●	●	●	●	●	
レンジ・バイアス	$R_c$	●					
1-way ドップラー・オフセット	$\Delta f_{T_0}$		●				
1-way ドップラー周波数変化率	$f_{T_1}$		●				
レンジレート・バイアス	$F_c$			●			
タイミング・バイアス	$a$	●	●	●	●	●	
微小加速度パラメタ	$\vec{a}$	●	●	●	●	●	
瞬時マヌーバ・パラメタ	$\Delta V$	●	●	●	●	●	
太陽輻射圧の平均反射係数	$\Gamma$	●	●	●	●	●	
大気抵抗係数	$C_D \times S$	●	●	●	●	●	
Brans-Dicke の自由パラメタ	$\gamma$	●	●	●			

$$+ \frac{1}{c} \left[ \frac{\{(1+M)\hat{r}_{12} - N\hat{r}_1\} \frac{\partial r_1^s}{\partial \mathbf{q}} - \{(1+M)\hat{r}_{12} + N\hat{r}_2\} \frac{\partial r_2^s}{\partial \mathbf{q}}}{1 - \frac{1}{c} \{(1+M)\dot{p}_{12} - N\dot{r}_1\}} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^2} \left[ \frac{1}{r_2+r_3+r_{23}} + \frac{1}{r_2+r_3-r_{23}} \right] \\ L &= \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^2} \left[ \frac{1}{r_2+r_3+r_{23}} - \frac{1}{r_2+r_3-r_{23}} \right] \\ M &= \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^2} \left[ \frac{1}{r_1+r_2+r_{12}} + \frac{1}{r_1+r_2-r_{12}} \right] \\ N &= \frac{(1+\gamma)\mu_s}{c^2} \left[ \frac{1}{r_1+r_2+r_{12}} - \frac{1}{r_1+r_2-r_{12}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.253)$$

$$\hat{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_1^s}{r_1}, \quad \hat{r}_2 = \frac{\mathbf{r}_2^s}{r_2}, \quad \hat{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_3^s}{r_3}, \quad \hat{r}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}^s}{r_{12}}, \quad \hat{r}_{23} = \frac{\mathbf{r}_{23}^s}{r_{23}}$$

$$\dot{r}_1 = \hat{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1^s, \quad \dot{r}_2 = \hat{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2^s, \quad \dot{r}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12}^s$$

$$\dot{p}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12}^s, \quad \dot{p}_{23} = \hat{r}_{23} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{23}^s$$

と表現される。添字 s は、太陽中心系でのベクトルであることを示している。

(i) 状態ベクトル  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial\mathbf{X}_0$   
 (3.251), (3.252) より,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{X}_0} &= -\frac{F}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)\dot{p}_{12} - N\dot{r}_1\}} \\ &\times \left[ \frac{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)(\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N\dot{r}_2\}}{1 - \frac{1}{c}\{(1+K)\dot{p}_{23} - L\dot{r}_2\}} \cdot \{(1+K)\hat{\mathbf{r}}_{23} - L\hat{\mathbf{r}}_2\} \right. \\ &\left. - \{(1+M)\hat{\mathbf{r}}_{12} + N\hat{\mathbf{r}}_2\} \right] \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_2^s}{\partial\mathbf{X}_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.254)$$

$F$ : 変換因子

$\partial\mathbf{r}_2^s/\partial\mathbf{X}_0$  は, 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

(ii) 局位置  $(\phi_g, \lambda, h)$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial(\phi_g, \lambda, h)$

$$\left. \begin{aligned} \partial\rho/\partial(\phi_g, \lambda, h) &= -\frac{F}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)\dot{p}_{12} - N\dot{r}_1\}} \\ &\times \left[ \{(1+M)\hat{\mathbf{r}}_{12} - N\hat{\mathbf{r}}_1\} \cdot \partial\mathbf{r}_1^s/\partial(\phi_g, \lambda, h) \right. \\ &\left. - \frac{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)(\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N\dot{r}_2\}}{1 - \frac{1}{c}\{(1+K)\dot{p}_{23} - L\dot{r}_2\}} \cdot \{(1+K)\hat{\mathbf{r}}_{23} + L\hat{\mathbf{r}}_3\} \right. \\ &\left. \times \partial\mathbf{r}_3^s/\partial(\phi_g, \lambda, h) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.255)$$

$$\partial\mathbf{r}_i^s/\partial(\phi_g, \lambda, h) = \partial\mathbf{r}_i^E/\partial(\phi_g, \lambda, h) = T_E^t(t_i) \partial\mathbf{r}_b/\partial(\phi_g, \lambda, h) \quad i=1,3 \quad (3.256)$$

$T_E(t_i)$ : 時刻  $t_i(ET)$  における, 1950.0年平均地球赤道座標系から地球固定座標系への変換行列

$\partial\mathbf{r}_b/\partial(\phi_g, \lambda, h)$  については,

$$\frac{\partial\mathbf{r}_b}{\partial\phi_g} = \left[ \begin{array}{l} \left\{ \frac{N^3 e^2}{a_e^2} \cos^2 \phi_g - (N+h) \right\} \sin \phi_g \cos \lambda \\ \left\{ \frac{N^3 e^2}{a_e^2} \cos^2 \phi_g - (N+h) \right\} \sin \phi_g \sin \lambda \\ \left\{ \frac{N^3 e^2}{a_e^2} (1-e^2) \sin^2 \phi_g + N(1-e^2) + h \right\} \cos \phi_g \end{array} \right]$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial \lambda} &= \begin{bmatrix} -(N+h)\cos\phi_g \sin\lambda \\ (N+h)\cos\phi_g \cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial h} &= \begin{bmatrix} \cos\phi_g \cos\lambda \\ \cos\phi_g \sin\lambda \\ \sin\phi_g \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.257)$$

$$N = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_g}}$$

$\phi_g$ : 観測局の測地緯度

$\lambda$ : 観測局の東経

$h$ : 観測局の平均海面からの高度 (km)

$a_e$ : 平均地球赤道半径 (km)

$e^2 = f(2-f)$ ;  $f$  は扁平率

(iii) レンジバイアス  $R_c$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial R_c$

レンジバイアス  $R_c$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial R_c$  は, (3.227) を直接偏微分して求められる。すなわち,

$$\frac{\partial\rho}{\partial R_c} = \frac{F}{c} \quad (3.258)$$

$F$ : 単位変換因子

$c$ : 光速

(iv) タイミング・バイアス  $a$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial a$

タイミング・バイアス  $a$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial a$  は, (3.227) を直接偏微分して求められる。(ET → ST への時系変換項) の微分は, 2つの項 (すなわち,  $(ET - ST)_{t_3}$  と  $(ET - ST)_{t_1}$  の微分がほぼ打消し合うので, 結局, 第1項のみ微分すれば良い;

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial a} &= F \frac{\partial(t_3 - t_1)_{ET}}{\partial a} = F \frac{\partial t_3}{\partial a} \cdot \frac{\partial}{\partial t_3} (t_3 - t_1)_{ET} = F \left( 1 - \frac{dt_1}{dt_3} \right) \\ &= \frac{F}{c} (\dot{r}_{23} + \dot{r}_{12}) [1 + (\dot{p}_{23} + \dot{p}_{12})] \end{aligned} \quad (3.259)$$

(v) 微小加速度  $\vec{a}$  に関する偏微分  $\partial\rho/\partial \vec{a}$

状態ベクトル  $\mathbf{X}_0$  に関する偏微分の場合と同様,  $\mathbf{X}_2^s$  のみが微小加速度  $\vec{a}$  に依存するので,  $\partial\rho/\partial \vec{a}$  は (3.251), (3.252) より,

$$\frac{\partial\rho}{\partial \vec{a}} = -\frac{F}{c} \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+M)\dot{p}_{12} - N\dot{r}_1 \}} \quad \left. \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \left[ \frac{1 - \frac{1}{c} \{ (1+M)(\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N\dot{r}_2 \}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)\dot{p}_{23} - L\dot{r}_2 \}} \{ (1+K)\tilde{r}_{23} - L\tilde{r}_2 \} \right. \\ & \left. - \{ (1+M)\tilde{r}_{12} + N\tilde{r}_2 \} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}} \end{aligned} \right\} \quad (3.260)$$

$\frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}}$  : 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

(vi) 瞬時マヌーバ・パラメタ  $\Delta \mathbf{V}$  に関する偏微分  $\partial \rho / \partial \Delta \mathbf{V}$

(3.260) で,  $\partial \mathbf{r}_2^s / \partial \vec{a} \rightarrow \partial \mathbf{r}_2^s / \partial \Delta \mathbf{V}$  とする.  $\partial \mathbf{r}_2^s / \partial \Delta \mathbf{V}$  は, 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

(vii) 太陽輻射圧の平均反射係数  $\Gamma$  に関する偏微分  $\partial \rho / \partial \Gamma$

(3.260) で,  $\partial \mathbf{r}_2^s / \partial \vec{a} \rightarrow \partial \mathbf{r}_2^s / \partial \Gamma$  とする.

(viii) 大気抵抗係数  $C_D \times S$  に関する偏微分  $\partial \rho / \partial (C_D \times S)$

(3.260) で,  $\partial \mathbf{r}_2^s / \partial \vec{a} \rightarrow \partial \mathbf{r}_2^s / \partial (C_D \times S)$  とする.

(ix) Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$  に関する偏微分  $\partial \rho / \partial \gamma$

(3.227) で, 第2項及び第4項を微分して,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \gamma} = F \frac{\mu_s}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right) + \ln \left( \frac{r_2 + r_3 + r_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}} \right) \right] \quad (3.261)$$

(2) ドップラー観測量  $F1, F2$  に関する偏微分

ドップラー観測量  $F1, F2$  の計算式は, (3.231), (3.237) で与えられる. 1-way ドップラー・オフセット周波数  $\Delta f_{T_0}$  及び周波数変化率  $f_{T_1}$  は 1-way ドップラー観測量  $F1$  に, レンジレート・バイアス  $F_c$  は 2-way ドップラー観測量  $F2$  にのみ関与している.

(i) 状態ベクトル  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$  に関する偏微分  $\partial F1 / \partial \mathbf{X}_0, \partial F2 / \partial \mathbf{X}_0$

(a) 1-way ドップラー観測量  $\partial F1 / \partial \mathbf{X}_0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F1}{\partial \mathbf{X}_0} &= \frac{\partial F1}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{X}_0} \right\} \\ &= C_1 f_{S/c} \frac{\partial \left( 1 - \frac{F_R}{F_T} \right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K)\tilde{r}_{23}^T - L\tilde{r}_2^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)\dot{p}_{23} - L\dot{r}_2 \}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.262)$$

ここに,

$$\frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} = \left[ \begin{array}{c} D^* \begin{pmatrix} 12 \leftrightarrow 23 \\ 1 \rightarrow 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\mu_s}{r_2^3} \mathbf{r}_2^T \\ \dots \\ E^*(12 \leftrightarrow 23) + \Delta E(12 \leftrightarrow 23) + \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_2^T \end{array} \right] \quad (3.263)$$

$$D = \frac{1}{c} \left[ -\frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^T}{r_{12}} + \frac{\dot{r}_{12}}{r_{12}} \frac{\mathbf{r}_{12}^T}{r_{12}} \right] \left[ 1 + \frac{1}{c} (\dot{p}_{12} - \dot{r}_{23}) \right] + \frac{1}{c^2} \left[ -\frac{\dot{\mathbf{r}}_1^T}{r_{12}} + \frac{\dot{p}_{12}}{r_{12}} \frac{\mathbf{r}_{12}^T}{r_{12}} \right] \dot{r}_{12} \left. \begin{array}{l} + \frac{T_c^2}{24cr_{12}} \left[ \left( \ddot{r}_{12} - 6 \frac{\dot{r}_{12} \dot{r}_{12}}{r_{12}} + 6 \frac{\dot{r}_{12}^3}{r_{12}^3} \right) \frac{\mathbf{r}_{12}^T}{r_{12}} + 3 \left( \dot{r}_{12} - 2 \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^T}{r_{12}} \right. \\ \left. + 3 \frac{\dot{r}_{12}}{r_{12}} \dot{\mathbf{r}}_{12}^T - \ddot{\mathbf{r}}_{12}^T \right] \end{array} \right\} \quad (3.264)$$

$D^*$ :  $D$  で  $\dot{r}_{23}$  の項を除いたもの

$D \begin{pmatrix} 12 \leftrightarrow 23 \\ 1 \rightarrow 2 \end{pmatrix}$ ,  $D^* \begin{pmatrix} 12 \leftrightarrow 23 \\ 1 \rightarrow 2 \end{pmatrix}$ :  $D$ ,  $D^*$  で添字 1, 2 $\leftrightarrow$ 2, 3, 1 $\rightarrow$ 2 と変えたもの

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}_{12}^T}{r_{12}} \left[ 1 + \frac{1}{c} (\dot{p}_{12} - \dot{r}_{23}) \right] + \frac{T_c^2}{8cr_{12}} \left[ \left( \dot{r}_{12} - 2 \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} \right) \frac{\mathbf{r}_{12}^T}{r_{12}} + 2 \frac{\dot{r}_{12}}{r_{12}} \dot{\mathbf{r}}_{12}^T - \ddot{\mathbf{r}}_{12}^T \right] \quad (3.265)$$

$E^*$ :  $E$  で  $\dot{r}_{23}$  の項を除いたもの

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{r}_{12}^T}{r_{12}} \dot{r}_{12} \quad (3.266)$$

$E(12 \leftrightarrow 23)$ ,  $E^*(12 \leftrightarrow 23)$ ,  $\Delta E(12 \leftrightarrow 23)$ :  $E$ ,  $E^*$ ,  $\Delta E$  で添字 12 $\leftrightarrow$ 23 としたものの

$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}$ : 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

$\dot{\mathbf{X}}_2^s = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2^s \\ \dots \\ \dot{\mathbf{r}}_2^s \end{bmatrix}$ :  $t_2(ET)$  での状態ベクトルの時間微分.

$f_{s/c} = f_{T_0} + \Delta f_{T_0} + f_{T_1}(t_2 - t_0)$ : S/C の発信周波数 (Hz)

$C_1$ : 定数

(b) 2-way ドップラー観測量  $\partial F_2 / \partial \mathbf{X}_0$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{X}_0} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{X}_0} \right\} + \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{X}_1^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_1^s \frac{\partial t_1}{\partial \mathbf{X}_0} \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= C_2 K f_{up} \left[ \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} \left\{ \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K) \hat{\mathbf{r}}_{23}^T - L \hat{\mathbf{r}}_2^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_1^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_1^s \cdot \frac{\frac{1}{c}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+M) \dot{p}_{12} - N \dot{r}_1 \}} \right. \\
&\quad \left. \times \left( \frac{1 - \frac{1}{c} \{ (1+M) (\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N \dot{r}_2 \}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \{ (1+K) \hat{\mathbf{r}}_{23}^T - L \hat{\mathbf{r}}_2^T \} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \{ (1+M) \hat{\mathbf{r}}_2^T + N \hat{\mathbf{r}}_1^T \} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{X}_0} \right] \quad (3.267)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} &= \left[ \frac{D \left( \begin{smallmatrix} 12 \leftrightarrow 23 \\ 1 \rightarrow 2 \end{smallmatrix} \right) - D}{E \left( 12 \leftrightarrow 23 \right) + \Delta E \left( 12 \leftrightarrow 23 \right) - E} \right] \\
\frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_1^s} &= \left[ \begin{array}{c} D \\ \dots\dots\dots \\ E + \Delta E \end{array} \right] \quad (3.268)
\end{aligned}$$

$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}$  : 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

$\dot{\mathbf{X}}_2^s = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2^s \\ \dots \\ \dot{\mathbf{r}}_2^s \end{bmatrix}$  :  $t_2(ET)$  での状態ベクトルの時間微分.

$\dot{\mathbf{X}}_1^s = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1^s \\ \dots \\ \dot{\mathbf{r}}_1^s \end{bmatrix}$  :  $t_1(ET)$  での観測局の位置・速度の時間微分.

$f_{up}$  : アップリンク周波数 (Hz)

$K$  : トランスポンダでの周波数変換比

$C_2$  : 定数

(ii) 局位置  $(\phi_g, \lambda, h)$  に関する偏微分  $\partial F1 / \partial(\phi_g, \lambda, h)$ ,  $\partial F2 / \partial(\phi_g, \lambda, h)$

(a) 1-way ドップラ観測量  $\partial F1 / \partial(\phi_g, \lambda, h)$

$$\partial F1 / \partial(\phi_g, \lambda, h) = \frac{\partial F1}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \partial \mathbf{X}_3^s / \partial(\phi_g, \lambda, h) + \frac{\partial F1}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \partial t_2 / \partial(\phi_g, \lambda, h) \quad \left. \right\}$$

$$= C_1 f_{s/c} \left[ \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} - \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \right. \\ \left. \times \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K) \bar{\mathbf{r}}_{23}^T + L \bar{\mathbf{r}}_3^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \right] \quad (3.269)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_3^s} &= \left[ \begin{array}{c} -D^*(12 \leftrightarrow 23) + \frac{1}{c^2} \frac{\mu_s}{r_3^3} \mathbf{r}_3^T \\ \hline -E^*(12 \leftrightarrow 23) - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_3^T \end{array} \right] \\ \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} &= \left[ \begin{array}{c} D^*(12 \leftrightarrow 23) - \frac{1}{c^2} \frac{\mu_s}{r_2^3} \mathbf{r}_2^T \\ \hline E^*(12 \leftrightarrow 23) + \Delta E(12 \leftrightarrow 23) + \frac{1}{c^2} \mathbf{r}_2^T \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.270)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} \\ \hline \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} T_E^t(t_3) \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial (\phi, \lambda, h)} \\ \hline \dot{T}_E^t(t_3) \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial (\phi, \lambda, h)} \end{array} \right] \quad (3.271)$$

$\mathbf{X}_2^s = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2^s \\ \cdots \\ \dot{\mathbf{r}}_2^s \end{bmatrix}$ :  $t_2(ET)$ での状態ベクトルの時間微分.

$\frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial (\phi, \lambda, h)}$  は (3.257) 参照.

(b) 2-way ドップラー観測量  $\partial F2 / \partial (\phi, \lambda, h)$

$$\begin{aligned} \partial F2 / \partial (\phi, \lambda, h) &= \frac{\partial F2}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} + \frac{\partial F2}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\partial t_2}{\partial (\phi, \lambda, h)} \\ &\quad + \frac{\partial F2}{\partial \mathbf{X}_1^s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_1^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} + \frac{\partial F2}{\partial \mathbf{X}_1^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_1^s \cdot \frac{\partial t_1}{\partial (\phi, \lambda, h)} \\ &= C_2 K f_{up} \left[ \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)} - \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K) \bar{\mathbf{r}}_{23}^T + L \bar{\mathbf{r}}_3^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial (\phi, \lambda, h)}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial X_1^s} \cdot \frac{\partial X_1^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} + \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial X_1^s} \cdot \dot{X}_1^s \quad (3.272) \\
& \times \frac{\frac{1}{c}}{\left(1-\frac{1}{c}\{(1+M)\dot{p}_{12}-N\dot{r}_1\}\right)} \\
& \times \left( \{(1+M)\dot{\mathbf{r}}_{12}^T - N\dot{\mathbf{r}}_1^T\} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \right. \\
& \left. - \frac{1-\frac{1}{c}\{(1+M)(\dot{p}_{12}+\dot{r}_{12})+N\dot{r}_2\}}{1-\frac{1}{c}\{(1+K)\dot{p}_{23}-L\dot{r}_2\}} \{(1+K)\dot{\mathbf{r}}_{23}^T + L\dot{\mathbf{r}}_3^T\} \right) \\
& \times \left. \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial X_3^s} &= \left[ \begin{array}{c} -D(12 \leftrightarrow 23) \\ \hline -E(12 \leftrightarrow 23) \end{array} \right] \\
\frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial X_2^s} &= \left[ \begin{array}{c} D(12 \leftrightarrow 23) - D \\ \hline E(12 \leftrightarrow 23) + \Delta E(12 \leftrightarrow 23) - E \end{array} \right] \\
\frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial X_1^s} &= \left[ \begin{array}{c} D \\ \hline E + \Delta E \end{array} \right]
\end{aligned} \quad (3.273)$$

$$\frac{\partial X_i^s}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} = \left[ \begin{array}{c} T_E^i(t_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \\ \hline \dot{T}_E^i(t_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \end{array} \right] \quad i=1,3 \quad (3.274)$$

$X_2^s$ :  $t_2(ET)$  での状態ベクトルの時間微分

$X_1^s$ :  $t_1(ET)$  での観測局の位置・速度の時間微分.

(iii) 1-way ドップラー周波数オフセット  $\Delta f_{T_0}$  及び周波数変化率  $f_{T_1}$  に関する偏微分  $\partial F1/\partial \Delta f_{T_0}$ ,  $\partial F1/\partial f_{T_1}$  [1-way ドップラー観測のみ]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F1}{\partial \Delta f_{T_0}} &= -C_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_R}{F_T} \right)^* \right] \\
\frac{\partial F1}{\partial f_{T_1}} &= -C_1 (t_2 - t_1) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_R}{F_T} \right)^* \right]
\end{aligned} \quad (3.275)$$

$\left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*$  : (3.235) 参照.

$(t_2 - t_0)$  : タイムブロックリセット時刻  $t_0$ (UTC) から信号発信時刻  $t_2$ (UTC) までの経過時間 (sec)

$C_1$  : 定数

(iv) レンジレート・バイアス  $F_c$  に関する偏微分  $\partial F_2 / \partial F_c$  [2-way ドップラー観測量]  $\frac{\partial F_2}{\partial F_c}$  は, (3.237) を直接偏微分して,

$$\frac{\partial F_2}{\partial F_c} = 1 \quad (3.276)$$

(v) タイミング・バイアス  $a$  に関する偏微分  $\frac{\partial F_1}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial a}$

(a) 1-way ドップラー観測量

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a} &= \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_3^s + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{dt_2}{dt_3} \\ &= C_1 f_{sic} \left[ \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_3^s + \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)(\dot{p}_{23} + \dot{r}_{23}) + L \dot{r}_3 \}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)\dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.277)$$

$$\frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_3^s}, \quad \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} : (3.270) \text{ 参照}$$

$$\frac{dt_2}{dt_3} = \frac{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)(\dot{p}_{23} + \dot{r}_{23}) + L \dot{r}_3 \}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)\dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \quad (3.278)$$

(b) 2-way ドップラー観測量

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial a} &= \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_3^s + \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{dt_2}{dt_3} + \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{X}_1^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_1^s \cdot \frac{dt_1}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_3} \\ &= C_2 K f_{up} \left[ \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_3^s + \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{dt_2}{dt_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_1^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_1^s \cdot \frac{dt_1}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.279)$$

$$\frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_3^s}, \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_2^s}, \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_1^s} : (3.273) \text{ 参照}$$

$$\frac{dt_2}{dt_3} : (3.278) \text{ 参照}$$

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)(\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N\dot{r}_2\}}{1 - \frac{1}{c}\{(1+M)\dot{p}_{12} - N\dot{r}_1\}} \quad (3.280)$$

(vi) 微小加速度  $\vec{a}$  に関する偏微分  $\partial F1/\partial\vec{a}$ ,  $\partial F2/\partial\vec{a}$   
状態ベクトル  $\mathbf{X}_0$  に関する偏微分と同様,  $\mathbf{X}_2^s$  のみが微小カパラメタ  $\vec{a}$  に依存する.

(a) 1-way ドップラー観測量

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F1}{\partial\vec{a}} &= \frac{\partial F1}{\partial\mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial\mathbf{X}_2^s}{\partial\vec{a}} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\partial t_2}{\partial\vec{a}} \right\} \\ &= C_1 f_{s/c} \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_2^s} \left\{ \frac{\partial\mathbf{X}_2^s}{\partial\vec{a}} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \frac{\partial t_2}{\partial\vec{a}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.281)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial\vec{a}} = \frac{\frac{1}{c}\{(1+K)\hat{\mathbf{r}}_{23}^T - L\hat{\mathbf{r}}_2^T\} \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_2^s}{\partial\vec{a}}}{1 - \frac{1}{c}\{(1+K)\dot{p}_{23} - L\dot{r}_2\}} \quad (3.282)$$

$$\frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_3^s} : (3.270) \text{ 参照}$$

$$\frac{\partial\mathbf{X}_2^s}{\partial\vec{a}}, \frac{\partial\mathbf{r}_2^s}{\partial\vec{a}} : \text{変分方程式を積分した } [U(t, t_0) : V(t, t_0)] \text{ より得られる.}$$

(b) 2-way ドップラー観測量

$$\begin{aligned} \frac{\partial F2}{\partial\vec{a}} &= \frac{\partial F2}{\partial\mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial\mathbf{X}_2^s}{\partial\vec{a}} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\partial t_2}{\partial\vec{a}} \right\} + \frac{\partial F2}{\partial\mathbf{X}_1^s} \cdot \mathbf{X}_1^s \frac{\partial t_1}{\partial\vec{a}} \\ &= C_2 K f_{up} \left[ \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial\mathbf{X}_2^s}{\partial\vec{a}} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \frac{\partial t_2}{\partial\vec{a}} \right\} + \frac{\partial\left(1-\frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial\mathbf{X}_1^s} \cdot \mathbf{X}_1^s \frac{\partial t_1}{\partial\vec{a}} \right] \end{aligned} \quad (3.283)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_2}{\partial \bar{a}} &= \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K) \hat{r}_{23}^T - L \hat{r}_2^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \bar{a}}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \\ \frac{\partial t_1}{\partial \bar{a}} &= \frac{1 - \frac{1}{c} \{ (1+M) (\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}) + N \dot{r}_2 \}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial \bar{a}} \\ &+ \frac{\frac{1}{c} \{ (1+M) \hat{r}_{12}^T - N \hat{r}_1^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^s}{\partial \bar{a}} - \{ (1+M) \hat{r}_{12}^T + N \hat{r}_2^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \bar{a}}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+M) \dot{p}_{12} - N \dot{r}_1 \}} \end{aligned} \right\} \quad (3.284)$$

$$\frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_2^s}, \quad \frac{\partial \left(1 - \frac{F_R}{F_T}\right)^*}{\partial \mathbf{X}_1^s} : (3.268) \text{ 参照}$$

$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \bar{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \bar{a}}$  : 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

(vii) 瞬時マヌーバ・パラメタ  $\Delta \mathbf{V}$  に関する偏微分  $\frac{\partial F1}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \frac{\partial F2}{\partial \Delta \mathbf{V}}$

(3.281), (3.282), (3.283), (3.284) で,

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \bar{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \bar{a}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \Delta \mathbf{V}}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \bar{a}}, \frac{\partial t_1}{\partial \bar{a}} \rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \frac{\partial t_1}{\partial \Delta \mathbf{V}}$$

とする.  $\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \Delta \mathbf{V}}$  は変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる.

(viii) 太陽輻射圧の平均反射係数  $\Gamma$  に関する偏微分  $\frac{\partial F1}{\partial \Gamma}, \frac{\partial F2}{\partial \Gamma}$

(3.281), (3.282), (3.283), (3.284) で,

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \bar{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \bar{a}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \Gamma}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \Gamma}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \bar{a}}, \frac{\partial t_1}{\partial \bar{a}} \rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial \Gamma}, \frac{\partial t_1}{\partial \Gamma}$$

とする.

(ix) 大気抵抗係数  $C_D \times S$  に関する偏微分  $\frac{\partial F1}{\partial (C_D \times S)}, \frac{\partial F2}{\partial (C_D \times S)}$

(3.281), (3.282), (3.283), (3.284) で,

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial (C_D \times S)}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial (C_D \times S)}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial t_1}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial (C_D \times S)}, \frac{\partial t_1}{\partial (C_D \times S)}$$

とする。

(x) Brans-Dicke の自由パラメタ  $\gamma$  に関する偏微分  $\frac{\partial F1}{\partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial F2}{\partial \gamma}$

(a) 1-way ドップラー観測量

(3.231)を直接微分して,

$$\frac{\partial F1}{\partial \gamma} = -C_1 f_{S/C} \frac{\mu_s}{C^3} \epsilon_{23} \quad (3.285)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{\dot{r}_2 + \dot{r}_3 - \dot{r}_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}} - \frac{\dot{r}_2 + \dot{r}_3 + \dot{r}_{23}}{r_2 + r_3 + r_{23}} \quad (3.286)$$

(b) 2-way ドップラー観測量

(3.237)を直接微分して,

$$\frac{\partial F2}{\partial \gamma} = -C_2 K f_{up} \frac{\mu_s}{C^3} (\epsilon_{12} + \epsilon_{23}) \quad (3.287)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{12} &= \frac{\dot{r}_1 + \dot{r}_2 - \dot{r}_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} - \frac{\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \dot{r}_{12}}{r_1 + r_2 + r_{12}} \\ \epsilon_{23} &= \frac{\dot{r}_2 + \dot{r}_3 - \dot{r}_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}} - \frac{\dot{r}_2 + \dot{r}_3 + \dot{r}_{23}}{r_2 + r_3 + r_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (3.288)$$

(3) 角度観測量  $\sigma$ ,  $\gamma$  に関する偏微分

角度観測量  $\sigma$  (方位角),  $\gamma$  (仰角) の計算式は(3.247), (3.249)で与えられる。

(i) 状態ベクトル  $\mathbf{X}_0$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}_0}$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{X}_0}$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_0} = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{X}_0} \right\} \quad z = \sigma, \gamma \quad (3.289)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}_2^s} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{50}^T}{r_{23} \cos \gamma} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{X}_2^s} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{D}}_{50}^T}{r_{23}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.290)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{50} = T_E'(t_3) \tilde{\mathbf{A}}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{50} = T_E'(t_3) \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.291)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sin \sigma \sin \phi_g \cos \lambda - \cos \sigma \sin \lambda \\ \sin \sigma \sin \phi_g \sin \lambda + \cos \sigma \cos \lambda \\ -\sin \sigma \cos \phi_g \end{bmatrix} \quad \left| \right.$$

$$\tilde{D} = \left[ \begin{array}{l} \sin \gamma [\cos \sigma \sin \phi_g \cos \lambda + \sin \sigma \sin \lambda] + \cos \gamma \cos \phi_g \cos \lambda \\ \sin \gamma [\cos \sigma \sin \phi_g \sin \lambda - \sin \sigma \cos \lambda] + \cos \gamma \cos \phi_g \sin \lambda \\ -\sin \gamma \cos \sigma \cos \phi_g + \cos \gamma \sin \phi_g \end{array} \right] \quad (3.292)$$

$T_E(t_3)$  : 時刻  $t_3(ET)$  での 1950.0 年平均地球赤道座標系から地球固定座標系への変換行列

$$\frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{X}_0} = \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K) \tilde{\mathbf{r}}_{23}^T - L \tilde{\mathbf{r}}_2^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}}$$

$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \mathbf{X}_0}$  : 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  から得られる.

$\dot{\mathbf{X}}_2^s$  :  $t_2(ET)$  での状態ベクトルの時間微分

$\phi_g$  : 観測局の測地緯度

$\lambda$  : 観測局の東経

(ii) 局位置  $(\phi_g, \lambda, h)$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial(\phi_g, \lambda, h)}$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial(\phi_g, \lambda, h)}$

$$\frac{\partial z}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_3^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\partial t_2}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \quad z = \sigma, \gamma \quad (3.293)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}_2^s} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{50}^T}{r_{23} \cos \gamma} \\ \dots \\ 0 \end{array} \right], \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}_3^s} = -\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}_2^s} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{X}_2^s} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\tilde{\mathbf{D}}_{50}^T}{r_{23}} \\ \dots \\ 0 \end{array} \right], \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{X}_3^s} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{X}_2^s} \\ \frac{\partial t_2}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} = \frac{-\frac{1}{c} \{ (1+K) \tilde{\mathbf{r}}_{23}^T + L \tilde{\mathbf{r}}_3^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K) \dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_3^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathbf{r}_3^E}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} T_E^t(t_3) \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \\ \dots \\ \dot{T}_E^t(t_3) \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (3.294)$$

$T_E(t_3)$  : 時刻  $t_3(ET)$  における 1950.0 年平均地球赤道座標系から地球固定座標系への変換行列

$$\frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial(\phi_g, \lambda, h)} : (3.257) \text{ 参照}$$

(iii) タイミング・バイアス  $a$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \frac{\partial \gamma}{\partial a}$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_3^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_3^s + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \dot{\mathbf{X}}_2^s \frac{dt_2}{dt_3} \quad z = \sigma, \gamma \quad (3.295)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_3^s}, \frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_2^s} (z = \sigma, \gamma) : (3.294) \text{ 参照}$$

$\dot{\mathbf{X}}_3^s$  : 時刻  $t_3(ET)$  における観測局の位置・速度の時間微分

$$\frac{dt_2}{dt_3} = \frac{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)(\dot{p}_{23} + \dot{r}_{23}) + L \dot{r}_3 \}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)\dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}}$$

(iv) 微小加速度  $\vec{a}$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \vec{a}}$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_2^s} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \vec{a}} + \dot{\mathbf{X}}_2^s \cdot \frac{\partial t_2}{\partial \vec{a}} \right\} \quad z = \sigma, \gamma \quad (3.296)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \vec{a}} = \frac{\frac{1}{c} \{ (1+K) \hat{\mathbf{r}}_{23}^T - L \hat{\mathbf{r}}_2^T \} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}}}{1 - \frac{1}{c} \{ (1+K)\dot{p}_{23} - L \dot{r}_2 \}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{X}_2^s} (z = \sigma, \gamma) : (3.290) \text{ 参照}$$

$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}}$  : 変分方程式を積分した  $[U(t, t_0) : V(t, t_0)]$  より得られる。

(v) 瞬時マヌーバ・パラメタ  $\Delta \mathbf{V}$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta \mathbf{V}}$

(3.296)で,

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \Delta \mathbf{V}}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial \Delta \mathbf{V}}$$

とする。

(vi) 太陽輻射圧の平均反射係数  $\Gamma$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Gamma}$

(3.296)で,

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}_2^s}{\partial \Gamma}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^s}{\partial \Gamma}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial \Gamma}$$

とする。

(vii) 大気抵抗係数  $C_D \times S$  に関する偏微分  $\frac{\partial \sigma}{\partial(C_D \times S)}$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial(C_D \times S)}$   
(3.296)で、

$$\frac{\partial X_2^s}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial r_2^s}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial X_2^s}{\partial(C_D \times S)}, \frac{\partial r_2^s}{\partial(C_D \times S)}, \frac{\partial t_2}{\partial \vec{a}} \rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial(C_D \times S)}$$

とする。

### 3.6 観測量の補正及びデータの棄却

実測された観測量には、種々の誤差が混入する。そこで、あらかじめ考えられる誤差については、観測量の計算値及び実測データに補正を施して、それらを取除いてやる必要がある。更に、そのようにして補正されたデータに対しても、計算値からかけ離れたものについては、棄却を行う。

#### 3.6.1 観測量の補正

あらかじめ考えられる観測量の補正には、モデル化（定式化）できるものと、再現性がない等の理由でモデル化できないものがあり、本プログラムでは、後者をバイアス・パラメタとして一括して推定できるようにしている。本プログラムで取扱う補正の種類・方法を表3.11に示す。

##### (1) 対流圏効果の補正

電磁波が屈折率  $n \neq 1$  である対流圏を通過する際、伝播遅れや屈折を生じる。この効果は、レンジ観測量においては、伝播時間遅れ、すなわち、みかけ上の値の増加として、一方、角度観測量においては、みかけ上の仰角の増加としてあらわれる。

屈折率は、気象条件(気圧  $P$ , 水蒸気圧  $P_v$ , 温度  $T$  等)によって変化するので、厳密には、信号伝播経路に沿ってそれらの値を知り補正量を算出する必要があるが、地表面での屈折率の値のみを用いたいくつかの半実験式も存在する。本プログラムでは、D. L. Cain による半実験式を採用している。

地表面での屈折率(表面 refractivity  $N_s$ )の値は、各観測局で取得された気象データから、次式を用いて計算される。

$$N_s = \frac{\alpha}{T} \left( P + \beta \frac{P_v}{T} \right) \quad (3.297)$$

$P$ : 気圧 (mb)

$P_v$ : 水蒸気圧 (mb)

$T$ : 温度 (K)

$n_s = 1 + N_s \times 10^{-6}$ : 地表面での屈折率

$N_s$ : 表面 refractivity

$\alpha, \beta$ : 定数

表 3.11 各観測量の補正

観 測 量	補 正 項 目	定式化の有無
レ ン ジ	大気屈折効果	モデル化
	電離層効果	モデル化
	アンテナ・オフセット	モデル化
	トラポン遅延	数値代入
	局内遅延	数値代入
	レンジ・バイアス	バイアス・パラメタ
1-way ドップラー	大気屈折効果	モデル化
	電離層効果	モデル化
	アンテナ・オフセット	モデル化
	トラポン遅延	数値代入
	局内遅延	数値代入
	周波数オフセット・ 周波数変化率	バイアス・パラメタ
2-way ドップラー	大気屈折効果	モデル化
	電離層効果	モデル化
	アンテナ・オフセット	モデル化
	トラポン遅延	数値代入
	局内遅延	数値代入
	レンジレート・バイアス	バイアス・パラメタ
角 度	大気屈折効果	モデル化

定数  $a$ ,  $\beta$  は、研究者によって多少異なる値を用いているので、表 3.12 にそれらの値を示す。本プログラムでは、表面 refractivity  $N_s$  の月別・時間別平均値をテーブルとして持ち、それらを補間して使用している (Appendix A 参照)。

(a) 伝播時間遅れに対する補正  $\Delta T\rho$

伝播時間遅れに対する補正  $\Delta\rho$  は、

$$\Delta\rho = \begin{cases} \frac{N_s}{340} \cdot \frac{1.8958}{(\sin \gamma + 0.06483)^{1.4}} m & (\gamma \leq 15^\circ) \\ \frac{N_s}{340} \cdot \frac{2.6}{\sin \gamma + 0.015} m & (15^\circ < \gamma \leq 90^\circ) \end{cases} \quad (3.298)$$

$\gamma$ : 補正後の仰角

表 3.12 定数  $\alpha$ ,  $\beta$  の値

	Burrows & Kerr (1951)	Campen & Coll (1955)	Smith & Weintraub (1952)	Friend
$\alpha \times 10^6$ (K/mb)	79	77.4	77.6	79.15
$\beta$ (K)	4800	4973	4810	4815

$N_s$ : 観測局での表面 refractivity

(b) 仰角補正  $\Delta_r\gamma$

仰角補正  $\Delta_r\gamma$  は,

$$\Delta_r\gamma = \begin{cases} \frac{N_s}{340} b_1 b_2 & \gamma < 0.17 \text{ rad} (9.74^\circ) \\ \frac{N_s \times 10^{-6}}{\tan \gamma} & \gamma \geq 0.17 \text{ rad} \end{cases} \quad (3.299)$$

$\gamma$ : 補正後の仰角

$N_s$ : 観測局での表面 refractivity

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 1.0 - (1.216 \times 10^5 b_3 \gamma_{\text{rad}}) \\ &\quad - (51.0 - 300.0 \gamma_{\text{rad}}) b_3^{1/2} \\ b_2 &= \frac{7.0 \times 10^{-4}}{0.0589 + \gamma_{\text{rad}}} - 1.26 \times 10^{-3} \\ b_3 &= \frac{1}{10^3(r - a_e)} \end{aligned} \right\} \quad (3.300)$$

$\gamma_{\text{rad}}$ : 仰角 (rad)

$a_e$ : 平均地球赤道半径 = 6378.160 km

$r$ : 地球中心から S/C までの距離 (km)

(2) 電離層効果の補正

電離層・惑星間プラズマ媒質の大きな特徴は, dispersive, すなわち屈折率  $n$  が周波数  $\omega$  に依存することであり, したがって媒質中を伝播する電磁波の位相速度  $v_{ph}$  と群速度  $v_g$  は一般に異なり, 両者共周波数によって変化する。

電離層・惑星間プラズマ媒質中では,  $\omega$  が高周波で磁場が存在しない時, 屈折率  $n(\omega)$  は,

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2} \quad (3.301)$$

$$\omega_{pe} = 5.64 \times 10^{11} \left( \frac{N_e}{10^{20}} \right)^{\frac{1}{2}} : \text{電子プラズマ周波数 (rad/s)}$$

$$N_e : \text{電子密度 (個/m}^3\text{)}$$

となるので、 $v_{ph}$ 、 $v_g$  はそれぞれ次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} v_{ph} &= \frac{c}{n(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2}} \simeq c + \frac{1}{2}c \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \\ v_g &= n(\omega)c = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2} \simeq c - \frac{1}{2}c \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.302)$$

ドップラー・データ及び角度データは位相速度  $v_{ph}$  での伝播によって与えられ、一方、レンジ・データは群速度  $v_g$  で伝播する信号を測定している。これらの観測量に対する伝播遅れの補正は、1次のオーダーの近似で、大きさが等しく符号が逆の値をとる。屈折の効果は無視しうる程微小（すなわち、信号はほとんど直進する）なので、本プログラムでは考慮していない。

伝播遅れの補正量は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_{\rho} &= \int_c \left(1 - \frac{c}{v_i}\right) ds \quad v_i = \begin{cases} v_g : \text{レンジ観測量} \\ v_{ph} : \text{ドップラー観測量} \end{cases} \\ &= \pm \int_c \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 ds \\ &= \pm \frac{40.3}{f^2} \int_c N_e ds \quad \left( \begin{array}{l} + : \text{レンジ観測量} \\ - : \text{ドップラー観測量} \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.303)$$

$f$  : 伝播周波数 (Hz)

となる。積分は、信号の伝播径路  $C$  に沿って行われる。この積分は、径路  $C$  における total electron contents と呼ばれる。屈折の効果は無視できるので、径路  $C$  は観測局と S/C を結ぶ直線である。

電離層は非常に激しく、かつ極めて不規則に変動するため、モデルを用いて意味のある計算値を導出することはほとんど不可能であり、電離層の直接観測に待つ他はない。本プログラムでは、観測局と S/C を結ぶ径路に沿った total electron contents を、静止衛星 ETS-II と電波研究所（小金井）を結ぶ径路に沿った total electron contents の観測値（ファラデー回転より算出）から“マップ”（投影）して用いている。観測値は、対流圏効果に対する補正で用いる表面 refractivity  $N_s$  と同様、月別・時間別平均値として持ち、補間して用いる。

“マップ”するに当たっての仮定は、次の通りである；



- (i) 電離層は層状(laminar)である。したがって、電離層を仰角  $\gamma$  で通過する電波の total electron contents は、天頂方向 ( $\gamma=90^\circ$ ) の total electron contents の  $1/\sin \gamma$  ( $\sin 90^\circ/\sin \gamma$ ) 倍となる。〔仰角補正〕
- (ii) 経度が  $\Delta\lambda$  (deg) だけ離れた地点では、 $\Delta\lambda/15^\circ$  (hour) だけずれて、値が再現される〔経度補正〕
- (iii) 磁気緯度が  $\phi_0$  の地点と  $\phi_M$  の地点の total electron contents の比は、

$$\frac{(\phi_0 \text{ 地点の t.e.c.})}{(\phi_M \text{ 地点の t.e.c.})} = \frac{90^\circ - \phi_0}{90^\circ - \phi_M}$$

となる。ただし、 $\phi_0$ ,  $\phi_M$  は、電波が電離層中央部(高度 $\sim 300\text{--}400$  km)を横切った地点での値である〔磁気緯度補正〕

ETS-II-電波研(小金井)の経路の電離層中央部(高度300 km)での磁気緯度  $\phi_0^{(M)}$ , 磁気経度  $\lambda_0^{(M)}$  及び仰角  $\gamma_0$  は、

$$\phi_0^{(M)} = 23.16^\circ N, \lambda_0^{(M)} = 154.95^\circ E, \gamma_0 = 47.341^\circ$$

である。したがって、電波研(小金井)での時刻  $t$  での total electron contents を  $I_0(t)$  とすると、観測局-S/C の total electron contents  $I(t)$  は、

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\sin \gamma_0}{90^\circ - \phi_0^{(M)}} \cdot \frac{90^\circ - \phi^{(M)}}{\sin \gamma} I_0(t + \Delta t) \\ &= 0.630390462 \frac{90^\circ - \phi^{(M)}}{\sin \gamma} I_0(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.304)$$

$\gamma$ : 観測局-S/C の仰角

$\phi^{(M)}$ : 観測局-S/C の経路の電離層中央部での磁気緯度 (deg)

$$\Delta t = \frac{\lambda - \lambda_0}{15^\circ} \text{ (hour)} \quad (3.305)$$

$\lambda$ : 観測局-S/C の経路の電離層中央部での経度 (deg)

$\lambda_0 = 138.72^\circ E$ : ETS-II-電波研(小金井)の経路の電離層中央部での経度

となる。

### (3) アンテナ・オフセット値の補正

各観測局の追跡システムは、追跡点がアンテナの2次回転軸に来るように較正されている。したがって、取得されたレンジ・データは、S/C からこの2次回転軸までの距離をあらわす。一方、各観測量の計算をする際には、地球に固定されたある点、すなわち、局位置を基準にして行っている。一般的には、それらは一致しないので、次式で与えられるアンテナ・オフセット値の補正  $\Delta A\rho$  が必要である。

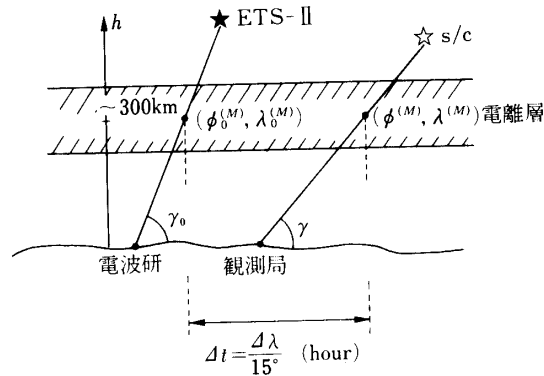


図 3.23 電離層効果の補正

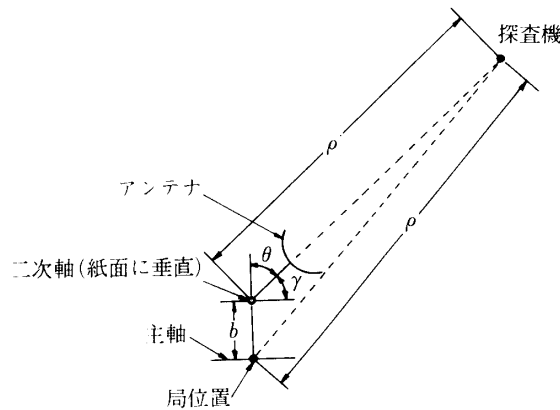


図 3.24 アンテナ補正

$$\Delta_{A\rho} = -b \sin \gamma \quad (3.306)$$

$b$ : アンテナの1次回転軸と2次回転軸間のオフセット (m)  
 $\gamma$ : 仰角

#### (4) その他の補正

観測量に混入するその他の誤差としては、S/Cのトランスポンダでの信号伝播遅延、アンテナから測距装置までの信号伝播遅延があげられる。これらは、実測値がわかっているものについては、データ自体に補正を施している。また、各種バイアス（レンジ・バイアス、レンジレート・バイアス）については、推定パラメタとして推定できるようにしている。

#### (5) 各観測量への補正の方法

##### (a) レンジ観測量への補正

(3.227)におけるレンジ観測量の補正  $\Delta(t)$  は、次式で与えられる。

$$\Delta(t) = \Delta_{T\rho}(t) + \Delta_{I\rho}(t) + \Delta_{A\rho}(t) + \Delta_{D\rho}(t) \quad (3.307)$$

$\Delta_T\rho(t)$  : 対流圏効果による補正. (3.298)参照.

$\Delta_I\rho(t) = \frac{40.3}{f^2} \int_c N_e ds$  : 電離層効果による補正.

$\Delta_A\rho(t)$  : アンテナ・オフセット値の補正. (3.306)参照

$\Delta_D\rho(t)$  : その他の伝播遅延の補正

$\Delta(t_i)$ ,  $\Delta(t_3)$  は, それぞれ, up leg, down leg に対するレンジ観測量の補正である.

(b) ドップラー観測量への補正

(3.231), (3.237)におけるドップラー観測量の補正  $\Delta$  は, カウント開始時刻  $t_{is} = t_i - 1/2T_c$ , 終了時刻  $t_{ie} = t_i + 1/2T_c$  ( $i=1,3$ )でのレンジ観測量の補正  $\Delta(t_{is})$ ,  $\Delta(t_{ie})$  の変化率で与えられる.

(i) 1-way ドップラー観測量への補正

(3.231)の  $\Delta$  は,

$$\Delta = \frac{1}{cT_c} \{ \Delta\rho(t_{3e}) - \Delta\rho(t_{3s}) \} \quad (3.308)$$

で与えられる.  $\Delta\rho(t_{3s})$ ,  $\Delta\rho(t_{3e})$  は, 受信時刻が  $t_{3s}$ ,  $t_{3e}$  での down leg の伝播遅延補正で, 次式で与えられる.

$$\Delta\rho(t_i) = \Delta_T\rho(t_i) - \Delta_I\rho(t_i) + \Delta_A\rho(t_i) + \Delta_D\rho(t_i) \quad i=3s, 3e \quad (3.309)$$

$\Delta_T\rho(t)$  : 対流圏効果による補正. (3.298)参照.

$\Delta_I\rho(t) = \frac{40.3}{f^2} \int_c N_e ds$  : 電離層効果による補正.

$\Delta_A\rho(t)$  : アンテナ・オフセット値の補正. (3.306)参照

$\Delta_D\rho(t)$  : その他の伝播遅延の補正.

(ii) 2-way ドップラー観測量への補正

(3.237)の  $\Delta$  は,

$$\Delta = \frac{1}{cT_c} \{ \Delta\rho(t_{1e}) + \Delta\rho(t_{3e}) - \Delta\rho(t_{1s}) - \Delta\rho(t_{3s}) \} \quad (3.310)$$

で与えられる.  $\Delta\rho(t_{1s})$ ,  $\Delta\rho(t_{1e})$  は, 送信時刻  $t_{1s}$ ,  $t_{1e}$  での up leg の伝播遅延補正,  $\Delta\rho(t_{3s})$ ,  $\Delta\rho(t_{3e})$  は, 受信時刻  $t_{3s}$ ,  $t_{3e}$  での down leg の伝播遅延補正で, (3.309)であらわされる.

(c) 角度観測量 (仰角) への補正

角度観測量 (仰角) への補正は, (3.299)の対流圏屈折補正  $\Delta_r\gamma$  のみである. 補正の方法は, 仰角の計算値  $\tilde{\gamma}$  に対して,

$$\gamma = \tilde{\gamma} + \Delta_r\gamma \quad (3.311)$$

とする.

### 3.6.2 データの棄却

本プログラムでは、データの棄却は2つの段階で行われる。第1の段階は、各観測局から送られてきたデータを前処理して、軌道推定の入力となる良質なデータを選択するもので、これらの方法については、「3.8 データの平滑・圧縮」の項を参照されたい。第2の段階は、軌道推定のイタレーションの途上で行われる。棄却条件は、次の2通りである；

(i) 各観測量の実測値  $O$ 、計算値  $C$  とした時、

$$\left(\frac{O-C}{\sigma}\right)_i > \kappa \times (\text{前回のイタレーションの WRMS}) \quad (3.312)$$

$$\left(\frac{O-C}{\sigma}\right)_i : \text{個々のデータの} \left(\frac{O-C}{\sigma}\right)$$

$1/\sigma$  : データの重み

$\kappa$  : 棄却レベル値

$$\text{WRMS} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{O-C}{\sigma}\right)_i^2}$$

$N$  : データ総数

(ii) 観測データの時刻での仰角の値が、棄却角  $\gamma_{\text{cut}}$  以下の時、すなわち、

$$\gamma < \gamma_{\text{cut}} \quad (3.313)$$

これらの条件のいずれかが満足されれば、データは棄却される。

### 3.7 パラメタ推定

パラメタ  $\mathbf{q}$  の推定とは、観測モデルを用いて軌道の観測量と計算値の差の重み付き二乗和が最小になるように、軌道6要素等の推定パラメタ (solve-for パラメタ) 値を決定することである。パラメタ  $\mathbf{q}$  は、推定パラメタ  $\mathbf{x}$  と考慮パラメタ (consider パラメタ)  $\mathbf{y}$  に分かれる。推定パラメタは、重み付き二乗和が最小化されるように値が求められる。考慮パラメタの誤差の影響は、推定パラメタの共分散を計算する際に考慮される。

本プログラムでは、推定パラメタの値を計算するフィルタとして、

(1) ベイジアン・フィルタ

(2) square-root フィルタ

の2種類を提供している。ベイジアン・フィルタと square-root フィルタは理論的には等価であるが、数値的には square-root フィルタの方が優れている。深宇宙軌道決定の場合、S/C の軌道は地球から約 1 Au という遠距離あることから、軌道決定に用いる追跡データの観測性が悪くなる。観測性の悪いデータを用いると、ベイジアン・フィルタでは正値行列の正値性がくずれるなどの数値上の問題が発生しやすい。square-root フィルタは、このような軌道決定上の深刻な問題を解消するために作成された。

## 3.7.1 パラメタ推定の定式化

パラメタ・ベクトル  $\mathbf{q}$  を次のように定義する。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dots \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (3.314)$$

$\mathbf{x} = n$  次元推定パラメタ

$\mathbf{y} = l$  次元考慮パラメタ。アプリアリ値は正しくない。 $\mathbf{q}$  の共分散行列を計算する場合は考慮される。

パラメタ推定とは、ノイズでかき乱された観測量の測定値を統計処理して、エポック  $t_0$  でパラメタ・ベクトル  $\mathbf{q}$  がとる値として最も適切と考えられる推定値を求めることである。

時刻  $t_1, t_2, \dots, t_m$  で測定された  $m$  個の測定値  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_m$  の全体を  $m$  次元ベクトル  $\hat{\mathbf{z}}$ ,

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \vdots \\ \hat{z}_m \end{bmatrix} \quad (3.315)$$

であらわし、対応する観測量の計算値  $z_1(\mathbf{q}), z_2(\mathbf{q}), \dots, z_m(\mathbf{q})$  の全体を  $m$  次元ベクトル  $\mathbf{z}(\mathbf{q})$ ,

$$\mathbf{z}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} z_1(\mathbf{q}) \\ z_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ z_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.316)$$

とする。また、それぞれの観測ノイズ  $v_1, v_2, \dots, v_m$  の全体を、 $m$  次元ベクトル  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (3.317)$$

であらわした時、次の観測モデルが成り立つ。

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z}(\mathbf{q}) + \mathbf{v} \quad (3.318)$$

本プログラムでは、観測データに基づき  $\mathbf{q}$  の推定値を求める方法として、一般に最小二乗法（あるいは、Bayse の重み付き最小二乗法）と呼ばれる方法を採用する。

全ての  $(O-C)$  残差を含むベクトル  $\mathbf{R}$  を、次式で定義する。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z}(\mathbf{q}) \\ \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (3.319)$$

ここに,

$\tilde{\mathbf{z}}$  = 観測量 (ドップラー, レンジ, 角度 etc.) の測定値の列ベクトル.

$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q}) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  = 観測量の計算値の列ベクトル.

$\tilde{\mathbf{x}}$  = 推定パラメタのアプリオリ値の列ベクトル.

$\tilde{\mathbf{y}}$  = 考慮パラメタのアプリオリ値の列ベクトル.

$\mathbf{x}$  = 推定パラメタの推定値の列ベクトル.

$\mathbf{y}$  = 考慮パラメタの推定値の列ベクトル =  $\tilde{\mathbf{y}}$

残差が0であるベクトル  $\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$  は, 推定値  $\tilde{\mathbf{x}}$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}$  が相関をもつため残されている. 測定値と計算値の残差の重み付き二乗和  $Q$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{W}_T \cdot \mathbf{R} \\ &= (\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z}(\mathbf{q}))^T \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z}(\mathbf{q})) + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \end{bmatrix}^T \tilde{\Gamma}_q^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.320)$$

ここに,

$$\mathbf{W}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \tilde{\Gamma}_q^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \tilde{P}_x & \tilde{\Gamma}_{xy} \\ \tilde{\Gamma}_{xy}^T & \Lambda_y \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_x & \mathbf{W}_{xy} \\ 0 & \mathbf{W}_{xy}^T & \mathbf{W}_y \end{bmatrix} \quad (3.321)$$

$\mathbf{W}$  = データの重み行列 (対角行列); 各観測量の重みは  $1/(\text{観測量の入力分散値})$

$\tilde{P}_x = \tilde{\mathbf{x}}$  の共分散行列

$\Lambda_y = \tilde{\mathbf{y}}$  の共分散行列

$\tilde{\Gamma}_{xy} = \tilde{\mathbf{x}}$  と  $\tilde{\mathbf{y}}$  の相関行列

(3.320) を最小にするような  $\mathbf{x}$  の値を求めるのが, パラメタ推定である.

観測量  $\mathbf{z}$  は推定パラメタ  $\mathbf{x}$  の非線型関数なので, パラメタ推定は本質的に非線型問題となる. そこで, (3.318) を線型近似して線型フィルタ理論を適用し, 線型近似からのずれを数回のイタレーションを行って補う.

$i$  番目のイタレーションで得られた推定パラメタ値を  $\mathbf{x}_i^*$  とする.  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を  $(\mathbf{x}_i^*, \tilde{\mathbf{y}})$  の近傍で展開し, 1次の項までとると,

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}(\mathbf{x}_i^*, \tilde{\mathbf{y}}) + \mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^*) + \mathbf{B}_i(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}) \quad (3.322)$$

$$A_i = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_i^*, y=\bar{y}}, \quad B_i = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=x_i^*, y=\bar{y}}$$

これを観測モデル(3.318)に代入して,

$$\Delta z_i = A_i \delta x_i + B_i \delta y + v \quad (3.323)$$

$$\delta x_i = x - x_i^*$$

$$\delta y = y - \bar{y}$$

$$\Delta z_i = \bar{z} - z(x_i^*, \bar{y})$$

$$\Delta \tilde{x}_i = \tilde{x} - x_i^* \quad (\Delta \tilde{x}_0 = 0)$$

これを(3.320)に代入して,  $(i+1)$  番目のイタレーションにおける評価関数  $Q_{i+1}$  が得られる.

$$\begin{aligned} Q_{i+1} = & [\Delta z_i - [A_i : B_i] \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y \end{bmatrix}]^T W [\Delta z_i - [A_i : B_i] \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y \end{bmatrix}] \\ & + \begin{bmatrix} \delta x_i - \Delta \tilde{x}_i \\ \delta y \end{bmatrix}^T \tilde{\Gamma}_q^{-1} \begin{bmatrix} \delta x_i - \Delta \tilde{x}_i \\ \delta y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.324)$$

この  $Q_{i+1}$  を最小化して, 推定値  $\delta x_i^*$  を求める. したがって,  $(i+1)$  番目のイタレーション後の推定パラメータ値  $x_i^*$  は,

$$x_{i+1}^* = x_i^* + \delta x_i^* = \tilde{x} + \sum_{k=0}^i \delta x_k^* \quad (3.325)$$

となる. イタレーションを打ち切る収束判定条件は, 本プログラムでは,

(1) イタレーション回数が設定上限値を越えた時

(2)  $WRMS(x_i) = \sqrt{\frac{\Delta z_i^T W \Delta z_i}{m-1}}$  として

$$\left| \frac{WRMS(x_{i+1}) - WRMS(x_i)}{WRMS(x_i)} \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon: \text{収束判定レベル値}) \quad (3.326)$$

のどちらかを満足した場合である.

$Q_{i+1}$  を最小化する方法として,

(1)  $\delta Q_{i+1} = 0$  に基づく正規方程式の方法

(2) Householder 直交変換を用いて行う方法

があるが、前者をベイジアン・フィルタ、後者を square-root フィルタと称する。

### 3.7.2 ベイジアン・フィルタ

ベイジアン・フィルタとは、一般に最小二乗問題でよく知られている正規方程式を解いて、推定パラメタの推定値を求めるフィルタの事である。

#### (1) パラメタ推定の解法

(3.324)の  $Q_{i+1}$  において、 $\mathbf{y}$  は考慮パラメタなので、 $\mathbf{y}$  のアプリアリの不確かさ  $\delta\mathbf{y}=0$  とする。そうすると(3.324)は  $\delta\mathbf{x}_i$  のみの函数となる；

$$Q_{i+1}=Q_{i+1}(\delta\mathbf{x}_i)=(\Delta\mathbf{z}_i-A_i\delta\mathbf{x}_i)^T W(\Delta\mathbf{z}_i-A_i\delta\mathbf{x}_i) \\ +(\delta\mathbf{x}_i-\Delta\tilde{\mathbf{x}}_i)^T W_x(\delta\mathbf{x}_i-\Delta\tilde{\mathbf{x}}_i) \quad (3.327)$$

(3.327)を  $\delta\mathbf{x}_i^T$  で偏微分して、

$$\frac{\partial Q_{i+1}}{\partial(\delta\mathbf{x}_i^T)} = -A_i^T W(\Delta\mathbf{z}_i-A_i\delta\mathbf{x}_i) + W_x(\delta\mathbf{x}_i-\Delta\tilde{\mathbf{x}}_i) \quad (3.328)$$

(3.328)より  $\delta Q_{i+1}=0$  とする  $\delta\mathbf{x}_i^*$  は、

$$[W_x + A_i^T W A_i] \delta\mathbf{x}_i^* = W_x \Delta\tilde{\mathbf{x}}_i + A_i^T W \Delta\mathbf{z}_i \quad (3.329)$$

あるいは、

$$\tilde{P}_c \equiv W_x^{-1} \quad (3.330)$$

を用いて、

$$[\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i] \delta\mathbf{x}_i^* = \tilde{P}_c^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{x}}_i + A_i^T W \Delta\mathbf{z}_i \quad (3.329')$$

行列  $[\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i]$  は正値対称行列の性質をもつので(正則)、 $\delta\mathbf{x}_i^*$  は、

$$\delta\mathbf{x}_i^* = [\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i]^{-1} (\tilde{P}_c^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{x}}_i + A_i^T W \Delta\mathbf{z}_i) \quad (3.331)$$

したがって、 $(i+1)$  回目のイタレーションで得られる推定パラメタの推定値  $\mathbf{x}_{i+1}^*$  は、

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \mathbf{x}_i^* + [\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i]^{-1} (\tilde{P}_c^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{x}}_i + A_i^T W \Delta\mathbf{z}_i) \quad (3.332)$$

となる。(3.332)は、

$$P_c \equiv [\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i]^{-1} \quad (\text{i.e. } P_c^{-1} = \tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i) \quad (3.333)$$

を用いて、

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \mathbf{x}_i^* + P_c [\tilde{P}_c^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{x}}_i + A_i^T W \Delta\mathbf{z}_i] \quad (3.332')$$

ともあらわされる。



(2) 共分散行列

( $i+1$ )回目のイタレーションが終了した後の事後共分散  $\Gamma_q$  は，パラメタ・ベクトル  $\mathbf{q}$  と推定値の差，

$$\delta \mathbf{q}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}^* \\ \dots \\ \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{i+1} \\ \dots \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (3.334)$$

を用いて，次式で定義される．

$$\Gamma_q \equiv \overline{\delta \mathbf{q}_{i+1} \delta \mathbf{q}_{i+1}^T} = \begin{bmatrix} \overline{\delta \mathbf{x}_{i+1} \delta \mathbf{x}_{i+1}^T} & \overline{\delta \mathbf{x}_{i+1} \delta \mathbf{y}^T} \\ \overline{(\delta \mathbf{x}_{i+1} \delta \mathbf{y}^T)^T} & \overline{\delta \mathbf{y} \delta \mathbf{y}^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{xy}^T & \Lambda_y \end{bmatrix} \quad (3.335)$$

——は統計平均をあらわす．(3.323)，(3.332')より  $\delta \mathbf{x}_{i+1}$  は，

$$\delta \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}^* = [I - P_c A_i^T W A_i] \delta \mathbf{x}_i - P_c \tilde{P}_c^{-1} \Delta \mathbf{x}_i - P_c A_i^T W (B_i \delta \mathbf{y} + \mathbf{v}) \quad (3.336)$$

(3.333)で， $P_c \cdot P_c^{-1} = I$ より，

$$P_c \cdot \tilde{P}_c^{-1} = I - P_c A_i^T W A_i = I - K_c A_i \quad (3.337)$$

$$K_c \equiv P_c A_i^T W$$

これを(3.336)に代入して，

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{i+1} &= [I - K_c A_i] (\delta \mathbf{x}_i - \Delta \mathbf{x}_i) - K_c B_i \delta \mathbf{y} - K_c \mathbf{v} \\ &= [I - K_c A_i] (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) - K_c B_i (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}) - K_c \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.336')$$

したがって， $\Gamma_{xy}$ は，

$$\Gamma_{xy} = \overline{\delta \mathbf{x}_{i+1} + \delta \mathbf{y}^T} = [I - K_c A_i] \tilde{\Gamma}_{xy} - K_c B_i \Lambda_y \quad (3.338)$$

$$\overline{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})^T} = \tilde{\Gamma}_{xy}$$

$$\overline{(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})^T} = \Lambda_y$$

$$\overline{\mathbf{v}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})^T} = 0$$

$P_x$ は，

$$\begin{aligned} P_x &= \overline{\delta \mathbf{x}_{i+1} \delta \mathbf{x}_{i+1}^T} \\ &= [I - K_c A_i] \tilde{P}_x [I - K_c A_i]^T + K_c B_i \Lambda_y (K_c B_i)^T + K_c W^{-1} K_c^T \\ &\quad - [I - K_c A_i] \tilde{\Gamma}_{xy} (K_c B_i)^T - K_c B_i \tilde{\Gamma}_{xy}^T [I - K_c A_i]^T \\ &= \overline{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^T} = P_x \\ &= \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}^T} = W^{-1} \end{aligned} \quad (3.339)$$

$$\overline{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\mathbf{v}^T} = 0$$

(3.321) (3.330) より

$$\tilde{P}_x = \tilde{P}_c + \tilde{\Gamma}_{xy} \Lambda_y^{-1} \tilde{\Gamma}_{xy}^T \quad (3.340)$$

(3.340) を (3.339) に代入し, (3.337) (3.338) を用いて, 次式を得る.

$$P_x = P_c + \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \Gamma_{xy}^T \quad (3.341)$$

感度行列  $S_{xy}$  は, 考慮パラメタ  $\mathbf{y}$  を単位量変化させた時の推定パラメタ  $\mathbf{x}$  の変位量をあらわしたものである. すなわち,

$$S_{xy} = \frac{\partial(\delta\mathbf{x})}{\partial\mathbf{y}} \quad (3.342)$$

感度行列は非常に重要な量である. というのは, これが考慮パラメタと推定パラメタの誤差とを関連づける式だからである. この値は, 考慮パラメタの個々の値の推定パラメタの誤差への影響度を示している.

推定パラメタの推定値の誤差  $\delta\mathbf{x}$  は, 次のようにあらわされる.

$$\delta\mathbf{x} = S_{xy} \delta\mathbf{y} + \dots \quad (3.343)$$

…は, 観測ノイズや推定パラメタのアプリオリ値に含まれる誤差からの寄与を示している. これらは  $\delta\mathbf{y}$  と相関をもっていないので, (3.343) で  $\delta\mathbf{y}^T$  を右から掛けて統計平均をとると,

$$\begin{aligned} \Gamma_{xy} &= S_{xy} \Lambda_y \\ \therefore S_{xy} &= \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \end{aligned} \quad (3.344)$$

アプリオリの感度行列  $\tilde{S}_{xy}$  は,

$$\tilde{S}_{xy} = \frac{\partial(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\partial\mathbf{y}} = \tilde{\Gamma}_{xy} \Lambda_y^{-1} \quad (3.345)$$

( $i+1$ ) 回目のイタレーション後の感度行列  $S_{xy}$  は, (3.338), (3.345) を用いて,

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \frac{\partial(\delta\mathbf{x}_{i+1})}{\partial\mathbf{y}} = \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \\ &= [I - K_c A_i] \tilde{\Gamma}_{xy} \Lambda_y^{-1} - K_c B_i \\ &= [I - K_c A_i] \tilde{S}_{xy} - K_c B_i \end{aligned} \quad (3.346)$$

とあらわされる.

考慮パラメタ  $\mathbf{y}$  の単位変位量でなく, 実際の変位量に対する推定パラメタ  $\mathbf{x}$  の変位量をあらわしたのが摂動行列  $P_i$  で, 次式で定義される.

$$P_t \equiv S_{xy} A_y^{1/2} \tag{3.347}$$

摂動行列は考慮パラメタ全体の推定パラメタの誤差への影響を示している。

感度行列と摂動行列は，考慮パラメタを推定する必要があるかどうか判断する基準となる。感度が低ければ，そのパラメタは無視してもさしつかえないが，反面感度が高く対応する摂動行列の値が大きければ，これは無視しえず推定する必要がある。

(3) 共分散行列の伝播

入力エポック  $t_0$  での共分散行列  $\Gamma_q$  を，任意の他のエポック  $t_N$  に伝播した予測共分散行列  $\tilde{\Gamma}_q(t_N)$  の値を求める。ただし，本プログラムでは，

- ① 入力エポック  $t_0$  とマップ時刻  $t_N$  は暦表時 (ET) で与えられる。
- ② 天体エフェメリスに影響を与える推定パラメタ，考慮パラメタはない。

ので，時系変換・座標中心変更に伴う変位は存在しないで，力学系パラメタの変位のみが S/C の状態ベクトルに伝播する。

パラメタベクトルの変位  $\delta q$  の伝播行列  $M$  を求めるためには，パラメタを推定パラメタ，考慮パラメタというように分割するよりも，むしろ，

$$q(t_0) = \begin{bmatrix} X_0^B \\ \dots \\ a \\ \dots \\ b \end{bmatrix} \tag{3.348}$$

$X_0^B$  = 入力エポック  $t_0$  での S/C の状態ベクトル。天体 B 中心系で表示されたもので，必ずしも積分中心系である必要はない。

$a$  = 力学系パラメタ：積分中心系に対する S/C の状態ベクトル  $X$  に影響を与える全てのパラメタ ( $X_0^B$  を除く)

$b$  = 観測系パラメタ。

と分けた方が考えやすい。これは，従来のパラメタ・ベクトル，

$$q(t_0) = \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ y \end{bmatrix}$$

を置換して求められる。

$$\begin{bmatrix} X_0^B \\ \dots \\ a \\ \dots \\ b \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ y \end{bmatrix} \tag{3.349}$$

$P$  : 置換行列

マップ時刻でのパラメタ・ベクトル  $q(t_N)$  は，

$$\mathbf{q}(t_N) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^c(t_N) \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.350)$$

予測共分散  $\tilde{\Gamma}_q(t_N)$  は、伝播されたパラメタ・ベクトル  $\mathbf{q}(t_N)$  に対応したものである。  
 マップ時刻での S/C の状態ベクトル  $\mathbf{X}(t_N)$  の変位は、

$$\delta\mathbf{X} = U\delta\mathbf{X}_0^B + V\delta\mathbf{a} \quad (3.351)$$

$$U = U(t_N, t_0)$$

$$V = V(t_N, t_0)$$

$U$ ,  $V$  行列は変分方程式を解いて求められる(「3.3 変分方程式」の項参照)。したがって、 $\mathbf{q}(t_0)$  の変位によるマップ時刻での変位  $\delta\mathbf{q}(t_N)$  は、次式で与えられる。

$$\delta\mathbf{q}(t_N) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{X} \\ \delta\mathbf{a} \\ \delta\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{X}_0^B \\ \delta\mathbf{a} \\ \delta\mathbf{b} \end{bmatrix} = \tilde{M}\delta\mathbf{q}(t_0) \quad (3.352)$$

これを元のパラメタの順序であらわすには、(3.352)の右から置換行列の逆行列  $P$  を掛けて、

$$P^{-1}\delta\mathbf{q}(t_N) = (P^{-1}\tilde{M}P)(P^{-1}\delta\mathbf{q}(t_0)) = M(P^{-1}\delta\mathbf{q}(t_0)) \quad (3.353)$$

となる。伝播行列  $M$  は、

$$M = P^{-1}\tilde{M}P \quad (3.354)$$

である。パラメタ・ベクトル  $\mathbf{q}$  の要素の並び方が、

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \Bigg\} n, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \Bigg\} l \quad (3.355)$$

$\mathbf{a}_1$  = 推定パラメタのうちで力学系パラメタであるもの (パラメタ  $a_1$ )

$\mathbf{b}_1$  = 推定パラメタのうちで観測系パラメタであるもの (パラメタ数  $b_1$ )

$\mathbf{a}_2$  = 考慮パラメタのうちで力学系パラメタであるもの (パラメタ数  $a_2$ )

$\mathbf{b}_2$  = 考慮パラメタのうちで観測系パラメタであるもの (パラメタ数  $b_2$ )

$n$ : 推定パラメタ数

$l$ : 考慮パラメタ数

であるとする、伝播行列  $M$  は、 $\tilde{M}$  において置換に対応する行と列を置換して次のようになる。

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} \Phi(t_N, t_0) & \phi(t_N, t_0) \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{matrix} \} n \\ \} l \end{matrix} \quad (3.356)$$

$$\Phi(t_N, t_0) = \left[ \begin{array}{c|c|c} U & V_1 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{matrix} \} 6 \\ \} a_1 \\ \} a_2 \end{matrix} \quad n \quad \phi(t_N, t_0) = \left[ \begin{array}{c|c} V_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \} 6 \\ \} a_1 + a_2 \end{matrix} \quad n$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_6 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_1} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_2}$

(3.357)

$$V = [V_1 : V_2]$$

予測共分散  $\tilde{\Gamma}_q(t_N)$  は、

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_q(t_N) &= \overline{\delta \mathbf{q}(t_N) \delta \mathbf{q}(t_N)^T} = M \overline{\delta \mathbf{q}(t_0) \delta \mathbf{q}(t_0)^T} M^T = M \Gamma_q M^T \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{P}_x(t_N) & \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N) \\ \hline \tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N) & \Lambda_y \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.358)$$

$\tilde{P}_x(t_N)$ ,  $\tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)$  は、(3.336), (3.341), (3.346)を用いて、

$$\tilde{P}_x(t_N) = \tilde{P}_c(t_N) + \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N) \Lambda_y^{-1} \tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N) \quad (3.359)$$

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(t_N) = \Phi \Gamma_{xy} + \phi \Lambda_y \quad (3.360)$$

となる。ここに、

$$\tilde{P}_c(t_N) \equiv \Phi P_c \Phi^T \quad (3.361)$$

である。予測感度行列  $\tilde{S}_{xy}(t_N)$  も、(3.342)とそれに続く一連の手続きを経て、

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{xy}(t_N) &= \Phi(t_N, t_0) S_{xy} + \phi(t_N, t_0) \Lambda_y \\ &= \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N) \Lambda_y^{-1} \end{aligned} \quad (3.362)$$

予測摂動行列  $\tilde{P}_i(t_N)$  は、

$$\tilde{P}_i(t_N) = \tilde{S}_{xy}(t_N) \Lambda_y^{1/2} \quad (3.363)$$

となる。

### 3.7.3 Square-Root フィルタ

square-root フィルタは、理論的にはベイジアン・フィルタと等価であるが、数値的には

こちらの方が優れている。ベイジアン・フィルタでは、正規行列  $[\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i]$  の逆行列を計算する必要があるが ((3.332)参照), これはしばしば条件が悪くなり, 丸め誤差に大きく影響される。square-root フィルタでは, 正規行列をつくる代りにハウスホルダー変換を利用して三角行列  $R$  に変換する。この変換における丸め誤差は正規行列  $[\tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i]$  と同じオーダーである。パラメタ推定値を得るためには  $R$  の逆行列を求める必要があるが,  $R$  の条件数<sup>(注)</sup>は正規行列の条件数の平方根なので,  $R$  の逆行列を求めることは正規行列の逆行列を求めることよりも, 数値的誤差をより少くできる。これが, square-root フィルタの優れた点である。

(1) パラメタ推定の解法

(3.324)において,  $W$  および  $\tilde{\Gamma}_q^{-1}$  は正値対称行列なので, 平方根行列  $W^{\frac{1}{2}}$ ,  $\tilde{\Gamma}_q^{-1/2}$  をもつ。平方根行列は次のように定義される。

$$W \equiv (W^{\frac{1}{2}})^T (W^{\frac{1}{2}}), \quad \tilde{\Gamma}_q^{-1} \equiv (\tilde{\Gamma}_q^{-1/2})^T (\tilde{\Gamma}_q^{-1/2}) \quad (3.364)$$

平方根行列は一意的でないが, 本プログラムでは上三角行列を用いている。上三角行列はコレスキー分解 etc.によって得られる。 $\tilde{\Gamma}_q^{-1/2}$  を,

$$\tilde{\Gamma}_q^{-1/2} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right] \quad (3.365)$$

$\tilde{R}_x$ : 上三角行列 ( $n \times n$  次元)

とする。(3.364)より,

$$\tilde{R}_x^T \tilde{R}_x = W_x \equiv \tilde{P}_c^{-1} \quad (3.366)$$

である。これを(3.324)に代入して,

$$Q_{i+1} = \left\{ \begin{aligned} & \left\| W^{\frac{1}{2}} \Delta z_i - W^{\frac{1}{2}} [A_i : B_i] \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \dots \\ \delta y \end{bmatrix} \right\|^2 \\ & + \left\| \tilde{\Gamma}_q^{-1/2} \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \dots \\ \delta y \end{bmatrix} - \tilde{\Gamma}_q^{-1/2} \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \right. \quad (3.367)$$

$$= \left\| \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \dots \\ \delta y \end{bmatrix} - \left[ \begin{array}{c} \mathbf{d}_i \\ \dots \\ 0 \end{array} \right] \right\|^2$$

$$\mathbf{d}_i \equiv \tilde{R}_x \cdot \Delta x_i \quad (3.368)$$

ここで, 次の関係式が成り立つような直交行列  $T$  が存在する。

(注)最大特異値と最小特異値の比。この値が大きい程, 逆行列を求める際, 丸め誤差が拡大される。

$$T \begin{bmatrix} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ 0 & R_y \\ W^{\frac{1}{2}}A_i & W^{\frac{1}{2}}B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x^{(i)} & R_{xy}^{(i)} \\ 0 & R_y \\ 0 & \bar{B}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad R_x^{(i)} \text{は上三角行列} \quad (3.369)$$

このような行列は  $n$  個のハウスホルダー直交行列  $T_i$  の積,

$$T = T_n \cdot T_{n-1} \cdot T_{n-2} \cdots T_1 \quad (3.370)$$

として求められる (Appendix B 参照). この変換行列  $T$  を用いると,

$$T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_i \\ 0 \\ W^{\frac{1}{2}}\Delta \mathbf{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{bmatrix} \quad (3.371)$$

となる. 直交行列はベクトルのノルムを変えないので, (3.367) は,

$$Q_{i+1} = \left\| \begin{bmatrix} R_x^{(i)} & R_{xy}^{(i)} \\ 0 & R_y \\ 0 & \bar{B}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (3.367')$$

ベイジアン・フィルタの場合と同様, 考慮パラメタ  $\mathbf{y}$  のアプリアリの不確かさ  $\delta \mathbf{y} = 0$  とすると,  $Q_{i+1}$  は,

$$Q_{i+1} = \left\| \begin{bmatrix} R_x^{(i)}\delta \mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i \\ 0 \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_i \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (3.372)$$

となる. (3.372) から明らかなように,  $Q_{i+1}$  は,

$$R_x^{(i)}\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{d}_i \quad (3.373)$$

の時, 最小化される. したがって, 推定値  $\delta \mathbf{x}_i^*$  は,

$$\delta \mathbf{x}_i^* = R_x^{(i)-1}\mathbf{d}_i \quad (3.374)$$

( $i+1$ ) 回目のイタレーションで得られる推定パラメタの推定値  $\mathbf{x}_{i+1}^*$  は,

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \mathbf{x}_i^* + R_x^{(i)-1}\mathbf{d}_i \quad (3.375)$$

となる.

## (2) 数値的技法

上三角行列  $R_x^{(i)}$  の条件数が非常に大きくなると, (3.374) の積  $R_x^{(i)-1}\mathbf{d}_i$  は, 残差ベクトル  $\mathbf{d}_i$  の誤差が大きく増巾される. そこで  $R_x^{(i)}$  の代わりにスケーリングした  $R_x^{(i)}$  を用い,  $R_x^{(i)-1}$  を  $r$ -ランク近似して,  $\delta \mathbf{x}_i^*$  の計算値の誤差を引き下げる.

a.  $R_x^{(i)}$  のスケーリング

上三角行列  $R_x^{(i)}$  の各列ベクトルに対し、ノルム=1となるようにスケーリングを行う。すなわち、各列ベクトルのノルム  $\alpha_j (j=1,2,\dots,n)$  の逆数から成る対角行列、

$$D_i = \begin{bmatrix} 1/\alpha_1 & & \\ & 1/\alpha_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & & 1/\alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.376)$$

を用いて、(3.373)は、

$$R_x^{(i)} \cdot \delta \mathbf{x}_i = (R_x^{(i)} D_i) (D_i^{-1} \delta \mathbf{x}_i) = R_x'^{(i)} \delta \mathbf{x}'_i = \mathbf{d}_i \quad (3.377)$$

$$\left. \begin{aligned} R_x'^{(i)} &\equiv R_x^{(i)} D_i \\ \delta \mathbf{x}_i &\equiv D_i \delta \mathbf{x}'_i \end{aligned} \right\} \quad (3.378)$$

となる。 $R_x'^{(i)}$  はノルム=1の列ベクトルで構成される。(3.377)を解いて求められた  $\delta \mathbf{x}'_i^*$  は、最終的には(3.378)で  $D_i$  を右から掛けて  $\delta \mathbf{x}_i^*$  に変換される。

b.  $R_x'^{(i)}$  の特異値分解

$\delta \mathbf{x}'_i^*$  を求めるために、まず、上三角行列  $R_x'^{(i)}$  を次のように特異値分解する。

$$R_x'^{(i)} = USV^T \quad (3.379)$$

$U, V = n \times n$  次元の直交行列

$S =$  特異値  $\lambda_j (j=1,2,\dots,n)$  を大きい順から並べた対角行列 ( $n \times n$  次元)

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n) \quad (3.380)$$

(3.379)の逆行列をとって、

$$R_x'^{(i)-1} = VS^{-1}U^T \quad (3.381)$$

$U, V$  の  $j$  番目の列ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} U &= [\mathbf{u}_1 : \mathbf{u}_2 : \dots : \mathbf{u}_n] \\ V &= [\mathbf{v}_1 : \mathbf{v}_2 : \dots : \mathbf{v}_n] \end{aligned} \right\} \quad (3.382)$$

(3.380), (3.382)を(3.381)に代入して、

$$R_x'^{(i)-1} = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j \mathbf{u}_j^T}{\lambda_j} \quad (3.383)$$

$\delta \mathbf{x}'_i$  は、



$$\delta \mathbf{x}'_i = R_x^{(i)-1} \mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{d}_i)}{\lambda_j} \quad (3.384)$$

この式からわかるように、特異値  $\lambda_j$  の値が非常に小さいと、 $\mathbf{d}_i$  の誤差による  $\delta \mathbf{x}'_i$  への寄与は非常に大きくなりうる。そこで(3.385)の和を整数  $r (\leq n)$  までで止め、残りの  $(n-r)$  項を丸め込んだことによる誤差が、それらを残したことにより生ずる誤差よりも小さくなるように  $r$  を選ぶ。このような近似は  $r$ -ランク近似と呼ばれる。整数  $r$  は、次式を満たすような最大整数であり、擬似階数 (pseudorank) と呼ばれる。

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_1} > \varepsilon \quad (3.386)$$

$\varepsilon$ : あらかじめ設定された微小値 ( $>0$ )

近似された  $R_{x_r}^{(i)-1}$ ,  $\delta \mathbf{x}'_{ir}$  は,

$$\left. \begin{aligned} R_{x_r}^{(i)-1} &= V_r (S^{-1})_r U_r^T = \sum_{j=1}^r \frac{\mathbf{v}_j \mathbf{u}_j^T}{\lambda_j} \\ \delta \mathbf{x}'_{ir} &= \sum_{j=1}^r \frac{\mathbf{v}_j (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{d}_i)}{\lambda_j} \end{aligned} \right\} \quad (3.387)$$

となる。ただし、 $U_r$ ,  $V_r (S^{-1})_r$  は,

$$\left. \begin{aligned} U_r &= [\mathbf{u}_1 : \mathbf{u}_2 : \cdots : \mathbf{u}_r] \\ V_r &= [\mathbf{v}_1 : \mathbf{v}_2 : \cdots : \mathbf{v}_r] \\ (S^{-1})_r &= \left[ \begin{array}{ccc} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1/\lambda_r \end{array} \right] \end{aligned} \right\} r \quad (3.388)$$

である。

### (3) 共分散行列

$(i+1)$  番目のイタレーションが終了した後のパラメタ・ベクトルと推定値の差  $\delta \mathbf{q}_{i+1}$  及び事後共分散  $\Gamma_q$  は、ベイジアン・フィルタの場合と同様に定義される ((3.334), (3.335) 参照)。  $\delta \mathbf{x}_{i+1}$  は(3.375)より,

$$\delta \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}^* = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^*) - R_x^{(i)-1} \mathbf{d}_i = \delta \mathbf{x}_i - R_x^{(i)-1} \mathbf{d}_i \quad (3.389)$$

一方、(3.368)より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_i \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{R}_x \Delta \mathbf{x}_i \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ 0 & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i + (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \\ \delta \mathbf{y} + (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ 0 & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2 \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ 0 & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また, (3.322)の右から  $W^{\frac{1}{2}}$  を掛けて,

$$W^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{z}_i = [W^{\frac{1}{2}} A_i \ : \ W^{\frac{1}{2}} B_i] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} + W^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}$$

これらをまとめて,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_i \\ \dots \\ 0 \\ W^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_x & \tilde{R}_{xy} \\ 0 & R_y \\ W^{\frac{1}{2}} A_i & W^{\frac{1}{2}} B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \dots \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \dots \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2 \\ W^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (3.390)$$

(3.390)の左から  $T$  を掛けて(3.369)(3.371)を利用すると,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x^{(i)} & R_{xy}^{(i)} \\ 0 & R_y \\ 0 & B^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \dots \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\rho}_i \end{bmatrix} \quad (3.391)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\rho}_i \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \dots \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_2 \\ W^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (3.392)$$

すなわち,

$$\mathbf{d}_i = R_x^{(i)} \delta \mathbf{x}_i + R_{xy}^{(i)} \delta \mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}_1 \quad (3.393)$$

これを(3.389)に代入すると,  $\delta \mathbf{x}_{i+1}$  は,

$$\delta \mathbf{x}_{i+1} = -R_x^{(i-1)} R_{xy}^{(i)} \delta \mathbf{y} - R_x^{(i-1)} \boldsymbol{\mu}_1 \quad (3.394)$$

となる. したがって  $\Gamma_{xy}$  は,

$$\Gamma_{xy} = \overline{\delta \mathbf{x}_{i+1} \delta \mathbf{y}^T} = -R_x^{(i-1)} R_{xy}^{(i)} \Lambda_y \quad (3.395)$$

$P_x$  は(3.395)を利用して,

$$P_x = \overline{\delta \mathbf{x}_{i+1} \delta \mathbf{x}_{i+1}^T} = R_x^{(i-1)} \cdot R_x^{(i)-T} + \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \Gamma_{xy} \quad (3.396)$$

(3.390) (3.391)において,  $T$  は線型変換なので

$$T \begin{bmatrix} \tilde{R}_x \\ 0 \\ W^{\frac{1}{2}} A_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x^{(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この転置行列との積を求めると

$$\begin{aligned} R_x^{(i)T} R_x^{(i)} &= [R_x^{(i)T} : 0 : 0] \begin{bmatrix} R_x^{(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{R}_x^T : 0 : (W^{\frac{1}{2}} A_i)^T] \begin{bmatrix} \tilde{R}_x \\ 0 \\ W^{\frac{1}{2}} A_i \end{bmatrix} = \tilde{R}_x^T \tilde{R}_x + A_i^T W A_i \\ &= \tilde{P}_c^{-1} + A_i^T W A_i \quad (\because (3.366) \text{より}) \\ &= P_c^{-1} \quad (\because (3.333) \text{より}) \end{aligned}$$

$$\therefore P_c = R_x^{(i)-1} R_x^{(i)-T} \quad (3.397)$$

(3.396)に代入して,

$$P_x = P_c + \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \Gamma_{xy}^T \quad (3.398)$$

感度行列  $S_{xy}$  は, 定義と(3.395)より,

$$S_{xy} = \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} = -R_x^{(i)-1} R_{xy}^{(i)} \quad (3.399)$$

摂動行列  $P_t$  は,

$$P_t = S_{xy} \Lambda_y^{1/2} \quad (3.400)$$

である.  $\Gamma_q$  の逆行列  $\Gamma_q^{-1}$  は, (3.395) (3.396) (3.397) (3.398) より

$$\begin{aligned} \Gamma_q^{-1} &= \left[ \begin{array}{c|c} P_c^{-1} & -P_c^{-1} \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \\ \hline -(P_c^{-1} \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1})^T & \Lambda_y^{-1} + \Lambda_y^{-1} \Gamma_{xy}^T P_c^{-1} \Gamma_{xy} \Lambda_y^{-1} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} P_x^{(i)T} R_x^{(i)} & R_x^{(i)T} R_{xy}^{(i)} \\ \hline (R_x^{(i)T} R_{xy}^{(i)})^T & R_{xy}^{(i)T} R_{xy}^{(i)} + R_y^T R_y \end{array} \right] \quad (3.401) \end{aligned}$$

$$R_y \equiv \Lambda_y^{-1/2}$$

したがって  $\Gamma_q^{-1}$  の平方根行列  $\Gamma_q^{-1/2}$  は,

$$\Gamma_q^{-1/2} = \left[ \begin{array}{c|c} R_x^{(i)} & R_{xy}^{(i)} \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right] \quad (3.402)$$

これはアプリアリ共分散  $\tilde{\Gamma}_q$  の逆行列の平方根行列(3.365)と同じ形をしている。

#### (4) 共分散行列の伝播

入力エポック  $t_0$  での共分散行列  $\Gamma_q$  および共分散行列の逆行列の平方根行列  $\Gamma_q^{-1/2}$  を任意の他のエポック  $t_N$  に伝播する方法について述べる。伝播に当たっての条件はベイジアン・フィルタの場合と同様である。途中までの議論は共通なので省略して、得られた結果のみまとめておくと、

$$\delta \mathbf{q}(t_N) = M \delta \mathbf{q}(t_0)$$

$$\tilde{\Gamma}_q(t_N) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x(t_N) & \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N) \\ \tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N) & \Lambda_y \end{bmatrix} = \overline{\delta \mathbf{q}(t_N) \delta \mathbf{q}(t_N)^T} = M \Gamma_q M^T \quad (3.403)$$

$$M = \begin{bmatrix} \Phi(t_N, t_0) & \phi(t_N, t_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} = \text{伝播行列} \quad (3.404)$$

$$\Phi(t_N, t_0) = \left[ \begin{array}{c|c|c} U & V_1 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} 6 \\ \} a_1 \\ \} b_1 \end{array} \right\} n$$

$$\phi(t_N, t_0) = \left[ \begin{array}{c|c} V_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} 6 \\ \} a_1 + a_2 \end{array} \right\} n$$

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{6} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_2} \end{array} \right\} n \quad (3.405)$$

(3.403) より、

$$\tilde{\Gamma}_q^{-1}(t_N) = M^{-T} \Gamma_q^{-1} M^{-1} = (\Gamma_q^{-1/2} M^{-1})^T (\Gamma_q^{-1/2} M^{-1}) \quad (3.406)$$

$\Gamma_q^{-1/2} M^{-1}$  は(3.402)(3.404)より

$$\Gamma_q^{-1/2} M^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} R_x^{(i)} \Phi^{-1} & R_{xy}^{(i)} - R_x^{(i)} \Phi^{-1} \phi \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right]$$

ハウスホルダー直交変換  $\tilde{T}$  を用いて  $\Gamma_q^{-1/2} M^{-1}$  を上三角行列に変換すると、

$$\tilde{T} \left[ \begin{array}{c|c} R_x^{(i)} \Phi^{-1} & R_{xy}^{(i)} - R_x^{(i)} \Phi^{-1} \phi \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_x(t_N) & \tilde{R}_{xy}(t_N) \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right] \quad (3.407)$$

(3.407)に代入して、

$$\tilde{\Gamma}_q^{-1}(t_N) = (\tilde{T} \Gamma_q^{-1/2} M^{-1})^T (\tilde{T} \Gamma_q^{-1/2} M^{-1})$$

したがって、予測共分散行列の逆行列の平方根行列  $\tilde{\Gamma}_q^{-1/2}(t_N)$  は、

$$\tilde{\Gamma}_q^{-1/2}(t_N) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_x(t_N) & \tilde{R}_{xy}(t_N) \\ \hline 0 & R_y \end{array} \right] \quad (3.408)$$

$\tilde{\Gamma}_q^{-1}(t_N)$  は，

$$\tilde{\Gamma}_q^{-1}(t_N) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_x^T(t_N)\tilde{R}_x(t_N) & \tilde{R}_x^T(t_N)\tilde{R}_{xy}(t_N) \\ \hline (\tilde{R}_x^T(t_N)\tilde{R}_{xy}(t_N))^T & R_y^T R_y + \tilde{R}_{xy}^T(t_N)\tilde{R}_{xy}(t_N) \end{array} \right] \quad (3.409)$$

一方，(3.403)の逆行列をとって，

$$\tilde{\Gamma}_q^{-1}(t_N) = \left[ \begin{array}{c|c} [\tilde{P}_x(t_N) - \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N)]^{-1} & -[\ ]^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1} \\ \hline -([\ ]^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1})^T & \Lambda_y^{-1} + \Lambda_y^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N)[\ ]^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1} \end{array} \right] \quad (3.410)$$

$$[\ ]^{-1} = \tilde{P}_x(t_N) - \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N)$$

$\tilde{P}_c(t_N)$  を，

$$\tilde{P}_c(t_N) \equiv \tilde{P}_x(t_N) - \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1}\tilde{\Gamma}_{xy}^T(t_N) \quad (3.411)$$

と定義し，(3.409)と(3.410)を比較すると，

$$\tilde{P}_c(t_N) = (\tilde{R}_x(t_N))^{-1}(\tilde{R}_x(t_N))^{-T} \quad (3.412)$$

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(t_N) = -\tilde{R}_x(t_N)^{-1}\tilde{R}_{xy}(t_N)\Lambda_y \quad (3.413)$$

予測感度行列  $\tilde{S}_{xy}(t_N)$  は，定義と(3.413)を用いて，

$$\tilde{S}_{xy}(t_N) = \tilde{\Gamma}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{-1} = -\tilde{R}_x(t_N)^{-1}\tilde{R}_{xy}(t_N) \quad (3.414)$$

予測摂動行列  $\tilde{P}_t(t_N)$  は，

$$\tilde{P}_t(t_N) = \tilde{S}_{xy}(t_N)\Lambda_y^{1/2} \quad (3.415)$$

となる。

### 3.8 データの平滑・圧縮法

各観測局で取得された観測データ（測距データ）は，軌道決定を行うに先だって加工され，フォーマット変換・不良データの棄却・データの圧縮が行われる。このような一連の作業をデータの前処理と呼んでいる。各観測局から送られてくる観測データは莫大な量のぼると共にかなりの不良データを含んでいる。そこで，まず観測データを最小二乗近似多項式で近似し，そこからかけ離れたデータは棄却する。このような操作をデータの平滑と呼んでいる。平滑されたデータは軌道決定を行うのに適当な量まで減らされる。この操作がデータの圧縮である。データの平滑・圧縮で重要なもう1つの点は，このような操作

を通じて観測データの分散を算出することである。この分散は軌道決定においてデータの重み行列を構成する要素として用いられる。

### 3.8.1 データの平滑法

本プログラムで使用する平滑アルゴリズムは以下の通りである。データ個数が  $N$  個の母集団を持って来て、時刻順に  $n$  個のデータを取り出し、次の処理を行う。

- ①  $n$  個のデータに対し、 $m$  次の近似多項式でカーブフィッティングを行って多項式係数を求め、求めた近似多項式を基準にして標準偏差  $\sigma_n$  を求める。ここで、

$$\sigma_n \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O(t_i) - C(t_i))^2}{n - m}} \quad (3.416)$$

$O(t_i)$  = 時刻  $t_i$  での観測量の測定値

$C(t_i)$  = 時刻  $t_i$  での観測量の近似多項式の値

- ② 求めた  $\sigma_n$  を基にして、

$$|O(t_i) - C(t_i)| > \kappa \cdot \sigma_n \quad (3.417)$$

$\kappa$  = 棄却レベル。入力で指定する。

を満足するデータを不良データと定義し棄却する。

- ③ 不良データが棄却された残りのデータに対して①②を繰り返し、次式を満足するまで実行する。

$$\frac{|\sigma_n^{(i-1)} - \sigma_n^{(i)}|}{\sigma_n^{(i)}} < \varepsilon \quad (3.418)$$

$\sigma_n^{(i)}$  =  $i$  番目の繰り返しで得られた  $\sigma_n$  値

$\varepsilon$  = 収束レベル ( $> 0$ )

このようにして得られたデータ及び  $\sigma_n^{(i)}$  値を、平滑の済んだデータ及びデータの標準偏差とする。母集団の標準偏差は、次式で求める。

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j_0} \sigma_{n,j}^2}{j_0}} \quad (3.419)$$

$j_0$  = 母集団より  $n$  個のデータの組を取り出した回数

$\sigma_{n,j}$  =  $j$  番目に取り出したデータの組の  $\sigma_n$

$\sigma_n$  及び  $\sigma_N$  の信頼性を高めるためには、 $n \gg m - 1$  とする必要がある。

### 3.8.2 データの圧縮法

本プログラムでは、データの圧縮法として、

- ① サンプリング法

② 代表点法

の2種類を採用している。

(1) サンプリング法

サンプリング法は、平滑済みデータを  $l$  個置きに取り出す方法である。個々のデータに付属する標準偏差は、平滑法で算出した値である。サンプリング法によって取り出されたデータが構成する標本集団の標準偏差  $\sigma_l$  と母集団の標準偏差  $\sigma_N$  の関係は、

$$\sigma_l = \sigma_N \tag{3.420}$$

である。

(2) 代表点法

平滑済みデータを時刻順に  $l$  個ずつ取り出し、 $m$  次多項式でカーブフィッティングを行って、次式に基づいて標準偏差  $\sigma_l$  を求める。

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^l (O(t_j) - C(t_j))^2}{l - m}} \tag{3.421}$$

$O(t_j)$  = 時刻  $t_j$  での観測量の測定値

$C(t_j)$  = 時刻  $t_j$  での観測量の近似多項式の値

この  $l$  個のデータの組の代表値  $C_M$  は、

$$C_M = C(t_M) \tag{3.422}$$

$t_M = \frac{t_s + t_e}{2} = l$  個のデータの組の観測時間の中心時刻

$t_s = l$  個のデータの組の観測時間の先頭時刻

$t_e = l$  個のデータの組の観測時間の最終時刻

で与えられる。代表値が構成する標本集団の標準偏差  $\sigma_{N'}$  と母集団の標準偏差  $\sigma_N$  の関係は、

$$\sigma_{N'} = \sigma_N \tag{3.423}$$

である。

### 3.9 予報データ

地上観測局が S/C と交信するためには、アンテナを S/C の方向に向ける必要がある。特に本ミッションのように S/C が地上観測局から極めて遠距離にある場合には S/C から送られてくる電波は微弱なので、あらかじめ計算された高精度の角度予報データを用いて数値制御する、いわゆるプログラム追尾方式で指向性の良い巨大アンテナを駆動して初めて交信が可能になる。

予報データは軌道決定で求められた推定パラメタ（軌道 6 要素 etc.）を用いて作成され

る。作成される予報データは、1-way レンジ  $\rho$ ・1-way レンジの時間変化率  $\dot{\rho}$ ・角度（方位角  $\sigma$ 、仰角  $\gamma$ ）及び仰角の時間変化率  $\dot{\gamma}$  である。1-way レンジ及び 1-way レンジの時間変化率については、アンテナを向ける或る時刻において地上観測局で受信される電波（ダウンリンク）と、その時刻で地上観測局から送信され、ある時間が経った後 S/C で受信される電波（アップリンク）の2種類について算出されている。角度データについては、ダウンリンクの値のみ計算される。それは、アンテナの高指向性が要求されるのは微弱な電波を捉えなければならないダウンリンクに限られているからである。アップリンクの角度とダウンリンクの角度の差はせいぜい  $\sim 1/100^\circ$  であり、また、アップリンクの場合は送信パワーを高くとれるので、その分指向精度の要求は低くなる。したがってアップリンクの角度はダウンリンクの値で代用しても問題は起こらない。

1-way レンジ及び 1-way レンジの時間変化率には、「3.6 観測量の補正」の項で述べられているような補正は施されていない。角度データについては光行差補正および対流圏効果による補正が施されている。その他の補正は、アンテナの指向精度には余り関与しないため考慮されていない。

本プログラムは、地上観測局の長期運用計画立案の資料となる衛星可視時間帯の計算もを行っている。可視時間帯とは観測対象となっている S/C の仰角が或る値  $\gamma_0 (\geq 0^\circ)$  以上である時間帯を指すが、本プログラムでは、その境となる時刻（入感時刻・消感時刻）及び最大仰角時刻を為点法（regula-falsi）で計算する。

### 3.9.1 1-way レンジ及び 1-way レンジの時間変化率の計算

1-way レンジ  $\rho$  及び 1-way レンジの時間変化率  $\dot{\rho}$  の計算は、基本的には「3.5.1 観測モデル」の項で述べたものと同じであるがはるかに省略化されている。それは、本ミッションにおいては、これらの諸量が観測量の測定値のモニタ的役割しか果たしていないためである。light time equation は、相対論項を考慮せず数回のイタレーションしか行っていない。また、種々の補正は行っていない。

(1) アップリンクでの 1-way レンジ  $\rho_{up}$  及び 1-way レンジの時間変位率  $\dot{\rho}_{up}$  の計算  
アップリンクレンジ  $\rho_{up}$  (1-way) は、送信時刻  $t(ET)$  で地上観測局から送信された電波が時刻  $t + \Delta t$  で S/C で受信された場合におけるレンジ、

$$\rho_{up} = \| \mathbf{r}_{s/c}^s(t + \Delta t) - \mathbf{r}_{s/r}^s(t) \| \quad (3.424)$$

$\mathbf{r}_{s/c}^s(t + \Delta t)$  = 時刻  $(t + \Delta t)$  における S/C の位置〔太陽中心 EME 50〕

$\mathbf{r}_{s/r}^s(t)$  = 時刻  $t$  における地上観測局の位置〔太陽中心 EME 50〕

である。 $\Delta t$  は、以下の手順で計算される；

- ① 1 回目のイタレーションによる時刻の補正量  $\Delta t^{(1)}$  を、

$$\Delta t^{(1)} = \frac{\| \mathbf{r}_{s/c}^s(t) - \mathbf{r}_{s/r}^s(t) \|}{c} \quad (3.425)$$

$\mathbf{r}_{s/c}^s(t)$  = 時刻  $t$  における S/C の位置〔太陽中心 EME 50〕



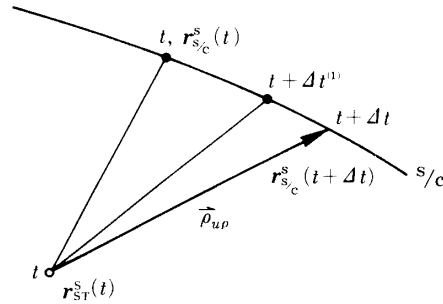


図 3.25 アップリンクレンジ  $\rho_{up}$

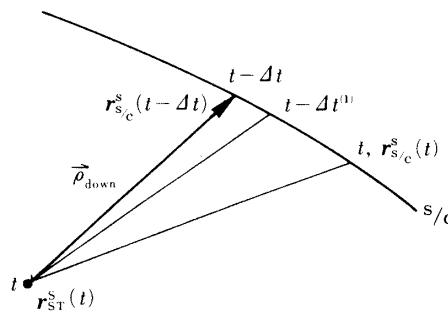


図 3.26 ダウンリンクレンジ  $\rho_{down}$

$c =$  光速度

で計算する。

② 時刻の補正量  $\Delta t^{(1)}$  を考慮した S/C の位置  $r_{sc}^s(t + \Delta t^{(1)})$  を用いて 2 回目のイタレーションを行い,  $\Delta t$  を求める。

$$\Delta t = \frac{\|r_{sc}^s(t + \Delta t^{(1)}) - r_{sr}^s(t)\|}{c} \tag{3.426}$$

アップリンクレンジの時間変化率  $\dot{\rho}_{up}$  は, 時刻  $t$  での観測局の位置  $r_{sr}^s(t)$ ・速度  $\dot{r}_{sr}^s(t)$  と時刻  $(t + \Delta t)$  での S/C の位置  $r_{sc}^s(t + \Delta t)$ ・ $\dot{r}_{sc}^s(t + \Delta t)$  から次のように計算される。

$$\dot{\rho}_{up} = \frac{\rho_{up} \cdot \dot{\rho}_{up}}{\rho_{up}} \tag{3.427}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{up} &= r_{sc}^s(t + \Delta t) - r_{sr}^s(t) \\ \dot{\rho}_{up} &= \dot{r}_{sc}^s(t + \Delta t) - \dot{r}_{sr}^s(t) \end{aligned} \right\} \tag{3.428}$$

(2) ダウンリンクでの 1-way レンジ  $\rho_{down}$  及び 1-way レンジの時間変化率  $\dot{\rho}_{down}$  の計算

ダウンリンクレンジ  $\rho_{down}$  (1-way) は, 送信時刻  $(t - \Delta t)$  で S/C から送信された電波が

時刻  $t$  で地上観測局で受信された場合におけるレンジ,

$$\rho_{\text{down}} = \|\mathbf{r}_{S/C}^s(t - \Delta t) - \mathbf{r}_{ST}^s(t)\| \quad (3.429)$$

$\mathbf{r}_{S/C}^s(t - \Delta t)$  = 時刻  $(t - \Delta t)$  における S/C の位置 [太陽中心 EME 50]

$\mathbf{r}_{ST}^s(t)$  = 時刻  $t$  における地上観測局の位置 [太陽中心 EME 50]

である。 $\Delta t$  は(1)の場合と同様に、次の手順で計算される;

- ① 1 回目のイタレーションによる時刻の補正量  $\Delta t^{(1)}$  を,

$$\Delta t^{(1)} = \frac{\|\mathbf{r}_{S/C}^s(t) - \mathbf{r}_{ST}^s(t)\|}{c} \quad (3.430)$$

で計算する。

- ② 時刻の補正量  $\Delta t^{(1)}$  を考慮した S/C の位置  $\mathbf{r}_{S/C}^s(t - \Delta t^{(1)})$  を用いて 2 回目のイタレーションを行い、 $\Delta t$  を求める。

$$\Delta t = \frac{\|\mathbf{r}_{S/C}^s(t - \Delta t^{(1)}) - \mathbf{r}_{ST}^s(t)\|}{c} \quad (3.431)$$

ダウンリンクレンジの時間変化率  $\dot{\rho}_{\text{down}}$  は、時刻  $t$  での観測局の位置  $\mathbf{r}_{ST}^s(t)$ ・速度  $\dot{\mathbf{r}}_{ST}^s(t)$  と時刻  $(t - \Delta t)$  での S/C の位置  $\mathbf{r}_{S/C}^s(t - \Delta t)$ ・速度  $\dot{\mathbf{r}}_{S/C}^s(t - \Delta t)$  から次のように計算される。

$$\rho_{\text{down}} = \frac{\boldsymbol{\rho}_{\text{down}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{down}}}{\rho_{\text{down}}} \quad (3.432)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{\text{down}} &= \mathbf{r}_{S/C}^s(t - \Delta t) - \mathbf{r}_{ST}^s(t) \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{down}} &= \dot{\mathbf{r}}_{S/C}^s(t - \Delta t) - \dot{\mathbf{r}}_{ST}^s(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.433)$$

### 3.9.2 角度及び仰角の時間変化率の計算

- (1) 角度 (方位角  $\sigma$ , 仰角  $\gamma$ ) の計算

角度の計算の手続きは「3.5.1 観測モデル(3)角度観測量」の項で述べられたものと同じである。ただし、単位ベクトル  $\mathbf{L}_{50}$  は(3.429)(3.433)を用いて、

$$\mathbf{L}_{50} = -\frac{\boldsymbol{\rho}_{\text{down}}}{\rho_{\text{down}}} \quad (3.434)$$

とする。対流圏効果による補正は、(3.299)(3.300)を用いてなされる。

- (2) 仰角の時間変化率  $\dot{\gamma}$  の計算

仰角の時間変化率  $\dot{\gamma}$  は(3.247)を時間微分して得られる。すなわち、

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\mathbf{L}}_{BF} \cdot \mathbf{Z}_{BF}}{\cos \gamma} \quad (3.435)$$

仰角  $\gamma$  は(1)で計算された値である.  $\dot{\mathbf{L}}_{BF}$  および  $\mathbf{Z}_{BF}$  は次式で計算される.

$$\dot{\mathbf{L}}_{BF} = \dot{T}(t)(\mathbf{L}_{50} + \Delta\mathbf{L}_{50}) + T(t)\dot{\mathbf{L}}_{50} \quad (3.436)$$

$T(t), \dot{T}(t)$  = 時刻  $t$  における EME 50 → 地球固定座標系への変換行列とその時間微分.

$$\Delta\mathbf{L}_{50} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{r}}_{ST}^s(t) - (\dot{\mathbf{r}}_{ST}^s(t) \cdot \mathbf{L}_{50}) \mathbf{L}_{50}] \quad (3.437)$$

$\dot{\mathbf{r}}_{ST}^s(t)$  = 時刻  $t$  における地上観測局の位置 [太陽中心 EME 50]

$$\dot{\mathbf{L}}_{50} = \frac{[\dot{\rho}_{\text{down}} - (\dot{\rho}_{\text{down}} \cdot \mathbf{L}_{50}) \mathbf{L}_{50}]}{\rho_{\text{down}}} \quad (3.438)$$

$$\mathbf{Z}_{BF} = \begin{bmatrix} \cos \phi_g \cos \lambda \\ \cos \phi_g \sin \lambda \\ \sin \phi_g \end{bmatrix} \quad (3.439)$$

$\phi_g$  = 観測局の測地緯度

$\lambda$  = 観測局の東経

### 3.9.3 入感時刻・消感時刻及び最大仰角時刻の計算

地球は自転しているため, 地上観測局から S/C を望む理論上の仰角  $\gamma$  は図 3.27 のように正弦函数的になる. 実際には,  $\gamma \geq 0^\circ$  の時のみ S/C を観測することができるわけであるが, 図 3.27 において仰角  $\gamma$  が或る値  $\gamma_0 (\geq 0^\circ)$  以上になる部分を可視時間帯と呼び,  $t_s, t_e$  をそれぞれ入感時刻・消感時刻と言う. 入感時刻と消感時刻の近傍では  $\gamma(t)$  の曲線はそれぞれ単調増加・単調減少函数なので, 為点法によって  $\gamma = \gamma_0$  となる時刻を求める. 一方, 最大仰角時刻  $t_m$  は  $\dot{\gamma}(t) = 0$  となる点であり, その近傍では  $\dot{\gamma}(t)$  は単調減少函数なので,  $\dot{\gamma}(t)$  に対して同様のアルゴリズムを適用して  $t_m$  を求める.

図 3.28 に示すように,  $f(t_1)f(t_2) < 0$  なる  $t_1, t_2$  を初期値として, 2点  $(t_1, f(t_1)), (t_2, f(t_2))$  を結ぶ直線が  $f(t) = 0$  となる点  $t_i$ ,

$$t_i = \frac{t_1 f(t_2) - t_2 f(t_1)}{f(t_2) - f(t_1)} \quad (3.440)$$

を計算する.  $f(t_i)$  と  $f(t_1), f(t_2)$  の符号を比較し,  $f(t_i)$  と同符号である方の  $t$  を  $t_i$  で置き換える. 以下, その手順を

$$|t_n - t_{n-1}| < \varepsilon \quad (3.441)$$

$\varepsilon$  = 収束基準値 ( $> 0$ )

になるまで繰り返す, 解  $t_n$  を得る.  $f(t)$  の函数形は, それぞれ,

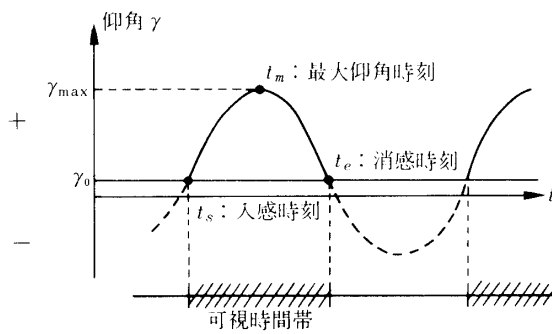


図 3.27 入感時刻・消感時刻および最大仰角時刻

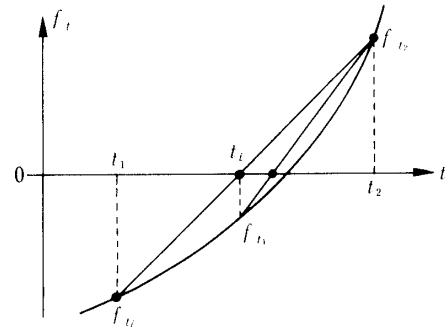


図 3.28 為点法

$$f(t) = \begin{cases} \gamma(t) - \gamma_0 : \text{入感時刻・消感時刻計算の時} \\ \dot{\gamma}(t) : \text{最大仰角時刻計算の時} \end{cases} \quad (3.442)$$

$\gamma(t)$ ,  $\dot{\gamma}(t)$  の計算方法は「3.9.2 角度及び仰角の時間変化率の計算」で述べられている。

## 第4章 ISSOP のシステム構成と機能概要

本章では，ISSOP システムの特徴，システム構成および機能について述べる。

### 4.1 ISSOP システムの特徴

ISSOP システムは，次のような特徴をもつ；

- (1) 従来からのベイジアン・フィルタに加えて，数値計算的に優れた square-root フィルタを採用して数値的不安定性に対処している。
- (2) 一般相対論項を入れて light time equation を解き，観測局や S/C の位置・速度等を精度良く求めている。
- (3) 一般相対論効果による観測量の計算値への影響，すなわち，信号伝播遅れ，光行差，局時計の刻みの変動を要求精度の範囲内で補正している。
- (4) 豊富な種類の力学系パラメタ・観測系パラメタを，推定パラメタあるいは考慮パラメタとできる。
- (5) 対流圏・電離層効果の補正に実データを用いている。
- (6) 感度・摂動行列の計算，共分散伝播等の解析機能をもつ。
- (7) 「さきがけ」「すいせい」以外の深宇宙探査機も取扱えるような機能拡張性をもつ。
- (8) ISSOP システムは TSS モードとバッチモードの両モードで作動する。TSS モードでは，グラフィックディスプレイを使用して操作性を向上させている。バッチモードは，パラメタ・リサーチ等の解析や定型的な追跡運用の場合に時間を節約できる。

### 4.2 ISSOP システムの構成

#### 4.2.1 ISSOP システムの位置づけ

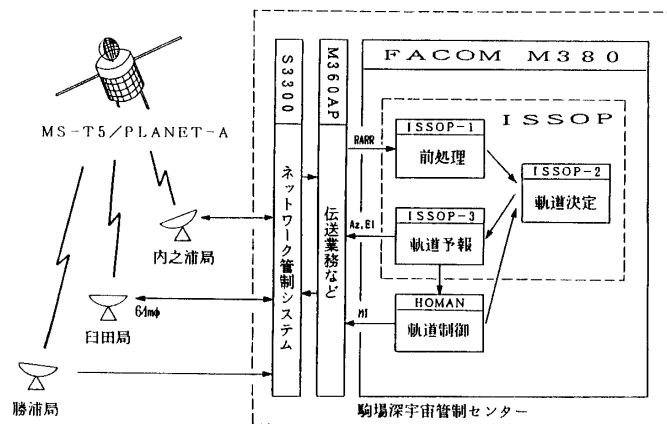


図 4.1 深宇宙用軌道決定プログラム (ISSOP) の位置付け

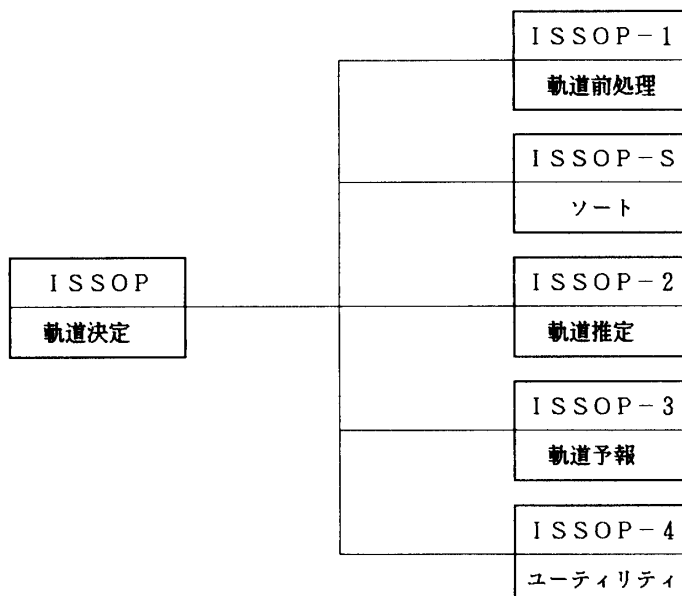


図 4.2 ISSOP システムのプログラム構成

表 4.1 ISSOP システムの主要機能

プログラム名	機能概要
軌道前処理	<ul style="list-style-type: none"> <li>追跡データのフォーマットの変換を行い、軌道決定用に編集する。</li> <li>データの平滑を行い、不良データを棄却する。</li> <li>データの圧縮を行い、データを適当な量にする。</li> <li>データの品質管理を行うために、データをグラフ表示する。</li> </ul>
ソート	前処理データを時刻順に編成する。
軌道決定	<ul style="list-style-type: none"> <li>或るエポックに於ける軌道 6 要素を用いて、軌道決定したいエポックまで軌道生成する。〔シフト・エポック〕</li> <li>時刻順編成された観測データ(測距データ)を入力し、エポックに於ける軌道 6 要素の推定パラメタの値を、フィルタを用いて推定する。</li> <li>共分散伝播を行う。</li> <li>感度・摂動行列等の推定誤差解析情報を計算する。</li> </ul>
軌道予報	<ul style="list-style-type: none"> <li>S/C の軌道を生成する。</li> <li>長期間にわたる S/C の可視時間帯を計算する。</li> <li>アンテナ角度の予報データを計算する。</li> </ul>
ユーティリティ	<ul style="list-style-type: none"> <li>各種ファイルの創成・初期化・ダンプを行う。</li> <li>疑似データを作成する。</li> <li>エフェメリス・ファイル、時系変換ファイル、初期共分散ファイルを作成する。</li> <li>インタフェース・ファイルのフォーマット変換を行う。</li> </ul>

図4.1にISSOPシステムの位置づけを示す。ISSOPシステムは、宇宙科学研究所内にある駒場深宇宙管制センター（KDSC）のFACOM M-380上に置かれている。ISSOPシステムは、M-380と同じく宇宙科学研究所内に設置されたFACOM M-360 APとの共用ファイルに格納されているので、M-380/M-360 APの両方からアクセス可能であり、一方がシステム・ダウンした際にも対処できるようになっている。ISSOPシステムはFORTRAN 77で記述されている（ソート・プログラムの一部はPL/Iで記述されている）。

各観測局で取得された測距データ（レンジ・1-way/2-way ドップラー・角度一方位角，仰角一）は、公衆回線で駒場深宇宙管制センターに伝送されネットワーク管制システム等を経てISSOPシステムに入力される。ISSOPシステムはこのデータを用いて軌道決定処理を行い、アンテナ角度予報データを計算する。予報データは再びネットワーク管制システム等を経て公衆回線で各観測局に送り返され、衛星の追跡運用に供される。ISSOPシステムはまた、軌道決定値を用いて他システムへの入力データを作成し提供する。

#### 4.2.2 プログラム構成と主要機能

図4.2にISSOPシステムのプログラム構成を示す。ISSOPシステムは、観測データの前処理を行う軌道前処理プログラムISSOP-1、データを時刻順に並べかえるソート・プログラムISSOP-S、軌道決定を行う軌道決定プログラムISSOP-2、予報データを作成する軌道予報プログラムISSOP-3、各種ユーティリティ群から成るユーティリティプログラムISSOP-4から構成される。表4.1に各プログラムの主要機能を示す。

#### 4.2.3 プログラム間インタフェースと処理の流れ

図4.3にISSOPシステムのプログラム間インタフェースと処理の流れを示す。各観測局で取得され駒場深宇宙管制センターの編集前ファイル(OEDF)に蓄積された測距データは、軌道前処理プログラムISSOP-1で編集・平滑・圧縮され、軌道決定を行うのに都合の良いフォーマット・データ量に整形された後、前処理済ファイル(PRPF)に出力・蓄積される。前処理済ファイルのデータは時刻順には並んでいないので、ソート・プログラムISSOP-Sで1バッチ処理の軌道決定に必要なデータのみ取り出され時刻順に並びかえられて時刻順編成ファイル(CHRF)に出力される。軌道決定プログラムISSOP-2では、こ

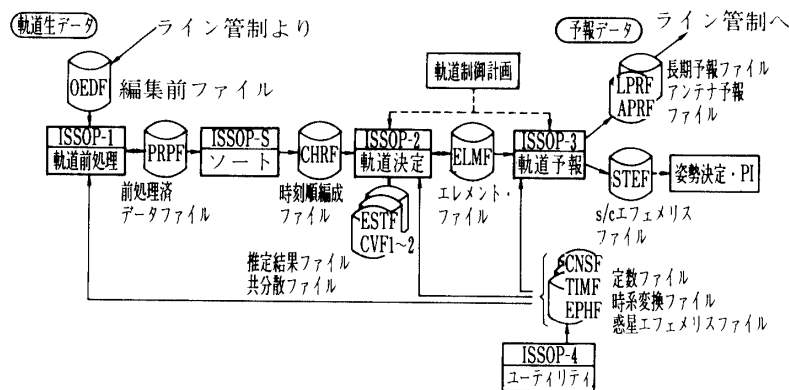


図 4.3 ISSOP システムのプログラム間インタフェース

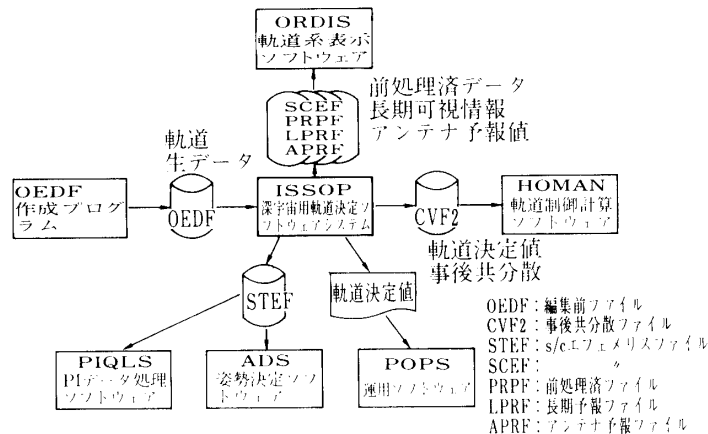


図 4.4 他システムとのインタフェース

のデータを用いて軌道決定を行い，得られた軌道決定値はエレメント・ファイル(ELMF)，推定結果ファイル (ESTF)，事後共分散ファイル (CVF 2) に出力する．エレメント・ファイルに出力・蓄積された軌道 6 要素は，次のバッチ処理の入力および軌道予報プログラムの入力となる．軌道決定で得られた事後共分散は事後共分散ファイルに出力・蓄積されるが，この値は次のバッチ処理の入力共分散として使用することも出来る．軌道予報プログラム ISSOP-3 では，エレメントファイルを介して軌道 6 要素を入力し(マニュアル入力も可能)，軌道生成を行って S/C エフェメリスファイル(SCEF, STEF)に出力する．ISSOP-3 では他に，長期可視情報やアンテナ角度予報データを作成して長期予報ファイル(LPRF)，アンテナ予報ファイル (APRF) に出力する．長期可視情報やアンテナ角度予報データは各観測局に送られて，局・衛星運用に供される．

#### 4.2.4 他システムとのインタフェース

図 4.4 に他システムとのインタフェースを示す．各観測局から伝送された観測データ(オンライン・データ)は，OEDF 作成プログラムで編集されて編集前ファイル (OEDF) に格納される．ISSOP システムでは，この編集前ファイルを介して軌道生データを入力する．ISSOP システムの出力のうち，軌道決定の結果得られた軌道 6 要素は運用ソフトウェア POPS の入力となる．また事後共分散および軌道 6 要素は，事後共分散ファイル(CVF 2)を介して軌道制御計算ソフトウェア HOMAN に入力される．軌道 6 要素を用いて計算された S/C エフェメリスは，1つは S/C エフェメリスファイル STEF によって PI データ処理ソフトウェア PIQLS，姿勢決定ソフトウェア ADS の入力となり，もう 1つは SCEF を通じて軌道系表示ソフトウェア ORDIS の入力となる．ORDIS はまた，ISSOP システムの出力である前処理済データ，長期可視情報，アンテナ角度予報データを各々，前処理済ファイル (PRPF)，長期予報ファイル (LPRF)，アンテナ予報ファイル (APRF) を介して入力・表示する．

#### 4.3 軌道前処理プログラム (ISSOP-1) の機能



表 4.2 前処理観測データの分類

			平滑処理の有無	
			有り	無し
圧縮処理の有無	有り	サンプリング法	平圧サンプリングデータ (SMPL)	——
		代表点法	平圧代表点データ (RPRS)	——
	無し	——	不平圧データ (FEWD)	

軌道前処理プログラム ISSOP-1 の目的は、軌道測距データを入力編集し、データの品質評価を行い、軌道決定プログラム ISSOP-2 の入力データを作成することにある。

#### 4.3.1 ISSOP-1 の機能概要

ISSOP-1 は次のような機能を持つ；

##### (a) 処理のコントロール機能

データユニットの編集やデータの平滑・圧縮を単位機能として持ち、これらの実行条件および実行手順を前もって登録することにより処理を自動的に行うことができる。ここでデータユニットとは、S/C名・観測局・データタイプ・データレベル・パスナンバーによって同一と識別されたデータ群である。

##### (b) データユニット編集機能

編集前ファイル(OEDF)より軌道生データを入力し、軌道決定プログラム用にフォーマット変換・編集を行う。この編集の終わったデータを編集生データと呼ぶ。編集生データの種類は、軌道決定プログラムで取扱うことの出来るデータ、すなわち、レンジ・1-way/2-way ドップラー・方位角・仰角である。

##### (c) データの平滑・圧縮処理

編集生データを入力し、個々のデータ毎に以下の処理を施す；

- ① 指定された  $\gamma_0$  以下のデータを棄却する。〔エレベーション・カット〕
- ② レンジデータに対して、トランスポンダ遅延時間の補正および地上システムでの遅延時間（アンテナ系+測距設備での遅延時間）の補正を行う。
- ③ データをカーブフィッティングして近似多項式を求め、これを基準にしてデータの標準偏差を計算する。この標準偏差を用いて、近似多項式からかけ離れたデータを不良データとして棄却する。〔データの平滑処理〕
- ④ 平滑処理を経たデータの数を適当な量まで減らす〔データの圧縮処理〕。データの圧縮法には、サンプリング法と代表点法がある。

平滑・圧縮処理の終わったデータは前処理観測データと呼ばれるが、平滑処理および圧縮処理の有無からそれぞれ表 4.2 のように個々の名称を定める。

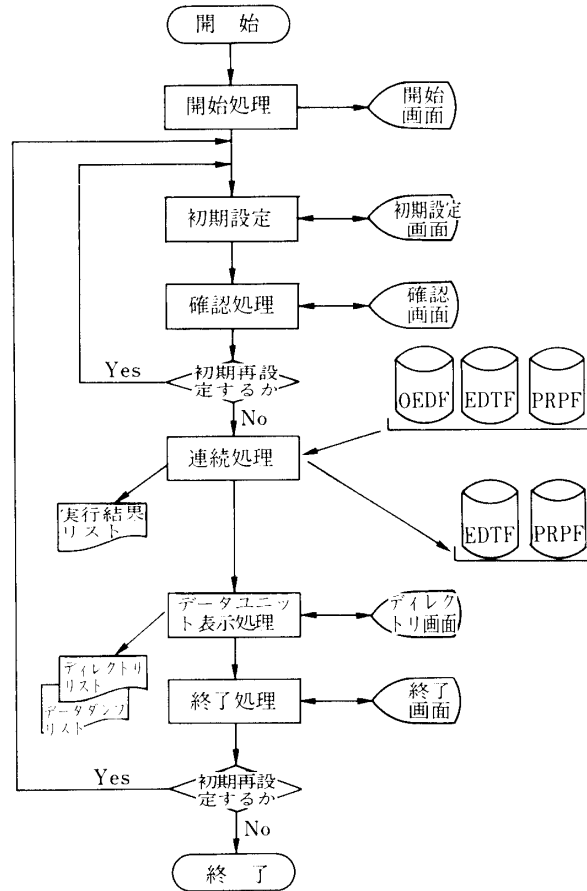


図 4.5 ISSOP-1 のメインフロー

## (d) データユニット表示処理

編集生データおよび前処理観測データに対して以下の処理を施す；

- ① データのディレクトリ部を表示する。
- ② データをグラフ表示する。
- ③ データユニットの削除/復帰を行う。
- ④ データユニットの記述内容の修正を行う。
- ⑤ データユニットの分割（データ期間の分割）を行う。
- ⑥ 複数のデータユニットの統合を行う。
- ⑦ データのディレクトリ部およびデータ部の印刷を行う。

ただし、④⑤⑥の処理は編集生データのみ適用される。

## 4.3.2 ISSOP-1 の処理フロー

図 4.5 に ISSOP-1 のメインフローを、図 4.6 に連続処理の処理フローを示す。図中の編集ファイル (EDTF) は編集生データが格納されたデータセット、前処理済ファイル (PRPF) は前処理観測データが格納されたデータセットである。

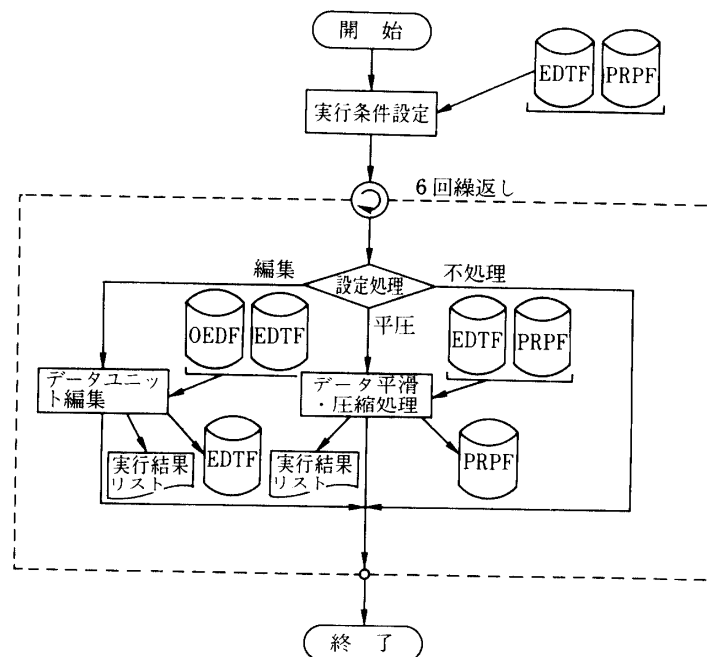


図 4.6 ISSOP-1 の連続処理の処理フロー

#### 4.4 ソート・プログラム (ISSOP-S) の機能

ソート・プログラム ISSOP-S の目的は、軌道前処理プログラム ISSOP-1 で作成した前処理観測データを軌道決定プログラム ISSOP-2 で用いることが出来るように、時刻順に並べかえることにある。

##### 4.4.1 ISSOP-S の機能概要

ISSOP-S は次のような機能を持つ；

##### (a) データの選択

ISSOP-2 で使用される可能性のあるデータをデータユニット毎に選択する。更に、S/C 名・観測局名・データタイプ・パスナンバーが同じでデータレベルが異なるデータについては、レベルの優先度に応じて優先度の高いデータを選択する。同一データユニットが複数存在する場合は 1 つだけ残す。

##### (b) データの時刻編成

(a) で選択されたデータを時刻順に編成して時刻順編成ファイル (CHRF) に出力する。

##### 4.2.2 ISSOP-S の処理フロー

図 4.7 に ISSOP-S の処理フローを示す。

#### 4.5 軌道決定プログラム (ISSOP 2) の機能

軌道決定プログラム ISSOP-2 の目的は、ソート・プログラム ISSOP-S で作成した時刻順編成観測データを用いて軌道 6 要素等の各種パラメタの推定を行うことにある。

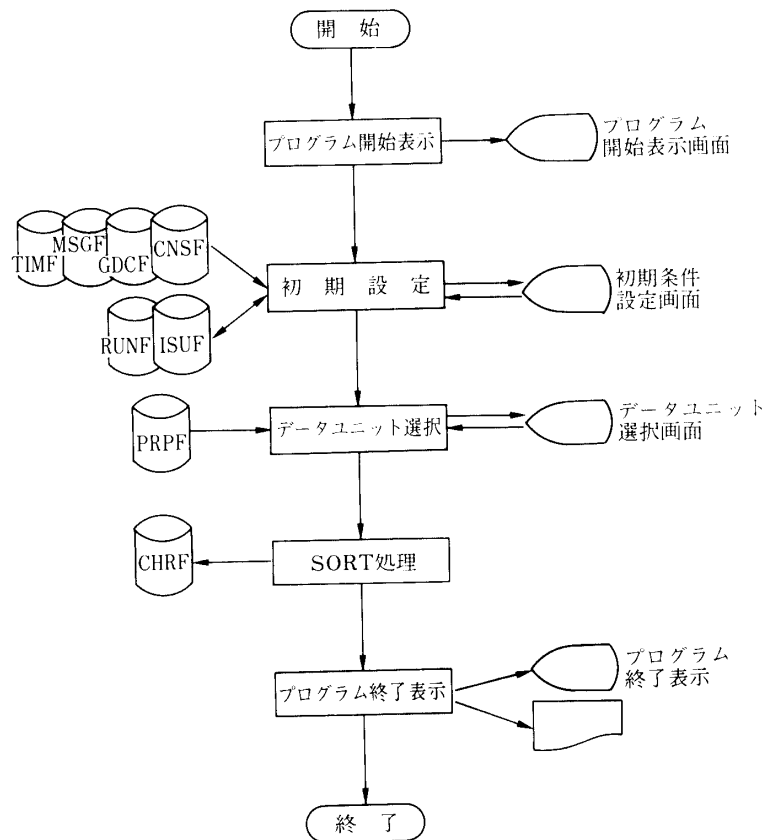


図 4.7 ISSOP-S の処理フロー

表 4.3 加速度項 (ISSOP-2)

	加 速 度 項
1	天体の質点力(太陽・9惑星・月・ハレー彗星)による加速度
2	地球の非球対称成分による加速度(J項; 10次, T/S項; 10次)
3	太陽輻射圧による加速度
4	大気抵抗力による加速度
5	一般相対論効果による加速度
6	瞬時マヌーバによる加速度
7	微小力による加速度

表 4.4 数値積分法 (ISSOP-2)

項目	方 法
積分方式	Adams-Cowell の予測子-修正子法
ステップ幅	局所誤差制御法
出発値計算	二体近似値を修正子法で修正
不連続処理	加速度の不連続点および SOI 切り換え時
補間法	積分公式による補間

## 4.5.1 ISSOP-2 の機能概要

ISSOP-2 は次のような機能を持つ；

## (a) シフト・エポック機能

ある時刻での軌道 6 要素の入力値をもとに軌道生成を行って指定された時刻での軌道 6 要素の値を計算し、エレメントファイル (ELMF) に出力する。この計算値は、軌道決定の入力軌道 6 要素値として使用することができる。軌道生成で選択できる加速度項および数値積分の方法をそれぞれ表 4.3, 表 4.4 に示す。

## (b) パラメタ推定機能

時刻順編成観測データを用いて、推定されたエポックでの軌道 6 要素 (位置・速度) とその他の推定パラメタを統計的手法により推定し、事後共分散行列を計算する。推定値はエレメントファイル・推定結果ファイル (ESTF)・事後共分散ファイル (CVF 2) に、ま

表 4.5 パラメタの種類

種 別	パ ラ メ タ 名	パラメタの個数
力 学 系	エポックにおける S/C の軌道 6 要素 $X(t_0)$	6
	太陽輻射圧の平均反射係数 $\Gamma$	1
	大気抵抗係数×有効断面積 $C_D \times S$	1
	瞬時マヌーバ・パラメタ $\Delta V$	3
	微小力・パラメタ $\mathbf{a}$	3
力学系&観測系	Brans-Dicke の自由パラメタ $\gamma$	1
観 測 系	観測局位置 $(\phi_0, \lambda, h)$ [測地座標系]	3/局
	タイミング・バイアス $a$	1/局
	レンジ・バイアス $R_c$	1/局 or 1/パス
	レンジレート・バイアス $F_c$	1/局 or 1/パス
	1-way ドップラーの発信周波数オフセット $\Delta f_{T_0}$ および発信周波数の変化率 $f_{T_1}$	1/局 or 1/パス

た事後共分散行列は事後共分散ファイルに出力される。パラメタ推定のアルゴリズム・パラメタに関して、次のような選択が可能である；

① フィルタの種類

ISSOP-2 で採用された線形ファイルは、

- ベイジアン・フィルタ
- Square-root フィルタ

の2種類である。Square-root フィルタの方が数値的精度が良いので、「観測性の悪いデータ」には Square-root フィルタが有効である。データ処理方式は、両フィルタ共にバッチ（一括）処理である。

② 推定パラメタと考慮パラメタ

ISSOP-2 では、推定パラメタと考慮パラメタという2つのタイプのパラメタを取扱うこ

表 4.6 観測データの種類と補正項目

観測量	補正項目	定式化の有無
レンジ	大気屈折効果	モデル化
	電離層効果	モデル化
	アンテナ・オフセット	モデル化
	トラポン遅延	数値代入
	局内遅延	数値代入
	レンジ・バイアス	バイアス・パラメタ
1-way ドップラー	大気屈折効果	モデル化
	電離層効果	モデル化
	アンテナ・オフセット	モデル化
	トラポン遅延	数値代入
	局内遅延	数値代入
	周波数オフセット・ 周波数変化率	バイアス・パラメタ
2-way ドップラー	大気屈折効果	モデル化
	電離層効果	モデル化
	アンテナ・オフセット	モデル化
	トラポン遅延	数値代入
	局内遅延	数値代入
	レンジレート・バイアス	バイアス・パラメタ
角度	大気屈折効果	モデル化

とが出来る(「3.7パラメタ推定」の項参照) 推定パラメタおよび考慮パラメタの種類を表4.5に示す。全パラメタ数(推定パラメタ数+考慮パラメタ数)の上限は、あらかじめ設定された値(可変;最大100個)である。各パラメタの選択方法は以下の通り;

- (i) エポックにおけるS/Cの軌道6要素は必ず推定パラメタとする。
- (ii) 残りのパラメタについては推定パラメタ,考慮パラメタのいずれかを選択できる。いずれも選択しない場合は定数となる。
- (iii) タイミング・バイアスは局毎に相異なる値を入力・推定できる。
- (iv) レンジバイアス,レンジレートバイアス,1-wayドップラーの発信周波数オフセットおよび周波数変化率は局毎あるいはパス毎に推定できる。ここで,パスとは1可視時間帯を言う。ただし,入力局毎に相異なる値を設定する。
- (v) 推定パラメタあるいは考慮パラメタに選択できる瞬時マヌーバの回数は1回である。

③ 観測データの種類と補正

ISSOP-2で使用できる観測データの種類とその補正項目を表4.6に示す。観測データを提供する観測局は10局以内である。また1バッチ処理で利用できるデータユニットは,最大100個である。

④ 運動モデル

パラメタ推定で選択できる運動モデル(加速度項,数値積分法)は「(a)シフトエポック機能」の項で述べたものと同じであるので,その項参照の事。

⑤ データの選択と $\sigma$ 値の変更

パラメタ推定で使用される観測データは各イタレーション毎にデータユニット単位で選択できる。また,観測量の計算値からかけ離れた観測データやある仰角 $\gamma_0$ より小さな仰角の時取得された観測データは個々に自動的に棄却される。入力共分散の重み行列を構成する各観測データの標準偏差( $\sigma$ 値)もデータユニット単位で変更可能である。

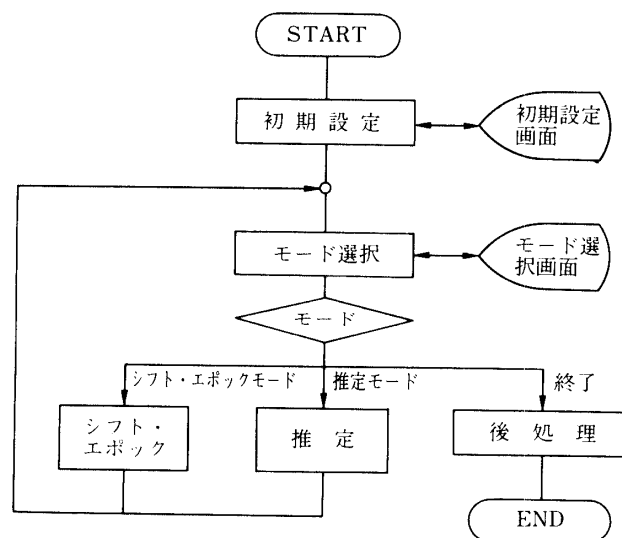


図 4.8 ISSOP-2のメインフロー

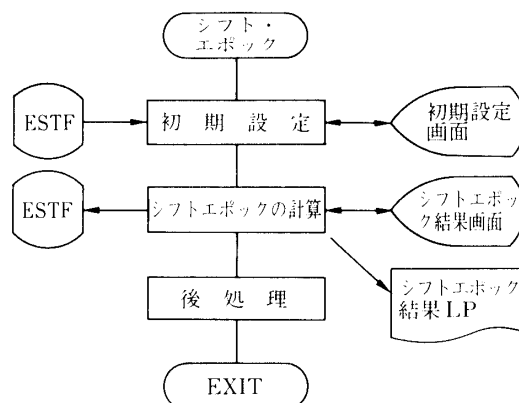


図 4.9 ISSOP-2 のシフトエポックモードの処理フロー

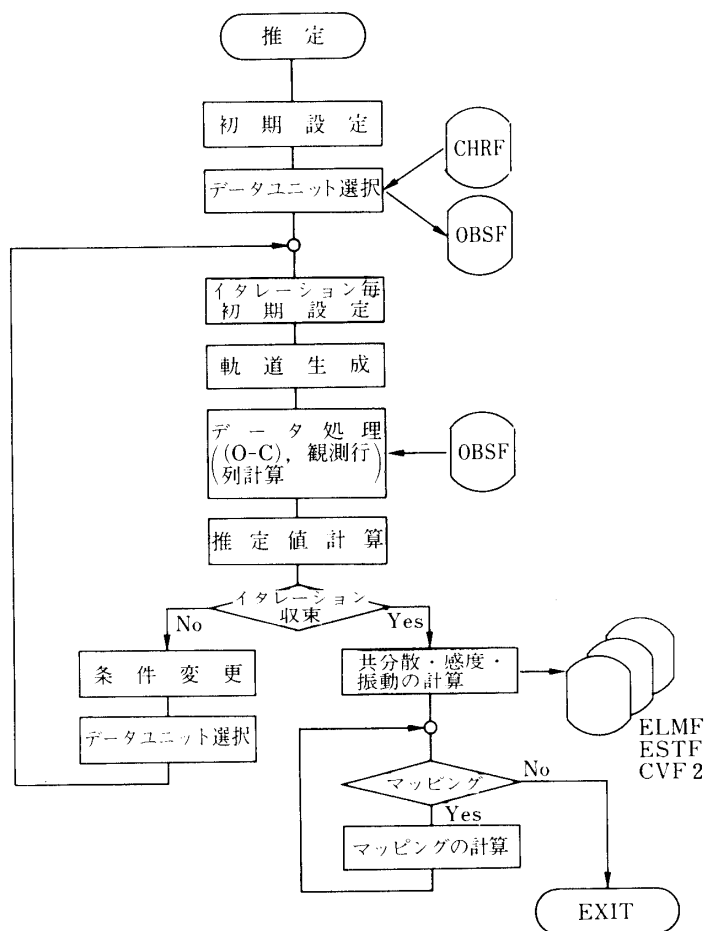


図 4.10 ISSOP-2 パラメタ推定モードの処理フロー



(c) 共分散伝播〔マッピング〕機能

あるエポックにおいて推定された軌道6要素と推定パラメタの事後共分散値を任意の他の時刻に伝播させて予測軌道6要素と予測共分散値を求める。軌道6要素の伝播は、シフトエポック機能と同一である。

(d) 感度・摂動行列の計算

感度行列および摂動行列を計算する。これらの行列は推定パラメタ/考慮パラメタ選択の判断基準を与える。感度行列，摂動行列は(c)と同様マッピングできて予測感度・摂動行列が計算される。

4.5.2 ISSOP-2の処理フロー

図4.8にISSOP-2のメインフローを示す。ISSOP-2はシフト・エポックモードとパラメタ推定モードを選択・実行できる。図4.9，図4.10にそれぞれシフト・エポックモードとパラメタ推定モードの処理フローを示す。共分散伝播はパラメタ推定が終了した後，実行を選択できる。

4.6 軌道予報プログラム (ISSOP-3) の機能

軌道予報プログラムISSOP-3の目的は，S/Cの軌道予報に必要な処理を行うことである。すなわち，S/Cの軌道生成，S/Cの可視情報の計算及びアンテナ予報データの作成を行う。

4.6.1 ISSOP-3の機能概要

ISSOP-3は次のような機能を持つ；

(a) S/Cの軌道生成

ある時刻でのS/C軌道6要素の入力値をもとに任意の期間，軌道生成を行い，積分のバックポイントから成るS/Cエフェメリスファイル(SCEF)とLPに出力する。軌道6要素

表4.7 加速度項 (ISSOP-3)

	加 速 度 項
1	天体の質点力(太陽・9惑星・月・ハレー彗星)による加速度
2	地球の非球対称成分による加速度(J項；10次，T/S次；10次)
3	太陽輻射圧による加速度(*)
4	大気抵抗力による加速度
5	一般相対論効果による加速度
6	瞬時マヌーバによる加速度
7	連続マヌーバによる加速度
8	微小力による加速度

(\*) 詳細モデルも使用できる。

表 4.8 数値積分法(ISSOP-3)

項目	方法
積分方式	Adams-Cowell の予測子-修正子法(11次)
ステップ幅	局所誤差制御法
出発値計算	二体近似値を修正子法で修正または Runge-Kutta 公式(8次)
不連続処理	加速度の不連続点および SOI 切り換え時
補間法	積分公式による補間

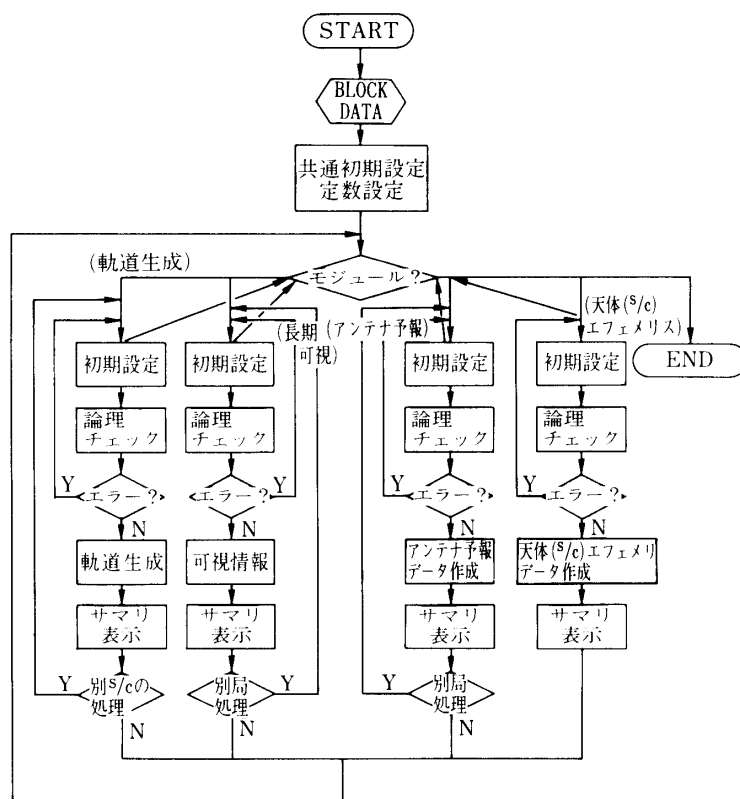


図 4.11 ISSOP-3 のメインフロー

の入力値はエレメントファイル (ELMF) を介して入力することも出来るので、軌道決定プログラム ISSOP-2 で推定された軌道 6 要素が入力可能である。軌道生成で選択できる加速度項および数値積分の方法を表 4.7、表 4.8 に示す。

#### (b) S/C の可視時間帯の計算

指定された観測局における S/C の入感時刻・消感時刻・最大仰角時刻とそれらの時刻での角度(方位角, 仰角), 1-way レンジ, 1-way レンジの時間変化率を計算し, 長期予報ファイル (LPRF) と LP に出力する。1 回のジョブの実行で単一局に対する上記処理を複数回行うことができるので, 複数局に関する可視情報が同時に得られる。

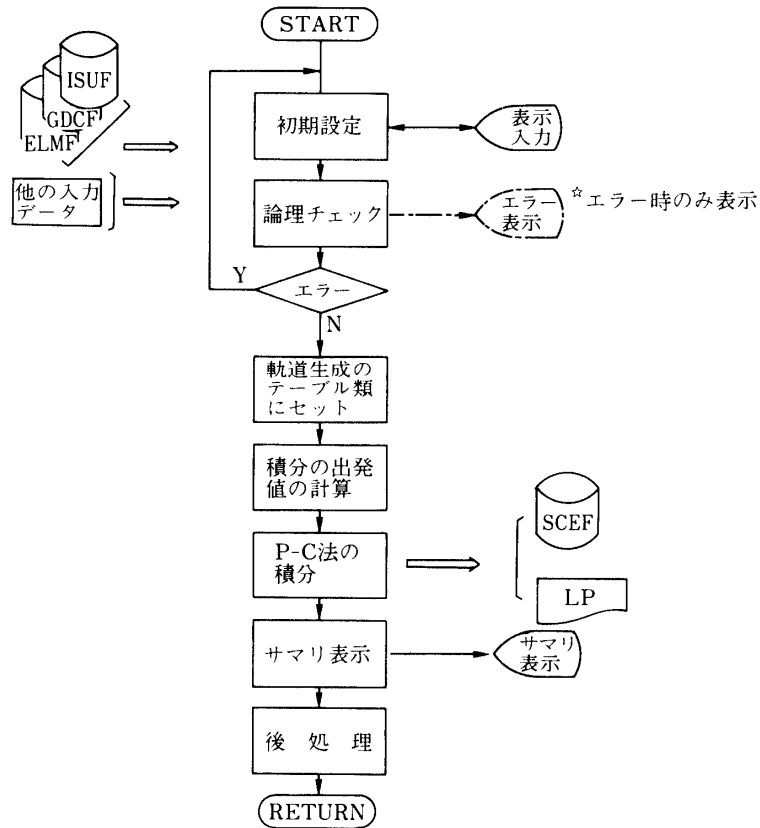


図 4.12 ISSOP-3 軌道生成モードの処理フロー

## (c) アンテナ角度予報データの作成

指定された観測局から S/C を望む角度（方位角，仰角；ダウンリンク），1-way レンジ（アップリンクとダウンリンク），1-way レンジの時間変化率（アップリンクとダウンリンク）を指定期間内の可視時間帯の各々に対して一定時間間隔で計算し，アンテナ予報ファイル (APRF) と LP に出力する。1 回のジョブの実行で単一局に対する上記処理を複数回行うことができるので，複数局に関する予報データが同時に得られる。

## (d) S/C (天体) エフェメリスデータ (STEF) の作成

指定された S/C あるいは天体のエフェメリス——一定時間毎の軌道 6 要素の値——を指定期間作成し，S/C エフェメリスファイル (STEF) に出力する。

## 4.6.2 ISSOP-3 の処理フロー

図 4.11 に ISSOP-3 のメインフローを示す。ISSOP-3 はそれぞれの機能に応じて軌道生成モード，可視情報作成モード，アンテナ予報データ作成モード，S/C エフェメリスファイル作成モードの 4 つのモードから成り，それらを選択・実行できる。図 4.12～図 4.15 に各モードの処理フローを示す。なお，可視情報作成モードの実行に先立って SCEF が作成されていなければならない。同様にアンテナ予報データ作成モードの実行には SCEF と LPRF が，そして S/C エフェメリス作成モードの実行には SCEF が必要である。

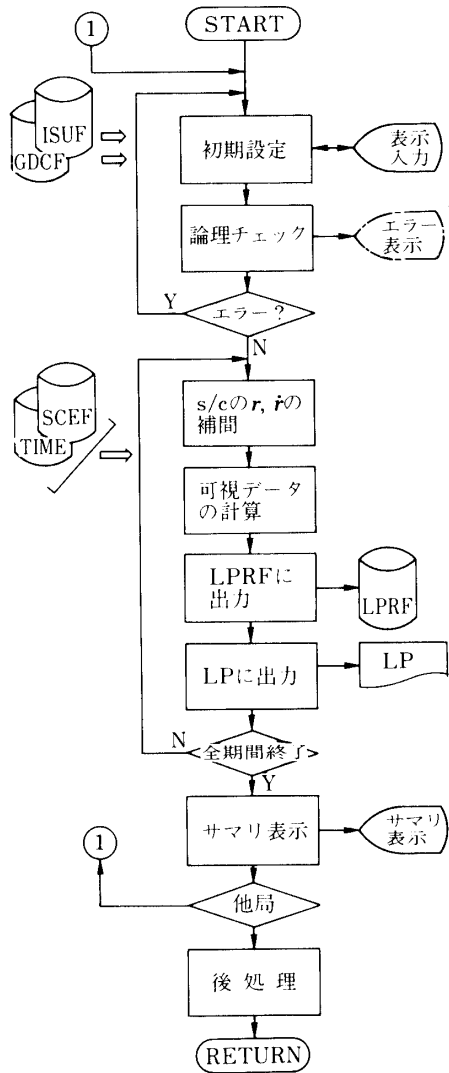


図 4.13 ISSOP-3 可視情報作成モードの処理フロー

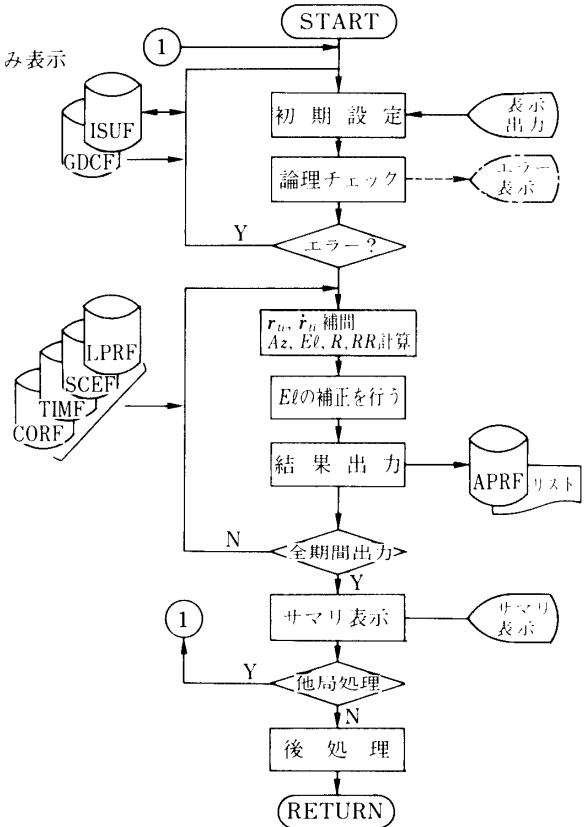


図 4.14 ISSOP-3 アンテナ予報データ作成モードの処理フロー

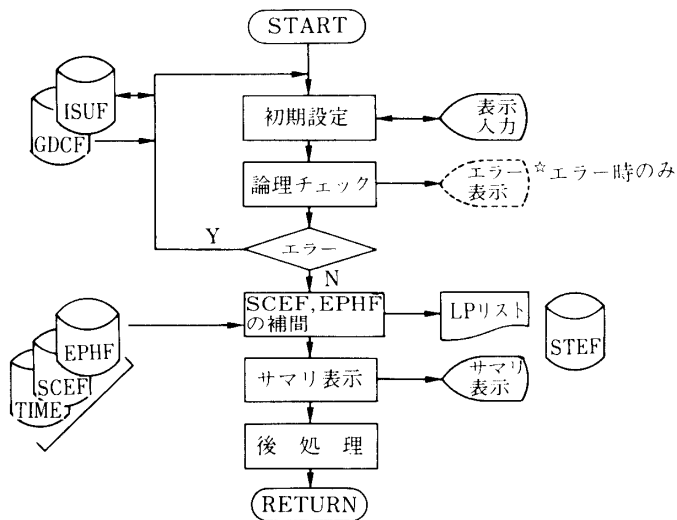


図 4.15 ISSOP-3 S/C エフェメリス作成モードの処理フロー

表 4.9 創成・初期化の対象となるファイルおよびプログラム名

略 称	フ ァ イ ル 名	創成・初期化 プログラム	使用プログラム名
OEDF	編集前ファイル	INOEDF	ISSOP-1
EDTF	編集ファイル	INEDTF	ISSOP-1
PRPF	前処理済ファイル	INPRPF	ISSOP-1, ISSOP-S
CHRF	時刻順編成ファイル	INCHRF	ISSOP-S, ISSOP-2
ELMF	エレメント・ファイル	INELMF	ISSOP-2, ISSOP-3
ESTF	推定結果ファイル	INESTF	ISSOP-2
CVF 2	事後共分散ファイル	INCVF 2	ISSOP-2
SCEF	S/C エフェメリス・ファイル	INSCEF	ISSOP-2, ISSOP-3
OBSF	観測データ・ワークファイル	INOBSF	ISSOP-2
APRF	アンテナ予報ファイル	INAPRF	ISSOP-3
LPRF	長期予報ファイル	INLPRF	ISSOP-3
STEF	S/C エフェメリス・ファイル	INSTEF	ISSOP-3
CNSF	定数ファイル	INCNSF	共通
MSGF	メッセージ・ファイル	INMSGF	共通
RUNF	ランナンバ・ファイル	INRUNF	共通
SLVF	アンテナスレーブ・ファイル	INSLVF	共通
TIMF	時系変換ファイル	INTIMF	共通

#### 4.7 ユーティリティ・プログラム (ISSOP-4)の機能

ユーティリティ・プログラム ISSOP-4 は、各種ユーティリティ群から構成される。これらは ISSOP-1～ISSOP-3 の各プログラムを円滑に機能させるためのツールである。

##### 4.7.1 ISSOP-4 の機能概要

ISSOP-4 は次のような機能を持つ；

(a) 各種ファイルの創成・初期化

ISSOP システムで用いられる各種ファイルの創成・初期化を行う。対象となるファイルを表 4.9 に示す。

(b) 各種ファイルのダンプ

ISSOP システムで用いられる各種ファイルのダンプを行い LP 出力する。対象となるファイルを表 4.10 に示す。

(c) 軌道生成データの作成

各観測局から送られてきてオンライン・ファイルに蓄積されている観測データを用

表4.10 ダンプの対象となるファイルおよびプログラム名

略 称	フ ァ イ ル 名	ダンプ・ プログラム	使用プログラム名
OEDF	編集前ファイル	DPOEDF	ISSOP-1
EDTF	編集ファイル	DPEDTF	ISSOP-1
PRPF	前処理済ファイル	DPPRPF	ISSOP-1, ISSOP-S
CHRF	時刻順編成ファイル	DPCHRF	ISSOP-S, ISSOP-2
ELMF	エレメント・ファイル	DPELMF	ISSOP-2, ISSOP-3
ESTF	推定結果ファイル	DPESTF	ISSOP-2
CVF 2	事後共分散ファイル	DPCVF 2	ISSOP-2
SCEF	S/C エフェメリス・ファイル	DPSCEF	ISSOP-2, ISSOP-3
OBSF	観測データ・ワークファイル	DPOBSF	ISSOP-2
APRF	アンテナ予報ファイル	DPAPRF	ISSOP-3
LPRF	長期予報ファイル	DPLPRF	ISSOP-3
STEF	S/C エフェメリス・ファイル	DPSTEF	ISSOP-3
CNSF	定数ファイル	DPCNSF	共通
EPHF	惑星エフェメリス・ファイル	DPEPHF 2, DPEPH18A	共通
RUNF	ランナンバ・ファイル	DPRUNF	共通
SLVF	アンテナスレーブ・ファイル	DPSLVF	共通
TIMF	時系変換ファイル	DPTIMF	共通

いて観測生データを作成し、編集前ファイル (OEDF) に出力する。

(d) 擬似観測データの作成

ISSOP-1の入力となる軌道生データの擬似データおよびISSOP-Sの入力となる編集済データの擬似データを作成する。これらのデータは、ISSOP-1, ISSOP-S, ISSOP-2の各プログラムの機能をチェック・テストするために用いられる。また、これらのデータを用いてミッション解析を行うことも出来る。

(e) 惑星・ハレー彗星エフェメリス・ファイルの作成

惑星・ハレー彗星のエフェメリスは現在、JPLから入手しているが、ISSOPシステムで使用できるようにデータのフォーマット変換を行って惑星エフェメリスファイル (EPHF) およびハレー彗星エフェメリスファイル (EPHF 2 H) を作成する。

(f) 時系変換ファイルの更新

(TAI-UTC), (UT 1-TAI), 極運動パラメタの等の時系変換パラメタは、毎月 BIH

(Bureau International de l'Heure)から発行されている。これらのパラメタは、ISSOPシステムにおいては極めて重要な役割を果たすので、時系変換ファイル(TIMF)を更新して最新データを蓄積しておく。

#### (g) 初期共分散ファイルの作成

パラメタ推定の入力となる初期共分散ファイル(CVF 1)を作成する。パラメタ推定では、初期共分散値は、軌道6要素の初期共分散およびその他のパラメタの初期共分散対角要素のみ入力すれば実際の運用には差しつかえないが、ミッション解析等で特に初期共分散の非対角要素も入力したい場合に、このツールを用いて初期共分散行列を作成する。

## 第5章 「さきがけ」「すいせい」の軌道決定評価

この章では、「さきがけ」「すいせい」の軌道決定評価を示す。

### 5.1 JPLとISASの軌道決定比較

「さきがけ」「すいせい」共に、打ち上げから10日間NASAのジェット推進研究所(JPL)の運用支援があり、NASAの深宇宙追跡管制ネットワーク(DSN)の各局(ゴールドストーン局、キャンベラ局、マドリッド局)で取得された追跡データを用いてJPLの軌道決定ソフトウェアODPで軌道決定を行い、ISSOPでの軌道決定値と比較・検討を行った。また、同一データ(JPLデータおよびISASデータ)を用いて両ソフトウェアで軌道決定を行い、ISSOPの性能評価を行った。更にISSOPの性能を詳細に見るために、あるデータについての内部計算の途中経過を比較している。

#### 5.1.1 内部計算値の比較

##### (a) 比較の目的

軌道決定は、ISSOPに入力された軌道観測データに対応して、観測データの計算値をISSOP内部で算出し、これら軌道観測データ及びその計算値に対して統計処理をほどこすことによって行なわれる。この内部計算で重要な役割を演じているのは時系変換、座標変換、light time equationの解の算出である。

ここでは、臼田局で取得された軌道観測データをISSOPに入力し、この入力データに対応した計算値がプログラム内で正しく計算されているかを確認した結果を示す。確認は、この計算値算出途上で計算された時系変換値、座標変換された局位値、light time equationの解をODP(JPLの軌道決定プログラム)での同じ計算値と比較し、同じ結果が得られているかどうかを見て判断した。

##### (b) 共通実行条件

ISSOPとODPの比較計算で合わせ得た共通実行条件を表5.1に示す。

##### (c) 比較ケース

比較は、図5.1のlight pathsに於いて、 $t_3(\text{UTC})$ を与えて、ET系での $t_3, t_2, t_1$ 及び各時刻での局位置、S/C位置を算出し、ODPの値と比較した。ケースは下記3ケースを行った。

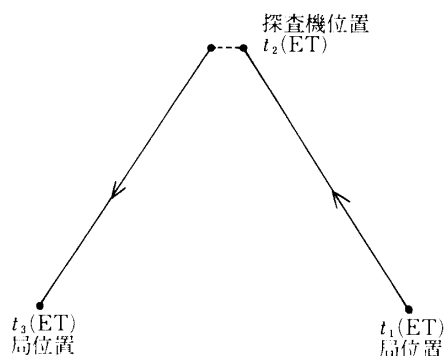


図 5.1 light paths

表 5.1 共通実行条件一覧

① 使用データ	
・ 探査機	: さきがけ
・ 観測局	: 臼田局
・ time tag	: 1985年7月1日 1時17分0秒(UTC)
② 軌道初期値	: ODP使用と同一のもの
③ 運動モデル	
・ 重力天体	: 8天体
・ 地球 OBL 効果	: 無し
・ 太陽輻射圧	: $\Gamma=0.65$
・ 相対論効果	: $\gamma=1.0$
④ 探査機諸元	
・ 質量	: 138.1 kg
・ 有効断面積	: 0.98 m <sup>2</sup>
⑤ データ補正	
・ トランスポンダ遅延時間補正	有り
・ 対流圏屈折補正	有り
・ 電離層屈折補正	無し
⑥ 天体エフェメリス	: DE 118
⑦ 太陽輻射流定数	: $1.01 \times 10^8$
⑧ 局位置	: C-7系使用
	ODPでは極運動考慮
	ISSOPでは無視している

## ケース① 時系変換, 座標変換の比較

入力	→	出力
時刻 $t_3(\text{UTC})$		時刻 $t_3(\text{ET})$
局位置 [地球中心 TOD-EQ]		恒星時 $\theta_g$ およびその時間微分 $\dot{\theta}_g$
		局位置 [地心, EME 50, 太陽中心 EME 50]



• ケース② down link light time solution の比較

入力 → 出力  
 時刻  $t_3$ (ET) 時刻  $t_2$ (ET)  
 S/C 位置  $r_2$

• ケース③ up link light time solution の比較

入力 → 出力  
 時刻  $t_2$ (ET) 時刻  $t_1$ (ET)

ケース①

初期設定で合わせたパラメータ

	ODP	ISSOP	差
時刻 $t_3$ (UTC)	'85年7月1日 1 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup>	同左	0.0
局位置(臼田局) X(km)	-3855.34837	-3855.34837	0.0
[地球中心] Y(km)	3427.44048	3427.44048	0.0
[Body-Fixed] Z(km)	3740.97321	3740.97321	0.0

結果一覧

	ODP	ISSOP	差
時刻 $t_3$ (ET) (sec)	120180555.184492	1120180555.184102	$3.9 \times 10^{-4}$
恒星時 $\theta$ (rad)	5.1974870409	5.1974870916	$5.0 \times 10^{-7}$
恒星時の 時間微分 $\dot{\theta}$ (rad/sec)	$7.292116745 \times 10^{-5}$	$7.292116819 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-8}$
局位置(臼田局) X(km)	1286.53553	1286.53519	
[地球中心] Y(km)	4998.92309	4498.92318	$\Delta R = 0.35\text{m}$
[EME 50] Z(km)	3736.51363	3736.51364	
局位置(臼田局) X(km)	22935344.21742	22935344.20580	
[太陽中心] Y(km)	-137936972.09292	-137936972.09440	$\Delta R = 11\text{m}$
[EME 50] Z(km)	-59806650.83457	-59806650.83525	

ケース②

初期設定で合わせたパラメータ

	ODP	ISSOP	差
時刻 $t_3$ (ET) (sec)	112018055.184492	112018055.184492	0.0

## 結果一覧

	ODP	ISSOP	差
時刻 $t_2$ (ET) (sec)	1120180186.239055	1120180186.239072	$-1.7 \times 10^{-5}$
S/C 位置 $X$ (km)	$1.0659857859485 \times 10^8$	$1.065985785949 \times 10^8$	} $\Delta R = 0.54$ m
[太陽中心] $Y$ (km)	$-7.237375476610 \times 10^7$	$-7.237375476562 \times 10^7$	
[EME 50] $Z$ (km)	$-2.921502324678 \times 10^7$	$-2.921502324656 \times 10^7$	
S/C 速度 $\dot{X}$ (km/s)	$2.153550536212 \times 10^1$	$2.153550536203 \times 10^1$	} $\Delta V = 1.5$ $\times 10^{-10}$ km/s
$\dot{Y}$ (km/s)	$2.170254084568 \times 10^1$	$2.170254084580 \times 10^1$	
$\dot{Z}$ (km/s)	$1.014386368566 \times 10^1$	$1.014386368566 \times 10^1$	

## ケース③

初期設定で合わせたパラメータ

	ODP	ISSOP	差
時刻 $t_2$ (ET) (sec)	1120180186.239055	1120180186.239055	0.0

## 結果一覧

	ODP	ISSOP	差
時刻 $t_1$ (ET) (sec)	1120179817.233210	1120179817.233193	$1.7 \times 10^{-5}$

(d) 比較結果

(e) 結果評価

## ・ケース①

時系変換値が ODP と  $3.9 \times 10^{-4}$  秒異っているが、これを速度 30 km/sec の探査機の位置誤差に変換すると約 11 m となる。探査機の位置精度が約 100 km であることを考慮すると、これは全く無視出来る値である。

又、局位置の座標変換差が多少出ているが、地球中心 EME 50 への変換の場合は、ODP と ISSOP で使用する恒星時の差がその原因であり、太陽中心 EME 50 の場合は、上記時変換値差がその原因である。

## ・ケース②

$t_2$  で  $1.7 \times 10^{-5}$  秒の差が生じているが、これを探査機位置誤差に変換すると約 0.5 m である。これもケース①の場合と同様、全く無視出来る値である。

## ・ケース③

$t_1$  でケース②と同じ結果が出たが、ケース②と同様無視出来る値である。

・評価

以上の結果から, ISSOP と ODP の内部計算値の比較差はほとんど一致しており, 軌道決定への影響は問題ないと思われる。

5.1.2 JPL データによる ISSOP の軌道決定評価

(1) JPL データによる「さきがけ」の軌道決定

JPL データを用いて第1回軌道制御 ('85 1月11日) 以前 [Pre-TCM] と以後 [Post-TCM] の2点で軌道決定を行い, JPL の最良軌道決定解との比較を行った。入力条件および実行ケースを表5.2, 表5.3に示す。また軌道決定結果を表5.4に, (O-C)のRMS値を表5.5に示す。両プログラムの軌道決定値の位置・速度の差は極めて小さく, それらの値はそれぞれの統計誤差の値と同程度である。したがって, 両者の軌道決定値は一致していると思われ, 差がつかえない。(O-C)の値も, 設計値, すなわち, 目標精度がレンジで10m, レンジレートで1mm/sであることを考えると, 良く一致している。なおPre-TCM

表5.2 実行条件: JPL データを用いた「さきがけ」の軌道決定

項目	条件
S/C	重量=134.15 kg 有効断面積=0.98 m <sup>2</sup>
推定アルゴリズム	Square-Root フィルタ
初期共分散	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 1,000\text{km}</math></li> <li>• <math>\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 10\text{km/s}</math></li> </ul>
観測量の補正	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 局内遅延 : 5005~5010 nsec</li> <li>• S/C トラポン遅延 : 565 nsec</li> <li>• アンテナ・オフセット</li> <li>• 対流圏効果</li> </ul>
運動モデル	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 考慮天体 : 水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 月, 太陽</li> <li>• 地球OBL : J項=4次, T/S項=4次</li> <li>• 太陽輻射圧 : <math>\Gamma=0.28</math> [SRP 推定時は初期値]</li> <li>• 一般相対論効果 : <math>\gamma=1.0</math></li> </ul>

表5.3 実行ケース: JPL データを用いた「さきがけ」の軌道決定

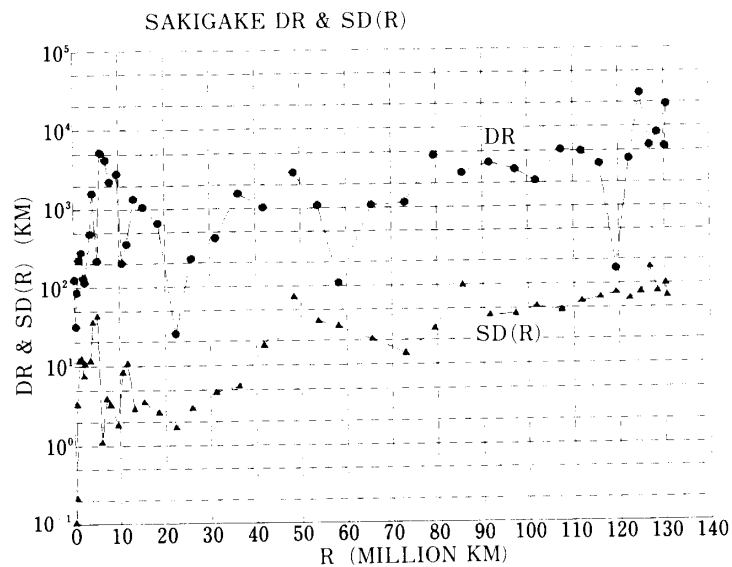
ケース	推定パラメタ	エポック	使用データ期間(UTC)		個数
PRE-TCM	軌道6要素	'85.17 19h 31m 32s	GSRAN	'85.1.7 20h 22m 0s~1.7 20h 52m 0s	135
			PLOP	'85.1.7 23h 03m 0s~1.8 16h 22m 0s	115
			F2	'85.1.7 23h 03m 0s~1.8 16h 22m 30s	579
POST-TCM	軌道6要素 + 太陽輻射圧	'85.1.11 5h 27m 0s	PLOP	'85.1.11 11h 40m 30s~1.16 0h 55m 30s	347
			F2	'85.1.11 11h 40m 0s~1.16 0h 55m 30s	1279

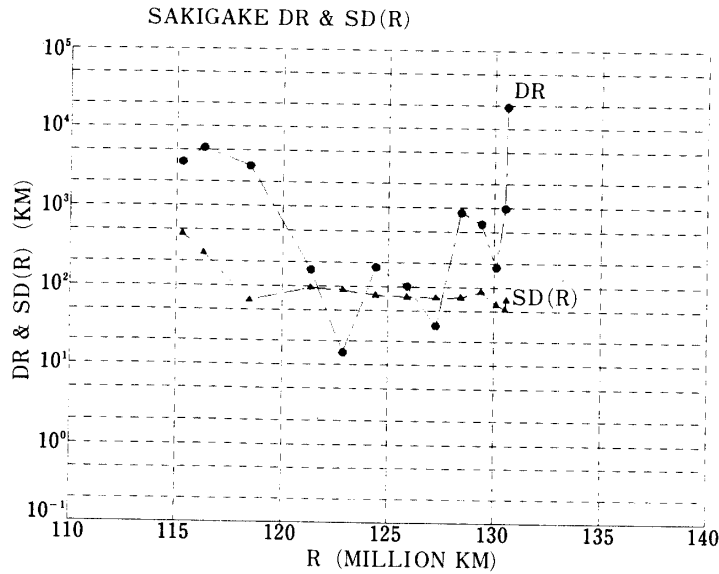
表5.4 軌道決定結果：JPL データを用いた「さきがけ」の軌道決定

ケース	推定値		推定値の差(ISSOP-ODP)		誤差標準偏差(ISSOP-ODP)	
PRE-TCM [地球中心]	$R$	6621.973 km	$\Delta R$	-0.230 km	$\sigma_R$	0.072 km
	$V$	11.30630 km/s	$\Delta V$	$-2.25 \times 10^{-4}$ km/s	$\sigma_V$	$7.84 \times 10^{-5}$ km/s
POST-TCM [太陽中心]	$R$	$1.463 \times 10^8$ km	$\Delta R$	-2.809 km	$\sigma_R$	2.773 km
	$V$	29.00004 km/s	$\Delta V$	$-1.35 \times 10^{-5}$ km/s	$\sigma_V$	$1.73 \times 10^{-5}$ km/s
	$Gr$	1.625	$\Delta Gr$	$-1.24 \times 10^{-2}$	$\sigma_{Gr}$	$1.97 \times 10^{-2}$

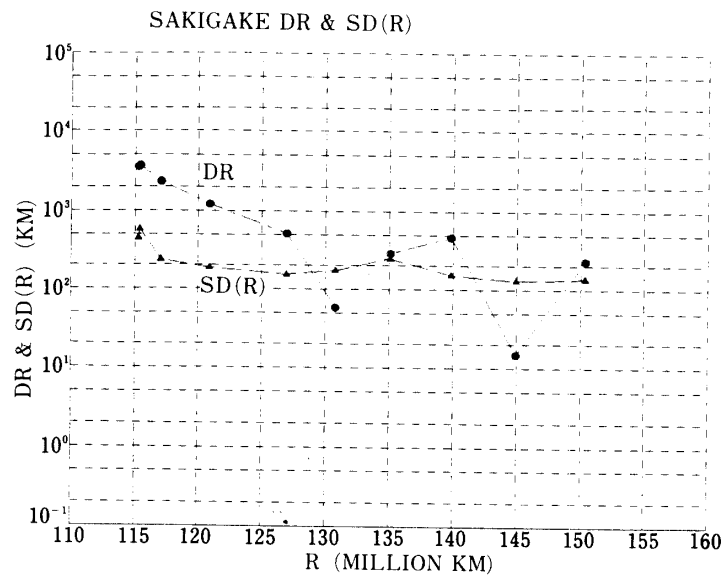
表5.5 (O-C)のRMS値：  
JPL データを用いた「さきがけ」の軌道決定

ケース	種類	(O-C)のRMS値	
		ISSOP	ODP
PRE-TCM	GSRAN	3.74 m	0.85 m
	PLOP	5.76 m	~3 m
	F 2	1.26 cm/s	1.2 cm/s
POST-TCM	PLOP	4.6 m	~3.8 m
	F 2	~3.3 mm/s	~3.3 mm/s

図 5.2(a)「さきがけ」の位置軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta R$  および位置誤差標準偏差  $\sigma_R$  : '85.1.8~'85.9.4



(b)「さきがけ」の位置軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta R$  および位置誤差標準偏差  $\sigma_R$ : '85.9.11~'85.12.18



(c)「さきがけ」の位置軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta R$  および位置誤差標準偏差  $\sigma_R$ : '85.12.25~'86.3.26

のレンジレートの(O-C) が大きいのは, S/Cのスピンのによるドップラーシフト量の変動(アンテナはS/Cスピン軸から離れた位置にある)の効果が著しいためである。

(2) JPL データによる「すいせい」の軌道決定

「さきがけ」と同様, 地球近傍での「すいせい」の軌道決定結果の比較を行った。入力条件, 軌道決定結果および(O-C)のRMS値を表5.6~表5.9に示す。

表 5.6 実行条件：JPL データを用いた「すいせい」の軌道決定

項 目	条 件
S/C	重量=139.00 kg 有効断面積=0.98m <sup>2</sup>
推定アルゴリズム	Square-Root フィルタ
初期共分散	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 100,000\text{km}</math></li> <li>• <math>\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 100\text{km/s}</math></li> </ul>
観測量の補正	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 局内遅延 : 5005~5010 nsec</li> <li>• S/C トラポン遅延 : 525 nsec</li> <li>• アンテナ・オフセット</li> <li>• 対流圏効果</li> </ul>
運動モデル	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 考慮天体 : 水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 月, 太陽</li> <li>• 地球OBL : J項=4次, T/S項=4次</li> <li>• 太陽輻射圧 : <math>\Gamma=0.28</math></li> <li>• 一般相対論効果 : <math>\gamma=1.0</math></li> </ul>

表 5.7 実行ケース：JPL データを用いた「すいせい」の軌道決定

推定パラメタ	エポック	使用データ期間(UTC)		個数	重み
軌道6要素	'85.1 7 19h31m32s	PLOP	'85.1.7 23 h 03 m 0 s~1.8 16 h 22 m 0 s	115	100 m
		F 2	'85.1 7 23 h 03 m 0 s~1.8 16 h 22 m 30 s	579	3.0 mm/s

表 5.8 軌道決定結果：JPL データを用いた「すいせい」の軌道決定

推 定 値		推定値の差(ISSOP-ODP)		誤差標準偏差(ISSOP-ODP)	
$R$	6606.128 km	$\Delta R$	1.846 km	$\sigma_R$	0.257 km
$V$	11.38380 km/s	$\Delta V$	$1.75 \times 10^{-3}\text{km/s}$	$\sigma_V$	$2.93 \times 10^{-4}\text{km/s}$

表 5.9 (O-C)の RMS 値  
JPL データを用いた「すいせい」の軌道決定

種 類	(O-C)の RMS 値	
	ISSOP	ODP
GSRAN	246.7 m	6.7 m
F 2	2.32 cm/s	2.30 cm/s

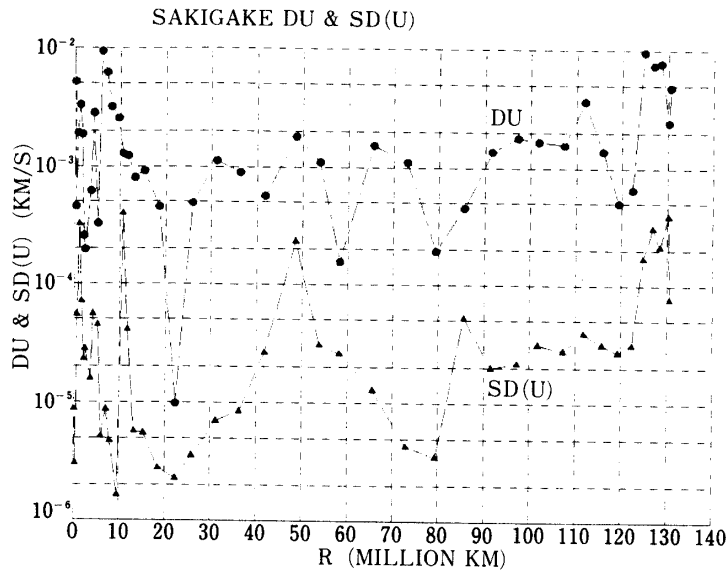
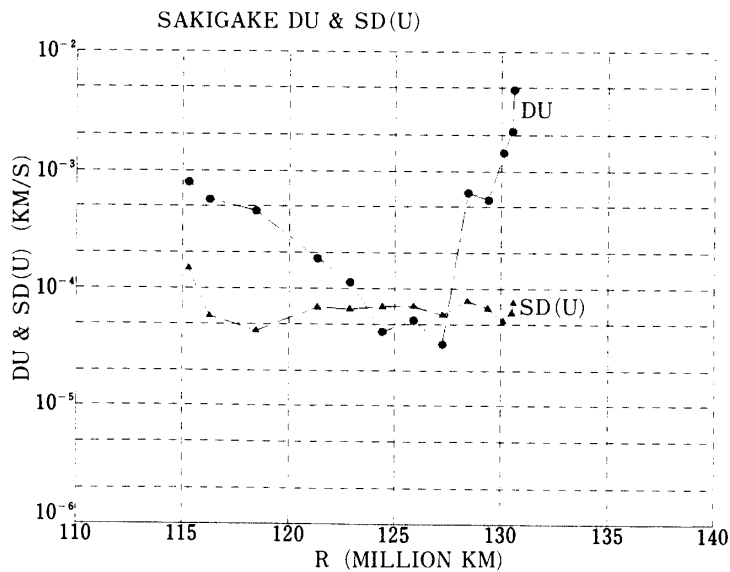


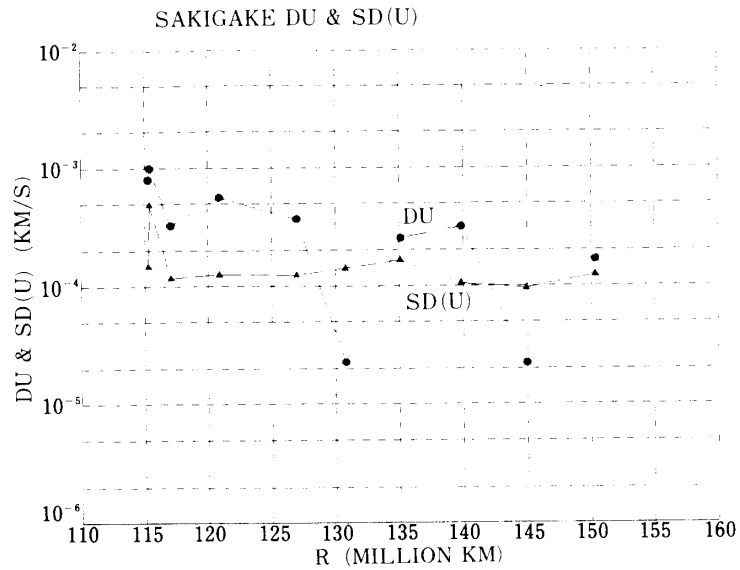
図 5.3 (a)「さきがけ」の速度軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta V$  および速度誤差標準偏差  $\sigma_v$ : '85.1.8~'85.9.4



(b)「さきがけ」の速度軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta V$  および速度誤差標準偏差  $\sigma_v$ : '85.9.11~'85.12.18

### 5.1.3 ISAS データによる ISSOP の軌道決定評価

ISAS データによる ISSOP の軌道決定評価は, '85 7月から10月までの白田局追跡データ, すなわち巡航フェーズのデータを用いて行われた。実行条件および実行ケースを表 5.10, 表 5.11 に示す。また ODP の軌道決定結果との比較を表 5.12 に示す。



(c)「さきがけ」の速度軌道決定値の(推定値-予報値) $\Delta V$ および速度誤差標準偏差  $\sigma_v$ : '85.12.25~'86.3.12

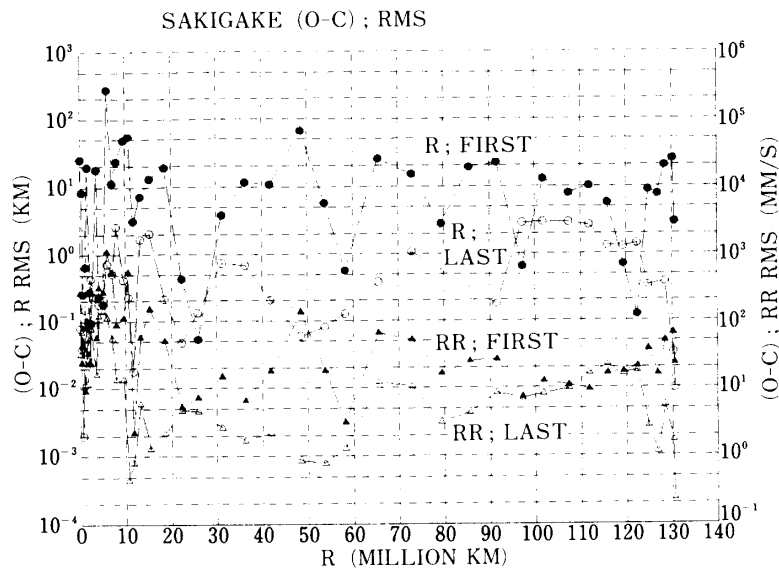


図 5.4 (a)「さきがけ」のレンジ、レンジレートの(O-C)のRMS値: '85.1.8~'85.9.4

## 5.2 「さきがけ」「すいせい」の運用状況

### 5.2.1 「さきがけ」の運用状況

「さきがけ」は1985年1月7日19時26分(UTC)に打ち上げられ、太陽の回りを約4/3周して1986年3月11日13時18分(UTC)、ハレー彗星から約699万kmの距離を通過した。「さきがけ」は地球から見た場合、まず地球から遠ざかっていき、その後地球に近づ



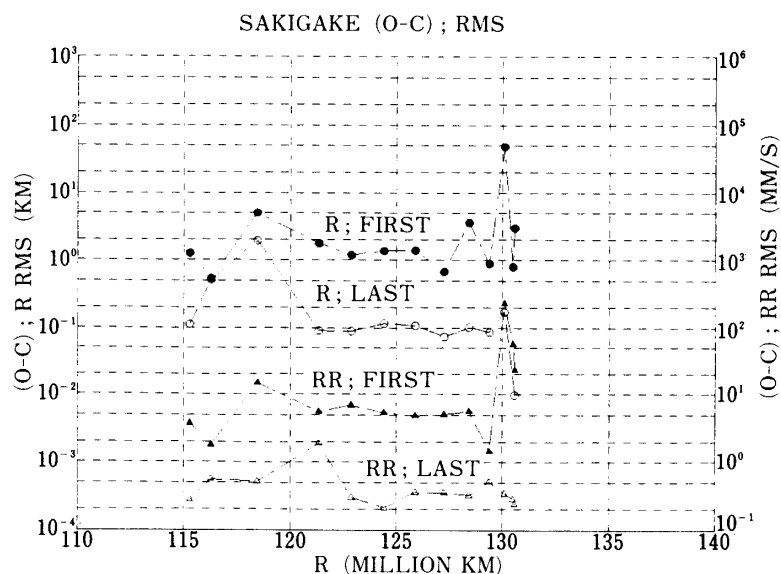


図 5.4 (b)「さきがけ」のレンジ, レンジレートの (O-C) の RMS 値: '85.9.11~'85.12.18

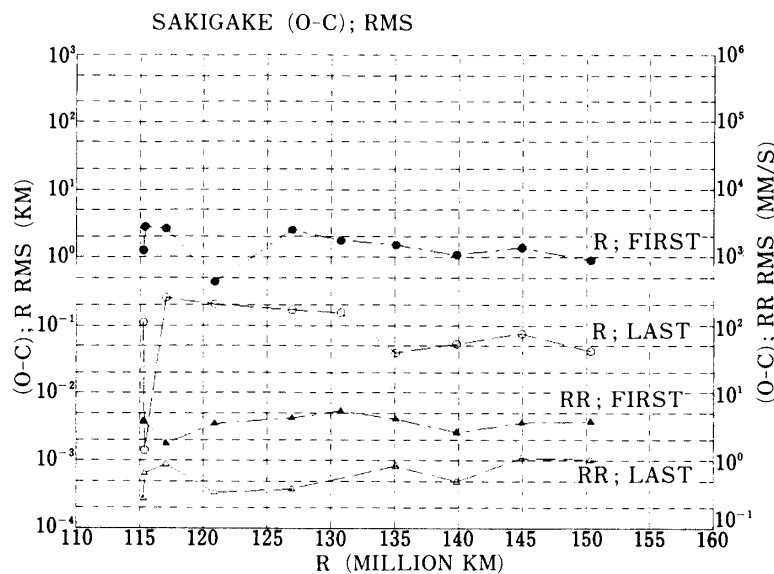


図 5.4 (c)「さきがけ」のレンジ, レンジレートの (O-C) の RMS 値: '85.12.25~'86.3.12

いて、最後に再び地球から遠ざかってハレー彗星に会合する、という3つのフェーズをとる。それぞれの時期および距離は以下の通りである；

- ① 打ち上げ( $\gamma$ )~'85.9/上旬;  $0.0 \sim 1.306 \times 10^8$  km
- ② '85.9/上旬~'85.12/中旬 ;  $1.306 \times 10^8 \sim 1.153 \times 10^8$  km
- ③ '85.12/中旬~ハレー・エンカウンタ;  $1.153 \times 10^8 \sim 1.504 \times 10^8$  km

「さきがけ」はハレー・エンカウンタまでの間、1985年1月11日と1985年2月14日の2

回、軌道修正を行っている。

軌道決定の頻度は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{打ち上げ}(\gamma)\sim\gamma+10\text{日}; \text{毎日} \\ \gamma+10\text{日}\sim\gamma+1\text{ヵ月}; 1\sim 2\text{回/週} \\ \gamma+1\text{ヵ月} \sim \\ \text{ハレー・エンカウンタ} \end{array} \right\}; \sim 1\text{回/週}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{その他} \\ \phantom{\text{その他}} \end{array} \right\}; \sim 1\text{回/2週}$$

である。使用データ期間は、定常運用の場合3~4週間としているが、軌道・姿勢制御のためのマヌーバがあればそれ以降のデータを使用して軌道決定を行っている。すなわち、マヌーバを間にはさんだ軌道決定は行っていない。使用されたデータ・タイプは、

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma\sim\gamma+3\text{日}; \text{臼田局取得のレンジ, レンジレート, 角度(方位角, 仰角)} \\ \gamma+3\text{日以降}; \text{臼田局取得のレンジ, レンジレート} \end{array} \right.$$

データに付加された $\sigma$ 値は、

$$\text{レンジ} \quad ; \sigma_R = 100\sim 400\text{ m (往復)}$$

$$\text{レンジレート} ; \sigma_{RR} = 1\text{ mm/s (往復)}$$

$$\text{方位角} \quad ; \sigma_{AZ} = 1/1000^\circ \sim 4/1000^\circ$$

$$\text{仰角} \quad ; \sigma_{El} = 1/1000^\circ \sim 3/1000^\circ$$

レンジレートのドップラー・シフト量F2を算出する際のカウント時間 $T_c$ は、

$$\gamma\sim\gamma+10\text{日}; T_c = 60\text{ sec}$$

$$\gamma+10\text{日以降}; T_c = 300\text{ sec}$$

である。推定フィルタは全期間にわたってベイジアン・フィルタを採用している。入力軌道6要素は、前回軌道決定値を今回軌道決定を行うエポックまでシフトエポックして作られる。

図5.2, 図5.3に軌道6要素の推定値と入力値の差 $\Delta R, \Delta V$ および位置・速度誤差標準偏差 $\sigma_R, \sigma_V$ を示す。 $\Delta R, \Delta V$ は、定性的には軌道6要素の予報値の誤差をあらわすと言える。推定パラメタは、

$$\gamma\sim' 85.7/24 \quad ; \text{軌道6要素のみ}$$

$$7/24\sim' 85.9/4 \quad ; \text{軌道6要素+微小力}$$

$$9/4\text{以降} \quad ; \text{軌道6要素+タイミング・バイアス}$$

としている。7月24日以降の軌道決定の推定パラメタに微小力、タイミング・バイアスを加えたのは、図5.2(a), 図5.3(a)に示すように、打ち上げ以来軌道決定値が徐々にデータにフィットしなくなる傾向を示したためである。図5.4に、各軌道決定で用いられたデータユニットのうちでレンジおよびレンジレートのことを各々1個ずつ取り出し、それらのデータの初回および最終イタレーションの(O-C)のRMSをプロットしたものを示すが、打ち上げ以来、他のパラメタも共に推定するまで軌道決定値がデータにフィットしなくなっていく傾向が見られる。表5.13に微小力の推定値を示す。微小力の大きさおよび向きは一定せず、データにも良くフィットしていない(図5.2(a), 図5.3(a)を見よ)。特

表 5.10 実行条件：ISAS データを用いた「さきがけ」の軌道決定

項目	条件
S/C	重量=134.15 kg 有効断面積=0.98 m <sup>2</sup>
推定アルゴリズム	Square-Root フィルタ
初期共分散	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 100,000 \text{ km}</math></li> <li>• <math>\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 100 \text{ km/s}</math></li> </ul>
観測量の補正	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 局内遅延 : 5005~5010 nsec</li> <li>• S/C トラポン遅延: 565 nsec</li> <li>• 対流圏効果</li> </ul>
運動モデル	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 考慮天体 : 水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 月, 太陽</li> <li>• 太陽輻射圧 : <math>\Gamma=0.63</math></li> <li>• 一般相対論効果: <math>\gamma=1.0</math></li> </ul>

表 5.11 実行ケース：ISAS データを用いた「さきがけ」の軌道決定

ケース	推定パラメタ	エポック	使用データ期間(UTC)		個数
1	軌道 6 要素	'85.7.17 0 h 0 m 0 s	PLOP	'85.7.2 1 h 43 m 41 s~7.31 1 h 40 m 4 s	26
			F 2	'85.7.1 1 h 17 m 30 s~7.31 4 h 32 m 30 s	732
2	軌道 6 要素 タイミング・ バイアス	'85.7.17 0 h 0 m 0 s	PLOP	'85.7.2 1 h 43 m 41 s~7.31 1 h 40 m 4 s	26
			F 2	'85.7.1 1 h 17 m 30 s~7.31 4 h 32 m 30 s	725
3	軌道 6 要素 タイミング・ バイアス	'85.8.14 0 h 0 m 0 s	PLOP	'85.8.2 0 h 20 m 47 s~8.29 0 h 27 m 51 s	40
			F 2	'85.7.31 23 h 23 m 50 s~8.28 4 h 32 m 30 s	662
4	軌道 6 要素 タイミング・ バイアス	'85.7.17 0 h 0 m 0 s	PLOP	'85.7.24 0 h 27 m 8 s~9.30 21 h 14 m 37 s	87
			F 2	'85.7. 1 1 h 17 m 30 s~9.29 1 h 42 m 30 s	2164

に z 成分の符号・大きさが一定していないのは，この原因がガス・リークに由来するものではないことを示している。タイミング・バイアス推定以降，軌道決定値はデータに良くフィットしている(図 5.2(b)(c)，図 5.3(b)(c)を見よ。これらの差は 1 週間予測ではなく 2 週間予測した値を入力値としていることにも留意されたい)。図 5.5 にタイミング・バイアスの推定値を示す。9 月末までは，タイミング・バイアスの推定値は~2 sec，10 月初旬~12 月中旬までは~1 sec，それ以降は~0 sec となっているが，その原因は，1 つは時系変換データ (UT 1-TAI) の値が 1 sec 違っていたためである。これは '85 年 10 月 1 日に修正を施したため，それ以降タイミング・バイアス値は 1 sec に減少している。残りの 1 sec はタイムタグの誤りで，これは 12 月中旬に改修された。それ以降もわずかながらタイミング・バイアスが存在するのは，主な原因としては，BIH から入手される (UT 1-TAI)

表 5.12 軌道決定結果：ISAS データを用いた「さきがけ」の軌道決定

ケース	推定値 (ISSOP)		推定値の差 (ISSOP-ODP)		誤差標準偏差	
1	<i>R</i>	$1.36666431715 \times 10^8 \text{km}$	$\Delta R$	64.568km	$\sigma_R$	40.636km
	<i>V</i>	$3.1157384558 \times 10^1 \text{km/s}$	$\Delta V$	$2.47 \times 10^{-4} \text{km/s}$	$\sigma_V$	$4.97 \times 10^{-5} \text{km/s}$
2	<i>R</i>	$1.36666647145 \times 10^8 \text{km}$	$\Delta R$	367.412km	$\sigma_R$	42.046km
	<i>V</i>	$3.11573897486 \times 10^1 \text{km/s}$	$\Delta V$	$1.66 \times 10^{-5} \text{km/s}$	$\sigma_V$	$4.97 \times 10^{-5} \text{km/s}$
	<i>TB</i>	0.95419619485541sec	$\Delta TB$	$1.0 \times 10^{-2} \text{sec}$	$\sigma_{TB}$	$1.43 \times 10^{-3} \text{sec}$
3	<i>R</i>	$1.44062712597 \times 10^8 \text{km}$	$\Delta R$	441.493km	$\sigma_R$	33.680km
	<i>V</i>	$2.95139445998 \times 10^1 \text{km/s}$	$\Delta V$	$8.95 \times 10^{-5} \text{km/s}$	$\sigma_V$	$4.31 \times 10^{-5} \text{km/s}$
	<i>TB</i>	0.97261378773674sec	$\Delta TB$	$1.1 \times 10^{-2} \text{sec}$	$\sigma_{TB}$	$1.77 \times 10^{-3} \text{sec}$
4	<i>R</i>	$1.36666656106 \times 10^8 \text{km}$	$\Delta R$	134.855km	$\sigma_R$	22.413km
	<i>V</i>	$3.11573970366 \times 10^1 \text{km/s}$	$\Delta V$	$1.19 \times 10^{-4} \text{km/s}$	$\sigma_V$	$7.16 \times 10^{-6} \text{km/s}$
	<i>TB</i>	1.0065072083683sec	$\Delta TB$	$1.1 \times 10^{-2} \text{sec}$	$\sigma_{TB}$	$1.57 \times 10^{-3} \text{sec}$

表 5.13 「さきがけ」の微小力推定値

NO	EPOCH(0 HUTC)	使用データ期間(UTC)	微小力(kg/s <sup>2</sup> ) [EME 50]	
1	'85.7.31	'85.6.31 1 H 18 M ~ 7.31 4 H 31 M	<i>a<sub>x</sub></i>	$-8.8004573847206 \times 10^{-10}$
			<i>a<sub>y</sub></i>	$4.1126999327871 \times 10^{11}$
			<i>a<sub>z</sub></i>	$1.0201561479094 \times 10^{-9}$
2	'85.8.7	'85.7.13 0 H 49 M ~ 8.7 0 H 51 M	<i>a<sub>x</sub></i>	$-9.3582876731580 \times 10^{-10}$
			<i>a<sub>y</sub></i>	$1.6037458158463 \times 10^{-9}$
			<i>a<sub>z</sub></i>	$-2.5093560745018 \times 10^{-9}$
3	'85.8.14	'85.7.25 0 H 3 M ~ 8.15 4 H 33 M	<i>a<sub>x</sub></i>	$-9.5823361734579 \times 10^{-10}$
			<i>a<sub>y</sub></i>	$2.3510015249636 \times 10^{-10}$
			<i>a<sub>z</sub></i>	$1.2842798309958 \times 10^{-10}$
4	'85.8.28	'85.8.8 0 H 34 M ~ 8.28 4 H 33 M	<i>a<sub>x</sub></i>	$-1.0538428479881 \times 10^{-9}$
			<i>a<sub>y</sub></i>	$-1.3775249127134 \times 10^{-9}$
			<i>a<sub>z</sub></i>	$2.3789913726872 \times 10^{-9}$

の値の実測値が軌道決定時に間に合わず(ほぼ2ヵ月遅れ), 予測値で代用している事による。このずれは経度方向の局位置のずれと等価であるので, 深宇宙軌道決定のような地球から遠く離れたS/Cを扱う場合には深刻な問題となる。他の原因としては, 運動モデルのずれや局位置のずれ等が考えられる。

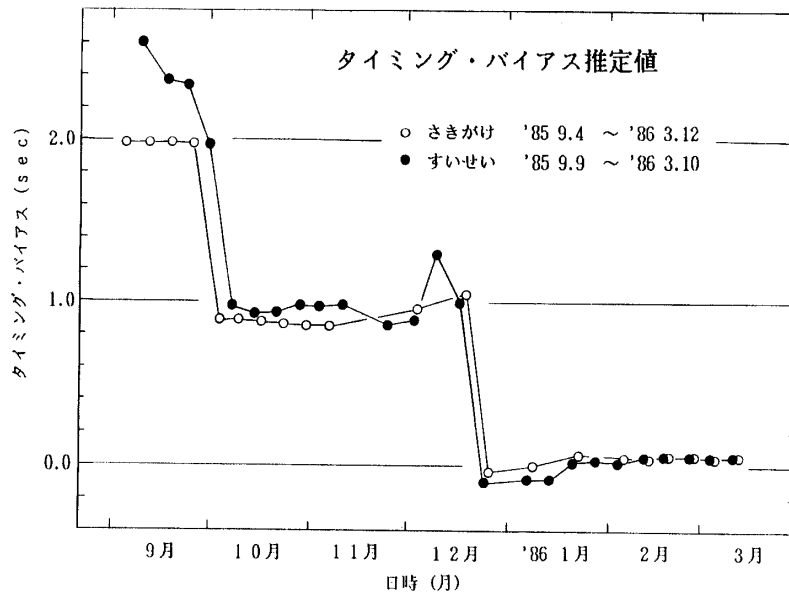


図 5.5 「さきがけ」「すいせい」のタイミング・バイアス推定値

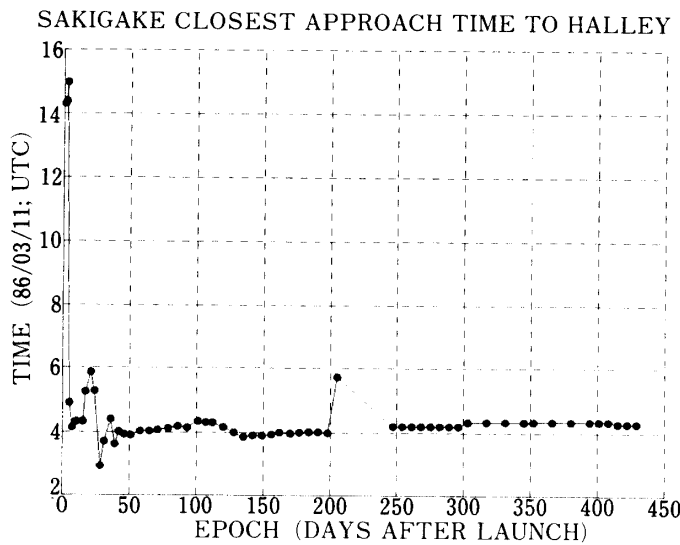


図 5.6 「さきがけ」のハレー彗星への最接近時刻

図 5.6, 図 5.7 に, ハレー彗星への最接近時刻および最接近距離を示す。「さきがけ」は, '85 1/11 (打ち上げから 4 日目) と 2/14 (打ち上げから 38 日目) に軌道制御を行っている。軌道に決定的な影響を与えたのは第 1 回目の軌道制御で, 軌道制御前の値は,

最接近距離; '86 3 月 11 日 14~15 時 (UTC)

最接近距離; 756~760 万 km

一方, 軌道制御後の値は,

最接近時刻; '86 3 月 11 日 3.5~4.5 時 (UTC)

最接近距離; ~700 万 km

SAKIGAKE CLOSEST APPROACH DISTANCE TO HALLEY

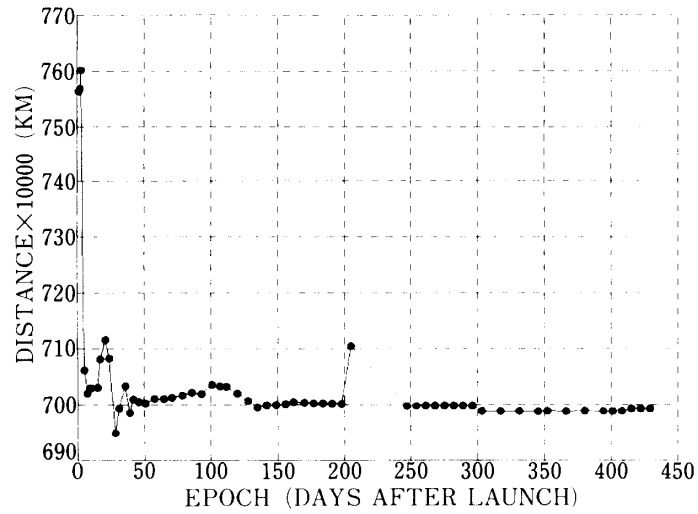


図 5.7 「さきがけ」のハレー彗星への最接近距離

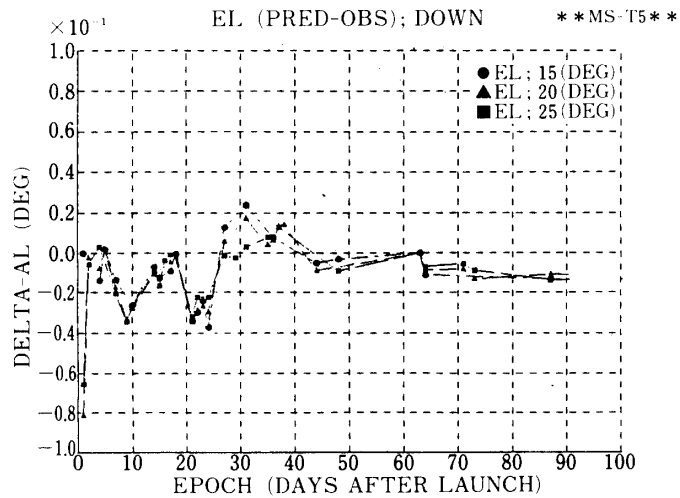
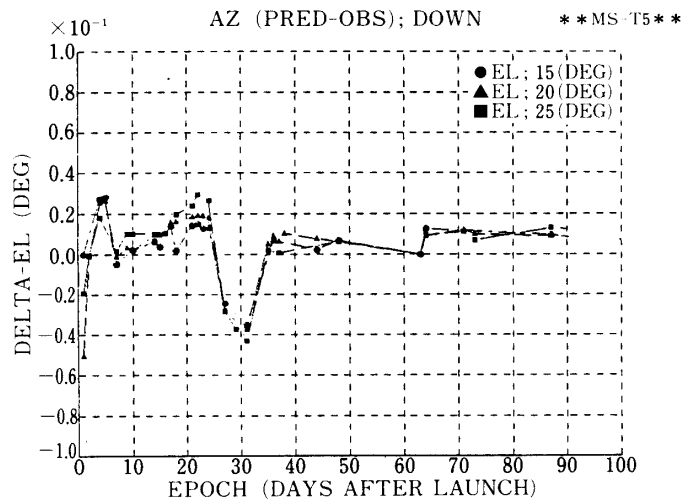


図 5.8 「さきがけ」アンテナ角度の(実測値-予報値)

と一定している。

図5.8に、打ち上げから90日間('854/初旬まで)、臼田局で「さきがけ」をプログラム追尾した時のアンテナ角度の予報値と実測値の差を示す。打ち上げ初期と'851月末~2月上旬(25~35日)を除いて、その差は $1/100^\circ \sim 2/100^\circ$ であり、それ以降はもっと小さくなっている。アンテナ捕捉ビーム幅は $14/100^\circ$ であるので、十分な軌道決定精度が得られていることがわかる。'851月末~2月上旬のずれは、レンジング測距装置の故障により、レンジレートデータのみで軌道決定を行っていることによる。当然の事であるが、レンジレートデータのみによる軌道決定では十分な軌道決定精度が得られない。

### 5.2.2 「すいせい」の運用状況

「すいせい」は1985年8月18日23時33分(UTC)に打ち上げられ、太陽の回りを約2/3周して1986年3月8日22時6分(UTC)、ハレー彗星から約15万1千kmの距離に最接近した。「すいせい」は地球から見た場合、「さきがけ」とは違って打ち上げ以降地球から徐々に遠ざかっていってハレー彗星に会合する。「すいせい」はハレー・エンカウンタまでの間、1985年11月14日に軌道修正を行っている。

軌道決定の頻度は、

打ち上げ( $\gamma$ )~ $\gamma+5$ 日; 毎日  
 $\gamma+5$ 日以降 ; ~1回/週

である。使用データ期間およびデータの取扱いは「さきがけ」と同様である。使用されたデータ・タイプは、

$\gamma \sim \gamma+2$ 日; 臼田尾取得のレンジ, レンジレート, 角度(方位角, 仰角)  
 $\gamma+2$ 日以降; 臼田局取得のレンジ, レンジレート

データに付加された $\sigma$ 値は、

レンジ ;  $\sigma_R = 40 \sim 400$  m(往復)

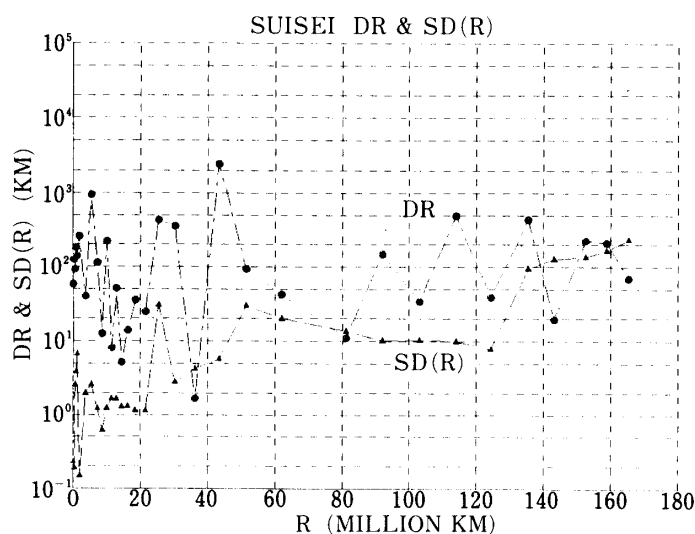


図 5.9 「すいせい」の位置軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta R$  および位置誤差標準偏差  $\sigma_R$

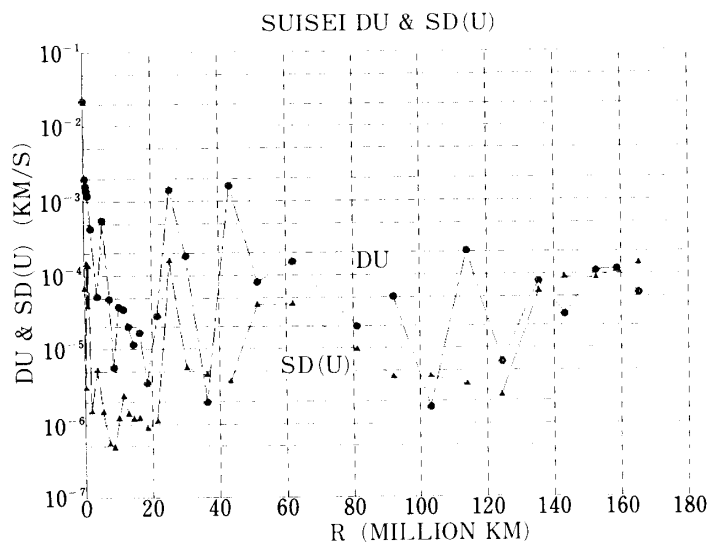


図 5.10 「すいせい」の速度軌道決定値の(推定値-予報値)  $\Delta V$  および速度誤差標準偏差  $\sigma_v$

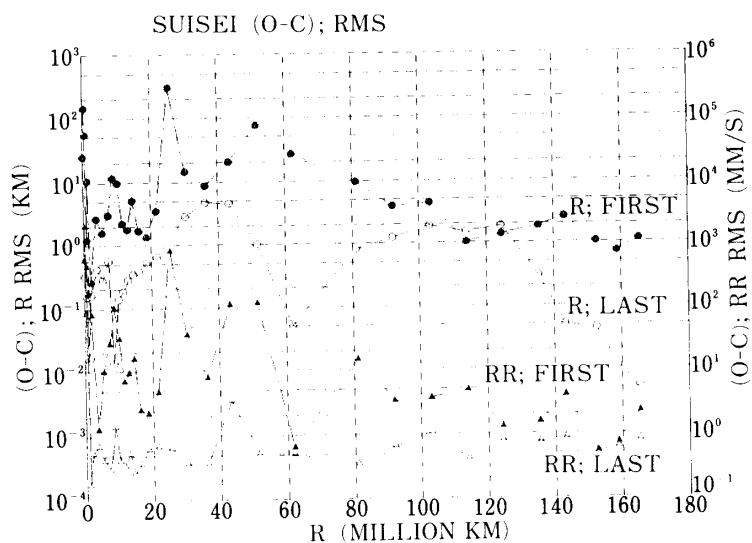


図 5.11 「すいせい」のレンジ，レンジレートの(O-C)のRMS値

レンジレート ;  $\sigma_{RR}=1 \text{ mm/s}$  (往復)

方位角 ;  $\sigma_{AZ}=1/100^\circ$

仰角 ;  $\sigma_{EI}=1/100^\circ$

カウント時間  $T_c$  は,

$\gamma \sim \gamma + 25$  日 ;  $T_c = 60 \text{ sec}$

$\gamma + 25$  日以降 ;  $T_c = 300 \text{ sec}$

推定フィルタおよび入力軌道6要素の作成方法は「さきがけ」と同様である。

図 5.9, 図 5.10 に軌道6要素の推定値と入力値の差  $\Delta R$ ,  $\Delta V$  および位置・速度誤差標準



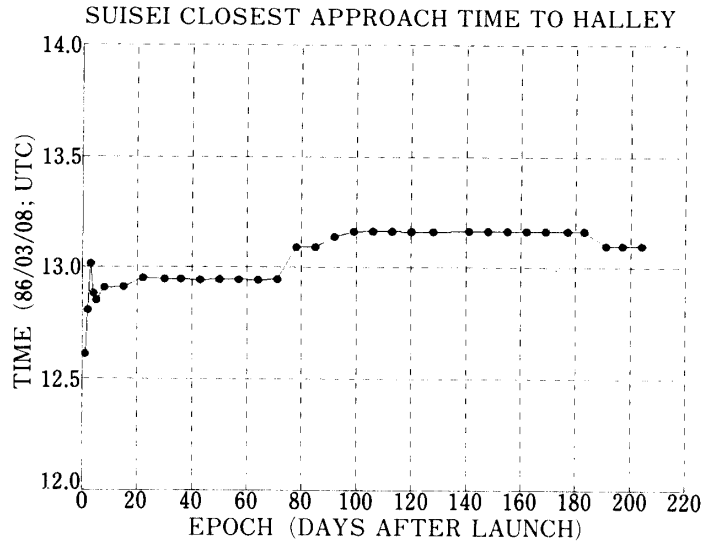


図 5.12 「すいせい」のハレー彗星への最接近時刻

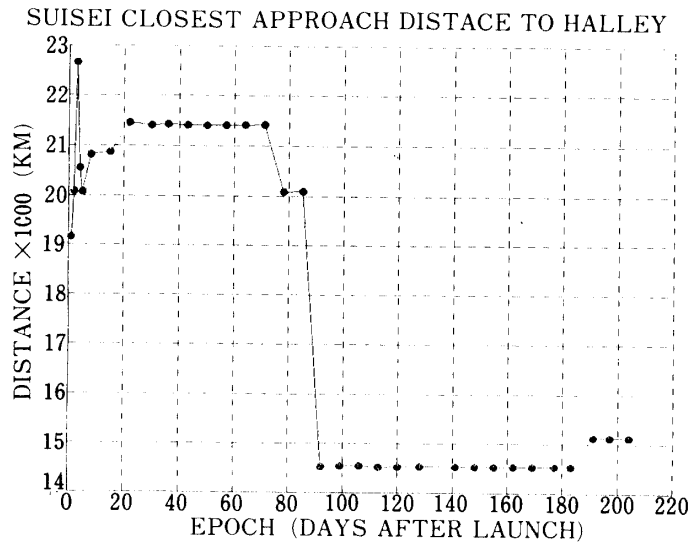


図 5.13 「すいせい」のハレー彗星への最接近距離

偏差  $\sigma_R, \sigma_V$  を示す。推定パラメタは、

$\gamma \sim '85\ 9/2$  ; 軌道 6 要素のみ

$'85\ 9/2$  以降 ; 軌道 6 要素 + タイミング・バイアス

である。図 5.11 に (O-C) の RMS をプロットしたものを示す。これらの図からわかるように、タイミング・バイアス推定の効果は「さきがけ」ほど顕著ではないが、これは、タイミング・バイアスによるずれの効果が現われる程 S/C が地球から離れないうちにバイアス推定によって補正を行ったためである。それゆえ、位置・速度の誤差は「さきがけ」と同程度あるいはそれ以下となっている。図 5.5 にタイミング・バイアスの推定値を示す。10 月以降は「さきがけ」と同じ傾向を示しているのに対し、それ以前では推定値は必ずし

も「さきがけ」と同じ～2 sec ではない。これは S/C が地球から比較的近い位置にいて、時刻のずれ、あるいはそれと等価な局位置の経度方向のずれの効果が S/C 軌道の不確定性から明確に分離し得ないためである。10 月以降のタイミング・バイアスの原因は「さきがけ」と同様である。

図 5.12, 図 5.13 に、ハレー彗星への最接近時刻および最接近距離を示す。「すいせい」は、'85 11/14 (打ち上げから 88 日目) に軌道制御を行っている。軌道制御前の値は、

最接近時刻：'86 3 月 8 日 12 時 55 分～13 時 05 分 (UTC)

最接近距離：20 万 1 000～21 万 4 000 km

一方、軌道制御後の値は、

最接近時刻：'86 3 月 8 日 13 時 05 分～13 時 10 分 (UTC)

最接近距離：14 万 5 000～15 万 1 000 km

である。その間、ハレー・エフェメリスは 2 回更新 ('85 11 月初旬と '86 2 月下旬) されていて、時刻にして数分、距離にして～6000 km の改善がなされている。

### 5.3 実運用における問題点と評価

#### 5.3.1 実運用における問題点

実運用における問題点を以下に列挙する。

##### (1) 観測データの品質

観測データの品質は、軌道決定精度や軌道決定運用業務の処理時間に極めて大きな影響を及ぼす。明らかに不良とわかるデータをデータ送出側でチェックし棄却する必要があることは言うまでもないが、一見して判断できない不良データを如何にして効率良く取り除くかは、今後の問題となる。また、S/C スピンによるレンジレートデータの値の変動は、ランダム・ノイズと見做すには余りに大きな量であり取り除く必要がある。

##### (2) 定数パラメタの精度

定数パラメタの精度のうち、深宇宙軌道決定で深刻な影響を及ぼすのは局位置と時系変換パラメタ (UT 1-TAI) である。5.2.1 で述べたように、これらの諸量は地球の自転角 (恒星時) の計算に関係していて、軌道決定の位置精度をその角度の誤差分だけずらせてしまう。例えば、時刻にして 1 秒に相当する自転角のずれ ( $\cong 4.17 \times 10^{-3}$  度) は、地球から 1 Au 離れた地点で約 1,000 km の位置のずれとなって現われる。局位置は測量精度の向上と共に極運動の効果も考慮しなければならない。極運動パラメタおよび時系変換パラメタの値は国際時報局 (BIH) から毎月発行されるので、迅速な入手・更新が必要である。

##### (3) データ量および軌道決定頻度

軌道決定に最適なデータ量・期間および運用上問題ない程度の軌道決定頻度に関する検討は、将来考えられる複数衛星の運用にとって重要な課題である。

## 第6章 あ と が き

深宇宙用軌道決定ソフトウェアシステム ISSOP は、PLANET-A ミッションのために約5年の歳月を費して開発されたソフトウェアであり、「さきがけ」「すいせい」のハレー彗星との会合の成功によってその使命は遂行された。今後は、引き続き深宇宙探査機の追跡管制に当たると共に、月スウィングバイ計画等の将来ミッションのための解析ツールとして使用される予定である。

### Appendix A : 表面 refractivity $N_s$ , total electron contents $E_c$ の補間方法

表面 refractivity  $N_s$ , total electron contents  $E_c$  の時間 (UTC) ・月別テーブル (24 × 12 次元のテーブル) は, 実際にはそれらの量を有限 Fourier 変換した係数  $a_{kl}$  (時間間隔が等間隔であるので Chebyshev 級数の展開係数を求めることと等しい) をテーブルにしておいて, それを用いている.

導出の式は次の通りである. ;

$$X(t_{UTC}, t_M) = \sum_{k=0}^{23} \sum_{l=1}^{12} a_{kl} \cos \left[ k \frac{2t_{UTC} + 1}{48} \pi \right] \cos \left[ (l-1) \frac{2t_M - 1}{24} \pi \right] \quad (\text{A}\cdot\text{1})$$

$$X = \begin{cases} N_s : \text{表面 refractivity} \\ E_c : \text{total electron contents} \end{cases}$$

$t_{UTC}$  : 時分秒 (UTC),  $0.0 \leq t_{UTC} < 24.0$

$t_M$  : 月 ;  $1.0 \leq t_M < 13.0$

$a_{kl}$  :  $X(t_{UTC}, t_M)$  を有限 Fourier 変換した係数

( $k=0, 1, 2 \dots, 23$ ;  $l=1, 2, \dots, 12$ )

なお, 係数  $a_{kl}$  の導出の式は次の通り :

$$\left. \begin{aligned} a_{01} &= \frac{1}{288} \sum_{i=0}^{23} \sum_{j=1}^{12} X(i, j) \\ a_{0l} &= \frac{1}{144} \sum_{i=0}^{23} \sum_{j=1}^{12} X(i, j) \cos \left[ (l-1) \frac{2j-1}{24} \pi \right] \quad (2 \leq l \leq 12) \\ a_{k1} &= \frac{1}{144} \sum_{i=0}^{23} \sum_{j=1}^{12} X(i, j) \cos \left[ k \frac{2i+1}{48} \pi \right] \quad (1 \leq k \leq 23) \\ a_{kl} &= \frac{1}{72} \sum_{i=0}^{23} \sum_{j=1}^{12} X(i, j) \cos \left[ k \frac{2i+1}{48} \pi \right] \cos \left[ (l-1) \frac{(2j-1)}{24} \pi \right] \\ &\quad (1 \leq k \leq 23, \quad 2 \leq l \leq 12) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot\text{2})$$

## Appendix B: ハウスホルダー変換の構成法

ハウスホルダー変換マトリクスは、被変換マトリクスの行数と同じ大きさをもつ正方行列で、その役割は被変換マトリクスを三角化する作用素である。またこれは直交行列であり、いまその大きさを  $(n \times m)$  とすると、 $n$  個の直交行列の積の形に分解できる。

$$T = T_n T_{s-1} \cdots T_1 \quad (\text{B}\cdot\text{1})$$

いま被変換マトリクスを  $A(n \times m)$  とし、これを  $m$  個のベクトルで表せば、

$$A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m] \quad (\text{B}\cdot\text{2})$$

$$\bar{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (\text{B}\cdot\text{3})$$

この場合、(B・1)式の  $T_1$  は、 $A$  の第1行に関し、その対角要素(つまり一番上の要素  $a_{11}$ )より下の要素をすべて0とする機能をもつ。すなわち、

$$T_1 \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B}\cdot\text{4})$$

ここで  $\bar{u}_1 = (u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1})^T$  を、次式で計算される列ベクトルとする。

$$u_{11} = a_{11} + \sigma_1, \quad u_{21} = a_{21}, \dots, u_{n1} = a_{n1} \quad (\text{B}\cdot\text{5})$$

$$\sigma_1 = \text{sgn}(a_{11})(\bar{a}_1^T \bar{a}_1)^{1/2} \quad (\text{B}\cdot\text{6})$$

つまり、 $\bar{u}_1$  は  $\bar{a}_1$  において、第1要素に  $\sigma_1$  を加えて、他の  $a_{21}, \dots, a_{n1}$  は全く等しいとしたベクトルである。この  $\bar{u}_1$  ベクトルを用いれば、 $T_1$  マトリクスは、次式のように簡単に構成できる。

$$T_1 = I - \beta_1 \bar{u}_1 \bar{u}_1^T \quad (\text{B}\cdot\text{7})$$

ここで  $I$  は  $n$  次元の単位行列で、 $\beta_1$  はスカラ量である。

$$\beta_1 = 1/\sigma_1(\sigma_1 + a_{11}) \quad (\text{B}\cdot\text{8})$$

実際の計算では、この  $T_1$  マトリクスをわざわざ構成する必要はなく、 $T_1 \bar{a}_1$  は次式のようにベクトル差として計算する。

$$T_1 \bar{a}_1 = \bar{a}_1 - \alpha_1 \bar{u}_1 \quad (\text{B}\cdot\text{9})$$

$$\alpha_1 = \beta_1 \bar{u}_1^T \bar{a}_1 = 1 \quad (\text{B}\cdot 10)$$

明らかに  $\gamma_1 = -\sigma_1$  で、それより下の項は 0 となる。行列の次元  $n$  が、非常に大きい場合には、 $T_1$  をわざわざ構成して  $\bar{a}_1$  にかけるのは、大きな記憶を必要とし、計算時間も長くなるが、上式のようなベクトル差の計算であれば、メモリも少なく計算時間も短くてすむ。これがこの作用素の大きな利点である。

つぎに  $A$  マトリクスの子りの部分についても、この  $T_1$  をかけなければならないが、これも同様にベクトル差として計算される。

$$T_1 \bar{a}_j = \bar{a}_j - \alpha_j \bar{u}_1 \quad (\text{B}\cdot 11)$$

$$\alpha_j = \beta_1 \bar{u}_1^T \bar{a}_j \quad (j=2, \dots, m) \quad (\text{B}\cdot 12)$$

いま  $T_1$  と  $A$  の積を  $\tilde{A}$  とすれば、つぎのような形になる。

$$\tilde{A} = T_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1m} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nm} \end{bmatrix} \quad (\text{B}\cdot 13)$$

つぎに  $T_2$  を  $\tilde{A}$  にかけるわけであるが、この場合  $\tilde{A}$  の第 1 行、第 1 列には全く手をふれず、残りの部分、すなわち上式の実線で囲まれた部分について、同様の三角化を行う。そこで  $T_2$  の形は

$$T_2 = I - \beta_2 \bar{u}_2 \bar{u}_2^T \quad (\text{B}\cdot 14)$$

であって、 $T_1$  と同じ形であるが、 $\bar{u}_2$  は第 1 要素が 0 となるベクトルである。

$$\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix} \quad (\text{B}\cdot 15)$$

計算の手順は、 $T_1$  の場合と全く同様であるので省略するが、その結果  $\tilde{A}$  マトリクスの第 1 行は全く変わらず、第 2 列の対角要素より下が 0 となる。

$$T_2 \tilde{A} = T_2 T_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1m} \\ 0 & \gamma_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad (\text{B}\cdot 16)$$

以下  $T_n$  まで同様の操作をくり返す。  $n > m$  であれば

$$TA = \begin{bmatrix} R_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B}\cdot\text{17})$$

$R_x$  は  $(m \times m)$  の上三角行列である。  $n < m$  であれば,

$$TA = [R_x : R_{xc}] \quad (\text{B}\cdot\text{18})$$

で, この  $R_x$  は  $(n \times n)$  の上三角行列となる。もちろん  $n = m$  であれば, 上式の右辺は  $R_x$  のみとなる。

以上は  $T$  が被作用マトリクスの  $n$  列までを三角化する場合の議論であるが, それより少ない  $r$  列 ( $r \leq n$ ) まで三角化してストップすることも可能で, その場合 (B・1) 式は  $r$  個の直交行列の積となり, 以後の議論も対応した修正が必要となる。

## 参考文献

- [ 1 ] G. W. Spiev, Design and Implementation of Models for the Double Precision Trajectory Program (DPTRAJ), Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., April 15, 1971.
- [ 2 ] T. D. Moyer, Mathematical Formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP), Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., May 15, 1971.
- [ 3 ] P. Henrici, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, Univ. of California, Los Angeles, John Wiley & Sons, INS, 1962.
- [ 4 ] C. W. Gear, Numerical Initial Problem in Ordinary Ddfferential Equations, Univ. of Illinois, Prentise-Hall, INS, 1971.
- [ 5 ] L. F. Shampine, M. K. Gordon, Computer Solution of Ordinary Differential Equations, Sanda Lab. & Univ. of New Mexico, W. H. Freeman and Company, 1975.
- [ 6 ] 村田正秋, 常微分方程式のためのソフトウェアパッケージ, 航空宇宙技術研究所, 1978年6月, NAL TM-353.
- [ 7 ] 松島引一, 衛星シミュレーションシステムにおける世界時の予測, 航空宇宙技術研究所, 1975年10月 NAL TR-430.
- [ 8 ] T. D. Moyer, Transformation from Proper Time on Earth to Coordinate Time in Solar System Barycetric Space-Time Frame of Reference Part 1, pp 33-56, Celestial Mechanics 23 (1981).
- [ 9 ] T. D. Moyer, Transformation from Proper Time on Earth to Coordinate Time in Solar System Barycetric Space-Time Frame of Reference Part 2, pp. 57-68, Celestial Mechanics 23 (1981).
- [10] 「特集 宇宙開発II」, FACOM ジャーナル 1983年9月号.
- [11] 惑星間軌道生成システム解説書, 1982年3月.
- [12] 西村 他, 惑星間軌道生成プログラム, 宇宙科学研究所報告第14号, 1983年7月, ISSN0283-2853.
- [13] 西村 他, 深宇宙用軌道決定プログラムによる“さきがけ”の軌道決定, 第29回宇宙科学技術連合講演会講演集, 1985年10月.
- [14] 西村 他, “さきがけ”の追跡管制, 制御及び飛行力学に関する小研究講演集, 1986年1月.