

記 号

A	ヤコビアン行列
E	オイラー方程式の x 方向の流束
\hat{E}	オイラー方程式の ξ 方向の流束
\tilde{E}	オイラー方程式の e_n^{\rightarrow} 方向の流束
E_x	一般座標上でのオイラー方程式の x 方向の流束
\mathbb{E}	仮想セルに流入する全流束
F	オイラー方程式の y 方向の流束
\hat{F}	オイラー方程式の η 方向の流束
\tilde{F}	オイラー方程式の e_l^{\rightarrow} 方向の流束
F_0	格子セル内の斜めの流束成分の一つ(スカラー)
F_1	格子セル内の斜めの流束成分のもう一つ(スカラー)
F_{in}	仮想セルに流入する流束(スカラー, 線形)
\tilde{F}_{in}	仮想セルに流入する流束(スカラー, 非線形)
F_{out}	仮想セルより流出する流束(スカラー, 線形)
\tilde{F}_{out}	仮想セルより流出する流束(スカラー, 非線形)
$F_{x\uparrow}$	格子セル内の x 方向の流束成分の一つ(スカラー)
$F_{x\perp}$	格子セル内の x 方向の流束成分のもう一つ(スカラー)
$F_{y\uparrow}$	格子セル内の y 方向の流束成分の一つ(スカラー)
$F_{y\downarrow}$	格子セル内の y 方向の流束成分のもう一つ(スカラー)
G	一般座標上の任意方向の流束 オイラー方程式の z 方向の流束(3次元)
\hat{G}	オイラー方程式の ζ 方向の流束(3次元)
\tilde{G}	オイラー方程式の e_s^{\rightarrow} 方向の流束(3次元)
G_0	格子セル内の斜めの流束成分の一つ(オイラー)
G_1	格子セル内の斜めの流束成分のもう一つ(オイラー)
$G_{\xi\uparrow}$	格子セル内の ξ 方向の流束成分の一つ(オイラー)
$G_{\xi\perp}$	格子セル内の ξ 方向の流束成分のもう一つ(オイラー)
$G_{\eta\uparrow}$	格子セル内の η 方向の流束成分の一つ(オイラー)
$G_{\eta\downarrow}$	格子セル内の η 方向の流束成分のもう一つ(オイラー)
H	一般座標上の任意方向の流束(3次元)
J	座標変換のヤコビアン
Q	オイラー方程式の保存量の未知数ベクトル
\hat{Q}	一般座標系でのオイラー方程式の保存量の未知数ベクトル
\tilde{Q}	オイラー方程式の回転したセルでの保存量の未知数ベクトル
R	ヤコビアン行列の右固有ベクトル行列
R^{-1}	ヤコビアン行列の左固有ベクトル行列
T_{mod}	新しいスキームに相当する従来の方法での計算時間

T_{new}	新しいスキームの計算時間
T_{old}	従来の計算時間
U	反変速度ベクトルの ξ 方向成分
U	反変速度ベクトルの任意方向成分
V	反変速度ベクトルの η 方向成分
W	オイラー方程式の原始変数の未知数ベクトル 反変速度ベクトルの ζ 方向成分 (3次元)
X	複素増幅率 g の実部
Y	複素増幅率 g の虚部
a	スカラー輸送方程式の x 方向の流速
\bar{a}	スカラー輸送方程式の x 方向の平均の流速
b	スカラー輸送方程式の y 方向の流速
\bar{b}	スカラー輸送方程式の y 方向の平均の流速
e	単位体積当りの全エネルギー
\vec{e}_n	セル境界面の法線方向単位ベクトル
\vec{e}_t	セル境界面の法線方向単位ベクトル
\vec{e}_s	セル境界面のもう一つの接線方向単位ベクトル (3次元)
g	格子点数, 複素増幅率
i	ξ, η, ζ いずれかの方向の単位ベクトル (3次元)
j	ξ, η, ζ いずれかの方向の単位ベクトル (3次元)
j	x または ξ 方向の格子点
k	ξ, η, ζ いずれかの方向の単位ベクトル (3次元)
k	y または η 方向の格子点
$k_{(\cdot)}$	一般座標上でのセルの回転方向の単位ベクトル成分
m	計算時間の増大に相当する格子点数の増加率
n	時刻 (タイム・ステップ), セル境界面に垂直な方向の局所座標, 新しい新しいスキームの計算時間の増大率
p	圧力
q	スカラーの未知数
s	勾配制限関数, 繰り返し回数 セル境界面に沿うもう 1 方向の局所座標 (3次元)
t	時間, セル境界面に沿う方向の局所座標, 1 格子当り 1 時間刻み当りの計算時間
u	輸送速度の大きさ (スカラー), x 方向の流速成分 (オイラー)
\vec{u}	スカラーの輸送速度ベクトル
\vec{u}	スカラーの平均輸送速度ベクトル
v	y 方向の流速成分
\vec{v}	スカラーの平均輸送速度ベクトルに直交するベクトル
w	原始変数ベクトルの各成分 z 方向の流速成分 (3次元)

x	x 方向の座標値
\vec{x}	座標
y	y 方向の座標値
z	z 方向の座標値
Δ	前進差分
∇	後退差分
Δs	回転した仮想セルの境界面の長さ
Λ	ヤコビアン行列の固有値対角行列
Ω	各仮想セルの領域
Δt	時間刻み
Δx	x 方向の格子幅
Δy	y 方向の格子幅
η	一般座標系での第 2 軸
$\eta_{(\cdot)}$	座標変換の metric
γ	比熱比
κ	MUSCL 法の次数を与えるパラメータ
λ	ヤコビアン行列の固有値
ν_x	x 方向のクーラン数
ν_y	y 方向のクーラン数
ϕ	セルの回転方向の 1 成分 (3 次元)
φ	y 方向の周波数
θ	x 軸に対する流速の傾き, x 方向の周波数
ρ	密度
ω	セルの回転方向の 1 成分 (3 次元)
ψ	セルの回転方向の 1 成分 (3 次元)
γ	一般座標系での時間 ($=t$)
ξ	一般座標系での第 1 軸
$\xi_{(\cdot)}$	座標変換の metric
ζ	一般座標系での第 3 軸
$\zeta_{(\cdot)}$	座標変換の metric
\times	仮想的な風上側の点
$(\cdot)_{ave}$	Roe の平均化
$(\cdot)_B$	仮想セル境界の下側の状態
$(\cdot)_L$	仮想セル境界の左側の状態
$(\cdot)_R$	仮想セル境界の右側の状態
$(\cdot)_T$	仮想セル境界の上側の状態
$(\cdot)_{BL}$	仮想セル境界の左下側の状態
$(\cdot)_{BR}$	仮想セル境界の右下側の状態
$(\cdot)_{TL}$	仮想セル境界の左上側の状態

- (\cdot)_{TR} 仮想セル境界の右上側の状態
- (\cdot) Roe の Flux Difference Splitting による数値流束
- (\cdot)_{conv} 従来法
- (\cdot)_{wc} 本風見鶏法
- (\cdot)_{exact} 厳密解

多次元流体力学方程式に対する離散化手法の研究

田村善昭

(1992年8月10日受理)

第1章 序論

近年の流体の数値計算の進歩には目ざましいものがある。数値流体力学の始まりとされる、2次元薄翼まわりの遷音速擾乱ポテンシャル方程式を解いた1970年代初頭の Magnus と Yoshihara¹⁾ 及び Murman と Cole²⁾ の論文からわずか20年足らずの間に、今日では翼胴結合体はおろかサイド・ブースタやメイン・タンクなどを含むスペースシャトル全機まわりの流れまで解かれるようになってきている³⁾。

この流体の数値計算の発展に最も寄与したものの一つは紛れもなく、電子計算機、特にスーパーコンピュータの発達による記憶容量の大型化と演算の高速化である。今日主流となっている離散化による数値計算の基本は流れ場を有限個の格子あるいは要素に分割し、解くべき方程式をそれらの格子や要素を代表する点の値の代数的な関係式に置き換えることで近似的に解を求めるものであるから、より厳密解に近い、すなわち解像度の高い (High-Resolution) 解を得ようとすれば、ある程度以上の格子の細かさが必要である。従って計算機の発達による流体の数値解析を実用的なものとするためには欠かせないものであった。

しかしながら、いかに計算機が発達したとはいえ、計算手法や格子点の配置に関わりなく厳密解 (に限りなく近い解) が得られる程の格子点数には遙かに及ばない。現在のスーパーコンピュータでとれる格子点数は百万点とも五百万点とも言われているが、境界層を解像する必要の無いオイラー方程式ですら、場合によっては1方向800点が必ずしも十分でないという報告⁴⁾もあるほどである。ましてや境界層内を解像する必要があるナビエ・ストークス方程式による粘性計算では尚更である。従って、今日の流体の数値計算では数値計算法を工夫して、同じ格子点数でより解像度の高い解を得ることが依然として重要な研究課題のひとつである。

数値計算において、より高解像度の解を得るためによく用いられるのは、偏微分を格子点の差分で置き換える際の近似誤差をより高階の微分まで減らす、いわゆる高次精度 (High-Order Accuracy) 化である。これは見方を変えると、解の分布を多くの格子点を用いて局所的に高次の多項式で近式していると考えられることもできる。ところが、圧縮性非粘性流体のよ

うな輸送方程式の場合、この高次精度化がそのまま解の高解像度化につながらない。それは、圧縮性流体には衝撃波や剪断層のような不連続が存在し、この点では微分不可能になるため、高次の微分や高次の多項式の近似が無意味になるからである。むしろ、高次の近似式でそのまま解くと、不連続の付近で非物理的な振動を生じ、解は不安定となる。1次元のスカラ-の輸送方程式に対してこの問題を解決したのがTVD (Total Variation Diminishing) に代表される高解像度風上差分法⁵⁾である。TVDの考え方は時間方向に解の空間全体の変動 (Total Variation) が増えない (Diminishing) ように高次精度の近似を不連続付近で最大1次精度まで落とすことで、不連続付近での非物理的な振動を避けながらも流れの滑らかな大部分の領域では高次精度を保とうとするものである。また、TVD条件を満たすようにすると結果として風上側の点の値を積極的に用いる、いわゆる風上差分になることも分ってきた。

非粘性圧縮流の1次元問題では、オイラー方程式が3つの特性量に対する準線形スカラ-輸送方程式に分解できることから、前述の高解像度風上差分法をそのまま個々の準線形スカラ-方程式に適用することができた。圧縮性オイラー方程式固有の問題としてもう一つ挙げられる点に、「たとえ近似解であっても衝撃波の位置を正しく捉える」ことがある。この問題で有名なのがGodunovの方法⁶⁾を近似化して解くものである。もともとGodunovは初期状態において格子点と格子点の間では物理量が一定で、隣との間には有限の跳びがあると仮定し、微小時間の後にこの分布がどうなるかを衝撃波と接触面及び膨張扇のシステムによってすべての格子点について反復的に解いた。これは、数学的に言えばリーマン問題の一種であり、流体力学的に言えば格子ごとに衝撃波管と類似の問題を解くことに相当する。Godunovの方法は確かに近似解としては精度が高いが、容易に想像されるように多くの計算時間を要し、実用的でない。そこで、このGodunovの方法を簡略化して衝撃波の速度だけでも正しく捉えようというのが、Roeの平均化による近似リーマン解法にFlux Difference Splittingを組み合わせたRoeの方法⁷⁾に代表される数値解法である。さらに衝撃波の捕獲を曖昧にする反面、強い衝撃波でより頑丈さ (robustness) を示す、Flux Vector Splitting (流束分離法)⁸⁾⁹⁾と呼ばれる一連の手法も開発された。これらの手法とスカラ-の高解像度風上差分法との組合せによって1次元問題ではかなり満足のいく解が得られている。

一方、多次元問題ではオイラー方程式が1次元のように簡単な準線形スカラ-輸送方程式に分解できないこともあり、風上差分以前に用いられていた中心差分+人工粘性の場合に比べて対流項の各座標方向微分に対して1次元的に風上差分を適用するのが一般的である。この方法は安定で、しかも中心差分より解像度の高い解を与える¹⁰⁾ため広く用いられるようになった。しかし、この方法による風上差分の多次元化は、流れの特性的な方向 (多次元的な風上) と格子線との位置関係によって解像度が著しく異なるという問題があった。端的な例として衝撃波がある。我々は例えば衝撃波を含む流れ場を計算する際、できるだけ格子を衝撃波に沿うように配そうとするが、それは衝撃波が格子に沿う場合は格子に沿わない場合より高い解像度が得られることを経験的に知っているからである。逆に言えば、格子に沿わないと衝撃波の解像度は決して高くない。

風上差分において格子の向きと流れの方向が解像度に影響する理由は、対流項の座標軸方向の微分を評価する際に1次元的に風上差分をとることが、結果として情報の伝播方向を座標軸に沿う方向に拘束することになり、それが必ずしも実際の物理現象に一致していないか

らと考えられる。1次元では3つの特性量が輸送される方向も3つの特性量の勾配も座標軸方向でしかありえないため風上差分として正しかったが、多次元の場合は、例えば流速を考えても分かるように情報は必ずしも座標軸に沿って伝わるわけではない。

そもそも、Cartesian座標系での微分方程式というのは、格子を無限に小さくした場合の極限として解析的に与えられたものであって、有限な大きさの格子を用いざるを得ない数値計算では格子の形状も含めて積分形の方程式を基礎方程式として考えるべきである。それをCartesianの微分方程式のままで解くというのは、ある格子点まわりの仮想セル(コントロール・ボリューム)表面での流束の積分を、仮想セルの表面の形状が格子線に沿ったサイコロ状で、それらの面に垂直な方向に流束の出入りがあるとして近似的に求めていると見なすことができる。しかし、実際には必ずしもその方向に流束の出入りがあるわけではないから近似として最適とは言えず、従ってその分だけ解像度が落ちることになる。中心差分(+人工粘性)はもともと差分を空間的に対称にとることを基本にしているが、風上差分は積極的に非対称とすることで解像度を上げようとする手法であるから、流束の方向のずれの影響がより現れやすいと考えられる。

このように、多次元で十分な解像度が得られないという問題に対する実際的な対策としては、何らかの方法で全体の格子数を押えながら格子を細かくするという考えがある。局所的に格子を集めたり、細かい格子を重ねたりする試み¹¹⁾¹²⁾は多くなされており、また、物理量の勾配などにより動的に格子を変形させる解適合格子法¹³⁾も不連続付近の解像度を大幅に向上させているが、これらはいずれも格子幅を局所的に細かくすることで解像度を上げただけであり、実際的であるが、離散化手法に対しては本質的な改善になっていない。

そこで、格子線が格子や仮想セル、さらに流束の向きまでも規定してしまうのではなく、より自由な流束評価により多次元的な意味での風上差分を構築することが解像度の向上には本質的であるという認識が高まり、新たな離散化手法の開発が行われるようになった。これらは総称して多次元風上差分法と呼ばれている。

その先駆けとなったのは、衝撃波の解像度を上げるために、格子の方向に関係なく、衝撃波の方向に1次元の近似リーマン解法を適用したDavis¹⁴⁾の方法である。Davisの方法は格子方向の流束を衝撃波に垂直な方向と沿う方向に分け、それぞれの方向に風上を評価することであらゆる方向の斜め衝撃波を正しく捉えようとするものがあった。この方法はのちにRotated Differenceスキームと呼ばれる一連の手法を生み出すことになるほど画期的な研究であったが、時代に早すぎたためか、当時は一般には余り注目されなかった。

超音速の場合に、この考えを利用して流速方向に風上を評価したと考えられるのがObayashiとGoorjianの方法¹⁵⁾である。この方法によれば、任意の方向の垂直衝撃波は正しく評価されるが、斜め衝撃波には厳密でなく、解像度の向上よりむしろ計算時間の短縮と強い衝撃波を含む流れでのrobustnessが主な目的とされていた。

Davisの方法を直接受け継いだと言えるのがLevyらの方法¹⁶⁾である。LevyらはDavisの方法を適用するに当たり、分解された流束の風上、風下の値を格子点そのものでなく、それぞれの方向に延長した直線上の点から得ることで、より格子の影響が排除され、等しく解像度が向上すると考えた。ただし、ここで提案されている高次精度化の際の点のとり方には必然性がなく、疑問が残る。また、Colella¹⁷⁾、DadoneとGrossman¹⁸⁾、Kontinosと

McRae¹⁹⁾も類似の手法を提案しているが、結果は大同小異である。

一方、1次元の近似リーマン解法を用いること自体に誤りがあるとする考え方がある。

Roe²⁰⁾は早くも1986年に、2次元のオイラー方程式の解を局所的な波の重ね合わせで表わすための波の分解方法を示している。オイラー方程式は1次元のように簡単に特性波に分解できないが、Roeは波の強さを非線形にすることで分解を可能にした。ただし、Roeの方法でも分解方法は唯一でない。後にRoeとそのグループはスカラーの輸送方程式に対して格子の向きと輸送方向のずれの影響が小さい格子非依存スキーム(Grid Independent Scheme)を3角形要素の格子系に対して開発²¹⁾し、これにRoeの分解を適用してオイラー方程式を解いている²²⁾。この方法は衝撃波に関わらず一般の流れ場で多次元性を考慮している点で理論的に優れており、今後の発展が期待される手法ではあるが、現在のところ、Roe自身が開発した1次元の近似リーマン解法⁷⁾とは異なって流れの諸量は最低でも連続と仮定しており、衝撃波がどのように捉えられるかについては言及を避けている。

Hirschら²³⁾およびHirschとLacor²⁴⁾はオイラー方程式の同時対角化による多次元近似リーマン解法を提案した。Hirschらの方法は、一般には不可能な2次元のオイラー方程式の準線形スカラー輸送方程式への分解が流れの状態によっては局所的に可能であることに着目し、完全に分解できない場合でもその影響が最小になるよう工夫してスキームを構築した。かれもまたLevyらのように、格子点でない点の値を用いて風上を判断している。この方法ではオイラー方程式の分解方法が流れの状況で変わるためか、スキームが不安定になりやすいことが今後の課題として指摘されている。高次精度化に関しても可能性を示唆するにとどまっている。

これらとは異なり、格子に沿わない方向にも不連続が有り得るという仮定から局所的な波の分解を行い、直接格子に沿う方向の流束を求めようとしたのが、Rumseyら²⁵⁾およびParpia²⁶⁾の方法である。Rumseyらは適当なパラメータを導入することで格子の境界の左右の物理量の跳びを5つの波に分解し、一方、Parpiaは格子に斜めの平面波を考えて格子の左右の不連続を記述しようとした。かれらの方法はそれぞれ独立のものであるが、共通して言えるのは、1次元の近似リーマン解法をかれらの方法に置き換えたことにより、拡散的に働く離散化の誤差が減り過ぎて、衝撃波の解像度は上がる反面、そのまま適用すると解の滑らかさ(monotonicity)が失われてしまう点である。monotonicityは簡単に言えば多次元でのTVDのようなもので、不連続を含む流れ場では重要な概念であるから、これが維持できない以上、現状では実用にはならない。

これらのほか、空間1次精度の手法はそのままに、高次精度化で多次元性を考慮する手法が山本と大宮司²⁷⁾及びSawada²⁸⁾により提案されているが、まず、山本らの方法は1次元的に高次精度化する際に流れの方向によってTVDの条件を緩めるという多分に経験的なもので、数学的根拠には乏しい。一方、Sawadaの方法は高次精度化に際して、単に流束を高次精度化するだけでなく、時間、空間方向の積分をGaussの積分公式に従い、複数点の値を用いて行おうとするものであり、本質的な問題を含んではいるが、ここで議論している流れ場の多次元性とは直接結び付かない。

このように、既に提案されている多次元風上差分法を見てみると、それぞれに利点はあるものの、いくつかの共通した欠点が明らかになる。一つは格子方向の流束を作る際にRo-

tated Difference スキームを用いると、期待したほどの精度が出ない。また、多次元近似リーマン解法を用いると、スキームが不安定、ないしは non-monotone になりやすい。さらに、いずれの場合も高次精度化が容易でない。一方、Roe のように純粋に多次元的に波が伝播することを考えると、衝撃波の捕獲が難しくなる。高次精度化に際して多次元性を考慮する方法は空間1次精度で解像度が変わらないという点で本質的には多次元風上差分でない。

そこで、本論文では上記の手法とは異なる新しい多次元風上差分法²⁹⁾を提案する。本法は基本的には Davis の手法の流れを汲むものであり、特性的な方向に近似的に1次元のリーマン問題を解いて流束を決定する方法であるが、最大の違いは、Davis 以下のすべての方法が最終的に格子方向の流束を求めて格子方向に隣り合う格子点とのみ流束のやりとりを行っているのに対し、本法では特性的な方向によっては斜めの格子点とも流束のやりとりを行う点である。このことにより本法では理論的に情報が斜め45°で伝わる場合に、格子方向に情報が伝わる場合と同様の解像度が得られることをはじめ、それ以外の場合でもより誤差が小さくなる。従って、従来の格子方向に依存した風上差分法はもちろん、既存の多次元風上差分法を超える解像度が期待される。格子点を中心とする仮想セル(コントロール・ボリューム)が風向き(特性的な方向)を判断して自動的に回転するという概念から斜めの格子点との流束のやりとりが実現されるため、本法は風見鶏法(Weathercock Method)と命名された。また、既存の多次元風上差分法のいくつかでは高次精度化が困難であるとされていたが、本法では容易に行えることが示される。さらに、計算時間の増大も許容範囲にあり、実用的な手法であることが明らかにされる。

本論文ではまず第2章で1次元の風上差分法と従来の格子方向に依存した2次元の風上差分法(以下従来法と略す)を検討し、2次元の風上差分法における問題点を明らかにして対策を考える。既発表の多次元風上差分法のいくつかに対しての考察も行う。つづいて第3章では前章の検討を元に2次元のスカラー輸送方程式に対する本法の定式化を行い、例題計算に対する結果を従来法の結果と比較しながら議論する。ここでは本法の従来法に対する優位性が解析的及び数値的に示される。第4、5章では本法を2次元のオイラー方程式に適用する方法と例題計算の結果について議論する。定式化の上では他の多次元風上差分法との違いが明確にされ、また例題計算では従来法からの解像度の向上が厳密解との比較などにより数値的に示される。つぎに第6章では、本法の3次元への拡張について述べる。ここでは、特に新たな困難を伴うことなく2次元の手法を3次元に拡張できることを示すとともに、簡単な例題計算によって、3次元でも解像度の向上が得られることを示す。第7章では以上の結果について考察を行い、最後に第8章で結論を述べることとする。

第2章 風上差分法の一般的議論

本章では、1次元の風上差分法と従来の2次元の風上差分法の概要を眺め⁵⁾³⁰⁾、2次元での問題点を議論して多次元風上差分法の必要性を述べると共に、既発表の多次元風上差分法のいくつかに関しても考察を行ったのち、本論文における多次元風上差分法の基礎となる概念を説明する。

2.1節 1次元の風上差分法

1次元のスカラー輸送方程式は、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

と表わされる。 q は未知量、 a は輸送速度である。 a が定数の場合にはよく知られたように簡単な解析解が存在して、

$$q(x, t) = q(x - at, 0) = q_0(x - at) \quad (2.2)$$

ここで、 q_0 は $t = 0$ での初期値である。一方、(2.1)式に対する時間1次精度の陽的積分で空間1次精度の風上差分は、

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{a - |a|}{2} q_{j+1}^n + |a| q_j^n - \frac{a + |a|}{2} q_{j-1}^n \right) \quad (2.3)$$

と書ける。添字 j は格子点の番号、上付き n は時間刻みを表わす。絶対値は風向きが x 方向に正か負かによって差分の取り方を変えるためのものである。ここで、格子幅と1時間刻み当りの情報の伝播距離の比として与えられるクーラン数 v_x を定義しておく、

$$v_x = \frac{|a| \Delta t}{\Delta x} \quad (2.4)$$

空間1次精度の風上差分の重要性はこのクーラン数が1の場合、(2.3)式が厳密解を与えることである。いま、簡単のため $a > 0$ とすると、(2.3)式からは、

$$q_j^{n+1} = q_{j-1}^n \quad (2.5)$$

一方、(2.2)式からは、点 j に関して、

$$q_j^{n+1} = q(x_j, (n+1)\Delta t) = q(x_j - a\Delta t, n\Delta t) = q(x_j - \Delta x, n\Delta t) = q_{j-1}^n \quad (2.6)$$

となる。実際の問題では格子幅が一定でなかったり、輸送速度が場所(や時間)の関数であったりするために流れ場全体でクーラン数を1にとることが難しいので、空間の離散化近似を高次精度化することで解像度を上げる。通常、高次精度化は $\partial q / \partial x$ などの偏微分に対する差分近似の誤差をテーラー展開的な考えで高階の微分まで落とすように説明されるが、以下のようにも考えられる。

クーラン数が1でない場合、(2.6)式から分かるように点 j の時刻 $n+1$ での厳密解 $q(x_j - a\Delta t, n\Delta t)$ は格子点に乗らなくなる。そこで、適当な補間によってこの点の値を求めることを考える。すると、(2.3)式の空間1次精度の風上差分は例えば $a > 0$ の場合、

$$q_j^{n+1} = q \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) q_j^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x} q_{j-1}^n$$

と書き直せるから、ちょうど $x_j - a\Delta t$ の点での値を線形補間により求めていることになる。従って高次精度化はこの補間をより高次の多項式で近似することに相当する。例えば、 $j-$

2, $j-1, j$ の3点を用いれば2次の多項式で近似することができる。実際には不連続点では微分が不可能で、そのため高次の多項式で補間すると解に非物理的な振動を生じてしまうという問題があるが、これはTVDなどの滑らかさを維持する手法により解決されている。

また、システムであるオイラー方程式についても、1次元の場合にはオイラー方程式が局所的に3つの準線形スカラー輸送方程式に分解できるため、分解された個々の方程式に対して前述の風上差分法を適用することができる。

2.2節 2次元の風上差分法

まず、2次元の風上差分法が斜めの波に対して弱いという具体例を挙げる。図1は従来の空間1次精度の風上差分法¹⁰⁾で1次元の衝撃波管問題を計算した結果である。流れ方向に61点の格子で計算しているが、厳密解と十分良い一致しているほか、衝撃波についても格子点約4点で捉えている。一方、図2は同じ方法による2次元の超音速ダクト内の流れの計算格子と計算結果である。格子点数は流れ方向に61点あるが、図2(b)の等マッハ線図と図2(c)の $y=0.5$ 上のマッハ数分布から分かるように、先頭の衝撃波から満足に捉えられていない。この問題に対する従来の対応は、格子点を増やすことと、空間精度を上げることであるが、先のダクトの問題に対して、図3(a)のように格子点をとって高次精度化し、更に各方向に格子点数をそれぞれ2倍にしても、図3(b)の等マッハ線図で見られるように相対的な改善はあるものの、衝撃波を解像するにはやはり5ないし6点の格子点を要しており(図3(c))、1次元の空間1次精度のスキームの結果にすらいまだ及ばない。

このことを、式の上から考えてみる。2次元のスカラー輸送方程式は(2.1)式に対して(2.7)式で与えられる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

ここで a, b はそれぞれ x, y 方向の輸送速度である。 a, b が定数の場合の解析解は、

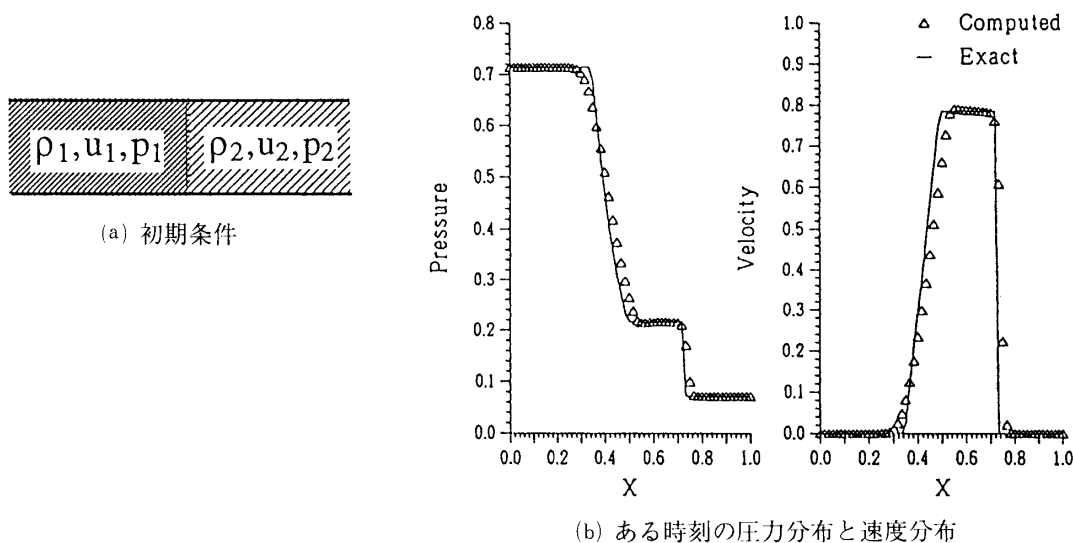
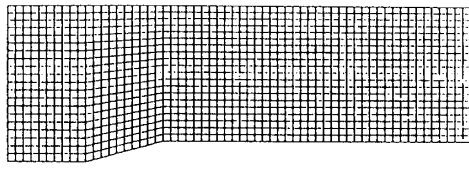
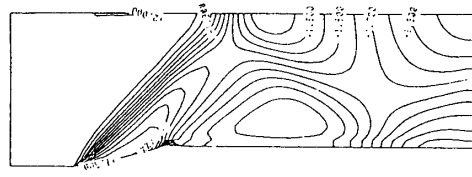


図1 1次元の衝撃波管問題



(a) 計算格子 (61×21)



(b) 等マッハ線図

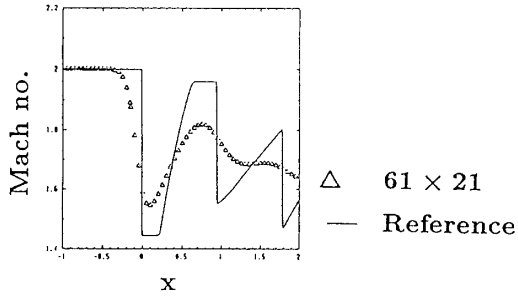
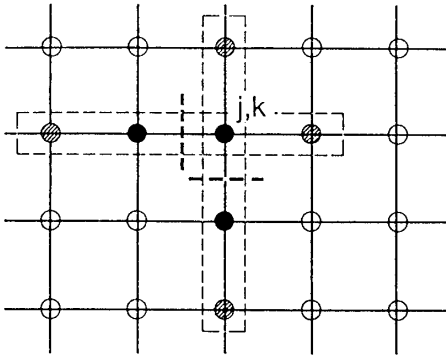
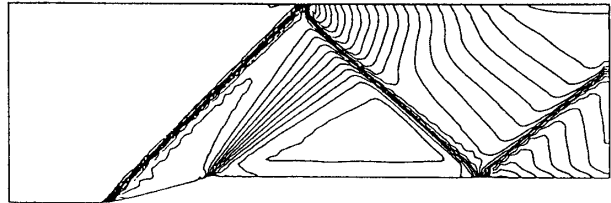
(c) $y=0.5$ 上のマッハ数分布

図2 従来の風上差分法による超音速ダクト内の流れの計算
(空間1次精度)



(a) 空間高次精度での点のとり方



(b) 等マッハ線図

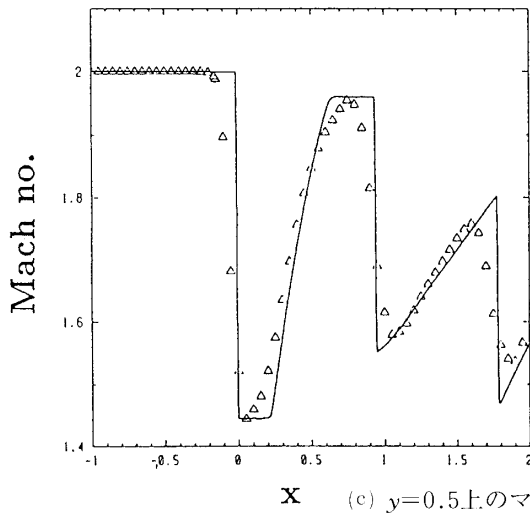
(c) $y=0.5$ 上のマッハ数分布

図3 従来の風上差分法による超音速ダクト内の流れの計算
(空間高次精度, 121×41)

$$q(x,y,t) = q(x-at, y-bt, 0) = q_0(x-at, y-bt) \quad (2.8)$$

と表わせる. (2.8)式に対する空間1次精度の風上差分は時間1次精度の陽的時間積分を用いて,

$$q_{j,k}^{n+1} = q_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{a-|a|}{2} q_{j+1,k}^n + |a| q_{j,k}^n - \frac{a+|a|}{2} q_{j-1,k}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\frac{b-|b|}{2} q_{j,k+1}^n + |b| q_{j,k}^n - \frac{b+|b|}{2} q_{j,k-1}^n \right) \quad (2.9)$$

と書ける. 2次元の場合でも輸送方向が x または y 軸に沿っていれば流れは実質1次元であるから, 前節の議論からクーラン数1で厳密解を与える. y 方向のクーラン数は,

$$v_y = \frac{|b| \Delta t}{\Delta y} \quad (2.10)$$

で与えられる. ところが, 流れが軸に沿わない場合, (2.8)式で表わされる厳密解はどのようなクーラン数をとっても格子点の値に一致しないので, 1次元での議論はもはや適用できない. 唯一の例外は x 及び y 方向のクーラン数が共に1の場合で, このときは,

$$v_x = \frac{|a| \Delta t}{\Delta x} = 1$$

$$v_y = \frac{|b| \Delta t}{\Delta y} = 1 \quad (2.11)$$

より,

$$a\Delta t = \pm \Delta x, \quad b\Delta t = \pm \Delta y \quad (\text{符号は風向きによる})$$

従って,

$$q_{j,k}^{n+1} = q_{j\pm 1, k\pm 1}^n \quad (2.12)$$

で格子点の値が厳密解になるのだが, 点 $j\pm 1, k\pm 1$ は(2.9)式に含まれていないので(2.9)式を用いる限りこの値は得られない. 2次元の場合の高次精度化は1次元からの拡張で, x 方向, y 方向それぞれ独立にとる格子点を増やして行う. 従って, 流れが軸に沿う場合には1次元の場合と同様になるが, 斜め方向に格子点がとられていないから, 流れが軸に沿わない場合は高次の多項式による厳密解の予測という見方は成り立たない. 特に, x, y 両方向のクーラン数が1の場合は格子点の値が厳密解であるにも関わらず, 高次精度化してもこの解は得られない.

この事情を図4に示す, ここで, ●は(2.9)式で用いられている点である. 一方, △の点は●と共に点 j, k を取り囲む点であるにも関わらず, (2.9)式には含まれていない. それは

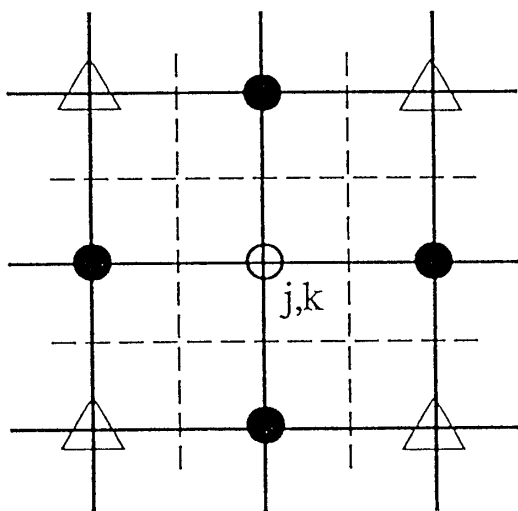


図4 構造格子での離散点のとり方

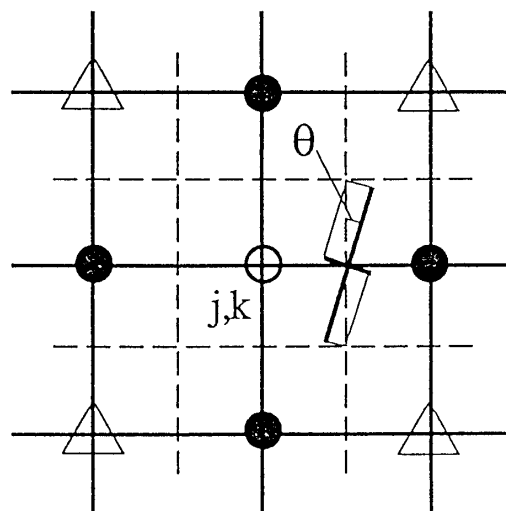
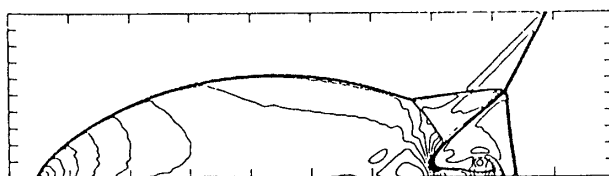
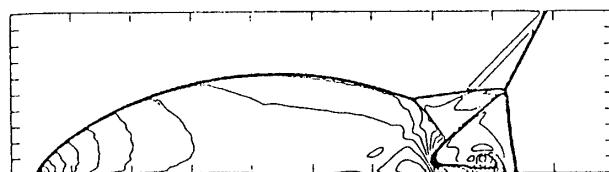


図5 既存の格子非依存スキームの離散点のとり方



(a) 従来の方法



(b) Colella の方法

図6 楔に入射する衝撃波の衝撃波の計算結果¹⁶⁾

格子線方向に高精度化しても同様である。そこで、離散化手法の改善法のひとつはこの△の点をどう考慮するかであると考えられる。これはすなわち格子非依存スキームである。しかし、既に提案されている格子非依存スキーム^{14)16)~19)23)24)}は、図5に点線で示されている仮想セルに対する流束の出入りを考える際、例えば、点 $j-1, k$ から j, k へ向かう流束を作る場合にこの2点ばかりでなく、点 $j-1, k-1$ など△の点も考慮することで斜め方向の影響を取り入れようとするものであるが、結局のところ、△の点と直接流束のやりとりはできないし、前章で述べたようにこれらの手法は期待されたほどの解像度の向上を与えていない。例えば、図6¹⁷⁾および図7¹⁹⁾に示した格子非依存スキームによる結果は目に見える改善を与えていない。前述のダクトを計算した Levy らの手法¹⁶⁾(図8(b))がこれらの中では最も優れていると考えられるが、それでも従来の方法との比較から分かるように斜め衝撃波を捉えるのに比較的多くの格子点を要している(図8)。

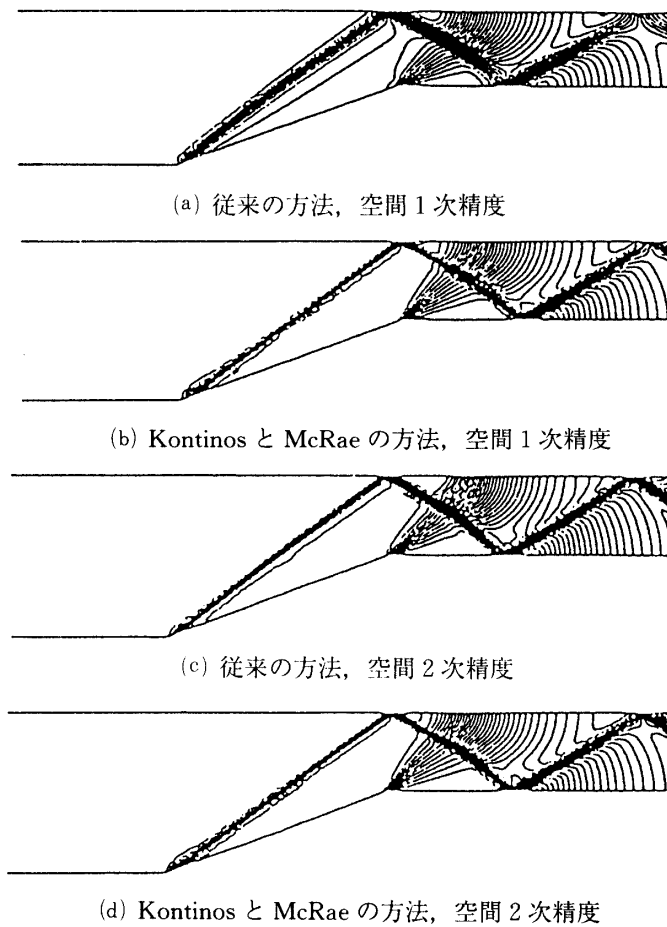
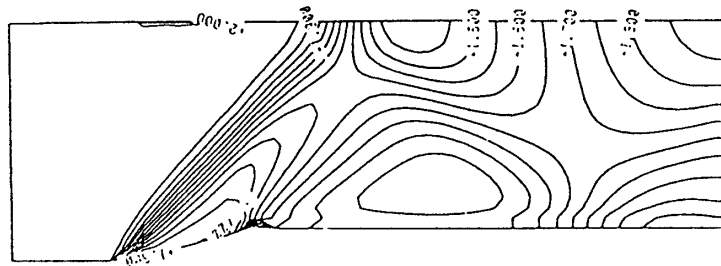


図7 超音速ダクト内の流れの計算結果¹⁸⁾(等圧力線図)

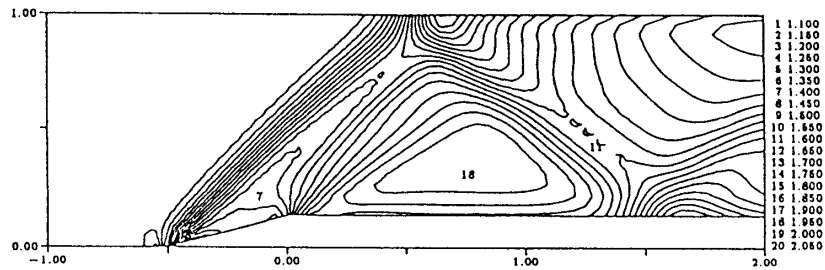
一方, 多次元近似リーマン解法に基づく方法^{20)~26)}も, 流束を評価する位置で多次元的に広がる波はやはり格子に沿わない方向にも伝わるはずであるから, 斜め点をなんらかの形で考慮する必要がある. 既発表のものうち斜めの点を全く考慮しない方法²⁵⁾⁵⁶⁾では, 物理量の不連続を捉える計算において図9, 図10に示すように不自然な振動を生じてしまう. 斜め点を考慮するが, 直接流束のやりとりがない Hirsch と Lacor の方法²⁴⁾でも, 若干の振動が確認される(図11).

格子点のまわりで流束を近似的に積分する際に, どのような境界面を考え, どの点での流束を代表値として選んで近似的に積分するかが多次元風上差分法の本質であるとするれば, 格子非依存スキームであれ, 多次元近似リーマン解法であれ, 既存の構造格子に基づく多次元風上差分はいずれも仮想セルの形状はそのままに, 流束の評価だけを変えることで対処しようとしたものであると考えることができる. しかし, 例えば斜めのセルと流束のやりとりができるようにと考えるならば, 仮想セルの形状を変える方がより直接的である.

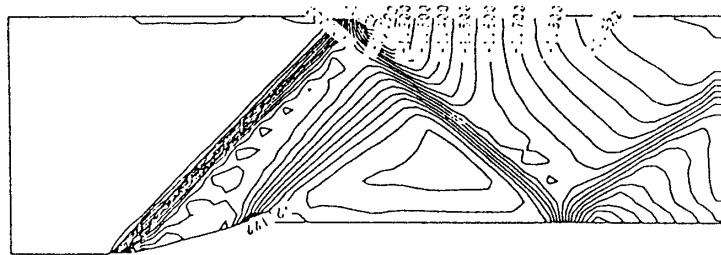
そこで本論文では多次元問題における解像度向上の本質は, 格子非依存スキームや近似リーマン解法の多次元化による流束評価法の変更よりも, 斜めのセルと流束の出入りが行えるような仮想セルの形状の動的な変更にあると考えて, 新しい格子非依存スキームの開発を



(a) 従来の方法, 空間1次精度



(b) Levy らの方法¹⁵⁾, 空間1次精度



(c) 従来の方法, 空間高次精度

図8 超音速ダクト内の流れの計算結果(等マッハ数線図)

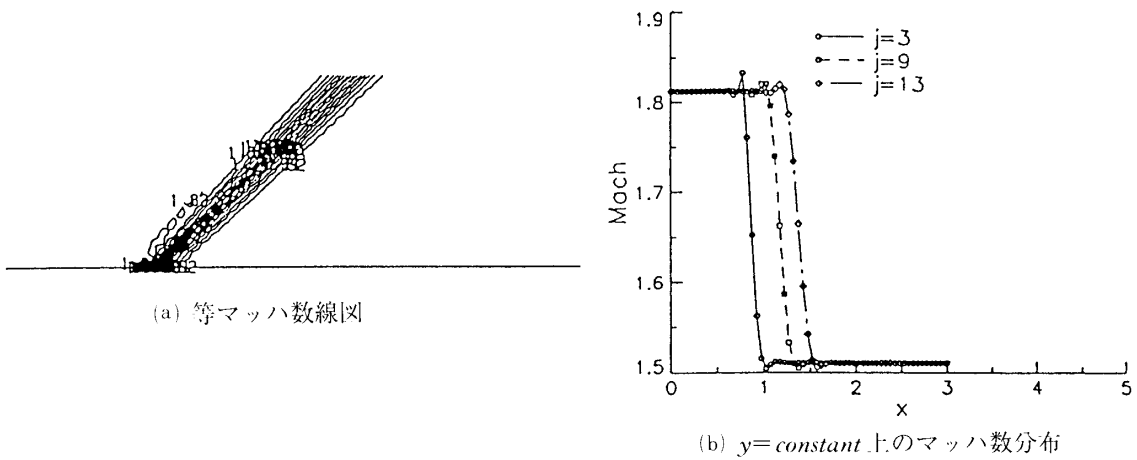


図9 Rumsey らによる斜め剪断流の計算結果²⁵⁾

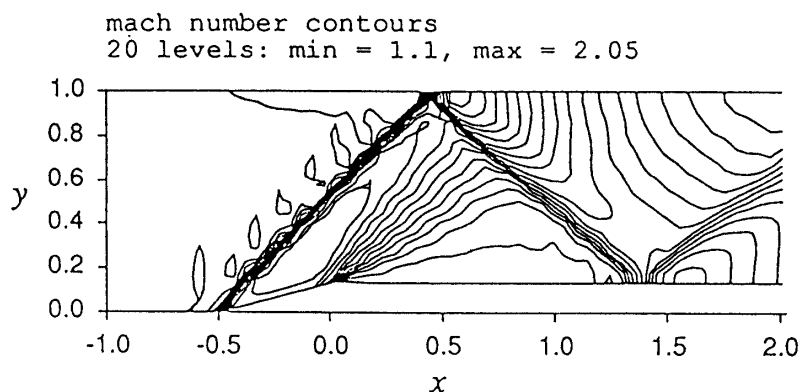
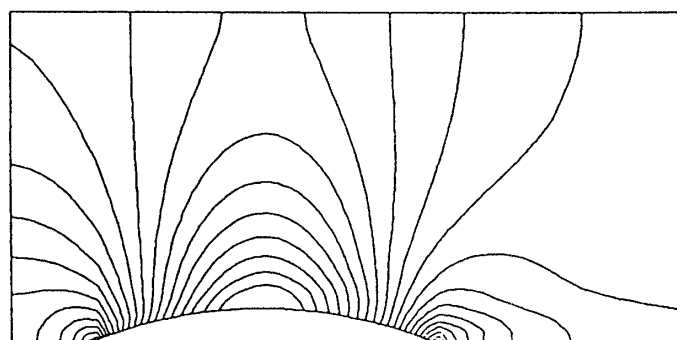
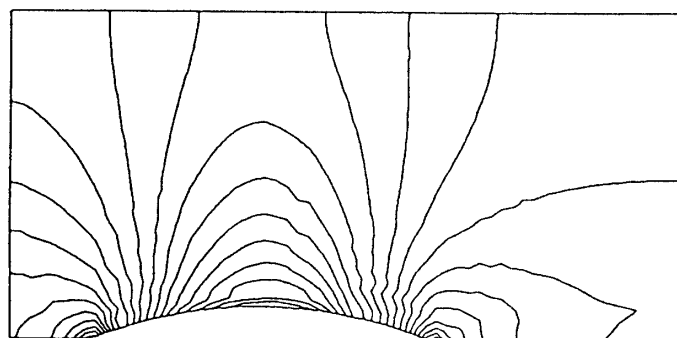


図10 Parpiaによる超音速ダクト内の流れの計算結果²⁶⁾(等マッハ数線図)



(a) 従来の方法



(b) Hirsch と Lacor の方法

図11 亜音速ダクト内の流れの計算結果²⁴⁾(等マッハ数線図)

行うことにした。次章では、斜めのセルとも流束のやりとりができるようにすることを念頭に置きながら、まず、スカラーの輸送方程式に対する本法の定式化を行う。

第3章 2次元スカラー輸送方程式に対する多次元風上差分法

3.1節 風見鶏法の実現方法

前章では、多次元性を考慮するためには斜めのセルと流束のやりとりができるようにする

ことが必要であると結論された。そこで、本節ではそのための具体的な方法を議論する。

再度、図4を見てみると、点線で示された仮想セルは、格子線上に隣り合うセルとは有限の長さの境界面で接しているが、斜めのセルとは点でのみ接しているため流束の出入りが無い。そこで、斜めのセルと流束のやりとりをするためには、斜めのセルとの境界面を有限の長さにとらなければならない。しかし、一口に有限の長さと言っても任意性があるため、これを規定するなんらかの指針が必要である。

ここで重要になるのが序論で触れた風見鶏法と名付けられた概念である。風見鶏法の内容は、そのときそのときの風向きに合うように個々の仮想セルが格子点を中心に自由に回転すると考えるもの(図12)である。しかし、実際に仮想セルの形を図12に示すようにとろうとすると、隣の仮想セルとの境界面が一致しないなどの不都合が生じてしまう。そこで、ここでは実際に仮想セルを回転させるのではなく、それと等価な流束の出入りが起こるように、仮想セルの境界面の向きと長さのみを設定し(図13)、仮想セル自体は面積を一定とする以外は、特に何も規定しないことにする。他の多次元風上差分法を含む従来の離散化手法のほとんどすべてが仮想セルの形状を図4のように厳格に守って、それに対して流束の出入りを評価していたから、セルの具体的な形状を与えないことには何か不都合があるようにも思われるが、実際にスキームが必要とするのはセルの面積、各セル境界面の長さとのみで、例えば紙の上で仮想セルの形が描けなければならないといったものではない。そもそも、仮想セルはいわばその中心の格子点の影響領域ないしは守備範囲を表わすようなものであって、その形状には本来任意性があってしかるべきである。言い換えると、ある与えられた分布の格子点に対してスキームを考えるとき、計算する前からこの点とは流束のやりとりがあり、この点とは無い、などと決めてしまうこと自体が不自然である。

そこで、次節以降ではこの考えに基づいてスカラー輸送方程式に対する風見鶏法の定式化を行う。

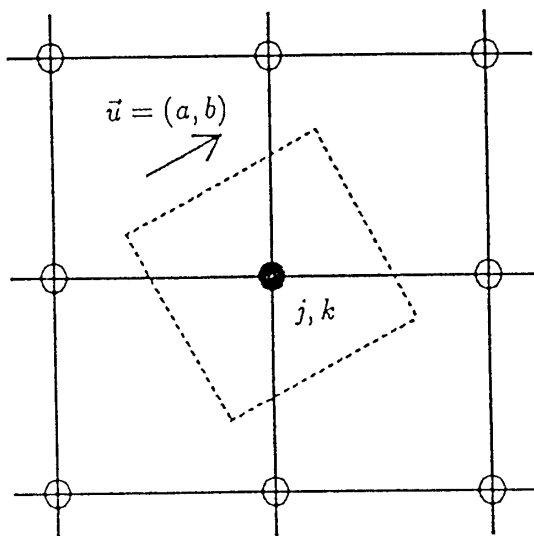


図12 風見鶏法の内容

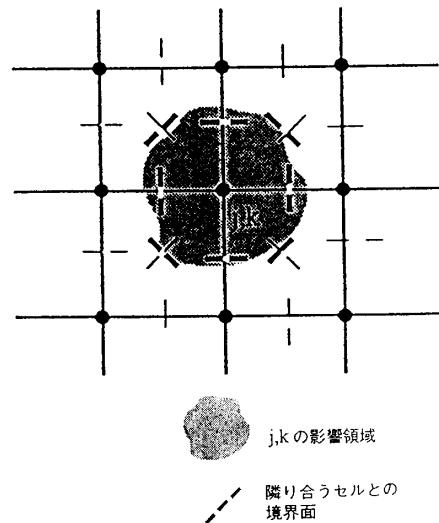


図13 本法での仮想セルの規定

3.2節 風見鶏法の定式化(線形問題)

本節では2次元の線形スカラー輸送方程式に対する空間1次精度の風見鶏法の定式化を行う。基礎方程式の(2.7)式を再度書くと、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

である。もし、輸送速度 $\vec{u} = (a, b)$ が定数ならば(2.7)式の解は前章で示したように、

$$q(\vec{x}, t) = q(\vec{x} - \vec{u}t, 0)$$

で与えられる。1次元の類推から、時間1次精度陽的積分(オイラー陽解法)で空間1次精度の風上差分はクーラン数1で厳密解を与えるのがもっとも望ましい。もちろん、これも前章で見たようにあらゆる流れの方向に対して厳密解を得ることは原理的に不可能であるが、できるだけこれに近づけるよう、逆にクーラン数1で厳密解という条件から差分をとることを考えてみる。

図14のような場合を考える。格子は正方格子だが Δx と Δy は同じでなくともよい。また、 $\frac{a}{\Delta x} > \frac{a}{\Delta y} > 0$ すなわち、相対的に x 方向の流れが速い場合を考える。それ以外の場合にも同様の議論ができることは後に示す。この場合クーラン数は x 方向で決まるので、クーラン数を1としたとき次の時刻の $n+1$ ステップでは×印の値が点 (j, k) に輸送されるのが厳密解である。風見鶏法の考えに基づいて格子が局所的な風向きに応じて回転し、境界面が輸送方向に垂直になっていると考え、そのときの境界面の長さを Δs と仮定すると、点×から点 (j, k) に流入する流束 F_{in} は風上側の値 $q_{j,k}^n$ をとって、 $F_{in} = q_{j,k}^n u \Delta s$ であり、一方、点 (j, k) から流出する流束 F_{out} は同様にして、 $F_{out} = q_{j,k}^{n+1} u \Delta s$ となる。

これらに垂直な方向の流束はないから、結局 $q_{j,k}^{n+1}$ は、

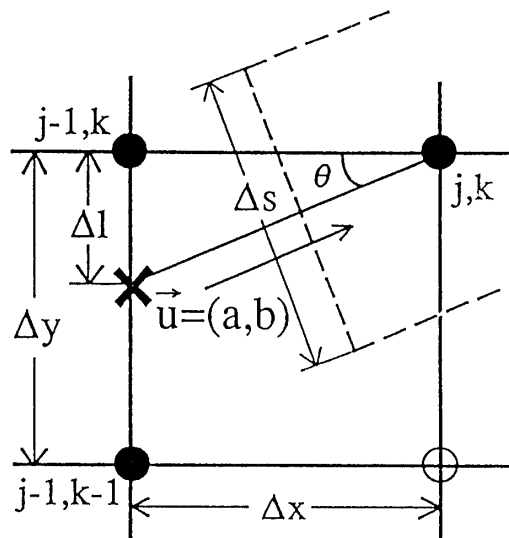


図14 風上の考え方

$$\begin{aligned} q_{j,k}^{n+1} &= q_{j,k}^n - \Delta t (F_{out} - F_{in}) / (\Delta x \Delta y) \\ &= q_{j,k}^n \left(1 - \frac{u \Delta s \Delta t}{\Delta x \Delta y} \right) + q_{\times}^n \frac{u \Delta s \Delta t}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

クーラン数1のときの時間刻みは $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$ になるから、

$$q_{j,k}^{n+1} = q_{j,k}^n \left(1 - \frac{\Delta s}{\cos \theta \Delta y} \right) + q_{\times}^n \frac{\Delta s}{\cos \theta \Delta y}$$

このときの厳密解である $q_{j,k}^{n+1} = q_{\times}^n$ を代入して変形すると、

$$(q_{\times}^n - q_{j,k}^n) \left(1 - \frac{\Delta s}{\cos \theta \Delta y} \right) = 0$$

従って、 $\Delta s = \cos \theta \Delta y$ ととれば、 q_{\times}^n の値が厳密に分かるときにはあらゆる輸送方向に対してクーラン数1で厳密解を与える。実際には離散化しているため再三述べているように×印の点の値は厳密には分からない。そこで、1次元の高次精度化がそうであったように、補間により格子点の値を予測する。空間1次精度の範囲で簡単に $q_{j-1,k-1}^n$ と $q_{j-1,k}^n$ の荷重平均でよいとすれば点×の値 q_{\times}^n は、

$$a = u \cos \theta, \quad b = u \sin \theta, \quad \Delta l = \Delta x \tan \theta = \frac{b}{a} \Delta x$$

より、

$$q_{\times}^n = \left(1 - \frac{b \Delta x}{a \Delta y} \right) q_{j-1,k}^n + \frac{b \Delta x}{a \Delta y} q_{j-1,k-1}^n \quad (3.2)$$

で与えられる、これを用いて、

$$\begin{aligned} F_{in} &= q_{\times}^n u \cos \theta \Delta y = q_{\times}^n a \Delta y \\ &= \left(1 - \frac{b \Delta x}{a \Delta y} \right) q_{j-1,k}^n a \Delta y + \frac{b \Delta x}{a \Delta y} q_{j-1,k-1}^n a \Delta y \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} F_{out} &= q_{j,k}^n u \cos \theta \Delta y \\ &= q_{j,k}^n a \Delta y \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。なお、線形で空間1次精度の場合の風見鶏法が導出方法は異なるが既に提案されている格子非依存スキームと結果的に一致することを示しておく。上の2式を(3.1)式に代入して変形すると、

$$\frac{q_{j,k}^{n+1} - q_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} (q_{j,k}^n - q_{j-1,k}^n) + \frac{b}{\Delta y} (q_{j-1,k}^n - q_{j-1,k-1}^n) = 0 \quad (3.5)$$

を得る。これは、(23)、(24)で用いられている格子非依存スキームに一致する。(23)、(24)によれば、(3.5)式は線形問題に適用した場合のRiceとSchnipkeの流線風上差分法(Streamline Upwind Scheme)³¹⁾とも一致する。ただし、3.1節でも述べたようにこれらのスキームは斜めのセルとの流束の出入りを考えた結果ではないので、非線形問題や高次精度化、システムの方程式への拡張などで本法とは本質的に異なってくる。また、(23)、(24)によれば、(3.5)式は従来の空間1次精度風上差分より解像度が高くしかもmonotoneである。線形で空間1次精度の風見鶏法に対する数学的な評価は補遺Aで詳しく述べることにするが、重要な結論の一つは本風見鶏法が従来の方法よりより大きいクーラン数で安定な点である。

いまは×印の点での値の補間という考え方から(3.1)、(3.3)及び(3.4)式を導いたが、次に、前節の検討とも考え合わせ、まわりのセルとの流束のやりとりという観点でこの離散化を見てみる。(3.1)式を書き直すと、

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{b \Delta x}{a \Delta y} \right) q_{j-1,k}^n u \Delta s + \frac{b \Delta x}{a \Delta y} q_{j-1,k-1}^n u \Delta s \right] \quad (3.6)$$

ここで、 $\Delta q_{j,k}^n = q_{j,k}^{n+1} - q_{j,k}^n$ である。まず、右辺の大括弧内の第1項はセル(j,k)から流出する流束である。第2項はセル(j-1,k)から流出する流束の一部(小括弧内がその係数)がセル(j,k)に流入することを示していると考えられる。それでは残りの流束はどこへ行ったのか？ この場合 $a, b > 0$ を仮定しているから、残りは当然セル(j, k+1)に流入すると見るべきであろう。第3項も同様にセル(j-1, k-1)からセル(j,k)に流入する流束を表わしている。逆にセル(j,k)から流出した流束がどこに流れ込むかと言えば、 $(1 - \frac{b \Delta x}{a \Delta y})$ はセル(j+1, k)に、 $\frac{b \Delta x}{a \Delta y}$ はセル(j+1, k+1)に流入すると考えてよい。すると、見方を変えると本法の離散化は、あるセルから流出する流束を、そのセルを取り囲む8つのセルの内の隣合う2つに分配するものだと考えられる(図15)。従って、この時点で既に格子を回転させなが

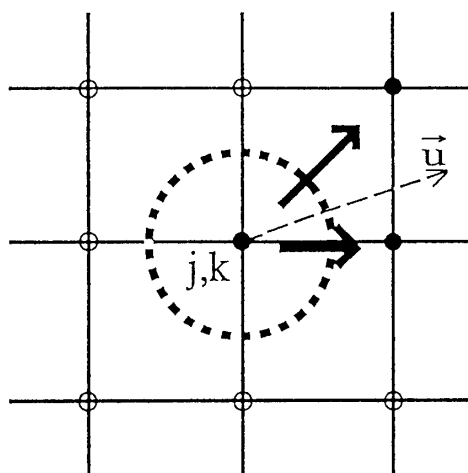


図15 流束の分配

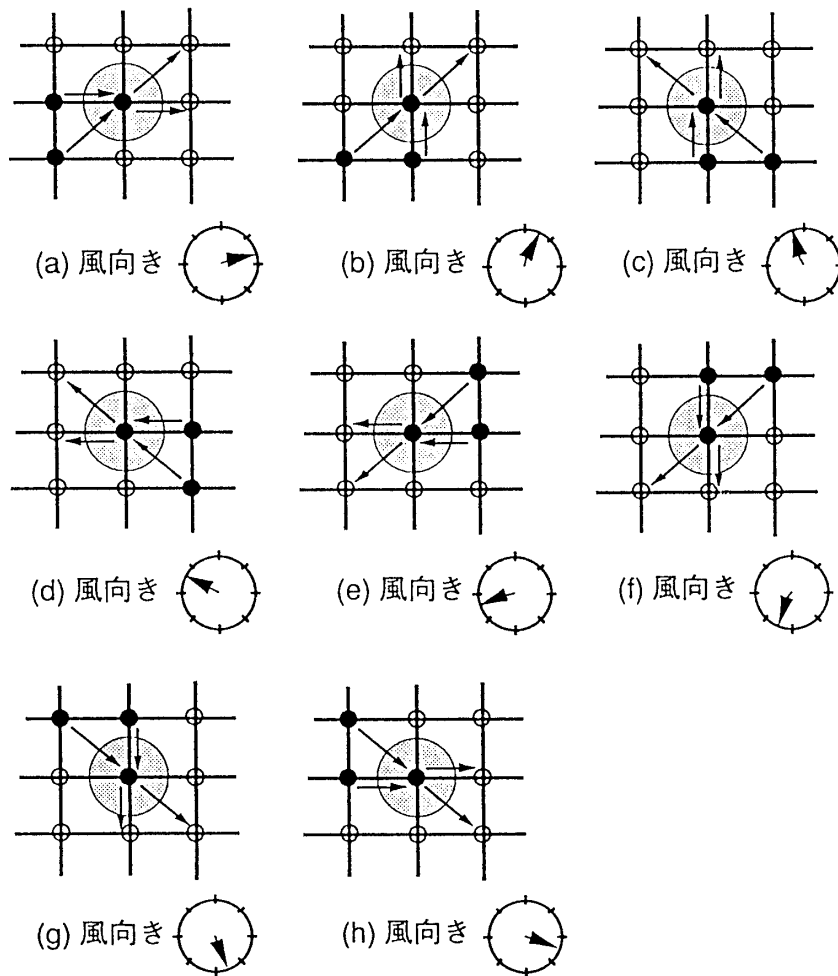


図16 風向きとセルの選択の関係

ら、斜めのセルと流束のやりとりを行うという要件は満たされている。

最後に、 $\frac{a}{\Delta x}$ と $\frac{b}{\Delta y}$ の残りの組合せについて示す。図16から分かるように、まわりの8つのセル内、隣合う2つを選ぶ組合せは8通りある。(a)の $\frac{a}{\Delta x} \geq \frac{b}{\Delta y} \geq 0$ の場合は既に示したように、

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} \right) q_{j-1,k}^n u \Delta s + \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} q_{j-1,k-1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7a)$$

$$\left(\text{但し, } \frac{a}{\Delta x} \geq \frac{b}{\Delta y} \geq 0, \Delta s = \frac{|a| \Delta y}{u} \right)$$

である。図ではセル (j,k) から流出する流束を2つに分けているが、式ではまとめて書いている。残りの(b)-(h)も本節の議論に従えばそれぞれ、

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} \right) q_{j,k-1}^n u \Delta s + \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} q_{j-1,k-1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7b)$$

$$\left(\text{但し, } \frac{b}{\Delta y} \geq \frac{a}{\Delta x} \geq 0, \Delta s = \frac{|b| \Delta x}{u} \right)$$

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} \right) q_{j,k-1}^n u \Delta s + \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} q_{j+1,k-1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7c)$$

$$\left(\text{但し, } \frac{b}{\Delta y} \geq -\frac{a}{\Delta x} \geq 0, \Delta s = \frac{|b| \Delta x}{u} \right)$$

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} \right) q_{j+1,k}^n u \Delta s + \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} q_{j+1,k-1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7d)$$

$$\left(\text{但し, } -\frac{a}{\Delta x} \geq \frac{b}{\Delta y} \geq 0, \Delta s = \frac{|a| \Delta y}{u} \right)$$

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} \right) q_{j+1,k}^n u \Delta s + \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} q_{j+1,k+1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7e)$$

$$\left(\text{但し, } -\frac{a}{\Delta x} \geq -\frac{b}{\Delta y} \geq 0, \Delta s = \frac{|a| \Delta y}{u} \right)$$

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} \right) q_{j,k+1}^n u \Delta s + \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} q_{j+1,k+1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7f)$$

$$\left(\text{但し, } -\frac{b}{\Delta y} \geq -\frac{a}{\Delta x} \geq 0, \Delta s = \frac{|b| \Delta x}{u} \right)$$

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} \right) q_{j,k+1}^n u \Delta s + \frac{|a| \Delta y}{|b| \Delta x} q_{j-1,k+1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7g)$$

$$\left(\text{但し, } -\frac{b}{\Delta y} \geq \frac{a}{\Delta x} \geq 0, \Delta s = \frac{|b| \Delta x}{u} \right)$$

$$\Delta q_{j,k}^n \Delta x \Delta y = \Delta t \left[-q_{j,k}^n u \Delta s + \left(1 - \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} \right) q_{j-1,k}^n u \Delta s + \frac{|b| \Delta x}{|a| \Delta y} q_{j-1,k+1}^n u \Delta s \right] \quad (3.7h)$$

$$\left(\text{但し, } \frac{a}{\Delta x} \geq -\frac{b}{\Delta y} \geq 0, \Delta s = \frac{|a| \Delta y}{u} \right)$$

となる．ここでは簡単のため8つに分けた式を示したが，実際には1次元の空間1次精度の風上差分と同様に流速の各成分の絶対値などを用いて1つの式で表わすこともでき，プログラミング上もそうになっているが，本節の説明では省略する．

3.3 節 風見鶏法の定式化 (非線形問題)

前節では線形問題に対して風見鶏法の定式化を行ったが，本節ではこれを非線形問題に拡張する．流速 \vec{u} が空間(と時間)の関数であるとする．この場合，セルは平均の流速の方向に回転するのが適当と考えられる．今度はセルの回転方向に垂直な方向の流束は小さいが存在する．そこで，ここでは平均の流速方向とこれに垂直な方向の流束を別々に考えることにする．線形の場合に本法で決まるセル (j,k) に流入する流束を $F_{in}(j,k; q, \vec{u})$ ，セル (j,k) より流出する流束を $F_{out}(j,k; q, \vec{u})$ と書く，ここで， j,k はセルの番号， q はセル (j,k) とまわりのセルでの物理量， \vec{u} は流速で，例えば $\frac{a}{\Delta x} \geq \frac{b}{\Delta y} \geq 0$ の場合は(3.3)及び(3.4)式になる．回転したセルの面に垂直な方向の単位ベクトルを \vec{e}_n ，セルの面に沿う方向の単位ベクトルを \vec{e}_t とすると，非線形の場合に流入する流束ベクトル \vec{F}_{in} は，

$$\begin{aligned} \vec{F}_{in}(j,k) &= F_n(j,k) \cdot \vec{e}_n + F_t(j,k) \cdot \vec{e}_t \\ &= F_{in}(j,k; q, (\vec{u} \cdot \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n + F_{in}(j,k; q, (\vec{u} \cdot \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_t \end{aligned} \quad (3.8a)$$

流出するベクトルについては，

$$\begin{aligned} \vec{F}_{out}(j,k) &= F_n(j,k) \cdot \vec{e}_n + F_t(j,k) \cdot \vec{e}_t \\ &= F_{out}(j,k; q, (\vec{u} \cdot \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n + F_{out}(j,k; q, (\vec{u} \cdot \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_t \end{aligned} \quad (3.8b)$$

となる．(3.8)式は $\vec{e}_n // \vec{u}$ ならば線形の場合の(3.3)，(3.4)式などに， $\vec{e}_n = \vec{e}_1$ (x 方向の単位ベクトル)ならば既存の格子方向の空間1次精度の風上差分に一致する．

線形問題では簡単にセルの回転方向という形でセル境界面の向きを考えてきたが，非線形問題では場所場所で輸送方向が異なる．流束を求めるセルの境界面での輸送方向が重要であると考えらるなら，セル全体を1方向に回転させるよりも，図14から分かるように，それぞれの境界面を含む含む格子セル(4つの格子点を頂点に持つ4角形)ごとに輸送方向を求めた方がよい．そこで，実際には各格子セルの中心で4つの格子点での値の算術平均としてセル境界面での平均的な輸送方向を決定する．従って，セル (j,k) の境界面の回転方向はその右上，右下，左上，左下の各部分で必ずしも同じにはならないが，それによって保存則が崩れることはない．

そこで，格子セルごとにセル境界面の向きを定めて流束を評価することになると．図17に示すように1つの格子セル内を通過する平均流速方向の流束は全部で3つになる．例えば(a)の $\frac{a}{\Delta x} > \frac{b}{\Delta y} > 0$ の場合にはそれらは，セル $(j-1,k)$ からセル (j,k) への流束 F_{r1} ，セル $(j-1, k-1)$ からセル (j,k) への流束 F_l 及びセル $(j-1, k-1)$ からセル $(j, k-1)$ への流束 F_{r1} である．まとめると，

$$\begin{aligned} F(j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} F_{r1} + F_l + \frac{1}{2} F_{r1} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b \Delta x}{a \Delta y} \right) q_{j-1, k} \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u}_{j-1, k}) \vec{a}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \Delta y \end{aligned} \quad (3.9)$$

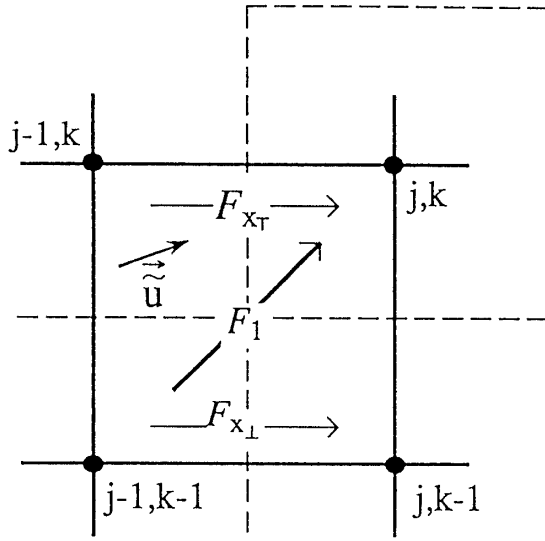


図17 格子セル内の流束

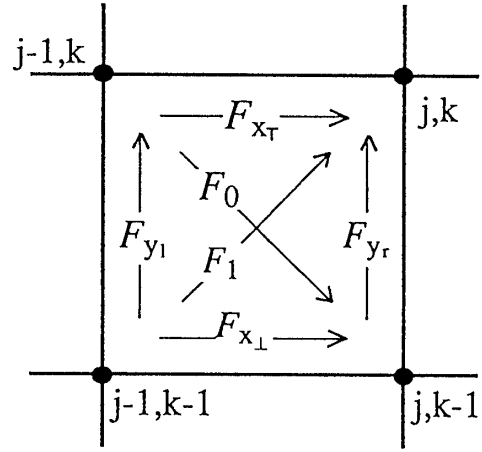


図18 最終的な流束の分配法

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\tilde{b} \Delta x}{\tilde{a} \Delta y} q_{j-1, k-1} \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u}_{j-1, k-1}) \tilde{a}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \Delta y \\
 & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{b} \Delta x}{\tilde{a} \Delta y} \right) q_{j-1, k-1} \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u}_{j-1, k-1}) \tilde{a}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \Delta y
 \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{u} = (\tilde{a}, \tilde{b})$ は平均の流速である。また、 x 方向の流束 $F_{x\top}$ 及び $F_{x\perp}$ がそれぞれ $\frac{1}{2}$ になっているのは、この格子セル内で局所的な保存則を満足するためであるが、直観的にこれらの流束のその上下の格子セルに対する寄与が均等になっていると考えることもできる。局所的な保存則に関しては、一般座標の場合も含めて補遺Bに詳しく述べる。

もちろん、流速の方向が一定であれば、(3.9)式は(3.3)、(3.4)式や(3.6)式と同じになる。また、これに垂直な方向の流束は \vec{u} を $\vec{v} = (-\tilde{b}, \tilde{a})$ で置き換えて考えることによって得られる。従って、最終的には図18に示すように1つの格子内で6つの流束成分を評価することになる。(3.7)式を(3.8)式に代入し、多少の変形を施すと結局、

$$\begin{aligned}
 F_{x\top} = & \max(|\tilde{a}| \Delta y - |\tilde{b}| \Delta x, 0) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{jp, k}|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, k} \\
 & + \max(|\tilde{b}| \Delta y - |\tilde{a}| \Delta x, 0) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_{jp, k}|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, k} \\
 & \text{if } (a_{j-1, k} + a_{j, k}) \geq 0 \quad \text{then } jp = j-1 \\
 & \quad \quad \quad \text{else } \quad \quad \quad jp = j
 \end{aligned} \tag{3.10a}$$

$$\begin{aligned}
 F_{x\perp} = & \max(|\tilde{a}| \Delta y - |\tilde{b}| \Delta x, 0) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{jp, k-1}|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, k-1} \\
 & + \max(|\tilde{b}| \Delta y - |\tilde{a}| \Delta x, 0) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_{jp, k-1}|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, k-1} \\
 & \text{if } (a_{j-1, k-1} + a_{j, k-1}) \geq 0 \quad \text{then } jp = j-1 \\
 & \quad \quad \quad \text{else } \quad \quad \quad jp = j
 \end{aligned} \tag{3.10b}$$

$$\begin{aligned}
F_{yl} = & \max(|\bar{b}|\Delta x - |\bar{a}|\Delta y, 0) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{j-1, kp}|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^{k-1-kp} q_{j-1, kp} \\
& + \max(|\bar{a}|\Delta x - |\bar{b}|\Delta y, 0) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_{j-1, kp}|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^{k-1-kp} q_{j-1, kp} \\
& \text{if } (b_{j-1, k-1} + b_{j-1, k}) \geq 0 \quad \text{then } kp = k-1 \\
& \quad \quad \quad \text{else } kp = k
\end{aligned} \tag{3.10c}$$

$$\begin{aligned}
F_{yr} = & \max(|\bar{b}|\Delta x - |\bar{a}|\Delta y, 0) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{j, kp}|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^{k-1-kp} q_{j, kp} \\
& + \max(|\bar{a}|\Delta x - |\bar{b}|\Delta y, 0) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_{j, kp}|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^{k-1-kp} q_{j, kp} \\
& \text{if } (b_{j, k-1} + b_{j, k}) \geq 0 \quad \text{then } kp = k-1 \\
& \quad \quad \quad \text{else } kp = k
\end{aligned} \tag{3.10d}$$

$$\begin{aligned}
F_l = & \text{sign}^+(\bar{a} \cdot \bar{b}) \min(|\bar{a}|\Delta y, |\bar{b}|\Delta x) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{jp, kp}|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, kp} \\
& + \text{sign}^-(\bar{a} \cdot \bar{b}) \min(|\bar{b}|\Delta y, |\bar{a}|\Delta x) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_{jp, kp}|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, kp}
\end{aligned} \tag{3.10e}$$

$$\text{if } (a_{j-1, k-1} + b_{j-1, k-1} + a_{j, k} + b_{j, k}) \geq 0 \quad \text{then } jp = j-1, kp = k-1 \\
\quad \quad \quad \text{else } jp = j, kp = k$$

$$\begin{aligned}
F_0 = & \text{sign}^-(\bar{a} \cdot \bar{b}) \min(|\bar{a}|\Delta y, |\bar{b}|\Delta x) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_{jp, kp}|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, kp} \\
& + \text{sign}^+(\bar{a} \cdot \bar{b}) \min(|\bar{b}|\Delta y, |\bar{a}|\Delta x) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_{jp, kp}|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^{j-1-jp} q_{jp, kp} \\
& \text{if } (a_{j-1, k} - b_{j-1, k} + a_{j, k-1} - b_{j, k-1}) \geq 0 \quad \text{then } jp = j-1, kp = k \\
& \quad \quad \quad \text{else } jp = j, kp = k-1
\end{aligned} \tag{3.10f}$$

を得る。ただし、ここで $\max(\cdot, \cdot)$ および $\min(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ大きい方、小さい方を選ぶ関数、 $\text{sign}^+(\cdot)$ および $\text{sign}^-(\cdot)$ はそれぞれ引数が正および負のとき 1、それ以外では 0 をとる関数である。

3.4 節 高次精度化

本節では風見鶏法の高次精度化を行う。まず、従来の格子に依存した風上差分では、1次元の場合に倣って格子線に沿って、あるいは流束の方向に多くの点をとって1次元的に高次精度の流束を求めていた。もちろん、このとき不連続付近で振動を生じないようにするためスキームに工夫をしている。例えば、10)では1次精度で、セル (j, k) とセル $(j+1, k)$ の境界の流束 $F = a \cdot q$ が、

$$F_{j+\frac{1}{2},k} = \begin{cases} a \cdot q_{j,k} & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ a \cdot q_{j+1,k} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (3.11)$$

であるのに対して、MUSCL法と呼ばれる内挿によって、

$$F_{j+\frac{1}{2},k} = \begin{cases} a \cdot (q_L)_{j+\frac{1}{2},k} & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ a \cdot (q_R)_{j+\frac{1}{2},k} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} (q_L)_{j+\frac{1}{2},k} &= q_{j,k} + \frac{s_j}{4} [(1-\kappa) \nabla_j + (1+\kappa) \Delta_j] \\ (q_R)_{j+\frac{1}{2},k} &= q_{j+1,k} + \frac{s_{j+1}}{4} [(1+\kappa) \nabla_{j+1} + (1-\kappa) \Delta_{j+1}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

ただし、

$$\nabla_j = q_{j,k} - q_{j-1,k}, \quad \Delta_j = q_{j+1,k} - q_{j,k}$$

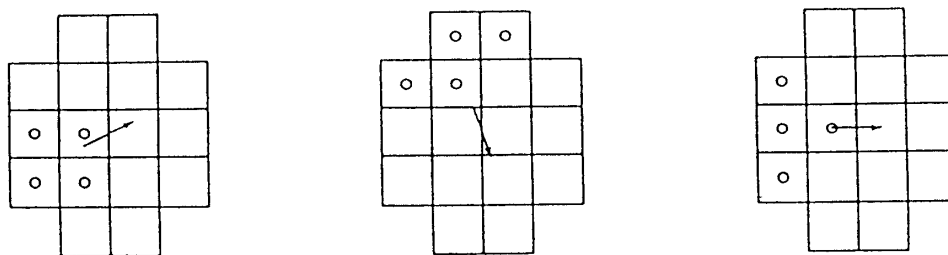
とすることで高次精度化している。添字の L 及び R はセルの境界面の左右の状態であることを示す。また、 s_j は勾配制限関数 (slope limiter) と呼ばれ、不連続など物理量が急変する領域でスキームを最大1次精度まで落とす関数である。例えば Koren の制限関数³²⁾では、

$$s_j = \frac{3 \Delta_j \nabla_j + \varepsilon}{2 (\nabla_j - \Delta_j)^2 + 3 \Delta_j \nabla_j + \varepsilon}$$

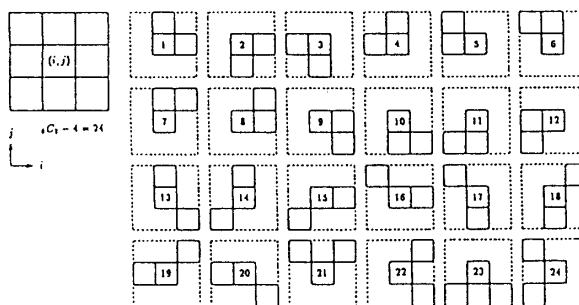
である。 ε は0割りを防ぐため微小な値を入れておく。(3.13)式から分かるように $s_j=0$ でスキームは1次精度に落ちる。一方、 $s_j=1$ では高次の線形スキームになり、 $\kappa=-1$ とすれば2次精度風上差分、 $\kappa=1/3$ で3次精度風上差分、 $\kappa=1$ で中心差分を得る。実際には流れの局所的な状態に応じて s_j は0から1の値をとるので、流れが極めて滑らかに変化している場所では高次の線形スキーム、逆に流れが急変している場所では1次の風上差分、中間的な領域ではこれらスキームの中間の値をとることになる。

κ の選択は、境界面の左右のセルの内部の物理量の分布を何次の多項式で近似するかに相当すると考えることもできる。一般に、空間何次精度という場合にはこの勾配制限関数は忘れて、線形の状態での次数を指すことが多い。このように、MUSCL法ではセルの境界面の両側での物理量を高次に内挿することで高次精度の流束を得ている。

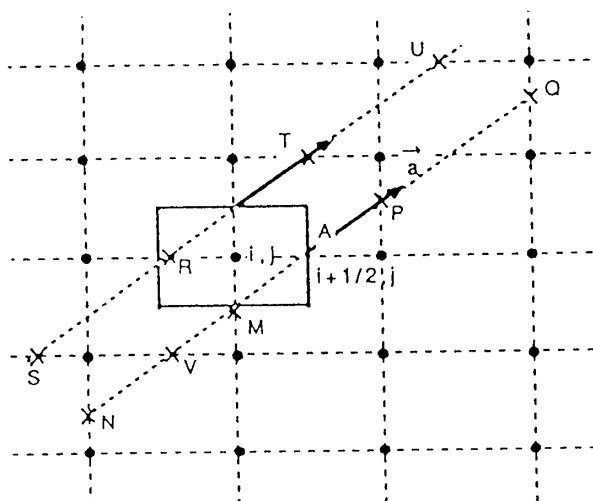
1次元では、あるいは格子線に沿っては、セル境界の両側にとる点を機械的に増やせばよいが、多次元問題では考えている点のまわりのどの点を選ぶかにはかなり自由度がある。1つの考えは、16)や28)のように、考えているセルのまわりに2次的に点をとって高次精度化する方法である。この場合、図19(a), (b)に示すように点の選び方には任意性があるので、風向きや物理量の勾配といった適当な評価関数によって点のとり方を決めている。もうひとつの考えは、24)のように、流束の方向に引いた直線上で必ずしも格子点でない位置での物理量を補間によって逐次求め、これらを用いて1次的に高次精度化する方法(図19(c))である。前者には点の選択が最適か否かが分からないという問題があり、一方、後者は演算量の増大が懸念される。しかも、いずれも monotonicity の確保に関して曖昧な記述にとどまっ



(a) Levy ら¹⁵⁾



(b) Sawada²⁷⁾



(c) Hirsch ら²³⁾

図19 高次精度化のための点の選び方の例

ている¹⁶⁾²⁴⁾²⁸⁾.

そこで、本風見鶏法ではこれらと異なる方法で高次精度化を行う。前節で示したように風見鶏法では結局、個々の格子セル内での6つの流束成分を(3.10)式により評価していた。従って、本法の高次精度化は、これら6つの流束をそれぞれ高次精度化することで達せられる。しかも、それぞれの流束が上下左右斜めに隣合うセルとの間での流束になっているから、図20に示すように、 F_{xT} 及び F_{xL} については x 軸沿い、 F_{yI} 及び F_{yR} については y 軸沿い、 F_1 と F_0 についてそれぞれ斜め方向に1次的に高次精度化することには何の不都合もない、従って、本法では1次元のすべての高次精度化の手法が適用可能であるが、ここでは(3.12)及び

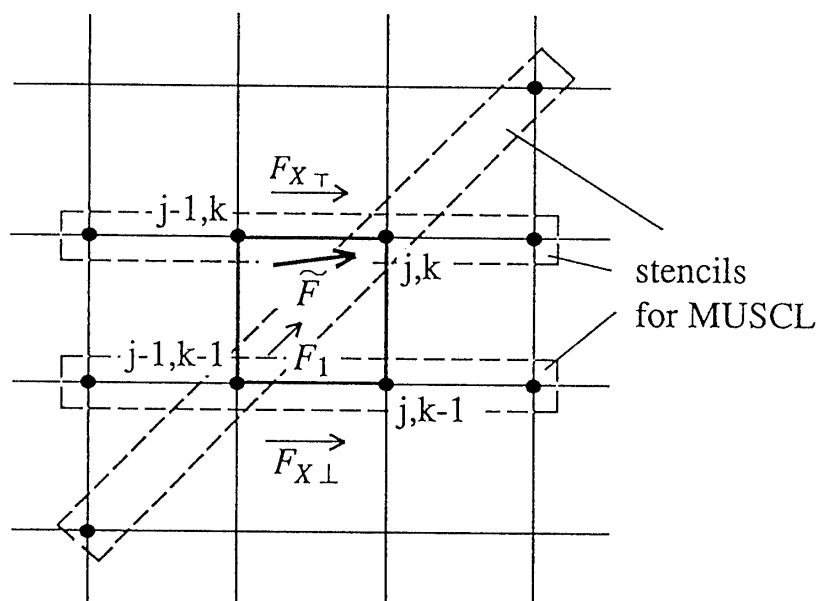


図20 本法での高次精度化

(3.13)式で示した MUSCL 法により高次精度化した。複雑になるため (3.10)式に対応するすべての式を挙げることは避け、(3.10a)式に対応する高次精度の流束のみ示しておく、

$$\begin{aligned}
 F_{x\tau} = & \max(|\bar{a}|\Delta y - |\bar{b}|\Delta x, 0) \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_M|}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (-1)^m q_M \\
 & + \max(|\bar{b}|\Delta y - |\bar{a}|\Delta x, 0) \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}_M|}{\vec{v} \cdot \vec{v}} (-1)^m q_M \\
 & \text{if } a_M \geq 0 \quad \text{then } q_M = q_L, m = 0 \\
 & \quad \quad \quad \text{else } q_M = q_R, m = 1
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 q_L = & q_{j-1, k} + \frac{s_{j-1}}{4} [(1 - \kappa) \nabla_{j-1} + (1 + \kappa) \Delta_{j-1}] \\
 q_R = & q_{j, k} - \frac{s_j}{4} [(1 + \kappa) \nabla_j + (1 - \kappa) \Delta_j]
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla_j = q_{j, k} - q_{j-1, k}, \quad \Delta_j = q_{j+1, k} - q_{j, k}$$

$$s_j = \frac{3\Delta_j \nabla_j + \varepsilon}{2(\nabla_j - \Delta_j)^2 + 3\Delta_j \nabla_j + \varepsilon}$$

とした。セル境界面での輸送速度 $\vec{u}_M (= (a_M, b_M))$ は、場のみの滑らかな関数であれば単純な補間などで解析的に求めてもよいし、 q_M と同様に MUSCL 法により内挿してもよい。

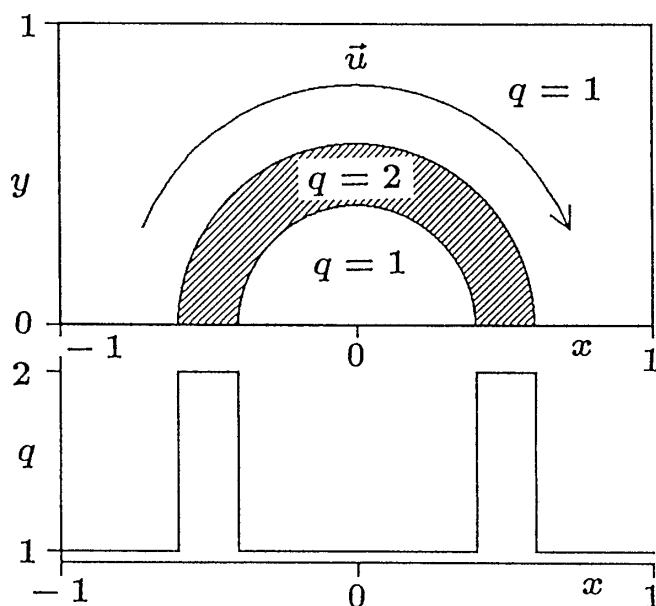


図21 スカラー例題(1)の流れ場

3.5節 計算例

2つ例を挙げておく，例題(1)は21)で標準問題的に提案された流れ場で，輸送速度が場の関数で，

$$a = r \sin \theta, \quad b = -r \cos \theta$$

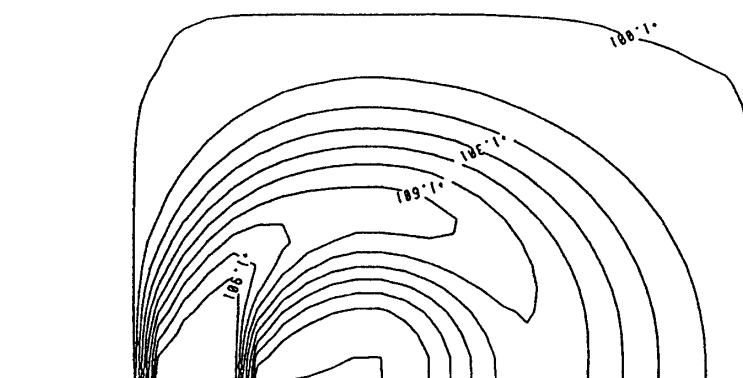
流入境界が，

$$q(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \geq -0.4 \\ 2 & -0.4 > x \geq -0.6 \\ 1 & -0.6 > x \end{cases}$$

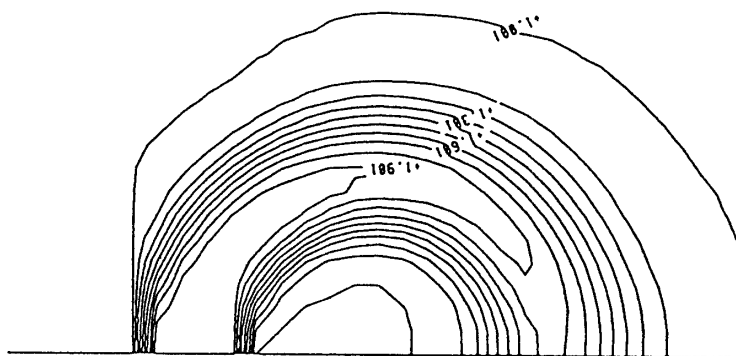
なので，同心円状に不連続面ができる(図21)．流れが格子に対してあらゆる角度をとるので格子依存性を見るのに適した例題である．格子点数は 31×17 とした．計算手法は従来の格子依存の風上差分の空間1次精度及び3次精度(MUSCL法による)，本風見鶏法の空間1次精度及び3次精度を比較した．時間積分は，定常解が得られる場合なので簡単のため時間1次陽的積分を用いた．図22は計算結果の q の等高線で本法による解の改善は明らかである．大ざっぱに言って，本法の1次精度は従来の3次精度とほぼ同じ解像度を示している．図23は $y=0$ すなわち流入境界での各手法の q を厳密解と共に示している．尚，21)にも従来法と21)で提案された方法による結果の比較が示されているが，計算手法が非構造格子(3角形要素)に基づいているなど本法と直接の比較が適当でないためここでは省略する．

例題(2)は輸送速度が定数で，

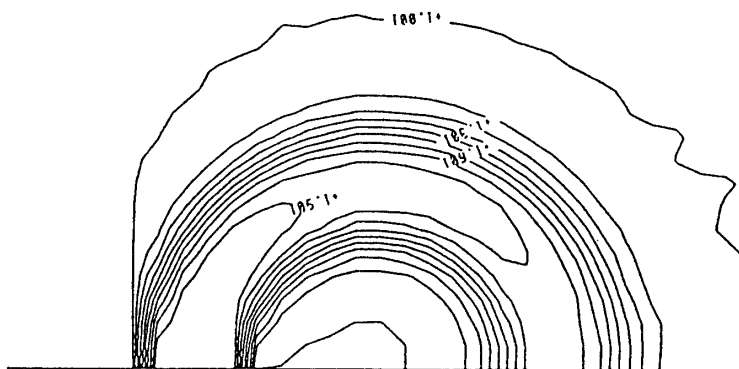
$$a, b > 0 \quad \text{かつ,} \quad \frac{a}{b} = 2$$



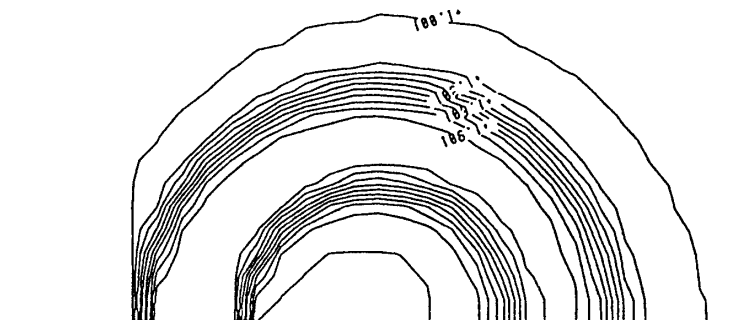
(a) 従来法, 1次精度



(b) 本法, 1次精度

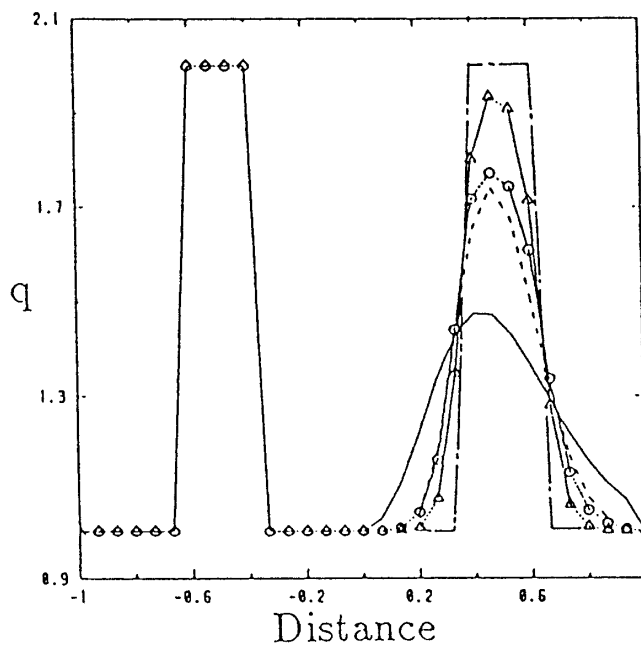


(c) 従来法, 高次精度



(d) 本法, 高次精度

図22 スカラー例題(1)の結果の等高線



- Conventional, 1st-order
- - - - Present, 1st-order
- ... ○ ... Conventional, higher-order
- ... △ ... Present, higher-order
- · - · - Exact

図23 スカラー例題(1)の $y=0$ 上の値

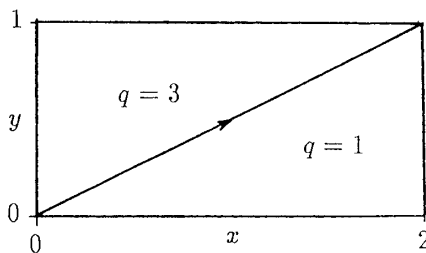


図24 スカラー例題(2)の流れ場

境界条件として,

$$q(0, y) = 3, \quad q(x, 0) = 1$$

の流れ場である。従って、図24のように不連続面ができる。これは格子に対する流れの角度が約 26° なので、斜め 45° に強い風見鶏法にとっても決して有利な例題ではない。格子点数は

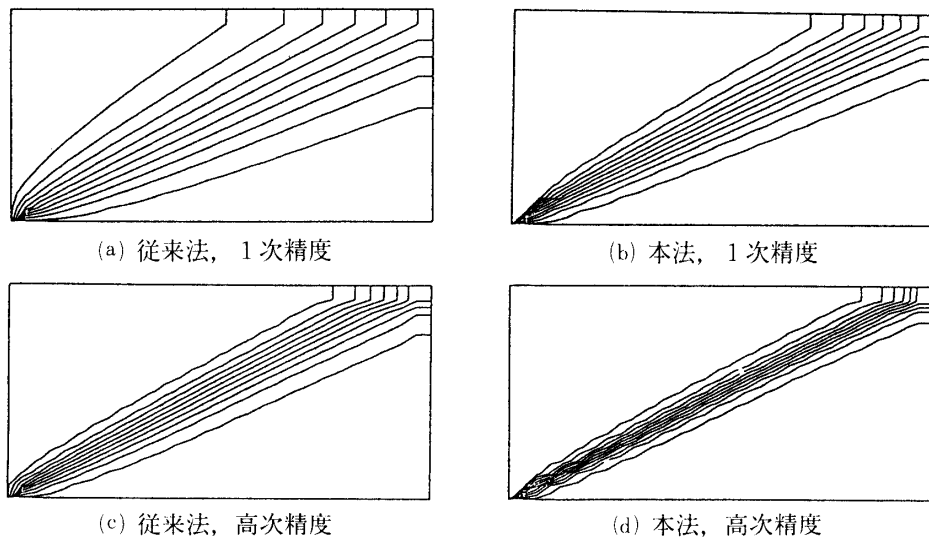


図25 スカラー例題(2)の結果の等高線

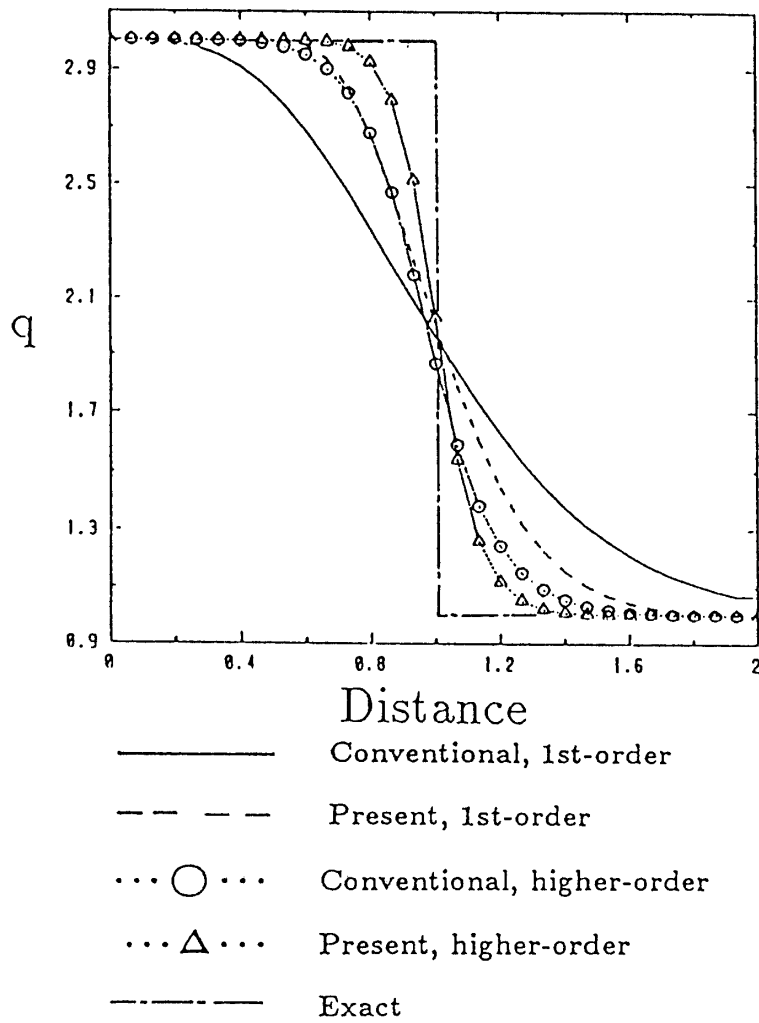


図26 スカラー例題(2)の $y=0.5$ 上の値

例題(1)と同じく 31×17 である。図25に q の等高線、図26に $y=0.5$ での x 方向の解の分布を厳密解と共に示す。用いたスキームは例題(1)と同じである。ここでも風見鶏法の優位は明らかである。なお、これらの例題の計算では全てのケースで最大のクーラン数が0.6となるように時間刻みを与えたが、例題(2)の場合、従来の風上差分の空間3次精度計算はクーラン数0.6では解が壊れてしまったので、特別に0.3としている。MUSCL法と時間1次精度の陽積分の組合せが大きいクーラン数で不安定になり易いことはよく知られているが、本例題の結果は、風見鶏法が既存の手法に比べて大きなクーラン数をとれるという線形で空間1次精度の場合の解析結果が高次精度においても成り立つことを数値的に示すものと考えられる。

第4章 2次元オイラー方程式への適用

前章のスカラー輸送方程式に対する風見鶏法に1次元の近似リーマン解法を組み合わせたのはたやすい。問題は、波があらゆる方向に伝播するオイラー方程式において、“風上”と呼べる方向を一意に規定できるかである。たしかに、特性波の輸送速度に着目してみれば、エントロピと過度(または剪断速度)は流速で伝播し、音波は流速+音速で周囲に丸く伝播する²⁰⁾と考えられ、1方向には限定しにくい。超音速/極超音速流れならば流速方向で代表させるというのも考え方で、実際、流速方向を特性的な方向として扱うスキームも提案されている¹⁵⁾が、この方法では任意方向の垂直衝撃波はよく解像するものの、斜め衝撃波には難がある。一方、波の伝播は単にその輸送方向だけでなく、輸送される特性量の勾配にもよるといふ観察がある²¹⁾³³⁾。これは格子が衝撃波に沿う特別な場合には従来の風上差分でも解像度が高いという経験とも一致する。数学的には特性量の勾配は個々の特性波でばらばらであって構わないが、物理的に考えると、衝撃波、剪断層、膨張波など1方向に規定できる場合が多い。そのような場合には1次元の近似リーマン解法と多次元のそれとの差は決して大きくないことが期待される。

そこで、ここでは特性波の輸送方向ではなく、輸送される諸量の勾配を基準として仮想セルの回転方向を定めることで、スカラー輸送方程式に対する風見鶏法と1次元の近似リーマン解法の組合せによりオイラー方程式に対する風見鶏法を構築する。セルの回転方向の詳細については4.2節で述べることとし、まず、セルの回転方向が決まったとして数値流束をどのように評価するかについて説明する。

4.1節 数値流束の評価

2次元のオイラー方程式は(4.1)式で表わさせる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

ここで、

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(e + p) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix}$$

で, ρ は密度, u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分, e は単位体積当りの全エネルギー, p は圧力である. 理想気体では,

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right] \quad (4.2)$$

の関係がある. γ は比熱比である.

一方, 一般座標上では,

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (4.3)$$

ここで,

$$\hat{Q} = Q/J, \quad \hat{E} = (\xi_x E + \xi_y F)/J, \quad \hat{F} = (\eta_x E + \eta_y F)/J$$

J は座標変換のヤコビアンで,

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (4.4)$$

また, ξ_x などは座標変換の metric でそれぞれ,

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta \quad (4.5a)$$

$$\eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi \quad (4.5b)$$

である. さらに, 反変速度ベクトル (contravariant velocity vector) の ξ, η 成分を,

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (4.6)$$

と定義しておけば, \hat{E} 及び \hat{F} は簡単な形になって, それぞれ,

$$\hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e + p) U \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e + p) V \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

と書ける³⁴⁾.

差分法の場合, 基礎方程式が一般座標で書かれており, 数値流束の評価も一般座標での流束 \hat{E}, \hat{F} に対して行われるので, セルの回転も物理空間でなく, 計算空間で行う, そこで, 一般座標上でセルの面に垂直な方向 e_n^{\rightarrow} と沿う方向 e_t^{\rightarrow} がそれぞれ,

$$e_n^{\rightarrow} = (k_\xi, k_\eta), \quad e_t^{\rightarrow} = (-k_\eta, k_\xi), \quad k_\xi^2 + k_\eta^2 = 1 \quad (4.8)$$

で表わせるとすると, 回転したセルに対する流束を用いて表わした基礎方程式は各格子セルで,

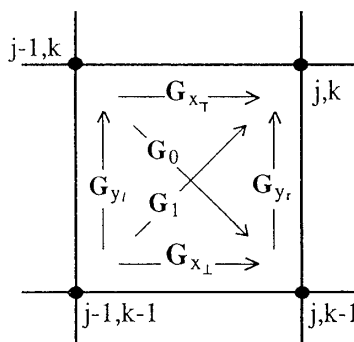


図27 オイラー方程式での流束の分解

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = 0 \quad (4.9)$$

$$\tilde{Q} = \hat{Q}, \quad \tilde{E} = k_{\xi} \hat{E} + k_{\eta} \hat{F} = (k_{n_x} E + k_{n_y} F) / J$$

$$\tilde{F} = -k_{\eta} \hat{E} + k_{\xi} \hat{F} = (k_{t_x} E + k_{t_y} F) / J$$

$$k_{n_x} = k_{\xi} \xi_x + k_{\eta} \eta_x, \quad k_{n_y} = k_{\xi} \xi_y + k_{\eta} \eta_y$$

$$k_{t_x} = -k_{\eta} \xi_x + k_{\xi} \eta_x, \quad k_{t_y} = -k_{\eta} \xi_y + k_{\xi} \eta_y$$

あるいは積分形で、

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tau} dV + \oint_{\infty} (\tilde{E} \cdot \vec{e}_n + \tilde{F} \cdot \vec{e}_t) d\vec{A} = 0 \quad (4.10)$$

となる。これをスカラーの場合と比べてみると、単に流束がベクトルになったのみで基本的には何の違いもない。そこで、スカラーの場合のように、ある格子内を通過する2つの流束はそれぞれ格子線方向と対角線方向の計6つの流束 $G_{(\cdot)}$ に分解されることになる(図27)。分解された個々の流束についてはその方向に1次的に風上を判断して数値流束を作る。具体的には Roe の1次元の近似リーマン解法による平均化を用いた Flux Difference Splitting によっているが、 k_{n_x} を ξ_x 、 k_{n_y} を ξ_y などと読みかえれば形式的に通常的一般座標系における格子線方向の流束と同じ形式になっているので、既存のプログラム¹⁰⁾からの修正は決して大きくない。高次精度化はスカラーの場合と同様に原始変数 (primitive variables) に対して MUSCL 法で補間をする方法を用いた。少し長くなるが、念のためにすべての流束成分を書き下しておく、

$$G_{\xi_1} = \max(|k_{\xi}| - |k_{\eta}|, 0) \tilde{E}((\tilde{W}_L)_{j-\frac{1}{2}, k}, (\tilde{W}_R)_{j-\frac{1}{2}, k}) + \max(|k_{\eta}| - |k_{\xi}|, 0) \tilde{F}((\tilde{W}_L)_{j-\frac{1}{2}, k}, (\tilde{W}_R)_{j-\frac{1}{2}, k}) \quad (4.11a)$$

$$G_{\xi_1} = \max(|k_{\xi}| - |k_{\eta}|, 0) \tilde{E}((\tilde{W}_L)_{j-\frac{1}{2}, k-1}, (\tilde{W}_R)_{j-\frac{1}{2}, k-1}) + \max(|k_{\eta}| - |k_{\xi}|, 0) \tilde{F}((\tilde{W}_L)_{j-\frac{1}{2}, k-1}, (\tilde{W}_R)_{j-\frac{1}{2}, k-1}) \quad (4.11b)$$

$$G_{\eta l} = \max(|k_\eta| - |k_\xi|, 0) \bar{E}((\bar{W}_B)_{j-1, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_T)_{j-1, k-\frac{1}{2}}) \\ + \max(|k_\xi| - |k_\eta|, 0) \bar{F}((\bar{W}_B)_{j-1, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_T)_{j-1, k-\frac{1}{2}}) \quad (4.11c)$$

$$G_{\eta r} = \max(|k_\eta| - |k_\xi|, 0) \bar{E}((\bar{W}_B)_{j, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_T)_{j, k-\frac{1}{2}}) \\ + \max(|k_\xi| - |k_\eta|, 0) \bar{F}((\bar{W}_B)_{j, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_T)_{j, k-\frac{1}{2}}) \quad (4.11d)$$

$$G_1 = \text{sign}^+(k_\xi \cdot k_\eta) \min(|k_\xi|, |k_\eta|) \bar{E}((\bar{W}_{BL})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_{TR})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}) \\ + \text{sign}^-(k_\xi \cdot k_\eta) \min(|k_\xi|, |k_\eta|) \bar{F}((\bar{W}_{BL})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_{TR})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}) \quad (4.11e)$$

$$G_0 = \text{sign}^+(k_\xi \cdot k_\eta) \min(|k_\xi|, |k_\eta|) \bar{E}((\bar{W}_{TL})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_{BR})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}) \\ + \text{sign}^-(k_\xi \cdot k_\eta) \min(|k_\xi|, |k_\eta|) \bar{F}((\bar{W}_{TL})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}, (\bar{W}_{BR})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}) \quad (4.11f)$$

ただし、関数 $\max(\cdot, \cdot)$, $\min(\cdot, \cdot)$, $\text{sign}^\pm(\cdot)$ は (3.10) 式と同じである。また、 e_n^{\rightarrow} , e_t^{\rightarrow} は方向のみを定めていて、向きはどちらでもよいわけであるが、ここでは、(4.11a), (4.11b), (4.11e), (4.11f) 式では ξ 成分が正、(4.11c), (4.11d) 式では η 成分が正ととることで、以下の処理を簡単化している。まず、 \bar{W}_L その他は MUSCL 法により補間されたセル境界面での原始変数のベクトルで、

$$\bar{W}_L = \begin{bmatrix} p_L \\ u_L \\ v_L \\ p_L \end{bmatrix}$$

などである。その個々の成分を w_L などと書けば、

$$(w_L)_{j-\frac{1}{2}, k} = w_{j-1, k} + \frac{s(\Delta_{j-1}^L, \Delta_{j-1}^R)}{4} [(1-\kappa)\Delta_{j-1}^L + (1+\kappa)\Delta_{j-1}^R] \\ (w_R)_{j-\frac{1}{2}, k} = w_{j, k} - \frac{s(\Delta_j^L, \Delta_j^R)}{4} [(1+\kappa)\Delta_j^L + (1-\kappa)\Delta_j^R] \quad (4.12a)$$

$$(w_B)_{j, k-\frac{1}{2}} = w_{j, k-1} + \frac{s(\Delta_{k-1}^B, \Delta_{k-1}^T)}{4} [(1-\kappa)\Delta_{k-1}^B + (1+\kappa)\Delta_{k-1}^T] \\ (w_T)_{j, k-\frac{1}{2}} = w_{j, k} - \frac{s(\Delta_k^B, \Delta_k^T)}{4} [(1+\kappa)\Delta_k^B + (1-\kappa)\Delta_k^T] \quad (4.12b)$$

$$\begin{aligned}
(w_{BL})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} &= w_{j-1, k-1} \\
&\quad + \frac{s(\Delta_{j-1, k-1}^{BL}, \Delta_{j-1, k-1}^{TR})}{4} [(1-\kappa)\Delta_{j-1, k-1}^{BL} + (1+\kappa)\Delta_{j-1, k-1}^{TR}] \\
(w_{TR})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} &= w_{j, k} \\
&\quad - \frac{s(\Delta_{j, k}^{BL}, \Delta_{j, k}^{TR})}{4} [(1+\kappa)\Delta_{j, k}^{BL} + (1-\kappa)\Delta_{j, k}^{TR}]
\end{aligned} \tag{4.12c}$$

$$\begin{aligned}
(w_{TL})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} &= w_{j-1, k} + \frac{s(\Delta_{j-1, k}^{TL}, \Delta_{j-1, k}^{BR})}{4} [(1-\kappa)\Delta_{j-1, k}^{BL} + (1+\kappa)\Delta_{j-1, k}^{TR}] \\
(w_{BR})_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} &= w_{j, k-1} - \frac{s(\Delta_{j, k-1}^{TL}, \Delta_{j, k-1}^{BR})}{4} [(1+\kappa)\Delta_{j, k-1}^{BL} + (1-\kappa)\Delta_{j, k-1}^{TR}]
\end{aligned} \tag{4.12d}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\Delta_j^L &= w_{j, k} - w_{j-1, k}, & \Delta_j^R &= w_{j+1, k} - w_{j, k} \\
\Delta_j^B &= w_{j, k} - w_{j, k-1}, & \Delta_j^T &= w_{j, k+1} - w_{j, k} \\
\Delta_{j, k}^{BL} &= w_{j, k} - w_{j-1, k-1}, & \Delta_{j, k}^{TR} &= w_{j+1, k+1} - w_{j, k} \\
\Delta_{j, k}^{TL} &= w_{j, k} - w_{j-1, k+1}, & \Delta_{j, k}^{BR} &= w_{j+1, k-1} - w_{j, k}
\end{aligned}$$

また, 勾配制限関数 s は, スカラーの場合と同様にして,

$$s(\nabla, \Delta) = \frac{3\Delta\nabla + \varepsilon}{2(\nabla - \Delta)^2 + 3\Delta\nabla + \varepsilon}$$

で与えられる. 補間の次数を与える κ もスカラーの場合と同じである. 最後に \bar{E} 及び \bar{F} は Roe の Flux Difference Splitting により得られる数値流束であるが, metric に注意すると,

$$\bar{E}(W_a, W_b) = \bar{G}(k_{n_x}, k_{n_y}; W_a, W_b), \quad \bar{F}(W_a, W_b) = \bar{G}(k_{t_x}, k_{t_y}; W_a, W_b)$$

とまとめることができ,

$$\bar{G}(k_x, k_y; W_a, W_b) = \frac{1}{2} [G(k_x, k_y; W_b) + G(k_x, k_y; W_a) - |A(k_x, k_y; W_{ave})| \frac{\partial \bar{Q}}{\partial W} (W_b - W_a)] \tag{4.13}$$

となり, 従来の格子方向の Flux Difference Splitting の流束と形式上同じになっている. 念のため, 従来の格子方向の風上差分での数値流束¹⁰⁾を同じ表記で書き下してみると,

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{j-\frac{1}{2}, k} &= \hat{E}((\hat{W}_L)_{j-\frac{1}{2}, k}, (\hat{W}_R)_{j-\frac{1}{2}, k}) \\
&= \bar{G}(\xi_x, \xi_y; (\hat{W}_L)_{j-\frac{1}{2}, k}, (\hat{W}_R)_{j-\frac{1}{2}, k})
\end{aligned} \tag{4.14a}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{j,k-\frac{1}{2}} &= \hat{F}((\hat{W}_B)_{j,k-\frac{1}{2}}, (\hat{W}_T)_{j,k-\frac{1}{2}}) \\ &= \bar{G}(\eta_x, \eta_y; (\hat{W}_B)_{j,k-\frac{1}{2}}, (\hat{W}_T)_{j,k-\frac{1}{2}})\end{aligned}\quad (4.14b)$$

\hat{W} は \hat{Q} に対応する原始変数のベクトルを表す。Flux Difference Splittingの詳しい解説は本論文の主旨ではないので、ここでは簡単に(4.13)式の各項について説明するにとどめると、まず、 G は流束そのもので、

$$G(k_x, k_y; W) = J^{-1} \begin{bmatrix} pU \\ puU + k_x p \\ pvU + k_y p \\ (e+p)U \end{bmatrix}$$

$$U = k_x u + k_y v$$

である。 W_{ave} はRoeの平均化³⁵⁾と呼ばれ、セル境界面でのリーマン問題の近似解に相当する。また、 A は G のヤコビアン行列 $\partial G / \partial \hat{Q}$ で、絶対値は、 A が対角化可能のとき、その対角行列

$$\Lambda = R^{-1} A R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

の各要素を絶対値で置き換えた

$$|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|)$$

に対して、

$$|A| = R |\Lambda| R^{-1}$$

と定義される行列で、スカラーの場合に輸送速度の絶対値を用いて風上を自動的に判断していたのに対応している。Flux Difference Splittingの詳細や W_{ave} 、 A および $|A|$ の具体的な形については35)、36)などを参照されたい。また、一般座標系での差分法ではmetricもまた差分により近似的に評価されるが、一般にmetricのとり方と空間方向の差分法の組合せによっては近似誤差のために一様流が差分式の解にならない場合が存在し、実用上問題となる。同じ理由で本風見鶏法でもmetricの評価法には制限があるが、その詳細については補遺Bに譲り、ここでは、結果として各格子セルごとの流束評価においてその格子セルの中心で中心差分的に評価したmetricを用いればよいとだけ記しておく、

4.2節 セルの回転方向

まず、衝撃波があれば、これにセルの境界面を沿わせることが重要である。衝撃波の方向 \vec{n}_s は例えば衝撃波の両側での速度の大きさの跳び Δv や圧力の跳び Δp を用いて、

$$\vec{n}_s = \frac{\Delta v}{|\Delta v|} \quad \text{または、} \quad \vec{n}_s = \frac{\Delta p}{|\Delta p|}$$

などと表わせる¹⁴⁾²⁶⁾。差分的に考えればこれは速度の大きさや圧力の勾配の方向で近似できる。膨張波も不連続ではないが、同様に考えることができる。

一方、別の種類の不連続として剪断層がある。剪断層の両側では圧力の跳びはなく、それに沿う方向の速度成分や密度に跳びがある。このように考えてくると、格子非依存スキームと1次元の近似リーマン解法に基づく他の多次元風上差分¹⁴⁾¹⁶⁾¹⁹⁾が用いているような単一の評価関数でセルの回転方向を決定するには限界がある。そこでここではいくつかの種類の物理量の跳びを考え、それらの内で値が大きいものの方向を採用することにした。具体的には一様流の値で正規化された圧力、密度と速度の代わりに動圧の勾配を用いている。すなわち、

$$\vec{e}_n // \overrightarrow{\max}(\nabla \rho, \nabla p, \nabla \left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\}) \quad (4.15)$$

ここで、 $\overrightarrow{\max}$ は大きさが最大のベクトルを選ぶ関数である。これにより、垂直衝撃波はもちろん、斜め衝撃波も剪断層も捉えられる(その方向にセル境界面が回転する)はずである。計算上は、セルの回転方向が格子セルごとに必要なので、例えば、 $(j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})$ を中心とする格子セルではそのまわりの4点の値を用いて、

$$\nabla w = \left(\frac{1}{2}(w_{j,k} + w_{j,k-1} - w_{j-1,k} - w_{j-1,k-1}), \frac{1}{2}(w_{j,k} + w_{j-1,k} - w_{j,k-1} - w_{j-1,k-1}) \right) \quad (4.16)$$

としている。従って、セルの回転方向は各セルごとに独立に与えられる。

組み合わせる関数の選択には議論の余地があるが、経験的には密度、圧力、速度といった必要な情報が網羅されていれば、どのように評価しても結果は余り変わらないようである。

4.3節 境界条件

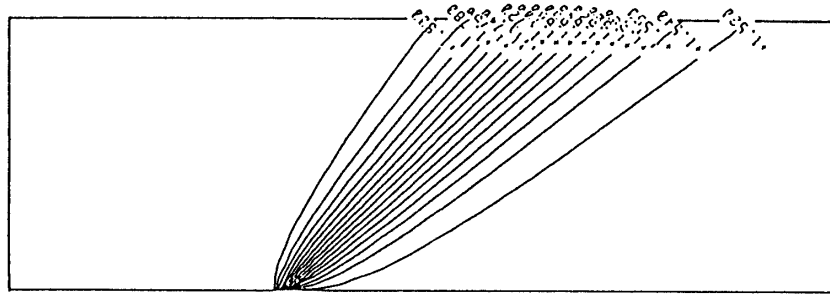
保存則を重視する圧縮性流体に対する有限差分法においては、内点(境界以外の点)では有限体積法のようにそのまわりの仮想的なセルで流束の出入りを勘定するが、境界上の点では仮想セルを考えずに境界条件を与えている。本風見鶏法も基本的に有限差分法に基づいているために境界では仮想セルを考えず、従って境界条件の与え方は通常有限差分法と同様になっている。有限差分法における境界条件の設定の詳細については37)などを参照されたい。

境界条件そのものではないが、本論文では境界、特に固定壁付近で定常解への収束性を上げるため、境界の1つ内側の格子点では仮想セルを固定している。固定すること自体はスキームに何の悪影響も及ぼさず、また、格子がある程度以上細かければ、壁に沿う方向とそれに垂直な方向が特性的な方向になると考えられるので妥当な仮定であるが、格子が粗い場合には物理現象の特性的な方向と仮想セルの向きがずれるために多少誤差が増大する場合もありうる。このことに関しては第7章の考察でさらに検討する。

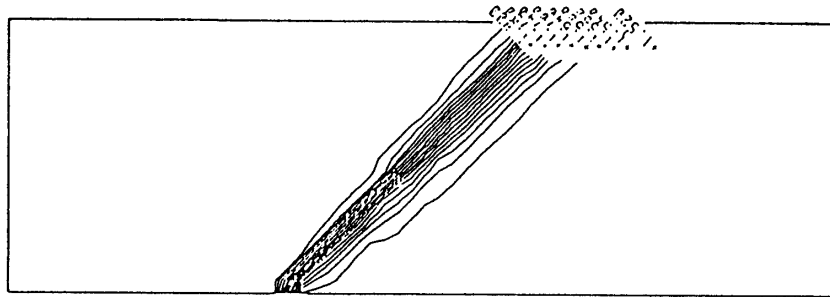
第5章 計算結果

本節ではいくつかの例題に対する計算結果について述べる。まず、既存の、格子方向に1次元の風上を考える風上差分法¹⁰⁾(以下、従来法と略す)と本風見鶏法の比較を行うため、

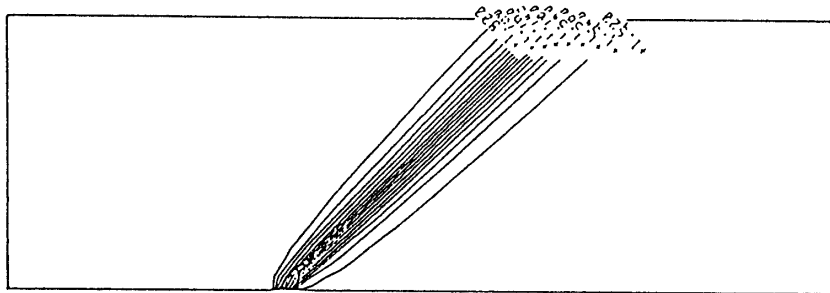
従来法の空間1次精度と3次精度，及び本風見鶏法の1次精度と3次精度の4通りの計算を3つの例題に対して行った．従来法の1次元の近似リーマン解法，並びに高次精度化の方法は風見鶏法と同じである．また，いずれの例題も定常問題であるため，収束解が得られれば時間積分は何を用いても構わないが，ここでは主に2段階のルンゲ・クッタによる陽積分を



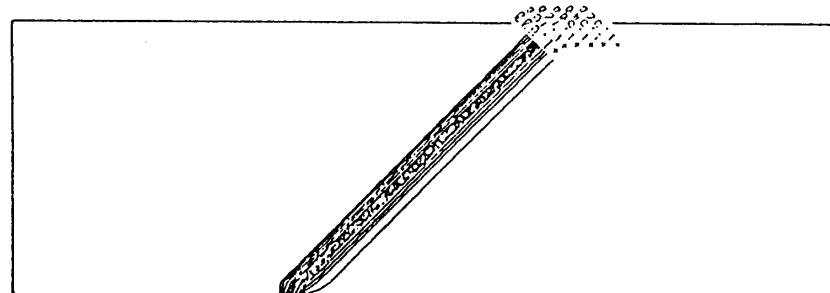
(a) 従来法, 1次精度



(b) 本法, 1次精度



(c) 従来法, 3次精度



(d) 本法, 3次精度

図28 斜め剪断流(45°)の等マッハ線図

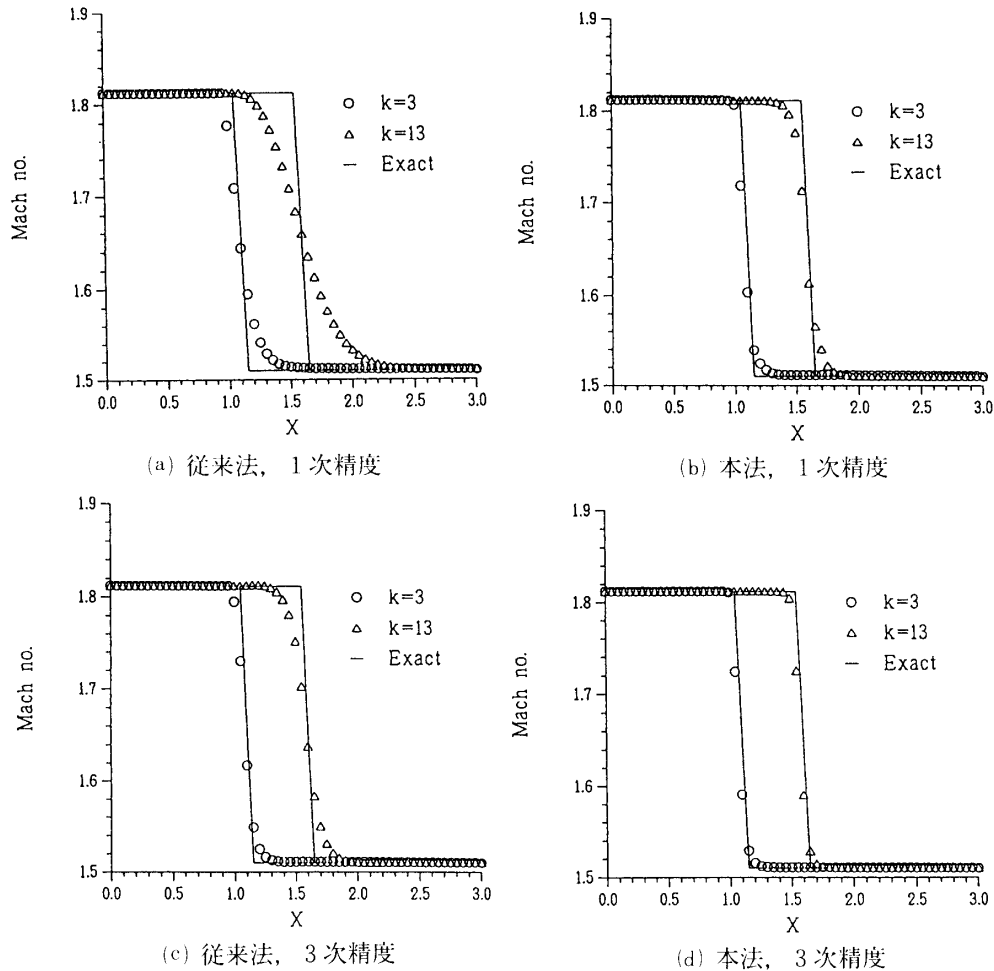


図29 斜め剪断流(45°)の $k=3,13$ ($y=0.1, 0.6$) 上のマッハ数分布

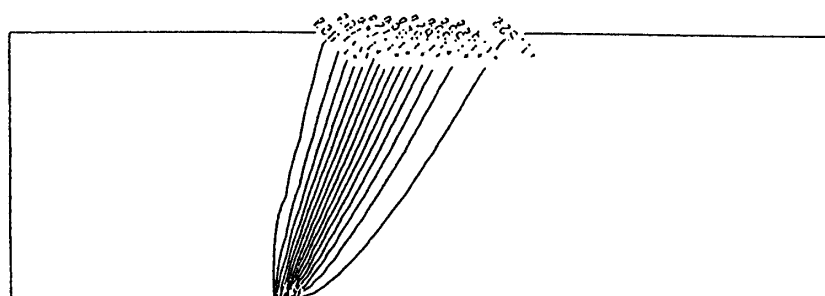
用いた。

つぎに、既発表の多次元風上差分法の論文に示されている計算結果と比較を行うための計算結果を示す。先に断わっておくと、比較に用いた計算例には計算格子の形状や計算条件が明確でないもの、計算手法などの違いにより直接比較することが適当でないものもある。それらについては個々に注釈をつけることにする。

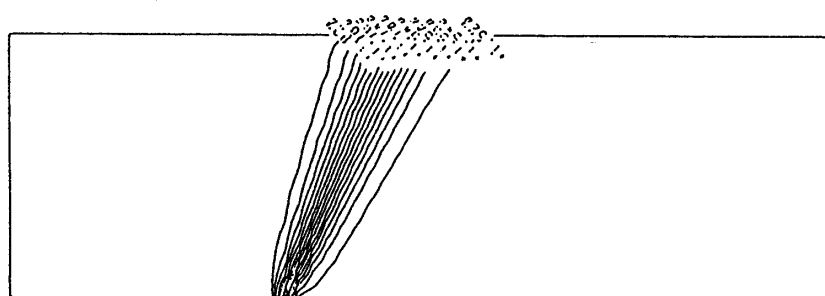
5.1 節 斜め剪断流

1つめは斜め剪断流の例である²⁵⁾。斜め左下から右上に向かって流れがあり、剪断層の左右では速度の大きさのみが異なっている。従って解析解が自明な例である。格子数は 61×21 で格子幅は x, y 方向とも 0.05 、剪断流の流入条件は、その左側でマッハ数 1.812 、右側でマッハ数 1.51 、その間に1点だけマッハ数 1.661 のところがある。流速方向が x 軸に対して 45° の場合の計算結果の等マッハ線図といくつかの格子線上のマッハ数分布を図28, 29に示す。解の改善は顕著である。特に、風見鶏法の1次精度が従来法の3次精度にも匹敵しており、しかも従来法の3次精度で不連続付近にわずかに見られる振動も本法では見られない。

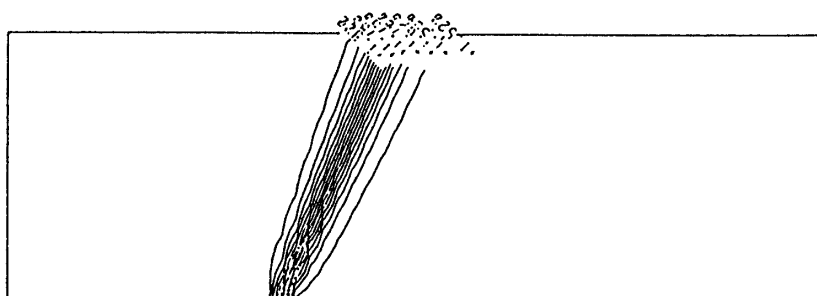
しかし、もともと本風見鶏法は斜め 45° は格子方向と同様の解像度が得られるはずの手法



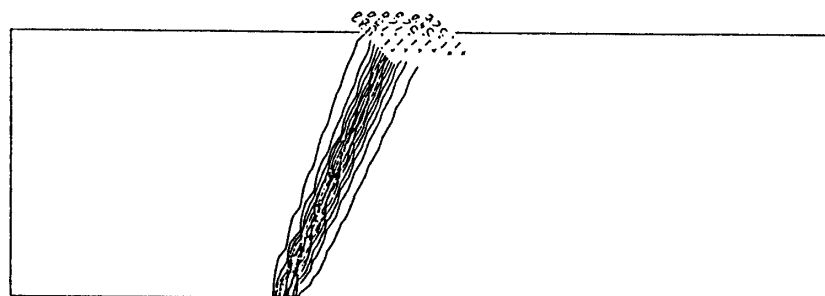
(a) 従来法, 1次精度



(b) 本法, 1次精度



(c) 従来法, 3次精度



(d) 本法, 3次精度

図30 斜め剪断流(67.5°)の等マッハ線図

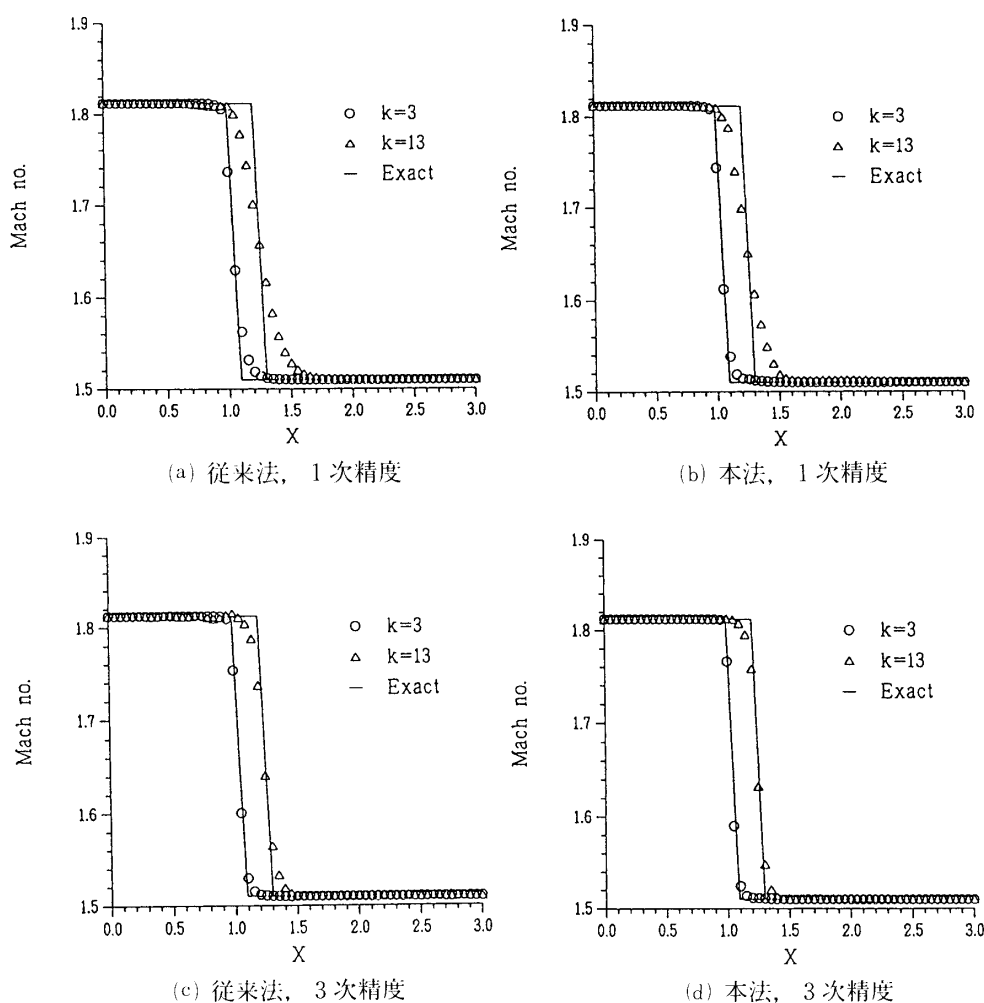


図31 斜め剪断流 (67.5°) の $k=3, 13$ ($y=0.1, 0.6$) 上のマッハ数分布

なので、参考文献から採ったとはいえ、この例題はやや本法に有利である。そこで、斜め 45° と格子線方向の中間の 67.5° の計算も同時に行った。その結果を図30, 31に示す。斜め 45° ほどではないが、解の改善は十分認められる。

なお、本例題では斜め 45° の場合には従来法の3次精度が、 67.5° の場合には風見鶏法の1次精度以外の3つのスキームが、あらかじめ定めたクーラン数(0.8前後)で走らなかったため、クーラン数を $\frac{1}{2}$ に落として計算した。これは、オイラー方程式に対する風見鶏法が、スカラーの場合と同様、より大きなクーラン数で安定に走ることを示す結果となっている。

5.2 節 円弧翼まわりの超音速流

離散化以外の手法で解析的に解が得られる場合の例として円弧翼まわりの超音速流を考える。一様流マッハ数は2.0で迎角 0° 、円弧翼は翼厚が10%である。まず、比較の対象として特性曲線法による数値解を求めた。ただし、衝撃波がそれほど強くないため、衝撃波の曲がりによる渦度の生成は考慮していない。その特性曲線網を図32に示す。

これに対して本法並びに従来法による、空間1次及び3次の数値計算を行った。計算格子

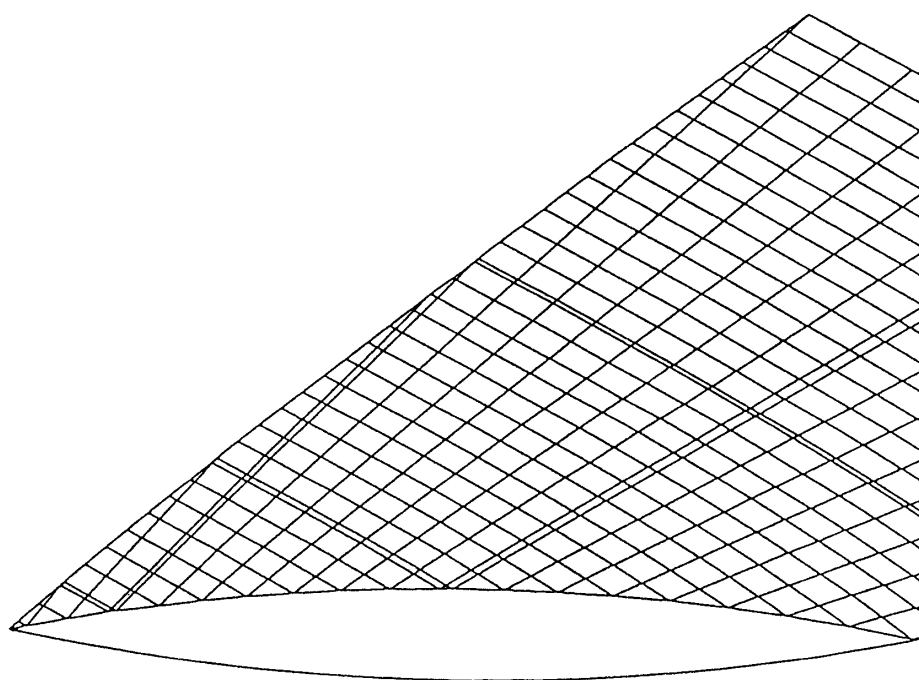


図32 円弧翼の例に対する特性曲線網

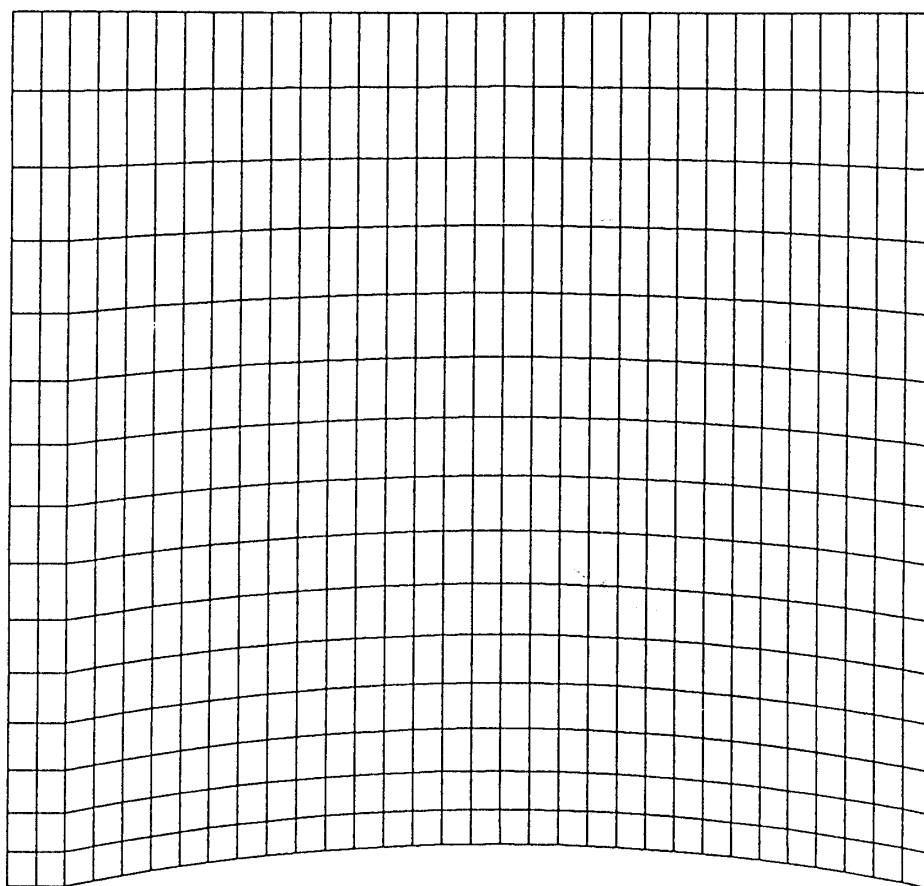


図33 円弧翼まわりの計算格子(33×16)

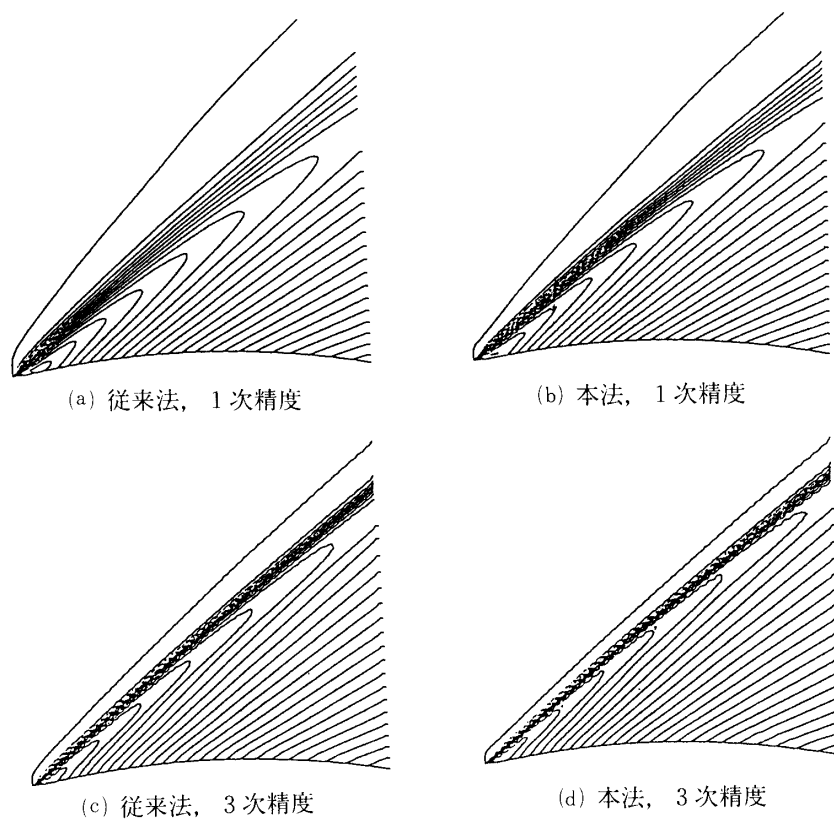


図34 円弧翼まわりの流れの等圧力線図 ($M_\infty=2.0, 123 \times 61$)

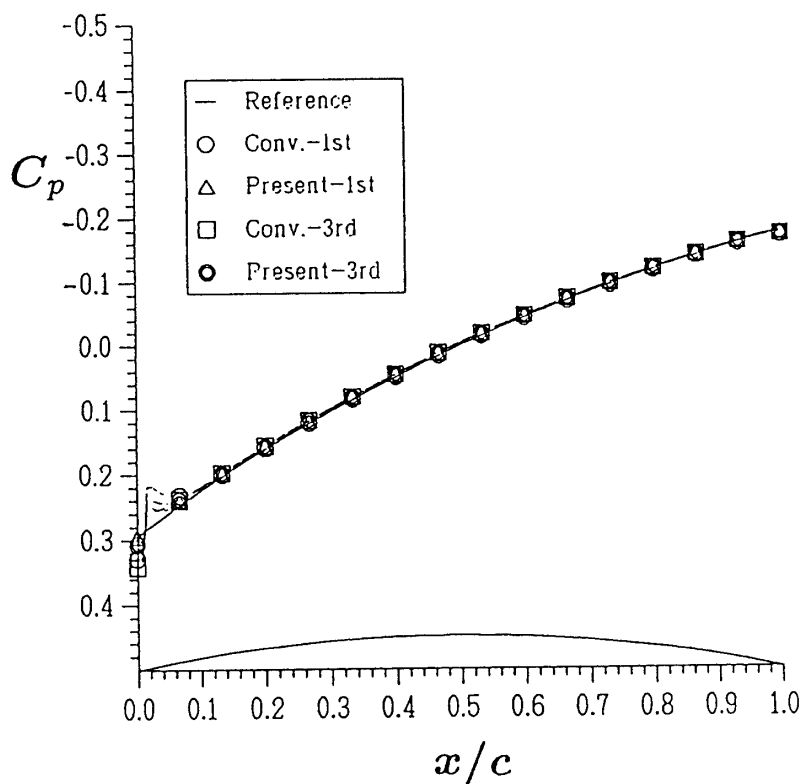


図35 円弧翼面上の圧力分布 (123×61)

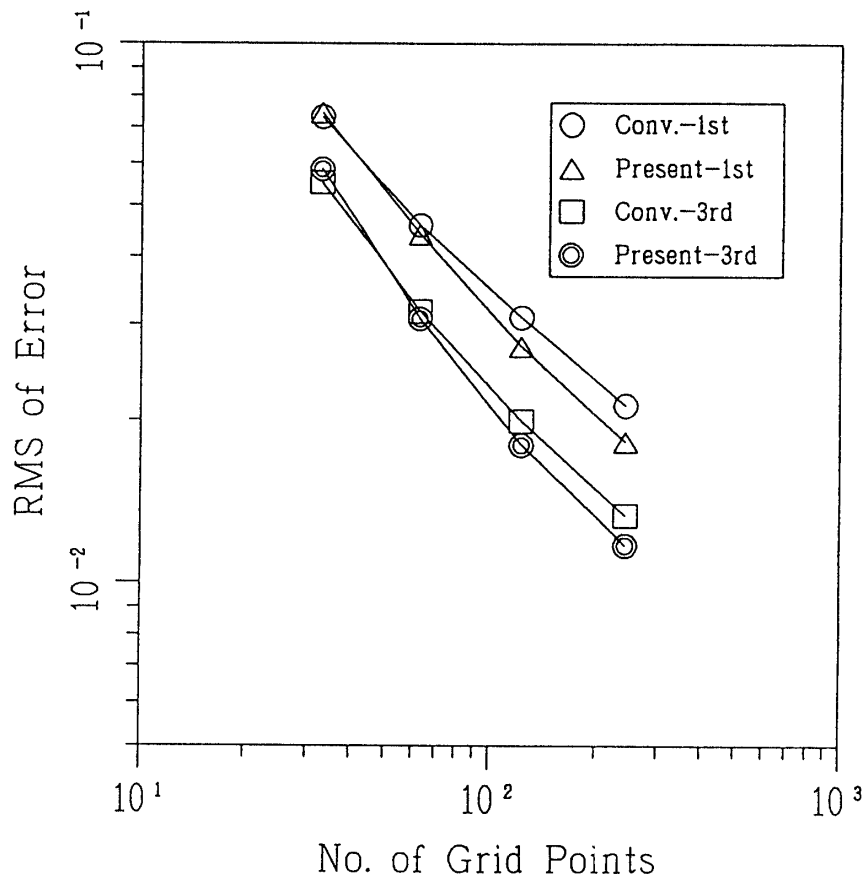


図36 各手法の格子点数に対する円弧翼面上の圧力分布の収束性

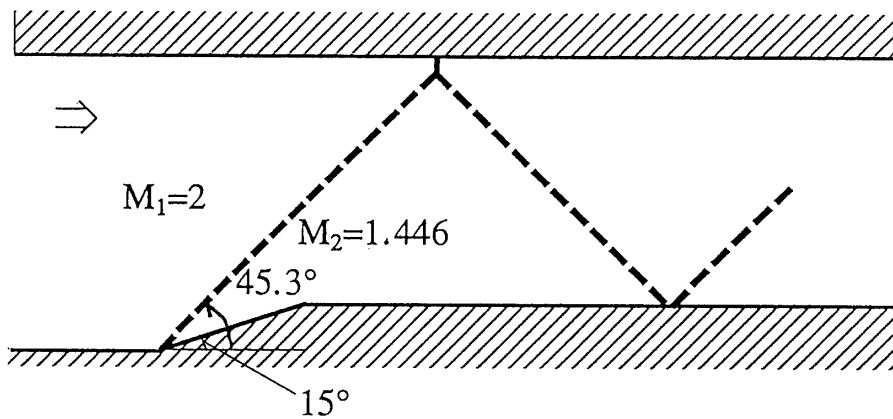
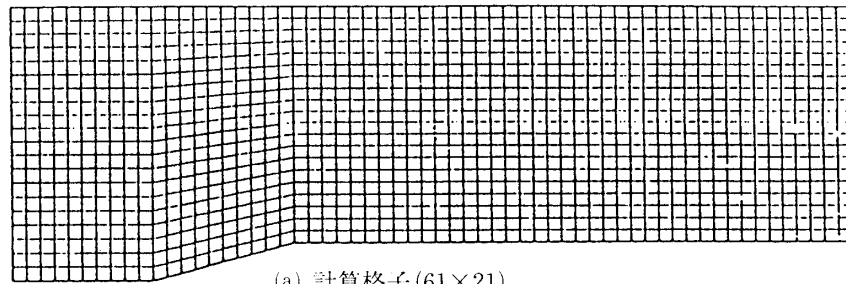
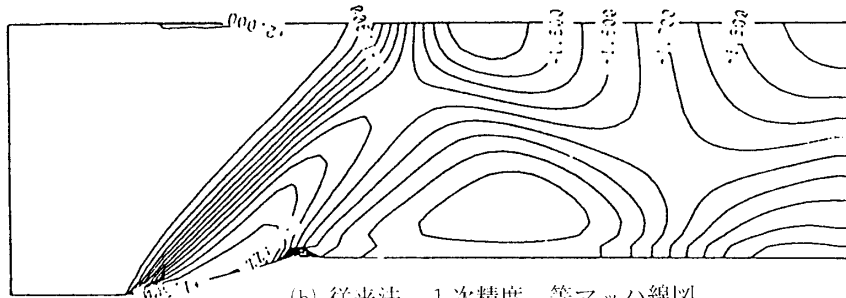


図37 超音速ダクト内の流れの模式図

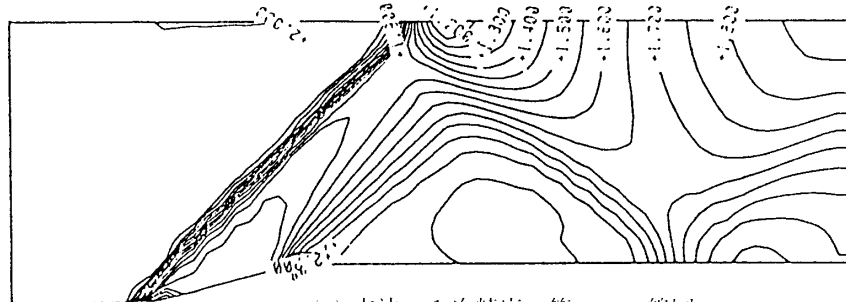
は図33に示した 33×16 をはじめ、 63×31 、 123×61 及び 243×121 の4種類を用いた。図34に 123×61 の格子での等圧力線図、図35に同格子での物体表面上の圧力分布を特性曲線法の結果と共に示す。この結果から分かるように物体表面の値はどの方法もほとんど特性曲線法の解に収束しているが、空間内の衝撃波の解像度には差があることが分かる。図36には各手法、



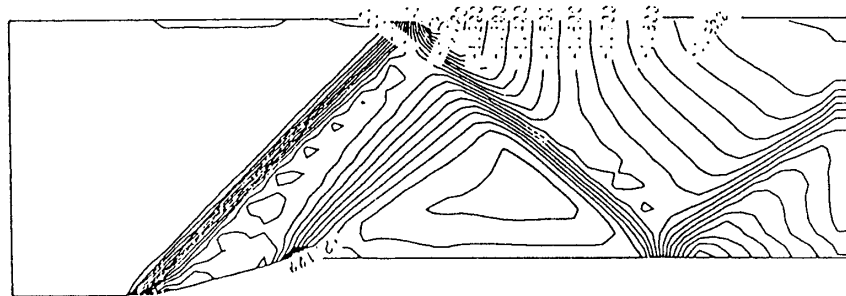
(a) 計算格子 (61×21)



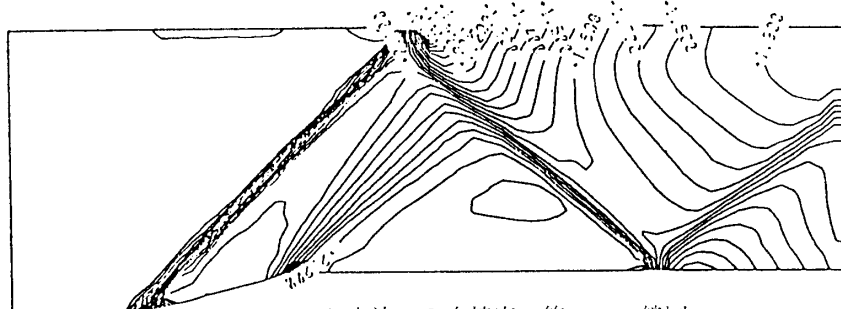
(b) 従来法, 1次精度, 等マッハ線図



(c) 本法, 1次精度, 等マッハ線図



(d) 従来法, 3次精度, 等マッハ線図



(e) 本法, 3次精度, 等マッハ線図

図38 Coarse (61×21)の計算格子と等マッハ線図

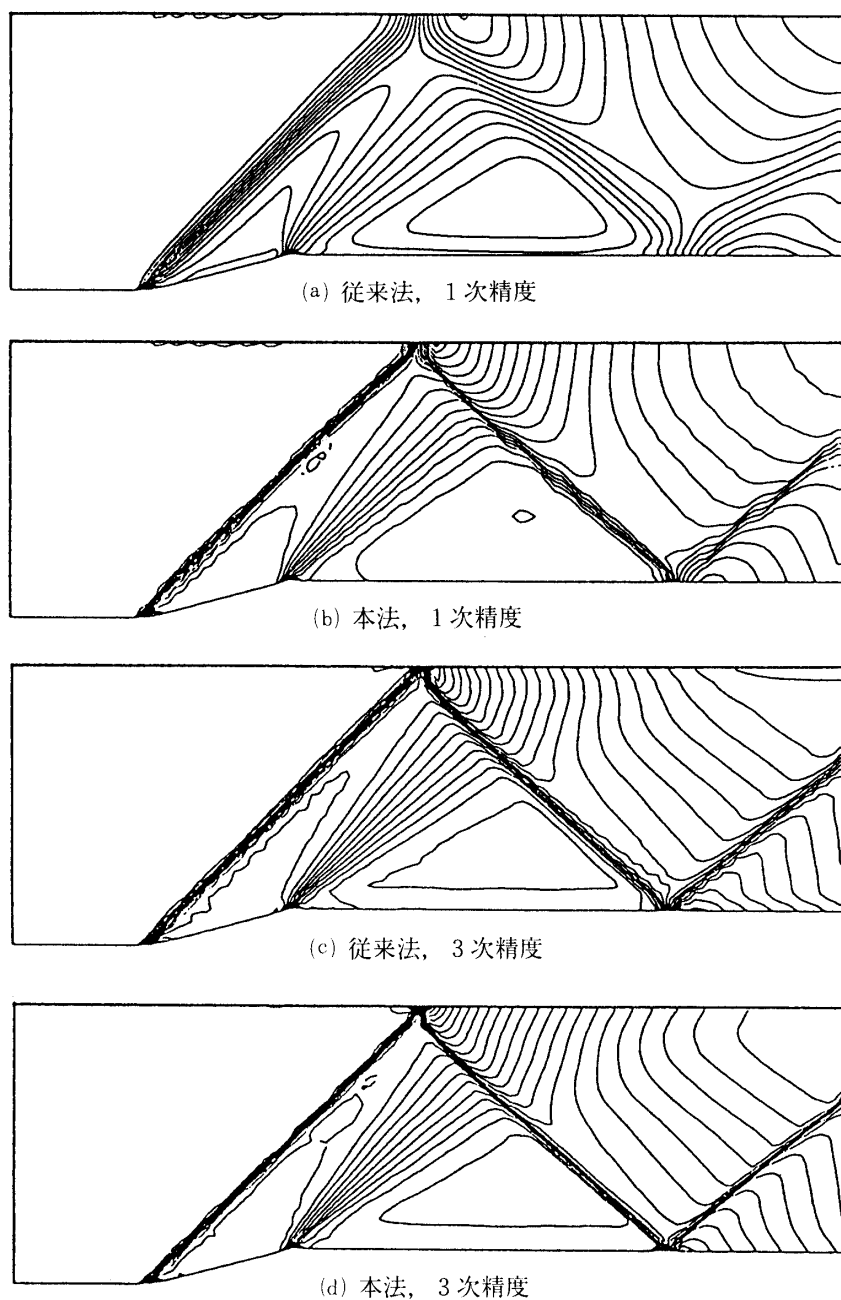
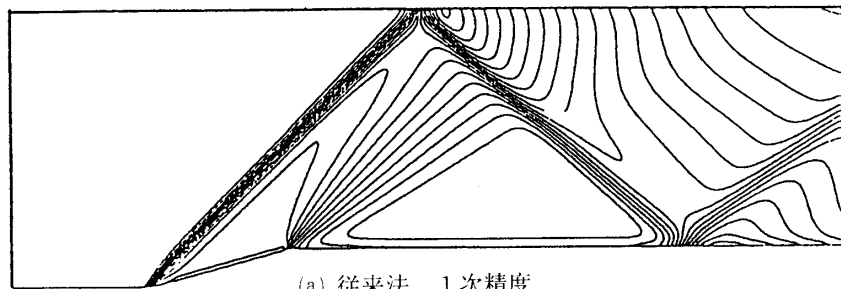


図39 Medium (121×41)での等マッハ線図

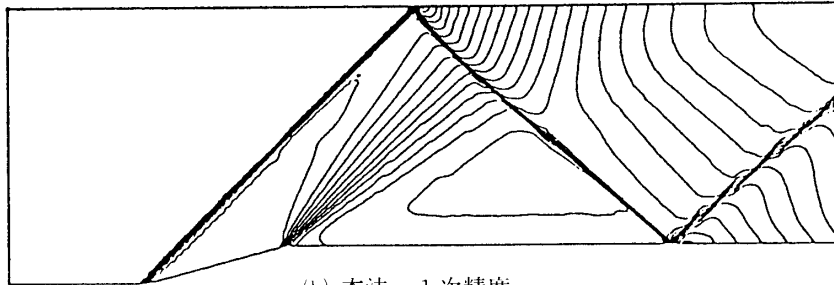
各格子での物体表面の圧力分布の特性曲線法の解との差の2乗平均を示している。この図から分かるように同じ空間精度では本風見鶏法の方がより早く特性曲線法の解に収束している。

5.3節 超音速ダクト

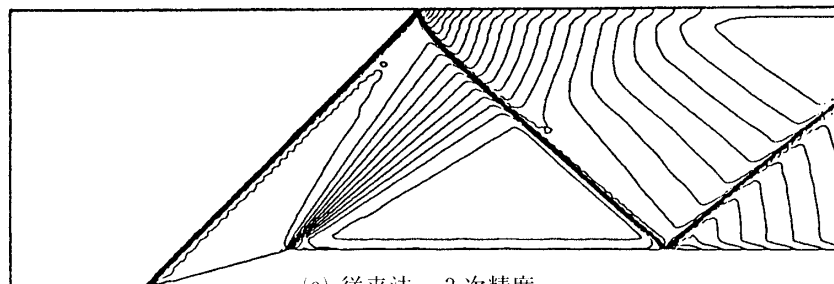
次に、多次元風上差分法の検証にしばしば用いられている流入マッハ数2の超音速ダクト内の流れ¹⁶⁾を計算した。この場合、図37に示すように楔の先端から出る衝撃波が上壁でマッハ反射を起こすため、より実際的な例題となっている。計算格子と4つのスキームによる



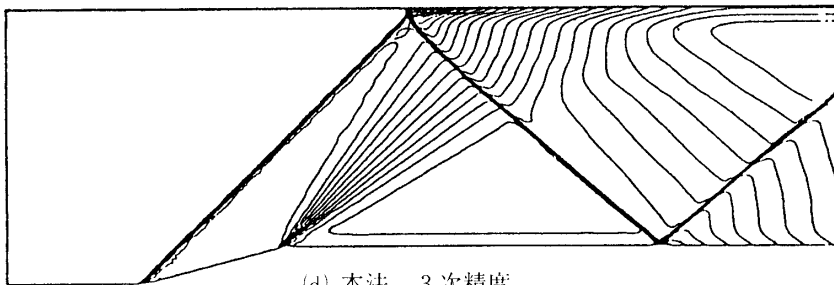
(a) 従来法, 1次精度



(b) 本法, 1次精度



(c) 従来法, 3次精度



(d) 本法, 3次精度

図40 Fine(241×81)での等マッハ線図

結果の等マッハ線図を図38(a)-(e)に示す。格子数は 61×21 である。数値流束の精度が同じもの同士で比較すると風見鶏法の方が衝撃波がより鋭く捉えられている。また、第1衝撃波のみについて言えば、従来法の3次精度より風見鶏法の1次精度の方がよい解を与えている。また、前の2つの例題と違い、本例題では厳密解が簡単には得られないので、ここでは格子を順次細かくしていくことで数値的な収束解を求めることにした。用意した格子は先の 61×21 のほか、 121×41 、 241×81 、 481×161 、 961×321 の4種類である。簡単のため、粗い方が

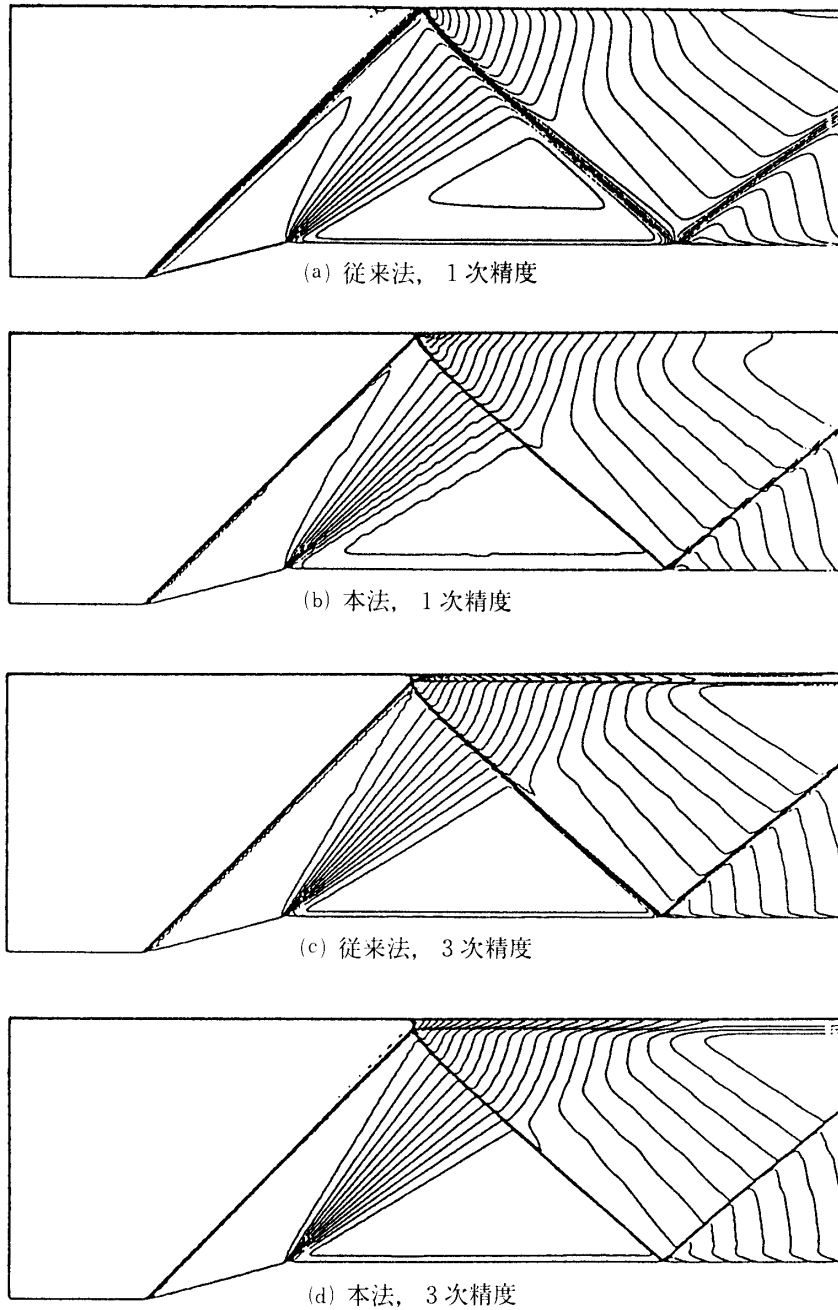


図41 Extra-fine (481×161)での等マッハ線図

ら順に Coarse, Medium, Fine, Extra-fine, Reference と呼ぶことにする. Extra-fine までの各格子では4つの手法でそれぞれ計算を行ったが, Reference の格子だけはここでの解を収束解と扱うという考えから, 空間3次精度の風見鶏法のみを計算した.

まず, 各格子, 各手法の等マッハ線図を図39-42に示す. Fine の図40(d)および Extra-fine の図41(c), (d)で, マッハ反射による剪断層が現れてきていることに注意したい. 次に, それぞれの手法での格子による解の変化を $y=0.5$ の直線上のマッハ数の分布として図43に示す.

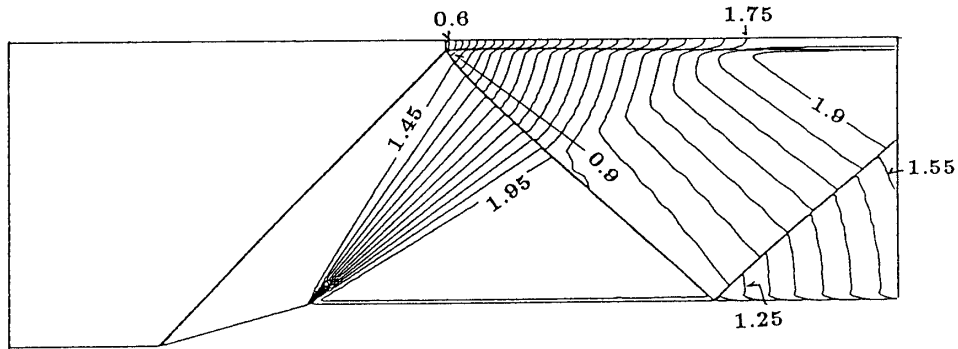
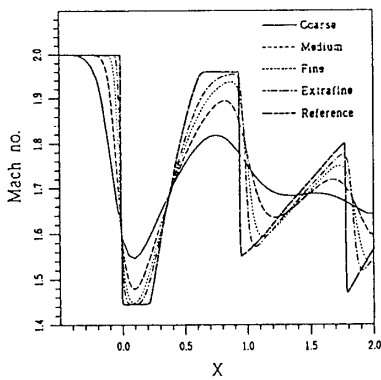
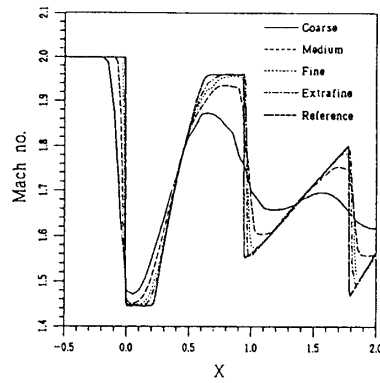


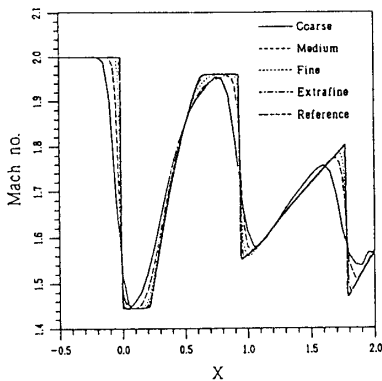
図42 Reference (961×321)での本法, 3次精度の等マッハ線図



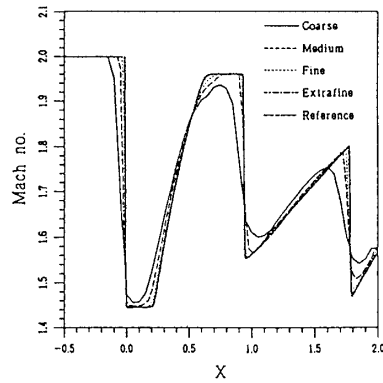
(a) 従来法, 1次精度



(b) 本法, 1次精度



(c) 従来法, 3次精度



(d) 本法, 3次精度

図43 各手法の格子による収束性 ($y=0$ 上の等マッハ線図)

これを見ると、空間3次精度、特に、風見鶏法では Extra-fine でほぼ収束していることが分かる。それぞれの格子での手法による差を描かせた図44でも同じ次数では風見鶏法の方がより解像度が高いという傾向が示されている。特に、Medium で従来法の3次精度と本法の3次精度の結果を比べてみると、従来法が衝撃波の捕獲に格子点5、6点を要しているのに対し、本法では4点になっている(図45)。このことは本法が斜め衝撃波に対しても1次元問題

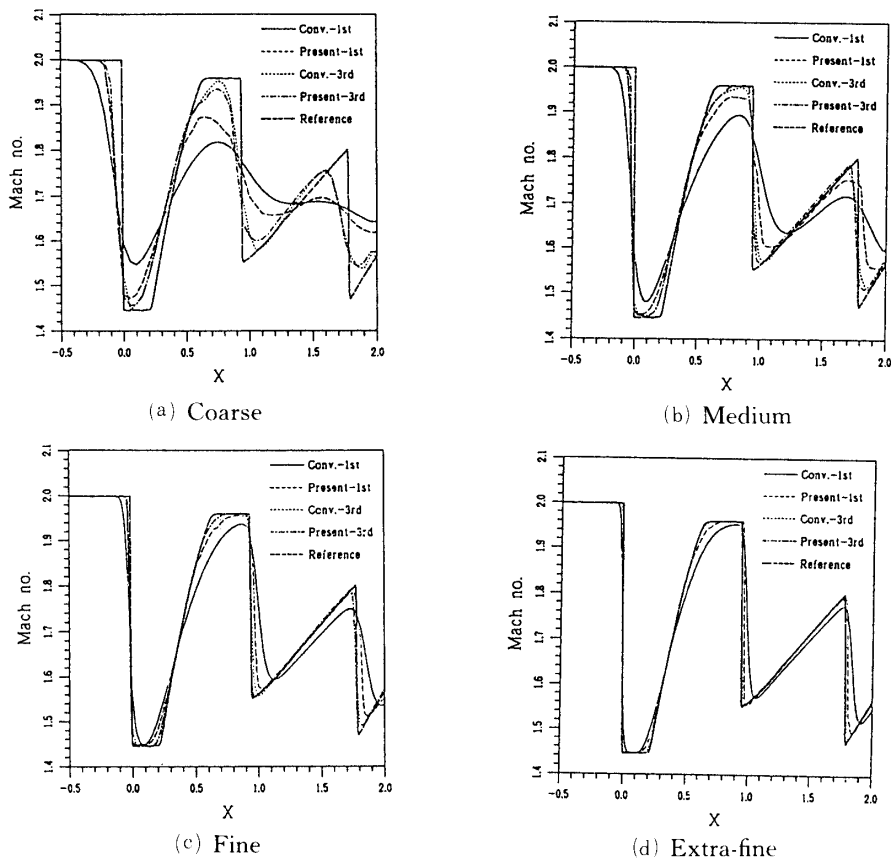


図44 それぞれの格子における各手法の解像度 ($y=0$ 上の等マッハ線図)

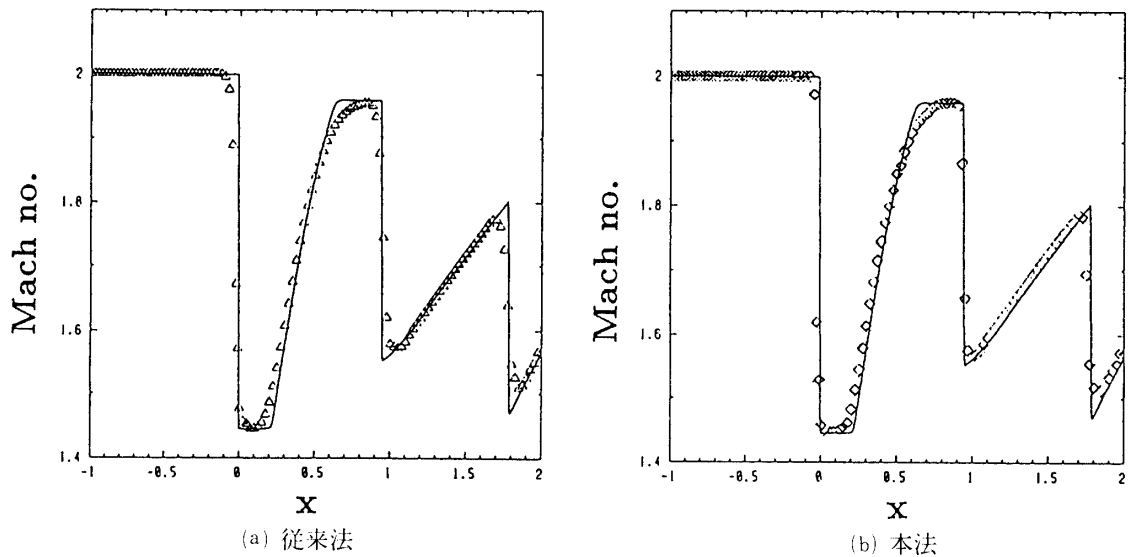


図45 121×41 での空間3次精度の場合の衝撃波の捕獲性

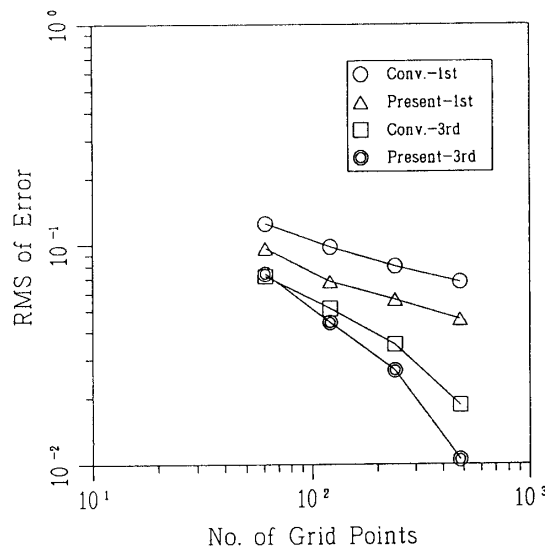


図46 各手法の格子点数に対する解の収束性

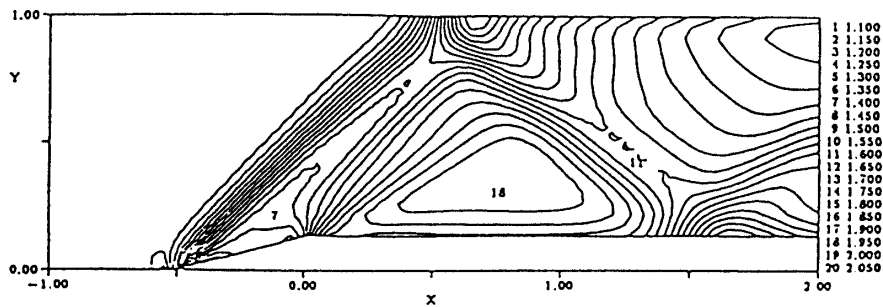
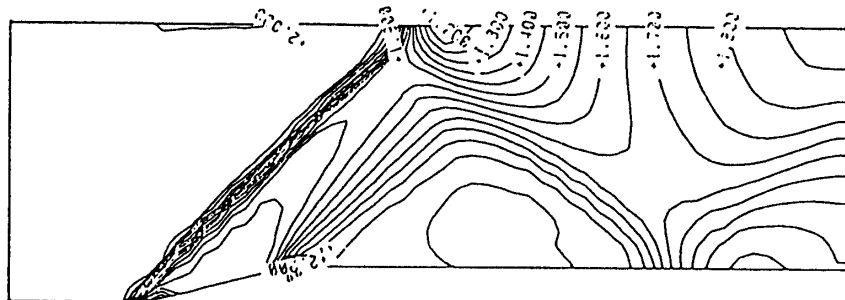
に近い衝撃波捕獲性を有していることを示したものと考えられる。図46には Reference の結果を厳密解と考えた各格子，各手法の誤差の2乗平均(RMS)が描かれている。具体的には，より粗い格子の各点で，その解と Reference の解の差をとり，一様流の値で無次元化した後2乗平均をとっている。横軸は流れ方向の格子点数である。空間1次精度と3次精度では誤差の落ち方が違うことと，特にこの流れ場ではマッハ反射が解像され始めると誤差の変化が格子数に対して非線形になる(Fine 及び Extra-fine の3次精度)ことが特徴的である。このことから本風見鶏法の優位性並びに空間高次精度の必要性が分かる。また，例えば本法の1次精度，格子点数121×41と同様の解像度を得ようとするとき，従来法の1次精度では各方向に約4倍の格子点数が必要であることが分かる。これは，本法が従来法に比べて同じ格子点数では多少計算時間を要しても十分に実用的であることを示していると考えられる。計算時間の増加と解像度の向上の関係については次章で考察する。

5.4 節 既存の多次元風上差分法との比較

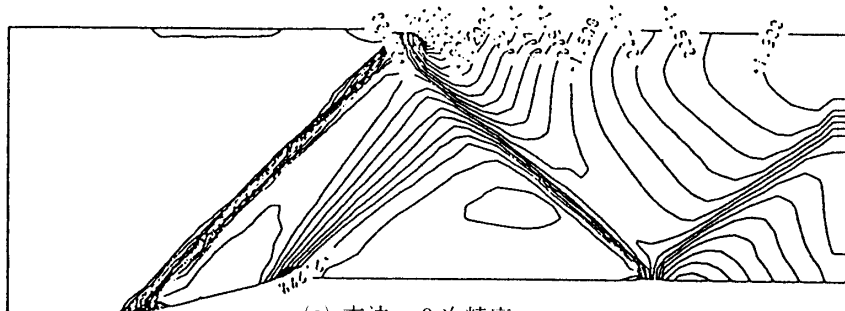
本節では既存の多次元風上差分法の内，2つの格子非依存スキームと3つの多次元近似リーマン解法に基づく方法との比較を行う。ただし，多次元近似リーマン解法に基づく多次元風上差分法に関しては，これらと格子非依存スキームに基づく本風見鶏法とは本質的に異なるため，単に計算結果のみを見比べてどちらが良い，悪いの判断はできない。そこで，これらについては格子非依存スキームの1つとしての本法と多次元近似リーマン解法の相違という観点から比較を行うこととする。また，ここで取り上げなかったものの中では Roe らの方法^{20)~22)}が比較的よい結果を示しているが，彼らの方法は3角形要素の非構造格子に基づいているため比較の対象とはしなかった。

5.4.1 Levy らの方法

Levy¹⁶⁾らの方法は第1章および第2章で述べたように，格子非依存スキームによる多次元風上差分法では代表的なもののひとつである。本法との主な違いは，斜めのセルと数値流束のやりとりがないこと，流体の方程式の場合に格子の回転方向が圧力勾配のみによってい

(a) Levy らの方法¹⁵⁾, 1次精度

(b) 本法, 1次精度

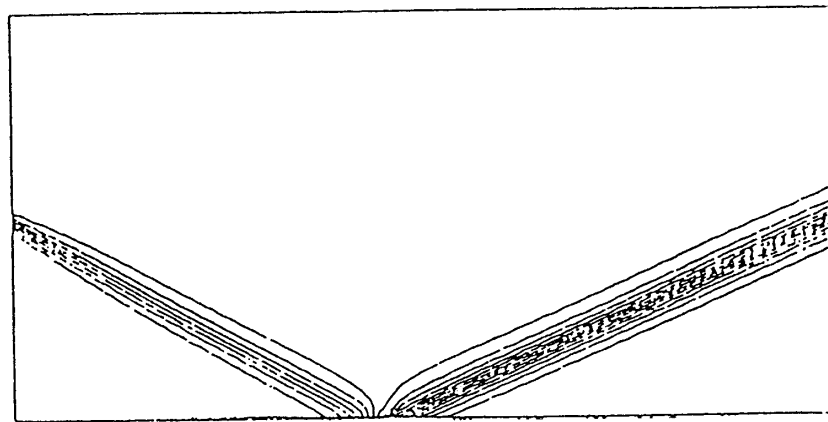
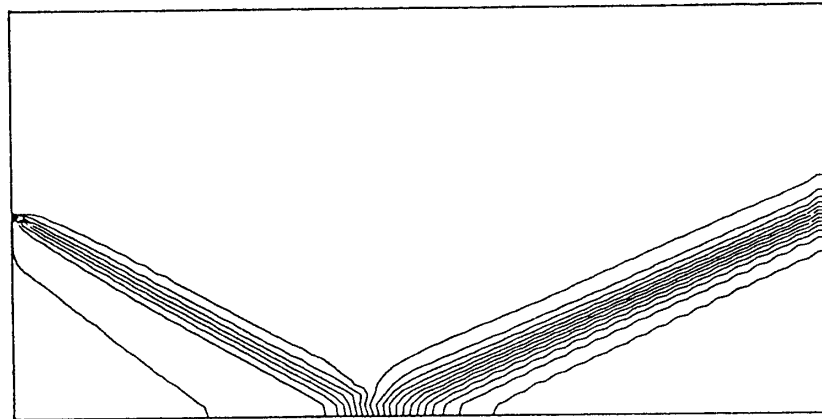


(c) 本法, 3次精度

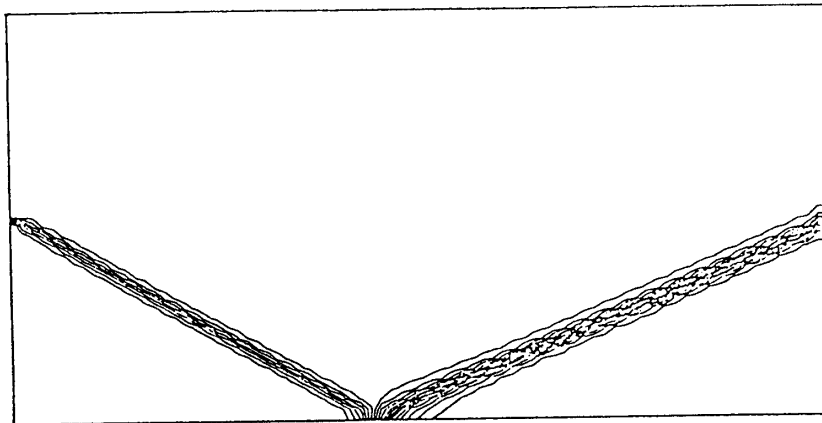
図47 Levy らとの比較

(超音速ダクト, 等マッハ線図, $M_\infty=2.0$, 61×21)

ることなどである。例題は5.3節で用いた超音速ダクト内の流れであるが、もともとこれは Levy らが提案したものである。図47(a)は Levy らの結果で空間1次精度、図47(b), (c)は本法の空間1次精度及び3次精度での計算結果の等マッハ数線図である。格子点数はいずれも 61×21 である。Levy らは16)で高精度化の可能性を示しているが、本例題には適用していない。そこで、空間1次精度同士を比較してみると、第1衝撃波は明らかに本法の方が少ない格子点で捉えている。これは数値流束の評価が、斜めのセルとのやりとりも含めて、よりよいと考えられる。一方、反射衝撃波以降は Levy らの方法がやや有利である。これは、次章で詳しく検討するが、本法は格子の回転方向をすべて独立に決定しているが、Levy らの方法は物理量(圧力勾配)の変動が小さい領域で格子の向きが滑らかに変わるような特殊処理を施しているため、物理量の跳びが比較的小さい反射衝撃波で差がでたものと考えられる。逆に、本法の空間3次精度の計算では反射衝撃波においても十分な物理量の跳びが捉えられ

(a) Dadone と Grossman の方法¹⁷⁾, 1次精度

(b) 本法, 1次精度



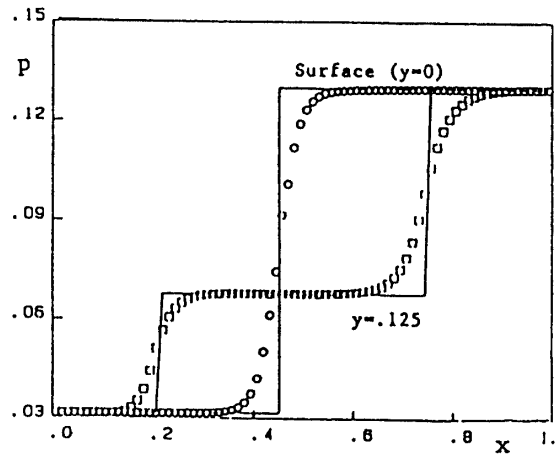
(c) 本法, 3次精度

図48 Dadone と Grossman との比較
 (平面に入射する衝撃波, 等圧力線図, $M_\infty=2.9$, $\beta=29^\circ$, 81×41)

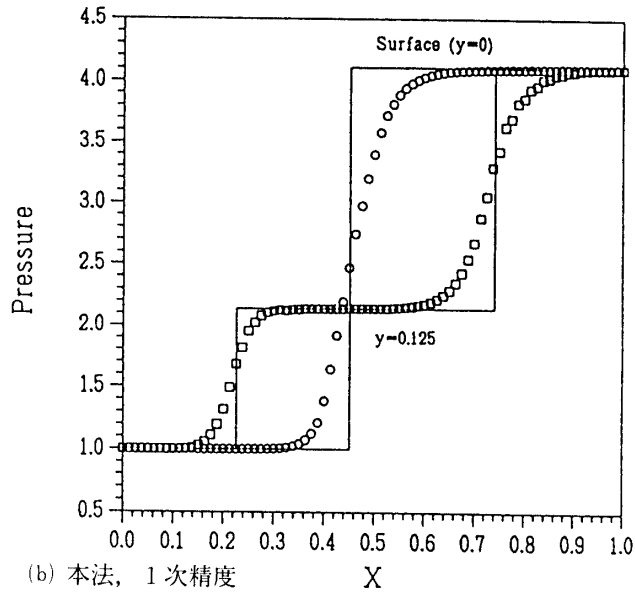
るため, 空間1次精度に比べて格段に良い解を与えている.

5.4.2 Dadone と Grossman の方法

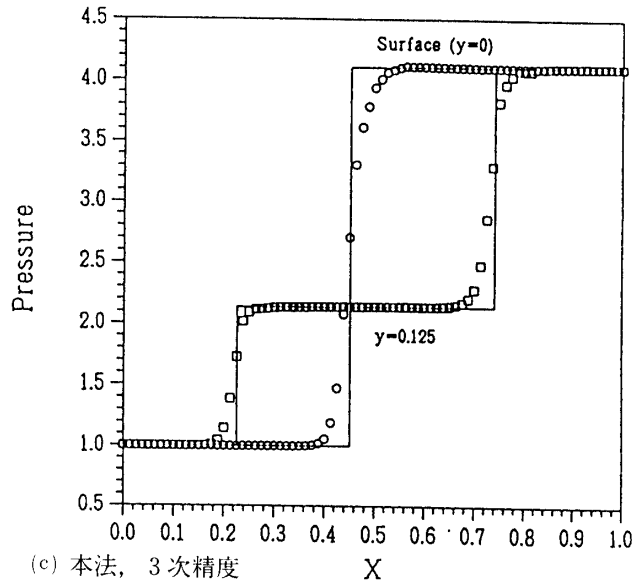
Dadone と Grossman の方法¹⁸⁾は基本的に Levy らの方法と同じであるが, 圧力勾配のデータに適切なフィルタをかけてよりよい格子の回転方向を求めようとするものである. 計



(a) Dadone と Grossman の方法¹⁷⁾, 1次精度



(b) 本法, 1次精度



(c) 本法, 3次精度

図49 Dadone と Grossman の例題計算の圧力分布の比較

算例は平板に入射する斜め衝撃波で、一様流マッハ数2.9，衝撃波角 29° である。衝撃波背後の流れはマッハ数2.378，流れ角 10.94° になる。計算格子はDadoneとGrossmanの計算に合わせて 81×41 の格子点数で、計算領域はxが0～1，yが0～0.5である。衝撃波は(0,

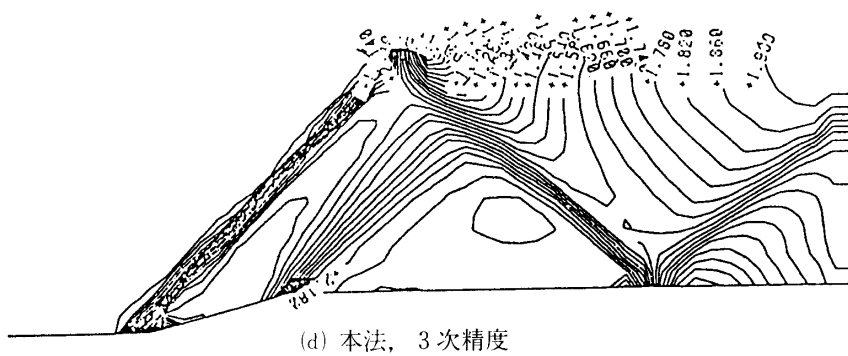
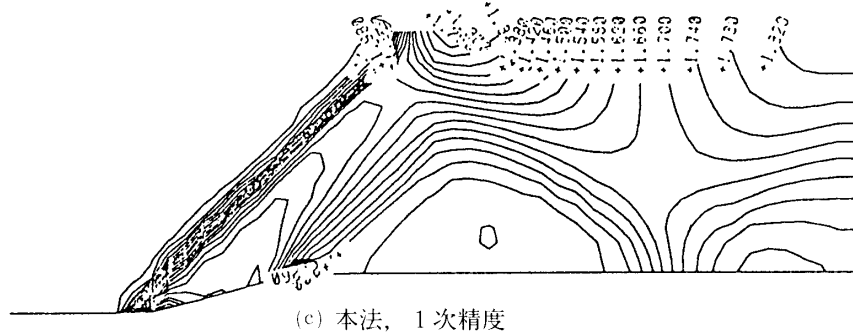
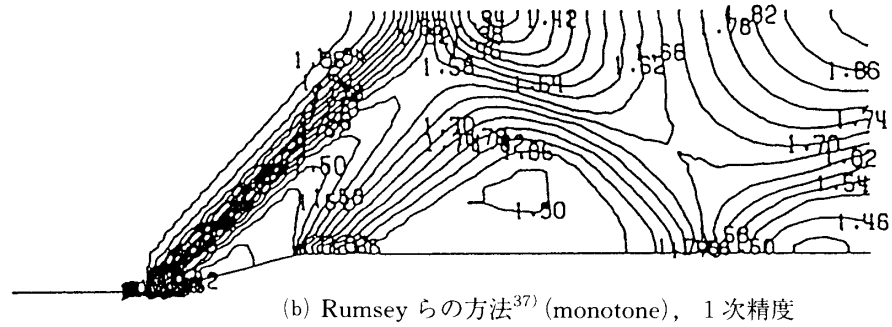
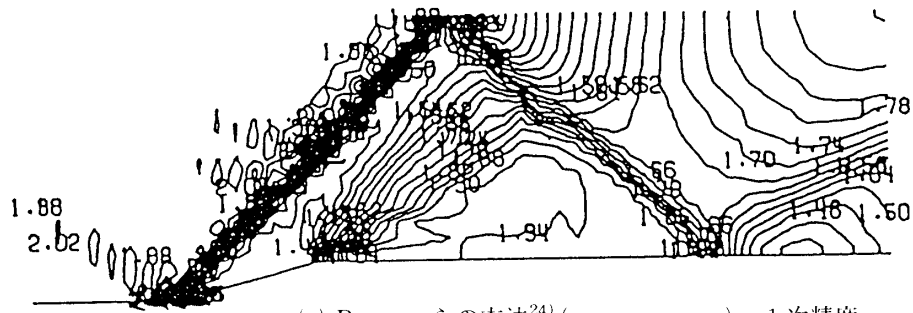


図50 Rumseyらとの比較
(超音速ダクト, 等マッハ線図, $M_\infty=2.0$, 49×17)

0.25) から入射する. 図48に計算結果の等圧力線図を示す. 図48(a)は Dadone と Grossman の空間 1 次精度, 図48(b), (c)は本法の空間 1 次精度及び 3 次精度である. 図49(a)-(c)には $y = 0$ および $y=0.125$ 上の圧力分布を解析解と共に示す. この例においては本法の空間 1 次精度と Dadone と Grossman の方法はほぼ同程度の解像度を示している. Dadone と Grossman も高次精度の結果は示していない.

5.4.3 Rumsey らの方法

Rumsey らの方法²⁵⁾³⁸⁾は固定されたセルの境界面で多次元的に波の分解を行うものである.

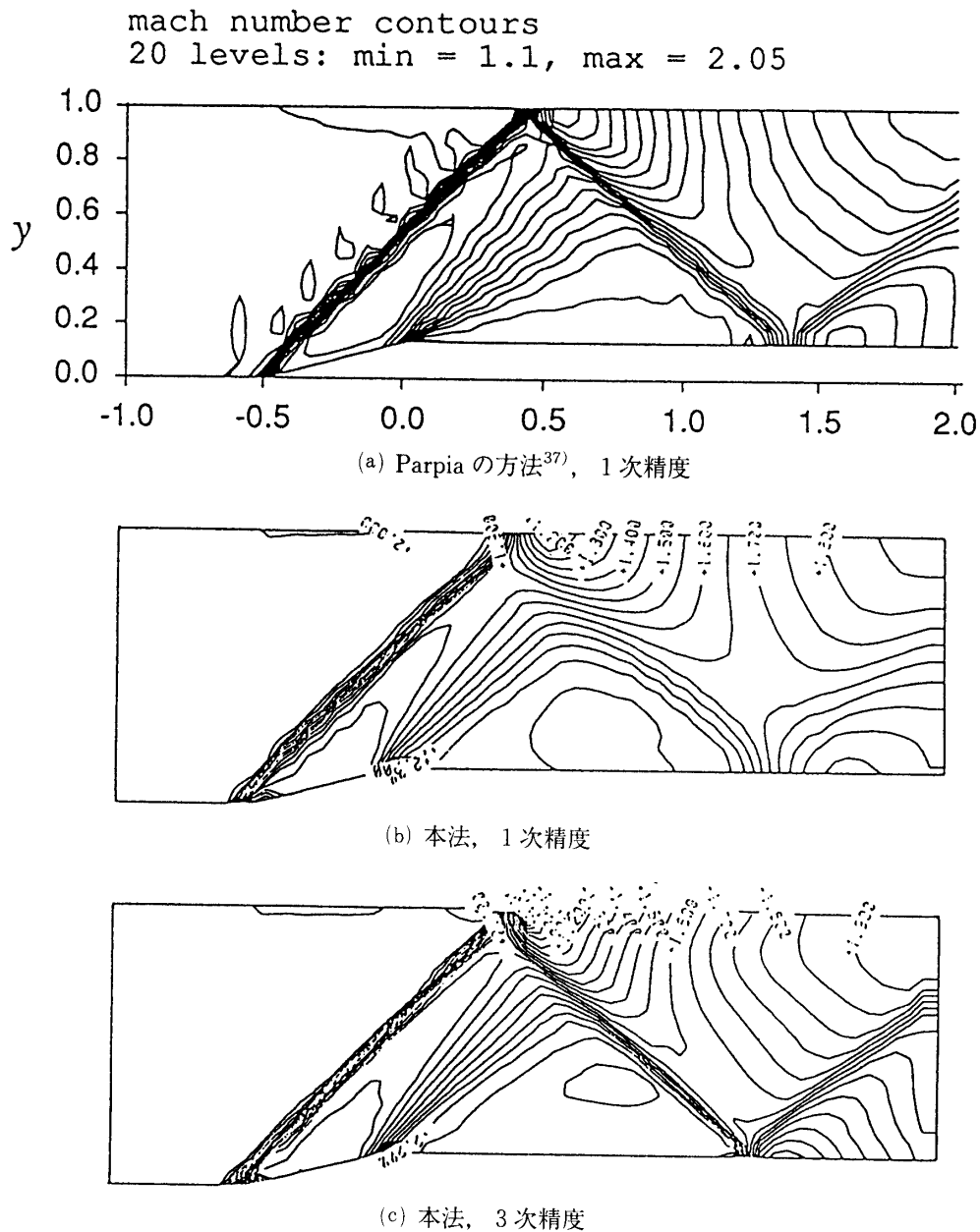
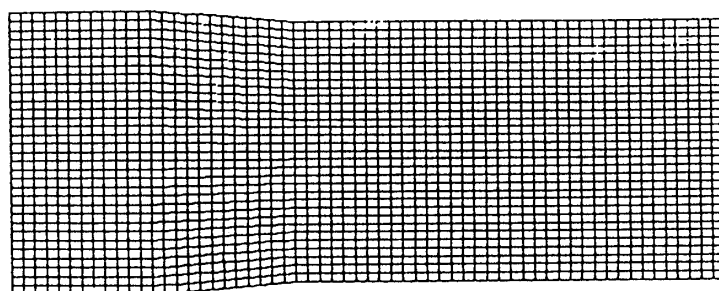
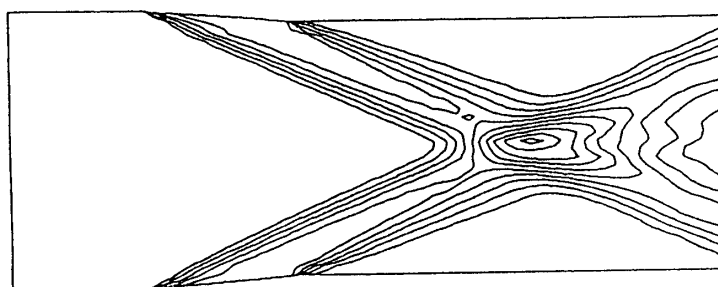
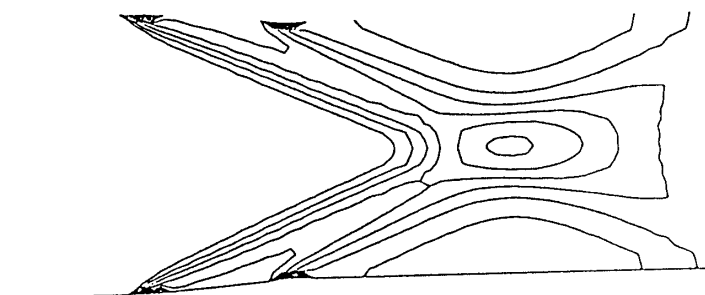


図51 Parpia との比較

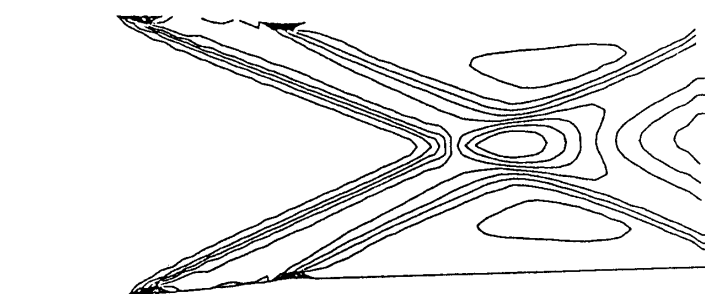
(超音速ダクト, 等マッハ線図, $M_\infty=2.0, 61 \times 21$)



(a) 計算格子 (61×31)

(b) Hirsch らの方法²³⁾, 等マッハ線図

(c) 本法, 1次精度, 等マッハ線図



(d) 本法, 3次精度, 等マッハ線図

図52 Hirsch らとの比較
(超音速ダクト, $M_\infty=3.0$)

図50に5.4.1で Levy らとの比較にも用いた超音速ダクト内の流れの計算結果を示す。ただし、格子数は Rumsey らの計算に合わせて 49×17 である。図50(a)は25)による方法で、明らかに解が monotone でない。これに対し、図50(b)は25)の方法を改良して解が滑らかになるような制限を課した38)の方法によるもので、いずれも空間1次精度である。これに対し、図

50(c), (d)は本法の空間1次精度および3次精度の結果である。monotone に近づいた図50(b)と(c)を比較すると, 第1衝撃波は本法の方が鋭く, 反射衝撃波以降はほぼ同等である。Rumsey らの空間高次精度の結果は示されていない。

5.4.4 Parpia の方法

Parpia の方法²⁶⁾は基本的に前出の Rumsey らの方法と類似のものであるが, 固定されたセルの境界面で斜め衝撃波を仮定することにより, 多次元的な波の分解を行っている。図51にこれも Levy らの提案による超音速ダクトの計算結果を示す。図51(a)は Parpia による61×41の格子での結果の等マッハ線図で, 衝撃波は鋭いが, 明らかに不自然な振動を伴っており, このままでは実際の計算には向かない。参考のため, 本法による空間1次精度及び3次精度の結果を図51(b), (c)に示しておく, 本法の空間3次精度は Parpia の結果程度に高解像度でかつ monotone である。Parpia は高次精度化の方法を示していない。

5.4.5 Hirsch らの方法

Hirsch らの方法²³⁾²⁴⁾を波を多次元的に分解する点では前出の2方法と同じであるが, 個々の風上の評価に格子非依存スキーム的な要素が取り入れられている。それでも, 最終的な流束はやはり固定されたセル境界面で行われている。計算例は図52(a)に計算格子を示す流入マッハ数3のチャンネル流²⁴⁾で, 長さ1, 入口の幅0.4, ランプまで0.2, ランプ角5°, ランプの長さ0.2, 格子数は61×33である。図52(b)に Hirsch らの結果, (c), (d)に本法の空間1次精度および3次精度による結果の等マッハ数線図を示す。Hirsch らの方法は空間1次精度ながらある種の内挿(かれらは Characteristic MUSCL と呼んでいる)を用いている。図52を見ると, Hirsch らの方法は本法の空間1次精度よりは解像度の高い解を与えている反面, 解が上下非対称になるという問題を残している。また, Hirsch らは Characteristic MUSCL を用いれば高次精度化が可能であるとしているが, その結果は示されていない。

第6章 3次元への拡張

前章まで2次元の風見鶏法について述べてきたが, 本章では風見鶏法の3次元への拡張について議論する。本風見鶏法の本質は2次元の場合に尽きており, 3次元への拡張に当たって特に新しい困難があるわけではないのだが, 後述するように, 3次元の場合には流束の選び方などに多少の自由度がある。そこで, 本章では本法の3次元への拡張方法の1例について簡単に述べることにする。まず, 第4章の2次元オイラー方程式の場合と同様に, セルの回転方向が決まったとして数値流束をどのように評価するかについて説明し, しかるのちセルの回転方向の詳細について述べる。その後で, 簡単な流れ場での計算例により3次元での本法の有効性を示す。

6.1 節 数値流束の評価

3次元のオイラー方程式は(6.1)式で表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

ここで,

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(e+p) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(e+p) \end{bmatrix}$$

で、 p は密度、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の速度成分、 e は単位体積当りの全エネルギー、 p は圧力である。理想気体では、

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (6.2)$$

の関係がある。 γ は比熱比である。

一方、一般座標上では、

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = 0 \quad (6.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= Q/J, & \hat{E} &= (\xi_x E + \xi_y F + \xi_z G)/J \\ \hat{F} &= (\eta_x E + \eta_y F + \eta_z G)/J, & \hat{G} &= (\zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G)/J \end{aligned}$$

J は座標変換のヤコビアンで、

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\zeta y_\xi z_\eta + x_\eta y_\zeta z_\xi - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi \quad (6.4)$$

また、 ξ_x などは座標変換の metric でそれぞれ、

$$\begin{aligned} \xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), & \eta_x &= J(z_\xi y_\zeta - y_\xi z_\zeta) \\ \xi_y &= J(z_\eta x_\zeta - x_\eta z_\zeta), & \eta_y &= J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) \\ \xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta), & \eta_z &= J(y_\xi x_\zeta - x_\xi y_\zeta) \\ \zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) \\ \zeta_y &= J(x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta) \\ \zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) \end{aligned} \quad (6.5)$$

である。さらに、反変速度ベクトル (contravariant velocity vector) の ξ, η, ζ 成分を、

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \quad V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \quad W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \quad (6.6)$$

と定義しておけば、 \hat{E}, \hat{F} 及び \hat{G} は簡単な形になって、それぞれ、

$$\hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e+p) U \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e+p) V \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e+p) W \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

と書ける³⁹⁾.

ここでもセルの回転は2次元の場合と同様に計算空間で行う. そこで, 一般座標上でセルの回転方向とこれに垂直な互いに直交する他の2方向を $\vec{e}_n, \vec{e}_t, \vec{e}_s$ とすれば, 回転したセルに対する流束を用いて表わした基礎方程式は各格子セルで,

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial s} = 0 \quad (6.8)$$

$$\vec{e}_n = (k_{n\xi}, k_{n\eta}, k_{n\zeta})^T, \quad \vec{e}_t = (k_{t\xi}, k_{t\eta}, k_{t\zeta})^T, \quad \vec{e}_s = (k_{s\xi}, k_{s\eta}, k_{s\zeta})^T$$

$$\bar{Q} = \hat{Q}, \quad \bar{E} = k_{n\xi} \hat{E} + k_{n\eta} \hat{F} + k_{n\zeta} \hat{G} = (k_{nx} E + k_{ny} F + k_{nz} G) / J$$

$$\bar{F} = k_{t\xi} \hat{E} + k_{t\eta} \hat{F} + k_{t\zeta} \hat{G} = (k_{tx} E + k_{ty} F + k_{tz} G) / J$$

$$\bar{G} = k_{s\xi} \hat{E} + k_{s\eta} \hat{F} + k_{s\zeta} \hat{G} = (k_{sx} E + k_{sy} F + k_{sz} G) / J$$

$$k_{nx} = k_{n\xi} \xi_x + k_{n\eta} \eta_x + k_{n\zeta} \zeta_x, \quad k_{tx} = k_{t\xi} \xi_x + k_{t\eta} \eta_x + k_{t\zeta} \zeta_x$$

$$k_{ny} = k_{n\xi} \xi_y + k_{n\eta} \eta_y + k_{n\zeta} \zeta_y, \quad k_{ty} = k_{t\xi} \xi_y + k_{t\eta} \eta_y + k_{t\zeta} \zeta_y$$

$$k_{nz} = k_{n\xi} \xi_z + k_{n\eta} \eta_z + k_{n\zeta} \zeta_z, \quad k_{tz} = k_{t\xi} \xi_z + k_{t\eta} \eta_z + k_{t\zeta} \zeta_z$$

$$k_{sx} = k_{s\xi} \xi_x + k_{s\eta} \eta_x + k_{s\zeta} \zeta_x$$

$$k_{sy} = k_{s\xi} \xi_y + k_{s\eta} \eta_y + k_{s\zeta} \zeta_y$$

$$k_{sz} = k_{s\xi} \xi_z + k_{s\eta} \eta_z + k_{s\zeta} \zeta_z$$

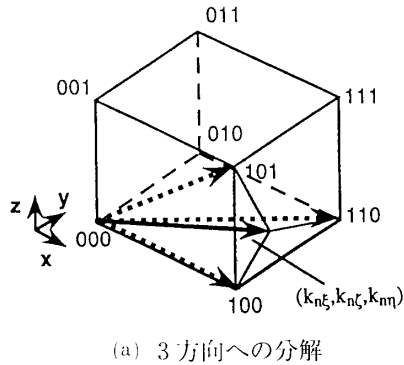
あるいは積分形で,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} dV + \oint_{\partial \Omega} (\bar{E} \cdot \vec{e}_n + \bar{F} \cdot \vec{e}_t + \bar{G} \cdot \vec{e}_s) d\vec{A} = 0 \quad (6.9)$$

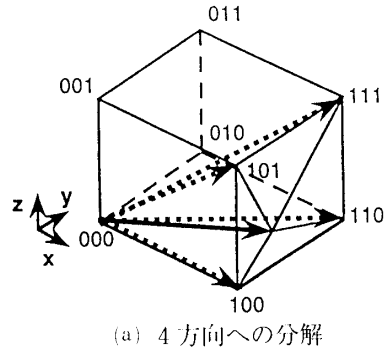
となる. ここまでは, 2次元の場合と全く同じ手続きであり, 各方向の数値流束の評価についても, k_{nx} を ξ_x , k_{ny} を ξ_y などと読みかえれば形式的に通常の一般座標系における格子線方向の流束と同じ形式になっているので, 既存のプログラム³¹⁾からの修正はこれも決して大きくない.

3次元の場合の, 2次元との最大の相違は, 2次元では任意の方向の流束を格子に沿う方向と対角線方向とに分けることで, 4つの格子点を頂点とする格子セル内の6通りの流束の全てを評価することができた(図27)のに対し, 3次元では必ずしも全ての流束成分を評価できないことである.

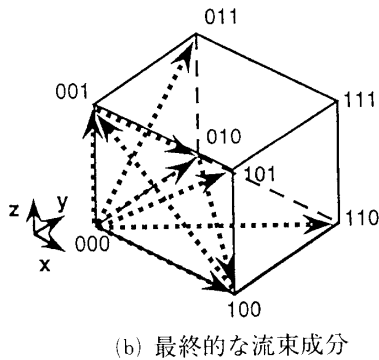
図53(a)はある方向の流束を格子に沿う方向と格子面内の対角線の2方向の計3方向に分解する場合を示しているが, この方法では最終的に評価される流束は図53(b)のようになって, 格子セル内を斜めに通過する(例えば(0,0,0)から(1,1,1)方向)流束は現れない.



(a) 3方向への分解



(a) 4方向への分解



(b) 最終的な流束成分

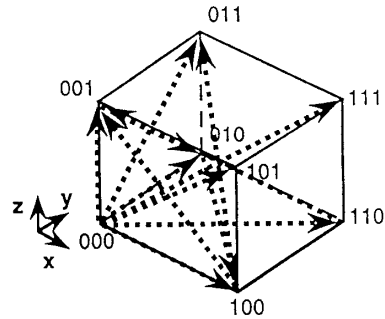
(b) 最終的な流束成分(1例)
この場合、010-101が無い。

図53 3方向への分解する場合の流束評価

図54 4方向への分解する場合の流束評価

一方、図54はある方向の流束を格子線方向、格子面内の対角線の2方向及び格子セルを斜めに横切る方向の計4方向に分解する場合を示しているが、これでも格子セルを斜めに横切る方向の内1つが評価されずに残る。

このように、3次元の場合には流束の分解に任意性があるが、ここでは簡単のため、図53のような3方向への分解を採用してみた。従って、格子セル内を斜めに横切る方向の流束は評価されないことになる。以下にこのときの流束成分を示すが、次節で述べるように、工夫してとればセルの回転方向を、

$$\begin{aligned}
 k_{n\xi} &\geq |k_{n\eta}|, |k_{n\zeta}| \geq 0 \\
 k_{n\eta} &\geq |k_{t\zeta}|, |k_{t\xi}| \geq 0 \\
 k_{s\zeta} &\geq |k_{s\xi}|, |k_{s\eta}| \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

とすることができる。つまり、 \vec{e}_n は常に ξ 方向成分が最も大きく、従って \vec{e}_n は ξ の格子線方向と $\xi-\eta$ 面内の対角線方向、および $\zeta-\xi$ 面内の対角線方向に分解されると決めることができる。他の2方向も同様である。また、各流束成分の重み付けは2次元の類推から3点の線形内挿と考えられるので、例えば、図53(a)に示すような $k_{n\xi} \geq k_{n\eta} \geq k_{n\zeta} \geq 0$ の場

合, ξ 方向に $1 - (k_{n\eta} + k_{n\zeta})/k_{n\xi}$, 000-110方向に $k_{n\eta}/k_{n\xi}$, 000-101方向に $k_{n\zeta}/k_{n\xi}$ の重みとなる. また, この流束に対応する仮想的なセル境界面の面積も2次元の類推から $k_{n\xi}$ と分かる.

これらのことを念頭に置いて各流束成分を書き下すと,

$$\begin{aligned}
H_{000-100} &= (k_{n\xi} - |k_{n\eta}| - |k_{n\zeta}|) \bar{E}_{000-100} \\
H_{000-010} &= (k_{t\eta} - |k_{t\xi}| - |k_{t\xi}|) \bar{F}_{000-010} \\
H_{000-001} &= (k_{s\xi} - |k_{s\xi}| - |k_{s\eta}|) \bar{G}_{000-001} \\
H_{000-110} &= \max(k_{n\eta}/k_{n\xi}, 0) \bar{E}_{000-110} + \max(k_{t\xi}/k_{t\eta}, 0) \bar{F}_{000-110} \\
H_{010-100} &= \max(-k_{n\eta}/k_{n\xi}, 0) \bar{E}_{010-100} + \max(-k_{t\xi}/k_{t\eta}, 0) \bar{F}_{010-100} \\
H_{000-101} &= \max(k_{s\xi}/k_{s\zeta}, 0) \bar{G}_{000-101} + \max(k_{n\zeta}/k_{n\xi}, 0) \bar{E}_{000-101} \\
H_{100-001} &= \max(-k_{s\xi}/k_{s\zeta}, 0) \bar{G}_{100-001} + \max(-k_{n\zeta}/k_{n\xi}, 0) \bar{E}_{100-001} \\
H_{000-011} &= \max(k_{t\xi}/k_{t\eta}, 0) \bar{F}_{000-011} + \max(k_{s\eta}/k_{s\zeta}, 0) \bar{G}_{000-011} \\
H_{001-010} &= \max(-k_{t\xi}/k_{t\eta}, 0) \bar{F}_{001-010} + \max(-k_{s\eta}/k_{s\zeta}, 0) \bar{G}_{001-010}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

ここで, \max は大きい方をとる関数であり, また各流束成分は,

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{a-b} &= \bar{H}(\vec{e}_n; \bar{W}_a, \bar{W}_b), \quad \bar{F}_{a-b} = \bar{H}(\vec{e}_t; \bar{W}_a, \bar{W}_b) \\
\bar{G}_{a-b} &= \bar{H}(\vec{e}_s; \bar{W}_a, \bar{W}_b)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

とまとめることができる. $\bar{H}(\vec{e}; \bar{W}_a, \bar{W}_b)$ は \vec{e} 方向の流束を, a 側の物理量 \bar{W}_a 及び b 側の物理量 \bar{W}_b から求めた数値流束である. 2次元の場合と同様, Roe の Flux Difference Splitting によりこれを評価するならば,

$$\bar{H}(\vec{e}; \bar{W}_a, \bar{W}_b) = \frac{1}{2} [H(\vec{e}; \bar{W}_b) + H(\vec{e}; \bar{W}_a) - |A(\vec{e}; W_{ave})| \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{W}} (\bar{W}_b - \bar{W}_a)] \tag{6.13}$$

となる. H は物理流束で, 原始変数 $W = [\rho, u, v, w, p]^T$ に対し,

$$\begin{aligned}
H(\vec{e}; W) &= J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + e_x p \\ \rho v U + e_y p \\ \rho w U + e_z p \\ (e+p) U \end{bmatrix} \\
\vec{e} = [e_1, e_2, e_3]^T, \quad \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad U = e_x u + e_y v + e_z w
\end{aligned}$$

で与えられる. A は H のヤコビアン行列 $\partial H / \partial Q$, W_{ave} は Roe の平均化で, これも2次元の場合と同様である. これらの詳細については35)36)などを参照されたい.

また, (6.12)式で \bar{W}_a に a 点の物理量そのものを用いれば空間1次精度のスキームになるが, MUSCL などにより求めた \bar{W}_a を用いることで高次精度化もできる. MUSCL に関し

ては2次元の場合と同様に行えるためここでは省略する。

6.2 節 セルの回転方向

セルの回転方向の決め方も原理的には2次元の場合と変わらない。すなわち、ここでは一様流の値で正規化された圧力、密度と速度の代わりに動圧の勾配を用いている。

$$\vec{e}_n // \overrightarrow{\max}(\nabla \rho, \nabla p, \nabla \left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right\}) \quad (6.14)$$

ここで、 $\overrightarrow{\max}$ は大きさが最大のベクトルを選ぶ関数である。

2次元の場合はこのようにしてある特性的な方向を定義すれば、もう一方のこれに垂直な方向は必然的に定まった。しかし、3次元の場合、残り2つのベクトルはこの方向に垂直な面内で、互いに直交すればよいだけで、一意には決まらない。もちろん、理論的には残り2つのベクトルはどちら向きにとってもよい。そこで、前節で述べたようにここでは残り2方向のベクトルのとり方を工夫して、(6.10)式を満足するようにした。具体的には、正規化したセルの回転方向ベクトル \vec{e}_p の各方向成分が絶対値の大きい順に ω, ψ, ϕ であるとすれば、 \vec{e}_p は、

$$\vec{e}_p = \omega \cdot \mathbf{i} + \psi \cdot \mathbf{j} + \phi \cdot \mathbf{k}, \quad |\omega| \geq |\psi| \geq |\phi|$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は ξ, η, ζ いずれかの方向の単位ベクトルである。このとき、残りのベクトルの一方 \vec{e}_q を、

$$\vec{e}_q = \begin{cases} -\frac{\phi}{\sqrt{\omega^2 + \phi^2}} \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \phi^2}} \cdot \mathbf{k} & (|\omega| \geq |\psi| + |\phi|) \\ \frac{\omega \cdot \phi}{|\omega \cdot \phi|} \cdot s \cdot \mathbf{i} - \frac{\psi \cdot \phi}{|\psi \cdot \phi|} \cdot s \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\psi^2}{|\psi \cdot \phi|} - \frac{\omega^2}{|\omega \cdot \phi|} \right) \cdot s \cdot \mathbf{k} & (s = \sqrt{\frac{\phi^2}{1 + \phi^2 - 2|\psi \cdot \omega|}}, \quad |\omega| < |\psi| + |\phi|) \end{cases}$$

とし、最後のベクトル \vec{e}_r を、

$$\vec{e}_r = \vec{e}_p \times \vec{e}_q$$

としている。これにより、3つのベクトルのそれぞれが ξ, η, ζ いずれかの方向成分が最も大きいベクトルに必ずなっていることは簡単に証明できる。

計算上のセルの回転方向は2次元の場合と同様に格子の8頂点の値を用いて差分により評価している。

6.3 節 例題

ここでは、例題として微小な迎角を持つ円錐まわりの流れをとりあげた。迎角が小さい場合の円錐まわりの流れに関しては、迎角まわりに微小擾乱展開し、高次の項を落として得られた解がある⁴⁰⁾⁴¹⁾ので、これを比較に用いる。具体的な計算条件は、円錐の半頂角 10° 、一様流マッハ数3.0、迎角 2° である。まず、計算格子を図55に示す。計算は、流れが左右対称であると仮定して片側だけ解くことにし、格子点数は流れ方向に15点、周方向に17点、物体

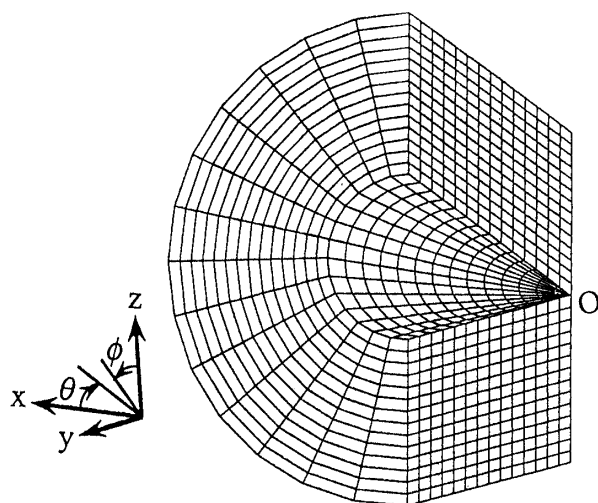


図55 計算格子

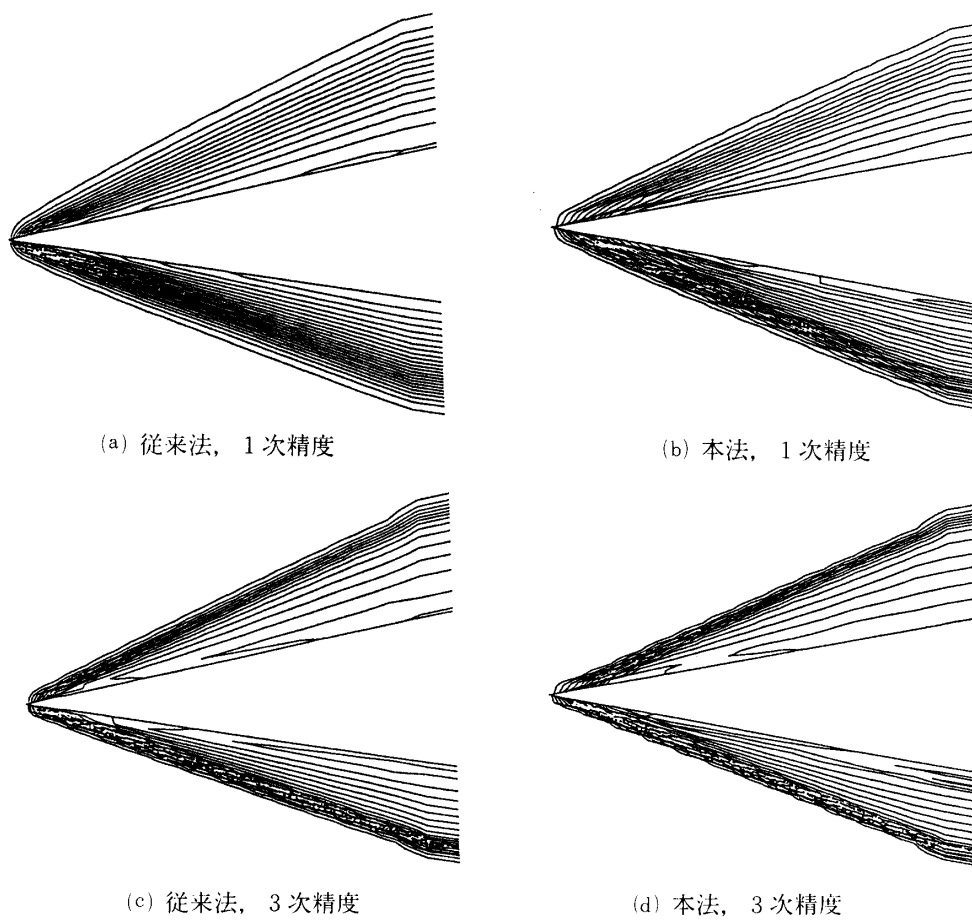


図56 迎角のある円錐まわりの流れの等圧力線図(対称面),
 $\alpha=2.0^\circ$, $M_\infty=3.0$, $15 \times 17 \times 45$

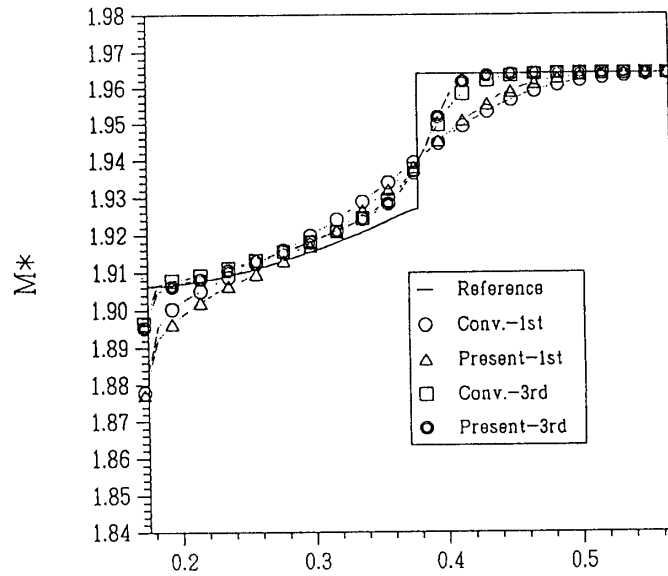
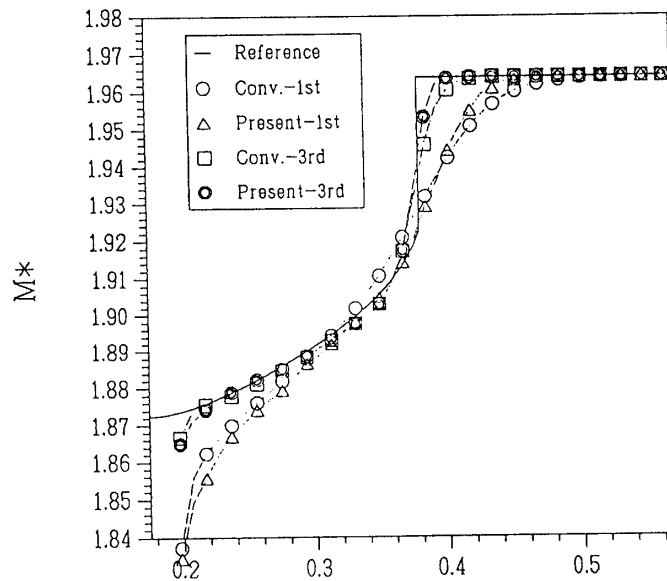
(a) 上面 ($\phi = 0^\circ$) $\theta(\text{red})$ (b) 下面 ($\phi = 180^\circ$) $\theta(\text{red})$

図57 円錐まわりの流れの計算結果と解析解⁴⁰⁾⁴¹⁾の比較,
 $\alpha=2.0^\circ$, $M_\infty=3.0$, $15 \times 17 \times 45$

から離れる方向に15点である。このほかに物体から離れる方向のみ格子点数を3倍にした $15 \times 17 \times 45$ の格子も用いる。

境界条件は、まず、流入境界および遠方境界は一様流の条件で固定、流出境界は全ての物理量を0次外挿とした。対称面では対称面の反対側にもう1点とり、鏡像対称をとった値を代入することで対称条件を満足させている。また、物体表面は、密度を0次外挿、速度は物体に沿う方向の成分を1次外挿、物体に垂直な方向の運動量の保存から圧力を計算した。こ

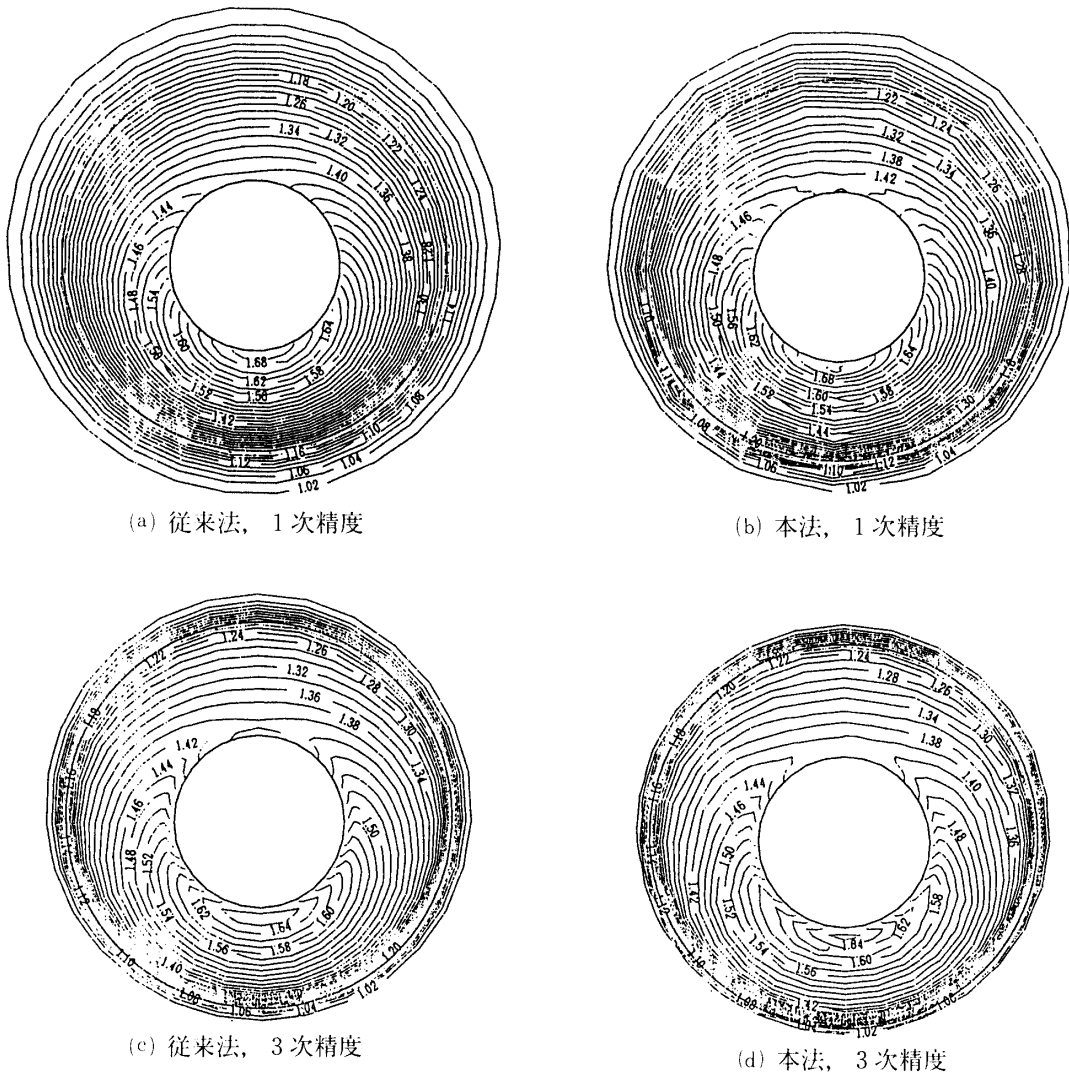


図58 円錐まわりの流れの横断面内の等圧力線図,
 $\alpha=2.0^\circ$, $M_\infty=3.0$, $15 \times 17 \times 45$

れらは差分法による数値計算では最も一般的に用いられている方法である。

時間積分は、定常解のみを問題としているため、従来法³¹⁾と同様にLU-ADI法による陰的積分を用いた。

図56に従来法³¹⁾と本法による $15 \times 17 \times 45$ の格子での計算結果の対称面内の等圧線図を示す。同じ空間精度では本法の方がより鋭く衝撃波を解像していることが分かる。

次に40), 41)の解析解と数値計算の結果を比較する。解析解は図55に示す x 軸からの角度 θ と $y-z$ 平面内での z 軸からの角度 ϕ で表わされているので、この座標系を用いることにする。図57は上面($\phi=0^\circ$)及び下面($\phi=180^\circ$)内での θ に対する局所的な臨界マッハ数の分布である。太い実線が解析解、印の付いているのが数値計算の結果である。計算結果はこれも細かい方の格子のものである。衝撃波の解像度が向上しているため、本法の方が従来法よりも、特に衝撃波付近で解析解に近づいていることが分かる。

図58は $x=0.857$ 面内の等圧力線図で、解析解より得られる衝撃波位置が太い1点鎖線で示されている。従来法、本法とも衝撃波位置を正しく捉えている(等圧力線が密になっている部分に解析解の衝撃波位置を含んでいる)が、本法の方がより衝撃波を鋭く捉えていることが、特に上面側で顕著である。

更に、流れ場全体の解像度を見るため、全ての格子点で解析解による臨界マッハ数を求め、これと計算結果の差の自乗平均をとった結果を以下の表にまとめた。

15×17×15の場合	
計算法	自乗平均
従来法(1次精度)	2.64×10^{-4}
本法(1次精度)	1.90×10^{-4}
従来法(3次精度)	2.00×10^{-4}
本法(3次精度)	1.53×10^{-4}

15×17×45の場合	
計算法	自乗平均
従来法(1次精度)	8.93×10^{-5}
本法(1次精度)	8.19×10^{-5}
従来法(3次精度)	5.26×10^{-5}
本法(3次精度)	4.38×10^{-5}

これにより、明らかな解像度の向上が分かる。なお、40)、41)の解析では物体表面の解は与えられないのでここでは比較の対象から除外している。また、格子を細かくした15×17×45の格子は衝撃波がより格子に沿う形になっているので、従来法と本法の差は相対的に小さいはずであるが、それでも明らかな違いが確認できる。

第7章 考察

第3章のスカラ輸送方程式及び第5章のオイラー方程式の結果から、従来の格子方向の風上差分に対する本風見鶏法の優位性は明らかである。まず、解像度が向上している。場合によっては風見鶏法の空間1次精度が従来の方法の空間3次精度にも匹敵しており、最低でも従来の方法の同精度のスキームよりはよい解を与えている。もともと多次元風上差分、特に格子非依存スキームに基づくものは、格子が最適に配されている場合の従来法の解像度が、格子配置が最適でない場合にも得られるようにしようとするものであるから、どのような問題に対しても従来法より悪くならないことは重要な要件である。また、いくつかの例題では本法がより大きな時間刻みで安定に計算できた。このことは線形スカラ輸送方程式に対する空間1次精度の安定解析の結果がスカラで高次精度の非線形スキームやシステムであるオイラー方程式に対する1次および高次の非線形スキームに対しても同様に成り立つことを数値的に示したものと言える。

ここには示さないものもあったが、他の多次元風上差分法である16)、21)、25)、26)の結果などと比べてみると、本法よりも解像度が高い(衝撃波が薄い)ものはあるが、それらは大

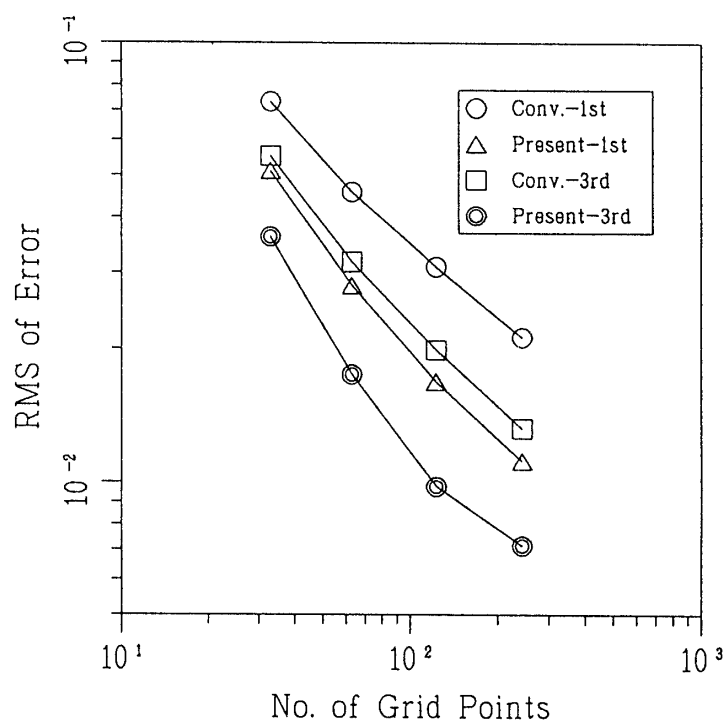


図59 円弧翼の例題で境界の隣のセルを回転させた場合の各手法の格子点数に対する円弧翼面上の圧力分布の収束性

抵不自然な振動を伴っていて、monotone でない。逆に言うと、monotone なスキームの中では本法はかなり解像度が高い。さらに、他の多次元風上差分法では高次精度化が示されていないか、あるいは可能性を示唆するにとどまっているものがほとんどであるが、本法では高次精度化が有効に働くことが示された。

他の多次元風上差分法に対する本法のもう一つの利点は不確定なパラメータを持たないことである。セルの回転方向は各格子セルごとに独立に定まり、隣のセルとの間で格子の方向が急変しないように smoothing をかけたり混ぜ合わせ (blending) たりといった処理¹⁸⁾や、適当に計算が進んだ段階でセルの回転方向を固定するといった処理²⁵⁾は一切行っていないが、そのことにより monotonicity が損なわれたり、解が定常解に収束しなかったりといったことはない。収束性に関して言えば、各例題で対応する従来の風上差分と遜色のない収束を示している。

その一方、前章の例題計算で反射衝撃波など弱い不連続が、特に空間1次精度の場合にうまく捉えられないことがあった。これは物理量の跳びが弱すぎて局所的に正しいセルの回転方向が得られなかったためと考えられる。格子非依存スキームの一つである16)は、物理量(圧力)の変動が小さいときにセルの回転方向が急変しないようにある種の smoothing をかけているが、それがかえって弱い変動に対しては有利に働いているとも考えられる。

また、格子点数を増やしていったときの解の収束性を示した図36, 46で、格子が最も粗いとき、むしろ従来法の方が物体表面でよい結果を示す場合が例外的に見られた。これは4.3節の境界条件で書いたように、境界の隣のセルで格子の回転を押さえているためである。試

みに境界の隣のセルも他のセルと同様に回転させると境界付近で確かに解は改善される。図59は円弧翼の例題で境界の隣のセルも回転させた場合の解の厳密解への収束状況である。物体表面だけを見ているため著しい改善がある。反面、境界の隣のセルを回転させると定常解への収束性は1桁ほど悪くなる。本論文の例題は流れ場全体を見て解の改善を議論するという立場から格子をほぼ等間隔で切っているため、少ない格子点数では物体付近が粗くなり、境界の隣のセルを固定した影響が見られる結果となったが、実用問題では通常物体に格子を寄せるため、物体境界の隣のセルを固定してもその影響はより小さいと考えられる。さらに、物体の境界条件そのものも、物体面の次の格子が物体に十分近いことを期待したのもである。従って、本論文では物体境界の1つ隣のセルは固定するとしておく。

セルの回転方向を決める関数の選び方には、まだ議論の余地があるように思う。例えば、速度の大きさではなく、速度ベクトルの勾配を考えることもでき、その場合は速度成分のテンソル勾配を扱うことになる。そのときにどの方向にセルを回すかはまた問題であるが、多次元近似リーマン解法の1つである²³⁾, ²⁴⁾が速度成分のテルソン勾配の主軸方向並びにその対称成分である歪み率テンソルと特性波の輸送方向の関係について言及しているのは興味深い。ただし、セルの回転方向を決定する関数の選択と、セルごとに独立に関数を計算するか、あるいは smoothing を施すかといった関数の評価の方法とはまた別の問題である。

ここでは空間の高次精度化は MUSCL 法によったが、他の高次精度スキームも本風見鶏法に適用可能である。特に、任意の次数が得られる ENO⁴²⁾ (Essentially Non-Oscillatory) スキームは魅力的である。2次元問題に対して ENO は単に格子方向に点を増やすのでは駄目で、2次元的に点を増やさなければ解像度は上がらないという報告もある⁴³⁾が、本風見鶏法の場合、流束をとる方向に流れの変化の1次元性が強いので、通常の場合より ENO の効果が大きい可能性がある。

流れの変化の1次元性が強い方向にセルを回転させて流束を評価しているとはいえ、完全な1次元流れではありえないから、1次元の近似リーマン解法より解像度が高く、かつ monotone な流束評価法があってよい。それはいわゆる多次元近似リーマン解法になるわけだが、現在までに提案されているもの^{23)~26)}で本法に馴染むものはいずれも monotonicity の確保に問題がありそのまま適用はできないので、現状では解像度の高い1次元の近似リーマン解法を用いる方がよい、ただし、本法でも多次元近似リーマン解法を適用すること自体は問題ない。

計算時間と解像度の向上の関係についても考えてみる。いくら解像度が上がったとしても、計算時間がそれ以上に多くかかるようなら計算格子をその分多くしたほうが、記憶容量の増加という問題はあるが、効率がよい。そこで、新しいスキームで n 倍計算時間を要する場合、従来の方法で同じ計算時間ならどれだけ細かい格子で計算ができるか考えてみる。従来の方法が1格子当たり1時間刻み当たり t 秒かかっていたとする。格子点数 g , 繰り返し回数 s 回の場合、新しいスキームの計算時間 T_{new} は、

$$T_{new} = n \cdot t \cdot g \cdot s$$

である。どちらのスキームも収束性は同じであるとすると、従来の方法で同じ計算格子なら計算時間 T_{old} は、

$$T_{old} = t \cdot g \cdot s$$

で、

$$\frac{T_{new}}{T_{old}} = n$$

である。そこで、従来の方法でどれだけ格子数を増やした計算と同じ計算時間になるか考える。計算格子を1方向当り m 倍にすると格子数は m^2 倍になり、また格子幅が $1/m$ になるので同じ時間刻みがとれなくなって収束までの繰り返し回数が m 倍になる。

従ってこのときの計算時間 T_{mod} は、

$$\begin{aligned} T_{mod} &= t \cdot m^2 g \cdot ms \\ &= m^3 T_{old} \end{aligned}$$

これより、

$$m = \sqrt[3]{n}$$

となる。本法の場合の計算時間の増加を考えてみると、比較的計算時間を要する流束の評価において、MUSCL法による内挿が各格子セルで2回から4回、Flux Difference Splittingによる流束の計算が2回から6回に増えているので最大約3倍弱の計算時間と考えられる。従って、格子点数を1方向当り1.4倍にしたのとほぼ同等の計算時間である。前章の超音速ダクトの計算で見た格子に対する収束性の図46から判断すると、格子点数1方向当り1.4倍に相当する計算時間増大の価値は十分にあると思われる。特に空間1次精度の場合には明らかである。さらに、格子点数を増やせば記憶容量が増加することや本風見鶏法が従来法より大きな時間刻みをとれることを考え合わせればその価値は一層高まるであろう。

3次元については、既存の多次元風上差分で3次元を扱ったものがほとんどない(18)に多少述べられている)こともあり、従来法との比較にとどめたが、その範囲では十分な解像度の向上が確認された。実用上の問題点は、ここで用いた流束の分解法でも、各格子セルについて全部で24の流束成分を評価しなければならないことに起因する計算時間の増大である。単純に数えても計算時間はおよそ8倍、実測では、特に最適化を考慮していないこともあり、従来法の10倍強となっている。上述の推算式を3次元にして考えると、これは格子点数を1方向当り1.7~1.8倍にしたのと同じになっている。それが適当かどうかは議論の分かれるところであろうが、いずれにしても3次元では何らかのプログラミング上のテクニックが必要かも知れない。

第8章 結論

2次元のスカラー輸送方程式に対して構造格子に基づく新しい多次元風上差分法を開発した。本法は格子セル単位に風向きを判断してその方向に流束を評価することと、斜めの仮想

セルとの間にも流束のやりとりがある点で従来の格子方向に依存した風上差分法や既に提案されている他の多次元風上差分法と異なる。仮想セルが風向きを判断して自動的に向きを変えろという印象から本法は風見鶏法と命名された。本風見鶏法は従来の風上差分法に対してより解像度の高い解を与えること、より大きい時間刻みで安定であることが数学的にまた数値的に示された。

スカラー輸送方程式に対する風見鶏法は、流れの諸量の跳びの方向にセルを回転させ、1次元の近似リーマン解法によって特性量に対する風上を判断することで2次元のオイラー方程式に対する多次元風上差分法に拡張された。本法はオイラー方程式に対しても従来の風上差分法より安定で高解像度であることが数値計算の結果と解析解などとの比較により明らかにされた。また、既発表の他の多次元風上差分法と比較しても、空間高次精度を妥当な計算時間で実現し、かつ monotone である点や同じ条件での計算結果などを見る限り、本法は現時点で最も成功した多次元風上差分法の一つであると言える。

また、本法は3次元に拡張され、これも従来法との比較によって解像度の向上が確認された。

仮想セルの回転方向の決め方にはまだ議論の余地がある。ENO法などより高次精度なスキームの適用、多次元近似リーマン解法の可能性の検討、及び計算時間を含めた3次元での実用化が今後の課題である。

謝辞

本研究を進めるに当たり御指導御鞭撻を賜った宇宙科学研究所藤井孝藏助教授、本論文をまとめるに際して多くの貴重な御助言を頂戴した宇宙科学研究所辛島桂一教授、また本研究にとどまらず常に有意義な議論を戴いた宇宙科学研究所藤井研究室の諸氏にこの場を借りて感謝の意を表します。

補遺

A. 風見鶏法の誤差について

ここでは主に von Neumann の安定解析とテーラー展開によりスカラー線形輸送方程式に対する空間1次精度の風見鶏法の誤差について考える。まず、スカラー、空間1次精度の風見鶏法は風向きにより(3.7a)-(3.7h)式で表わされたが、どの場合も同様の議論となるのでここでは $\frac{a}{\Delta x} > \frac{b}{\Delta y} > 0$ のときのみを考える。この場合に対応するのは(3.5)、(3.6)及び(3.7a)式であるが、ここでは(3.5)式から出発する。

$$\frac{q_{j,k}^{n+1} - q_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} (q_{j,k}^n - q_{j-1,k}^n) + \frac{b}{\Delta y} (q_{j-1,k}^n - q_{j-1,k-1}^n) = 0 \quad (3.5)$$

これに対し、従来の空間1次精度の風上差分(以下従来法と略す)では、

$$\frac{q_{j,k}^{n+1} - q_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} (q_{j,k}^n - q_{j-1,k}^n) + \frac{b}{\Delta y} (q_{j,k}^n - q_{j,k-1}^n) = 0 \quad (A1)$$

となる. von Neumann の安定解析によれば, (3.5)式などの差分式はフーリエ級数展開により以下の厳密解を有する.

$$q_{j,k}^n = g^n e^{i(j\theta + k\psi)} \quad (A2)$$

ここで g は複素数で増幅率, θ, ψ は空間内の周波数を表わし, $0 \leq \theta, \psi \leq \pi$ である. これを (3.5) 式や (A1) 式に代入して g について解けばそれぞれのスキームの安定性と位相誤差が分かる.

まず, x, y 方向のクーラン数を定義しておく.

$$v_x = \frac{a \Delta t}{\Delta x}, v_y = \frac{b \Delta t}{\Delta y} \quad (A3)$$

ただし, ここでは $v_x \geq v_y \geq 0$ である. これを用いて従来法である (A1) 式を書き直す.

$$q_{j,k}^{n+1} = q_{j,k}^n - v_x (q_{j,k}^n - q_{j-1,k}^n) - v_y (q_{j,k}^n - q_{j,k-1}^n) \quad (A4)$$

これに (A2) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} g^{n+1} e^{i(j\theta + k\psi)} &= g^n e^{i(j\theta + k\psi)} - v_x (g^n e^{i(j\theta + k\psi)} - g^n e^{i((j-1)\theta + k\psi)}) \\ &\quad - v_y (g^n e^{i(j\theta + k\psi)} - g^n e^{i(j\theta + (k-1)\psi)}) \end{aligned}$$

変形して,

$$g = 1 - v_x (1 - e^{-i\theta}) - v_y (1 - e^{-i\psi})$$

さらに,

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$$

の関係を利用して実部と虚部に分けると,

$$g = (1 - v_x - v_y + v_x \cos\theta + v_y \cos\psi) - i(v_x \sin\theta + v_y \sin\psi) \quad (A5)$$

となる. g の絶対値は増幅率を表わし, 1 以下ならば安定である. そこで, g の実部を X , 虚部を Y とすると,

$$\begin{aligned} (X - (1 - v_x - v_y))^2 + Y^2 &= v_x^2 + v_y^2 + 2v_x v_y \cos(\theta - \psi) \\ &= (v_x + v_y)^2 - 2v_x v_y (1 - \cos(\theta - \psi)) \\ &\leq (v_x + v_y)^2 \end{aligned}$$

このことは, g が中心 $(1 - v_x - v_y, 0)$ で半径 $v_x + v_y$ の円内にあることを表わしている. 従って, これが単位円の中にある, すなわち増幅率が 1 以下となる条件は,

$$v_x + v_y \leq 1$$

となる.

一方, 本風見鶏法は(3.5)式を書き直して,

$$q_{j,k}^{n+1} = q_{j,k}^n - v_x (q_{j,k}^n - q_{j-1,k}^n) - v_y (q_{j-1,k}^n - q_{j-1,k-1}^n) \quad (A6)$$

これに(A2)式を代入して変形すると,

$$g = [1 - v_x + (v_x - v_y) \cos \theta + v_y \cos(\theta + \psi)] - i[(v_x - v_y) \sin \theta + v_y \sin(\theta + \psi)] \quad (A7)$$

を得る. ここでも実部を X , 虚部を Y と書くと,

$$\begin{aligned} (X - (1 - v_x))^2 + Y^2 &= (v_x - v_y)^2 + v_y^2 + 2(v_x - v_y)v_y \cos \psi \\ &= v_x^2 - 2(v_x - v_y)v_y(1 - \cos \psi) \\ &\leq v_x^2 \end{aligned}$$

従って, g は中心 $(1 - v_x, 0)$, 半径 v_x の円内であって, これが単位円内にある条件は,

$$v_x \leq 1$$

となる. いまは, $v_y \leq v_x \leq 1$ の場合を考えているが, 一般的には,

$$\max(|v_x|, |v_y|) \leq 1$$

である. つまり, 風見鶏法の利点の一つは従来法よりも大きい時間刻みがとれることである. いくつかの例題で従来法が風見鶏法と同じ時間刻みで解が発散してしまったのはこのためであると考えられる. また, $|g|$ が任意の θ 及び ψ に対して厳密解である 1 に一致するのは従来法の場合 $v_x = 1$ かつ $v_y = 0$ に限られるが, 風見鶏法では $v_x = v_y = 1$ の場合も含まれる. これは波の輸送方向がちょうど格子に対して斜めの場合であり, それは風見鶏法の導出過程からも明らかである.

次に, 位相誤差について考える. 位相差 φ は,

$$g = |g| e^{i\varphi}$$

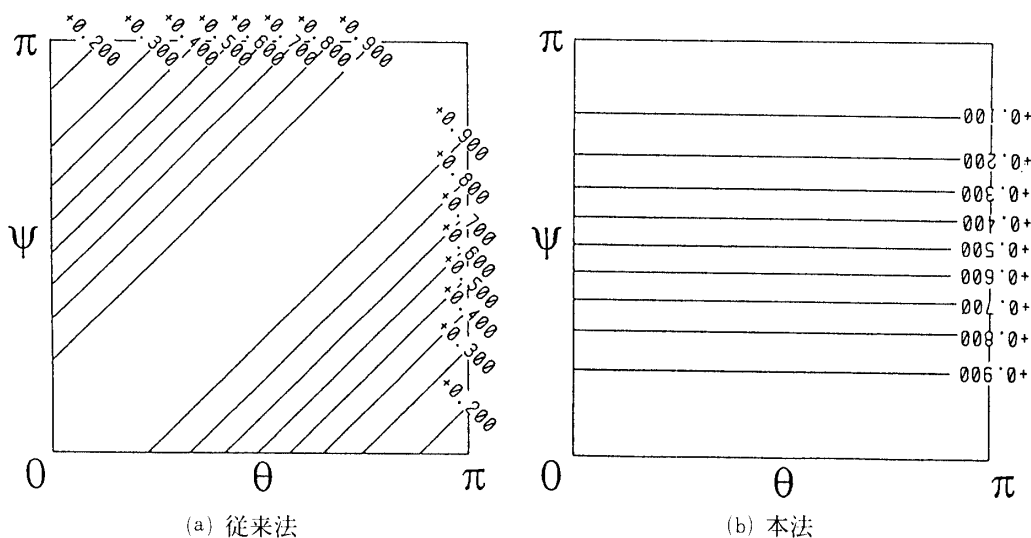
で与えられるが, その厳密解は,

$$\varphi_{exact} = - (v_x \theta + v_y \psi)$$

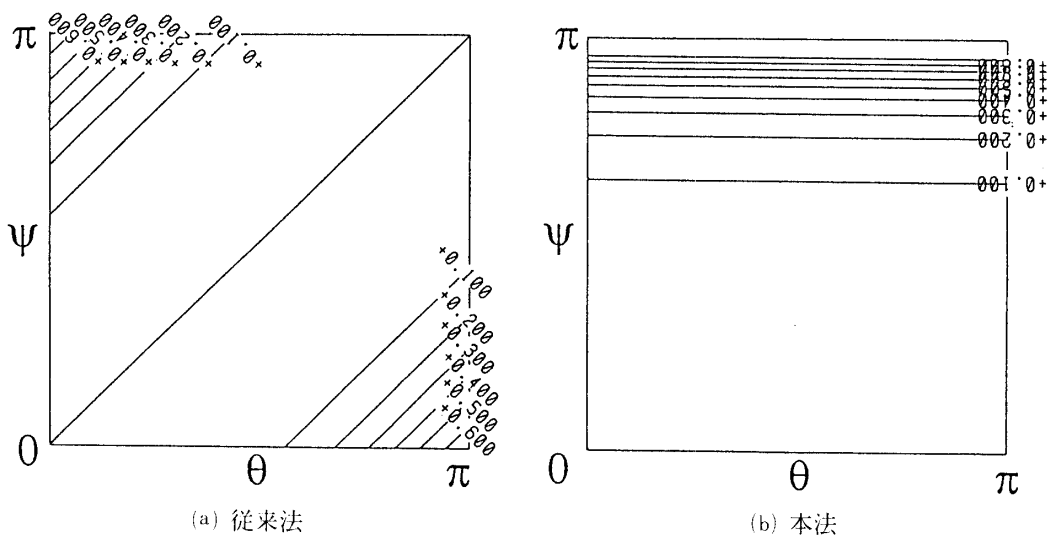
である. まず, 従来法の位相差は,

$$\varphi_{conv} = \tan^{-1} \left[\frac{-v_x \sin \theta - v_y \sin \psi}{1 - v_x - v_y + v_x \cos \theta + v_y \cos \psi} \right]$$

一方, 風見鶏法では,



図A1 von Neumann の安定解析による増幅率 $|g|$



図A2 von Neumann の安定解析による位相誤差 $|\varphi - \varphi_{exact}|$

$$\varphi_{WC} = \tan^{-1} \left[\frac{-(v_x - v_y) \sin \theta - v_y \sin(\theta + \psi)}{1 - v_x + (v_x - v_y) \cos \theta + v_y \cos(\theta + \psi)} \right]$$

となる。任意の θ 及び ψ に対して φ が厳密解と一致するのは、これも従来法の場合 $v_x = 1$ かつ $v_y = 0$ であり、風見鶏法の場合には加えて $v_x = v_y = 1$ でも厳密解と一致する。従って、増幅率の条件と併せて考えると、従来法では $v_x = 1$ かつ $v_y = 0$ のみ厳密解となるが、風見鶏法では $v_x = v_y = 1$ でも厳密解を与えることが分かる。

それ以外の一般的な場合については式の上では検討が困難なので図で示すことにする。代表的でかつ風見鶏法に有利にならない条件として流れの角度を x 軸に対して 22.5° とする。

2つの方法でクーラン数の上限が異なるので、ここではそれぞれでとりうる最大の時間刻みを採用する。すなわち、風見鶏法では、

$$v_{xwc}=1, v_{ywc}=\tan 22.5^\circ$$

であるのに対して、従来法では、

$$v_{xconv}=\frac{1}{1+\tan 22.5^\circ}, v_{yconv}=\frac{\tan 22.5^\circ}{1+\tan 22.5^\circ}$$

とした。図A 1(a), (b)は従来法及び風見鶏法の増幅率 $|g|$ の等高線をかかせたもので、横軸、縦軸は θ 及び ψ でそれぞれ 0 から π の範囲である。図A 2(a), (b)は従来法及び風見鶏法の位相差の厳密解との差の絶対値の等高線である。これから分かるように、クーラン数の上限の差を無視して議論するならば、伝わる波の波形によって従来法の方が優れている場合も風見鶏法の方が優れている場合もある。ただし、従来法が x, y 方向の波長の差が大きい(図の左上と右下)と精度が悪くなるのに対し、風見鶏法では y 方向の波長が長い場合は x 方向の波長に関係なく精度がよい。いま、 $v_y \leq v_x \leq 1$ すなわち流れが主に x 方向の場合を考えていることから言えば、流れに垂直な方向の変動が緩やかで、従って流れ方向に1次元性が強い場合には従来法よりも格段に精度の向上が期待される。

次に、テーラー展開による誤差を見てみる。この2つのスキームの誤差の第1項(leading term)はいずれも Δx などの1乗のオーダーであるから、通常用いられる意味でのスキームの精度は同じである。しかし、von Neumann の安定解析からも分かるように、この2つのスキームが大きく違ってくるのは、誤差の leading term の大きさが異なるからであると考えることができる。

そこで、ここでは両者のスキームで誤差の leading term がどれほど異なるかを具体的に示すことにする。まず、(3.5)式を $q_{j,k}^n$ のまわりに展開すると、

$$\begin{aligned} & q_t + \frac{1}{2} \Delta t q_{tt} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 q_{ttt} + \dots \\ & + a q_x - \frac{a}{2} \Delta x q_{xx} + \frac{a}{6} (\Delta x)^2 q_{xxx} + \dots \\ & + b q_y - b \Delta x q_{xy} - \frac{b}{2} \Delta y q_{yy} + \frac{b}{2} (\Delta x)^2 q_{xxy} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (A8)$$

これを t, x, y でそれぞれ微分すると、

$$\begin{aligned} & q_{tt} + \frac{1}{2} \Delta t q_{ttt} + \dots \\ & + a q_{xt} - \frac{a}{2} \Delta x q_{xxt} + \dots \\ & + b q_{yt} - b \Delta x q_{xyt} - \frac{b}{2} \Delta y q_{yyt} + \dots = 0 \\ & q_{xt} + \frac{1}{2} \Delta t q_{xtt} + \dots \\ & + a q_{xx} - \frac{a}{2} \Delta x q_{xxx} + \dots \\ & + b q_{xy} - b \Delta x q_{xxy} - \frac{b}{2} \Delta y q_{xyy} + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_{yt} + \frac{1}{2} \Delta t q_{ytt} + \dots \\
& + a q_{xy} - \frac{a}{2} \Delta x q_{xxy} + \dots \\
& + b q_{yy} - b \Delta x q_{xyy} - \frac{b}{2} \Delta y q_{yyy} + \dots = 0
\end{aligned}$$

これらを(A8)式に代入して,

$$\begin{aligned}
& q_t + a q_x + b q_y \\
& = \frac{a}{2} (\Delta x - a \Delta t) q_{xx} + b (\Delta x - a \Delta t) q_{xy} + \frac{b}{2} (\Delta y - b \Delta t) q_{yy} \\
& + O^3
\end{aligned} \tag{A9}$$

である. 一方, 従来の風上差分である(A1)式は,

$$\begin{aligned}
& q_t + \frac{1}{2} \Delta t q_{tt} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 q_{ttt} + \dots \\
& + a q_x - \frac{a}{2} \Delta x q_{xx} + \frac{a}{6} (\Delta x)^2 q_{xxx} + \dots \\
& + b q_y - \frac{b}{2} \Delta y q_{yy} + \frac{b}{6} (\Delta y)^2 q_{yyy} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{A10}$$

これを t, x, y でそれぞれ微分して,

$$\begin{aligned}
& q_{tt} + \frac{1}{2} \Delta t q_{ttt} + \dots \\
& + a q_{xt} - \frac{a}{2} \Delta x q_{xxt} + \dots \\
& + b q_{yt} - \frac{b}{2} \Delta y q_{yyt} + \dots = 0 \\
& q_{xt} + \frac{1}{2} \Delta t q_{xtt} + \dots \\
& + a q_{xx} - \frac{a}{2} \Delta x q_{xxx} + \dots \\
& + b q_{xy} - \frac{b}{2} \Delta y q_{xyy} + \dots = 0 \\
& q_{yt} + \frac{1}{2} \Delta t q_{ytt} + \dots \\
& + a q_{xy} - \frac{a}{2} \Delta x q_{xxy} + \dots \\
& + b q_{yy} - \frac{b}{2} \Delta y q_{yyy} + \dots = 0
\end{aligned}$$

これらを(A10)式に代入して,

$$\begin{aligned}
& q_t + a q_x + b q_y \\
& = \frac{a}{2} (\Delta x - a \Delta t) q_{xx} - a b \Delta t q_{xy} + \frac{b}{2} (\Delta y - b \Delta t) q_{yy} \\
& + O^3
\end{aligned} \tag{A11}$$

(A9)式と(A11)式を比較してみると、違いは誤差の第2項(q_{xy})の係数のみである。 x 方向のクーラン数 ν_x を使うと誤差の第2項はそれぞれ、

$$b\Delta x(1-\nu_x)q_{xy} \quad \text{及び} \quad -b\Delta x\nu_x q_{xy}$$

と書ける。従って、 ν_x が0.5以上では本風見鶏法の方が誤差が小さくなる。

また、特に ν_x が1の場合(A9)式は、

$$\begin{aligned} & q_t + aq_x + bq_y \\ &= \frac{b}{2}(\Delta y - b\Delta t)q_{yy} + O^3 \end{aligned} \quad (A12)$$

となり、流れが格子に沿っている場合($b=0$)はもちろん、流れがちょうど格子を斜めに横切る場合($\Delta y = b\Delta t$)も誤差の leading term は消え、さらに長くなるので省略するがこれらの場合には O^3 以下の項も消えて厳密解になる。それは von Neumann の安定性解析の結果とも一致する。一方、(A11)式はそもそも安定性の条件から一般的に $\nu_x = 1$ とすることはできないのであるが、仮に $\nu_x = 1$ としてみても、

$$\begin{aligned} & q_t + aq_x + bq_y \\ &= -ab\Delta tq_{xy} + \frac{b}{2}(\Delta y - b\Delta t)q_{yy} + O^3 \end{aligned} \quad (A13)$$

であり、流れが格子に沿う以外では厳密解を与えない。

さらに、(3.5)式の導出にあたっては、 $q_{j,k}^n$ の風上に当たる点の値(q_x)が $q_{j-1,k-1}$ と $q_{j-1,k}$ の荷重平均であると仮定したが、これが厳密に成り立つ条件は q の分布が y 方向に線形、すなわち $q_{yy} = 0$ である。これが成り立つ場合には(A12)式は流れの方向によらず厳密解となる。一方、(A13)式は q_{xy} の項が残るため厳密解にはならない。

このように、クーラン数の上限が高いこと、輸送方向が格子に斜めの場合にも厳密解を与えること、及び流れ方向の1次元性が高い場合に精度が高いことが、本風見鶏法が従来法に比して優れている点であると言える。

B. 一般座標変換と保存則

流体の問題を離散化して解く場合には、流体を支配する方程式の本質が保存則にあるため、単に元の方程式に対して consistent なだけでなく、格子が有限な大きさでも保存則は厳密に満たすことが望まれる。ここで言う保存則には、計算領域全体で保存量が不変であるという意味での大局的な保存則と、出入りする流束の大きさと仮想セル面積の関係が妥当である(そのため各セルでの保存量の増分が正しく評価できる)という意味で局所的な保存則の2つがある。有限体積法や有限要素法では積分形の方程式を離散化するためいずれの保存則も満たされるが、微分方程式を離散化する差分法であっても仮想セルに対する流束の出入りを勘定する現代の離散化では大局的な保存則は満足できる。しかし、一般座標変換を導入する場合、差分法では座標変換の metric もまた差分により近似的に評価されるため、consistent であっても metric と仮想セルの面積(ヤコビアン)の逆数がこれに当たる)の関係によっては必ずしも局所的な保存則を厳密に満足するとは限らない。この問題が顕著に現れるのは一様流

が保存されないという現象である。かつては空間高次精度の差分法では metric も高次の差分で近似すべきだという意見もあったが、一様流の保存を第一に考えると、一様流は空間何時間精度で近似しても一様流であるから、空間近似の次数に関係なく metric のとり方は決ってくる。そこでここでは一様流の保存を考えた一般座標上での風見鶏法の metric の評価法について述べる。簡単のため連続の式についてのみ考える。まず、従来の格子依存のスキームを見てみると、

$$\frac{\partial(\rho/J)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U/J)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V/J)}{\partial \eta} = 0 \quad (B1)$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v$$

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi$$

である。 $\rho = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U/J)}{\rho \xi}_{j,k} &= \rho (\xi_{x_{j+\frac{1}{2},k}} u + \xi_{y_{j+\frac{1}{2},k}} v) / J_{j+\frac{1}{2},k} - \rho (\xi_{x_{j-\frac{1}{2},k}} u + \xi_{y_{j-\frac{1}{2},k}} v) / J_{j-\frac{1}{2},k} \\ &= \rho u \left\{ \frac{\xi_{x_{j+\frac{1}{2},k}}}{J_{j+\frac{1}{2},k}} - \frac{\xi_{x_{j-\frac{1}{2},k}}}{J_{j-\frac{1}{2},k}} \right\} + \rho v \left\{ \frac{\xi_{y_{j+\frac{1}{2},k}}}{J_{j+\frac{1}{2},k}} - \frac{\xi_{y_{j-\frac{1}{2},k}}}{J_{j-\frac{1}{2},k}} \right\} \\ &= \rho u (y_{\eta_{j+\frac{1}{2},k}} - y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k}}) + \rho v (-x_{\eta_{j+\frac{1}{2},k}} - x_{\eta_{j-\frac{1}{2},k}}) \end{aligned}$$

および、

$$\frac{\partial(\rho V/J)}{\rho \eta}_{j,k} = \rho u (-y_{\xi_{j,k+\frac{1}{2}}} + y_{\xi_{j,k-\frac{1}{2}}}) + \rho v (x_{\xi_{j+\frac{1}{2},k}} - x_{\xi_{j-\frac{1}{2},k}})$$

となる。 x 方向についてのみ考えると、

$$\rho u (y_{\eta_{j+\frac{1}{2},k}} - y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k}} - y_{\xi_{j,k+\frac{1}{2}}} + y_{\xi_{j,k-\frac{1}{2}}})$$

である。セル境界面での metric を

$$y_{\eta_{j+\frac{1}{2},k}} = \frac{1}{2} (y_{\eta_{j+1,k}} + y_{\eta_{j,k}})$$

のように格子点での metric の算術平均とし、個々の metric は中心差分で評価すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho u (y_{\eta_{j+1,k}} + y_{\eta_{j,k}} - y_{\eta_{j,k}} - y_{\eta_{j-1,k}} - y_{\xi_{j,k+1}} - y_{\xi_{j,k}} + y_{\xi_{j,k}} + y_{\xi_{j,k-1}}) \\ &= \frac{1}{4} \rho u (y_{j+1,k+1} - y_{j+1,k-1} + y_{j,k+1} - y_{j,k-1} - y_{j,k+1} + y_{j,k-1} - y_{j-1,k+1} + y_{j-1,k-1} \\ & \quad - y_{j+1,k+1} + y_{j-1,k+1} - y_{j+1,k} + y_{j-1,k} + y_{j+1,k} - y_{j-1,k} + y_{j+1,k-1} - y_{j-1,k-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

従って一様流は格子の形状に依らず保存された。結局、ここでの要点は metric はセルの境界面の中心で中心差分的にとるとよいということである。また、このように metric をとることは有限体積法で仮想セルの境界面の長さをとる方法と結果的に等価である。

風見鶏法では流束の数が多い(1つのセルに出入りする流束は8つある)ので図B1のように1つの格子セルのみを考える。セル (j, k) に流入する流束はセルの回転方向にかかわらず点 $(j - \frac{1}{2}, k)$ と点 $(j, k - \frac{1}{2})$ を結んだ線を横切ると考えれば、この格子内の x 方向の流束 E_x は、一様流の場合、

$$\begin{aligned} E_x &= \rho u (y_{j-\frac{1}{2}, k} - y_{j, k-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} \rho u (y_{j, k} + y_{j-1, k} - y_{j, k} - y_{j, k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \rho u (y_{j-1, k} - y_{j, k-1}) \end{aligned} \quad (B2)$$

でなければならない。そこで計算空間で格子の回転方向を図B1のように $\theta (< 45^\circ)$ ととると、セル (j, k) に流入する流束 E は、(4.9) 及び(4.11) 式などを参照して、

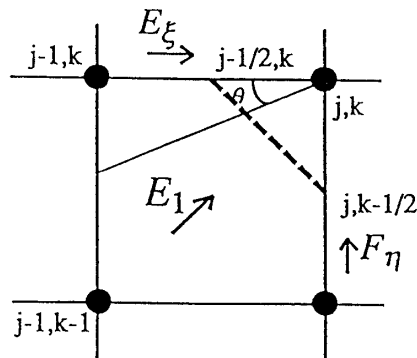
$$E = \frac{1}{2} E_{\xi\uparrow} + E_1 + \frac{1}{2} F_{\eta r} \quad (B3)$$

各流束を格子や格子線の中心(例えば $(j - \frac{1}{2}, k)$ など)で評価すると、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} E_{\xi_{j-\frac{1}{2}, k}} + E_{1_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} F_{\eta_{j, k-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \tan\theta) \tilde{E}_{j-\frac{1}{2}, k} \cos\theta + \tan\theta \tilde{E}_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \cos\theta + \frac{1}{2} (1 - \tan\theta) \tilde{F}_{j, k-\frac{1}{2}} \cos\theta \end{aligned}$$

x 方向についてのみ考えれば、

$$\frac{E_x}{\rho u} = \frac{1}{2} (\cos\theta - \sin\theta) \left(\frac{k_{nx}}{J} \right)_{j-\frac{1}{2}, k} + \sin\theta \left(\frac{k_{nx}}{J} \right)_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\cos\theta - \sin\theta) \left(\frac{k_{lx}}{J} \right)_{j, k-\frac{1}{2}}$$



図B1 本法における一様流の保存

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{k_{nx}}{J} &= \frac{k_\xi \xi_x + k_\eta \eta_x}{J} = \cos\theta \frac{\xi_x}{J} + \sin\theta \frac{\eta_x}{J} \\ &= \cos\theta y_\eta - \sin\theta y_\xi \\ \frac{k_{tx}}{J} &= \frac{-k_\eta \xi_x + k_\xi \eta_x}{J} = -\sin\theta y_\eta - \cos\theta y_\xi\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{\rho u} &= \frac{1}{2} \cos^2\theta (y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k}} - y_{\xi_{j,k-\frac{1}{2}}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos\theta \sin\theta (-y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k}} - y_{\xi_{j-\frac{1}{2},k}} + 2y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}} - y_{\eta_{j,k-\frac{1}{2}}} + y_{\xi_{j,k-\frac{1}{2}}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin^2\theta (y_{\xi_{j-\frac{1}{2},k}} - 2y_{\xi_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}} + y_{\eta_{j,k-\frac{1}{2}}}) \\ &= \dots\end{aligned}$$

長くなるので省略するが, このように metric を評価したのでは θ によらず (B 2) 式を満たすことはできない.

そこで, 風見鶏法における流束の評価は格子セル単位で行われることから, すべての metric を $(j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})$ でとることにすると,

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{\rho u} &= \frac{1}{2} \cos^2\theta (y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}} - y_{\xi_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}) \\ &\quad + \cos\theta \sin\theta (0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin^2\theta (y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}} - y_{\xi_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}) \\ &= \frac{1}{2} (y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}} - y_{\xi_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}})\end{aligned}\tag{B4}$$

個々の metrics を中心差分で評価すると,

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{\rho u} &= \frac{1}{4} (y_{j,k} + y_{j-1,k} - y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1} \\ &\quad - y_{j,k} - y_{j,k-1} + y_{j-1,k} + y_{j-1,k-1}) \\ &= \frac{1}{2} (y_{j-1,k} - y_{j,k-1})\end{aligned}$$

で, θ によらず一様流は保存する. もちろん, 格子の回転方向が格子に沿っている場合は従来の metric の評価と同じになる. それは例えば, セル $(j-1, k)$ からセル (j, k) への流束 E_ξ の x 方向成分の係数 y_η が, 風見鶏法ではその上下の格子で $\frac{1}{2}$ ずつ評価されるから, これについて書き下してみると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - y_{\eta_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}) &= \frac{1}{4} (y_{j,k+1} + y_{j-1,k+1} - y_{j,k} - y_{j-1,k} \\ &\quad + y_{j,k} + y_{j-1,k} - y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(y_{j,k+1} + y_{j-1,k+1} - y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1}) \\
&= \frac{1}{2}(y_{\eta_j,k} + y_{\eta_{j-1},k}) = y_{\eta_{j-\frac{1}{2}},k}
\end{aligned}$$

となることから明らかであろう。

逆に(B 3)式で、 $E_{\xi\uparrow}$ や F_{η_r} の係数を $\frac{1}{2}$ としている理由は、仮に(B 3)式で、これらの係数をそれぞれ f_{\uparrow} , f_r と置いた式

$$E = f_{\uparrow} E_{\xi\uparrow} + E_1 + f_r F_{\eta_r}$$

から x 方向の流束を求めると、

$$\begin{aligned}
\frac{E_x}{\rho u} &= (f_{\uparrow} \cos^2\theta + f_r \sin^2\theta + (1 - f_{\uparrow} - f_r) \sin\theta \cos\theta) \cdot y_{\eta} \\
&\quad + (f_{\uparrow} \sin^2\theta - f_r \cos^2\theta - \sin^2\theta) \cdot y_{\xi}
\end{aligned}$$

これが、 θ にかかわらず(B 4)式に一致する必要十分条件は、

$$f_{\uparrow} = f_r = \frac{1}{2}$$

となる。非線形スカラー方程式に対する風見鶏法を導出した3.3節で格子方向の流束($E_{\xi\uparrow}$ など)の係数を $\frac{1}{2}$ としたのはこのためである。

参考文献

- 1) Magnus, R. and Yoshihara, H., "Inviscid Transonic Flow over Airfoils," *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 12, Dec. 1970, pp.2157-2162.
- 2) Murman, E.M. and Cole, J.D., "Calculation of Plane Steady Transonic Flows," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 1, Jan. 1971, pp.114-121.
- 3) 藤井孝藏, "数値体流力学: 最近の成果と動向", 日本航空宇宙学会誌, 第37巻, 第421号, 1989年2月, pp.82-90.
- 4) Shimizu, F., Fujii, K. and Higashino, F., "Blast Wave Simulation with Ground Surface Effect and its Accuracy Enhancement," *A Collection of Technical Papers of the Fourth International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Sep. 1991, pp.1053-1058.
- 5) Yee, H.C., "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods," NASA TM-101088, 1989.
- 6) Godunov, S.K., "A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics," *Mat., Sb.*, Vol. 47, 1959, pp.357-393.
- 7) Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 1981, pp.357-372.
- 8) Steger, J.L. and Warming, R.F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods," *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, 1981,

pp.263–293.

- 9) van Leer, B., “Flux-Vector Splitting for the Euler Equations,” *Proceedings of the Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1982, pp.507–512.
- 10) Fujii, K. and Obayashi, S., “High-Resolution Upwind Scheme for Vortical-Flow Simulations,” *Journal of Aircraft*, Vol. 26, No. 12, 1989, pp.1123–1129.
- 11) Powell, K.G., Beer, M.A. and Law, G.W., “An Adaptive Mesh Procedure for Leading-Edge Vortex Flows”, AIAA Paper 89–0080, Jan. 1989.
- 12) Fujii, K., “A Method to Increase the Accuracy of Vortical Flow Simulations,” AIAA Paper 88–2562–CP, June 1988.
- 13) Nakahashi, K. and Deiwert, G.S., “A Self-Adaptive-Grid Method with Application to Airfoil Flow,” AIAA Paper 85–1525–CP, June 1985.
- 14) Davis, S.F., “A Rotationally Biased Upwind Difference Scheme for the Euler Equations,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 56, 1984, pp.65–92.
- 15) Obayashi, S. and Goorjian, P.M., “Improvements and Applications of a Streamwise Upwind Algorithm,” AIAA Paper 89–1957–CP, June 1989.
- 16) Levy, D.W., Powell, K.G. and van Leer, B., “An Implementation of a Grid-Independent Upwind Scheme for the Euler Equations,” AIAA Paper 89–1931–CP, June 1989.
- 17) Colella, P., “Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 87, 1990, pp.171–200.
- 18) Dadone, A. and Grossman, B., “A Domain of Dependence Upwind Scheme for the Euler Equations,” *Proceedings of the Twelfth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, edited by K.W. Morton, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, pp.379–380.
- 19) Kontinos, D.A. and McRae, D.S., “An Explicit, Rotated Upwind Algorithm for Solution of the Euler/Navier-Stokes Equations,” AIAA Paper 91–1531–CP, June 1991.
- 20) Roe, P.L., “Discrete Models for the Numerical Analysis of Time-Dependent Multidimensional Gas Dynamics,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 63, 1986, pp.458–476.
- 21) Roe, P.L., Deconinck, H. and Struijs, R.J., “Recent Progress in Multidimensional Upwinding,” *Proceedings of the Twelfth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, edited by K.W. Morton, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, pp. 273–277.
- 22) Struijs, R., Deconinck, H., de Palma, P., Roe, P. and Powell, K.G., “Progress on Multi-Dimensional Upwind Euler Solvers for Unstructured Grids,” AIAA Paper 91–1550, June 1991.
- 23) Hirsch, Ch., Lacor, C. and Deconinck, H., “Convection Algorithms on a Diagonalization Procedure for the Multidimensional Euler Equations,” AIAA Paper 87–1163–CP, June 1987.
- 24) Hirsch, Ch. and Lacor, C., “Upwind Algorithms Based on a Diagonalization of the Multi-dimensional Euler Equations,” AIAA Paper 89–1958–CP, June 1989.
- 25) Rumsey, C.L., van Leer, B. and Roe, P.L., “A Grid-Independent Approximate Riemann Solver With Applications to the Euler and Navier-Stokes Equations,” AIAA Paper 91–0239, Jan. 1991.
- 26) Parpia, I.H., “A Planar Oblique Wave Model for the Euler Equations,” AIAA Paper 91–1545–CP, June 1991.
- 27) 山本悟, 大宮司久明, “非定常遷音速翼列流れの数値計算,” 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1990年12月, pp.37–40.
- 28) Sawada, K., “A Multi-Dimensional Extension of the Preprocessing Approach for Cell-Centered

- Finite Volume Scheme," AIAA Paper 91-1536-CP, June 1991.
- 29) Tamura, Y. and Fujii, K., "A Multi-Dimensional Upwind Scheme for the Euler Equations on Structured Grid," *A Collection of Technical Papers of the Fourth International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Sep. 1991, pp.1137-1142.
 - 30) 大林茂, 桑原邦郎, "圧縮性 Navier-Stokes 方程式の数値計算法 I", *ながれ*, Vol. 5, 1986, pp.130-146.
 - 31) Rice, J.G, and Schnipke, R.J., "A Monotone Streamline Upwind Finite Element Method for Convection-Dominated Flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, 1985, pp.313-327.
 - 32) Koren, B., "Upwind Schemes, Multigrid and Detect Correction for the Steady Navier-Stokes Equations", *Proceedings of the Eleventh International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lecture Note in Physics 323, edited by D.L. Dwoyer, M.Y. Hussaini and R.G. Voigt, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988, pp.344-348.
 - 33) Deconinck, H., Powell, K.G., Roe, P.L. and Struijs, R., "Multi-Dimensional Schemes for Scalar Advection," AIAA Paper 91-1532-CP, June 1991.
 - 34) Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 7, July 1978, pp.679-686.
 - 35) Roe, P.L., "Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 18, 1986, pp.337-365.
 - 36) Chakravarthy, S.R., "The Versatility and Reliability of Euler Solvers Based on High-Accuracy TVD Formulations," AIAA Paper 86-0243, 1986.
 - 37) Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 7, July. 1978, pp.679-686.
 - 38) Rumsey, C.L., van Leer, B. and Roe, P.L., "Effect of a Multi-Dimensional Flux Function on the Monotonicity of Euler and Navier-Stokes Computations," AIAA Paper 91-1530-CP, June 1991.
 - 39) Pulliam, T.H. and Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow," *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 2, Feb. 1980, pp.159-167.
 - 40) Sims, J.L., "Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack," NASA SP-3004, 1964.
 - 41) Sims, J.L., "Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones at Small Angle of Attack," NASA SP-3007, 1964.
 - 42) Chakravarthy, S.R., "Some Aspects of Essentially Nonoscillatory (ENO) Formulations for the Euler Equations," NASA CR-4285, 1990.
 - 43) Godfrey, A.G., Mitchell, C.R. and Walters, R.W., "High Order Accurate Schemes for Compressible Flows," *A Collection of Technical Papers of the Fourth International Symposium on Computational Fluid Dynamics Davis*, Sep. 1991, pp.424-429.