

軌道感度解析プログラムとその応用

西村 敏充・市川 勉・上條 史夫*・浅井 義彦**

(1993年9月22日受理)

Design of Sensitivity Analysis Program for Satellite Orbit Transfer Using Swing-by Technology, and Its Result Applied to the Satellite in the Vicinity of the Moon

By

Toshimitsu NISHIMURA, Tsutomu ICHIKAWA,
Fumio KAMIJO and Yoshihiko ASAI

Abstract: In the first period of 1990's two missions which utilized orbit transfer technology amplified by swing-by operation with moon were executed. One was HITEN, launched spring in 1990, which main purpose is to make sure of the swing-by operation technique, and the other was Geotail, launched spring in 1992, of which target was to observe interaction between solar plazma and earth magnetic field in the night side of the earth.

In both missions the swing-by operation was utilized to cast satellite into long elliptical orbits. Including these missions, so called sensitivity analysis is always required for planning orbit design. Conventional Sensitive Analysis Program is designed so as to analyze sensitivity for fly-by orbit transfer, and its coordinate center is earth gravity center. But in case of swing-by orbit transfer with moon, this program is not enough to analize orbit transfer sensitivity using swing-by operation.

Hence we develop newly sensitivity analysis program including swing-by operation, called SAPM.

In this report first we describe the design of SAPM using special perturbation methoc, then the analytical design using two-body, patched conic methd, and finally we show how much the satellite orbit is amplified by means of the swing-by operation using two examples.

* 数理技研(株)

** いわき短大 (宇宙研共同研究員)

1. はじめに

宇宙科学研究所は1990年代の前半に、月スウィングバイによる軌道エネルギーの増幅作用を利用する2つのミッションを実行した。その第1はこのスウィングバイを主たる目的とし1990年春に打ち上げられた“飛天”であり（最終的には月周回衛星となった）、第2のミッションは、地球の夜側に位置し、太陽プラズマと地球磁場の相互作用の観測を目的として1992年夏に打ち上げられた“Geotail”である。これも長楕円軌道にのせるために月スウィングバイ技術を利用している。

これらのミッションを含め一般的にある時刻 t_1 において人工衛星の制御 ΔV によって、一定時間後の t_2 において、軌道要素がどのように変化したかを見る、いわゆる感度解析はミッションの立案に際して不可欠な作業である。

従来この感度解析に用いられているプログラムは「彗星」等のためのフライバイ軌道制御の解析プログラムであり、地球を中心に考えられていた。

しかし月スウィングバイ軌道制御のように月を中心とした感度解析が要求されている状況では従来のプログラムでは用をなさない。そのため新規に“月スウィングバイ軌道制御に関する感度解析プログラム”（Sensitive Analysis Program for MOON: 以降SAPMと呼ぶ）を作成した。

本報告では前半において特殊摂動法による数値積分を利用した感度解析プログラムに関して記述し、後半では2体問題による同様のプログラムの説明を行う。そして最後にSAPMのシミュレーションの実例を用いて月スウィングバイ軌道による軌道エネルギーの増幅状況を示す。

2. 開発目的

本プログラムの目的を以下に示す。

1. 月スウィングバイ軌道に乗せるための軌道制御のように月を中心とした軌道に衛星を投入する制御を行う時、その軌道制御時刻及び軌道制御量の設計に当たって、近月点通過後の目標時刻、目標地点での衛星の位置・速度誤差が制御時点における衛星の軌道決定誤差、及び軌道制御誤差(制御ベクトル, 制御時刻)に対し持つ感度行列を計算し、以下の形式で出力する。

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\text{軌道誤差}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial V_1} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\text{軌道制御誤差}$$

X_1 = 制御時刻での軌道要素

X_2 = 目標時刻での軌道要素

V_1 = 制御時刻での時刻, 軌道制御量 ($t, v_c, \gamma_c, \delta_c$)

2. 表示時の座標系として以下の座標系を用いる (詳細2章参照).
 - (a) 地心 True of Date 赤道面座標系 (geocentric TOD EQ)
 - (b) 地心 True of Date 黄道面座標系 (geocentric TOD EC)
 - (c) 月中心白道面座標系 (lunentric LOP)
3. 表示時の座標タイプとして以下のタイプを用いる (詳細2章参照).
 - (a) カルテジアン形式
 - (b) ケプレリアン形式
 - (c) 極 (球) 座標形式

3. 基本概念

本章では SAPM で用いる座標系, 時系, 及び軌道制御時の制御方向の指定形式について述べる.

3.1 座標系

本プログラムで使用する座標系及び座標型を表1, 表2に示す.

3.1.1 座標系・型定義

以下に本プログラムで使用する主な座標系と型を示す.

<座標系> 以下に各座標系の概念を示す.

ただし, geocentric, heliocentric と lunentric の違いは原点位置のみであるのでここでは geocentric での EQ 系 LOP 系 EC 系について示す.

また, 使用するすべての座標系は EME 50 を基本として定義されている. EME 50 系とは 1950.0 年初における平均春分点方向を X 軸とし, その時の平均赤道面を XY 面とする慣性系である.

表1 本プログラムで使用する座標系

座標系名	原点	基準面	基準方向	名称
地心 True of Date 赤道面座標系	地球	TOD 真赤道面	TOD 真春分点方向	geocentric TOD EQ
地心 True of Date 黄道面座標系	地球	黄道面	TOD 真春分点方向	geocentric TOD EC
太陽中心 True of Date 赤道面座標系	太陽	TOD 真赤道面	TOD 真春分点方向	heliocentric TOD EQ
太陽中心 True of Date 黄道面座標系	太陽	黄道面	TOD 真春分点方向	heliocentric TOD EC
月中心白道面座標系	月	白道面	昇交点方向	lunentric LOP
1950.0 年平均地球赤道面座標系	地球	1950.0 年平均赤道面	1950.0 年平均春分点方向	EME50
地心 Mean of Date 赤道面座標系	地球	MOD 平均赤道面	MOD 平均春分点方向	geocentric MOD EQ

表2 本プログラムで使用する座標型

座標型名称	パラメータ
カルテジアン	位置 $R(x, y, z)$, 速度 $V(V_x, V_y, V_z)$
ケプレリアン	$a, e, i, \Omega, \omega, M$
極座標	$r, \theta, \phi, v, \gamma, \delta$

1. EME 50 上での MOD EQ の定義

MOD EQ 座標系は EME 50 系から TOD EQ 系への変換のために用いられ、1950.0年からの経過時間に対応した歳差運動を考慮した座標系であり、EME 50 と図1 の関係にある。

2. MOD EQ TOD EQ TOD EC 間の定義

MOD EQ と TOD EQ 間の変化は月と太陽の引力と地球形状により引き起こされるものであり、それゆえ両座標系間で黄道面の変化は発生しない。このことにより、以下の手順で MOD TOD の相互変換が図2 のように行われる。

- (a) 平均春分点を介して平均赤道面から黄道面へ
- (b) 黄道面上の真春分点へ
- (c) 真春分点を介して黄道面から真赤道面へ

3. TOD EQ 上の LOP 座標系の定義

月は複雑な運動をするため時々刻々の白道面を用いて LOP 座標系を規定すると衛星の運動の解析ができなくなるので、本プログラムは白道面を次のように定義する。

- (a) 計算開始時における月のカルテジアン要素 (EME 50 系) を、エフェメリスファイルより取り出す。
- (b) 月の6要素を TOD EQ 系に変換する。
- (c) カルテジアンをケプレリアンに変換する。

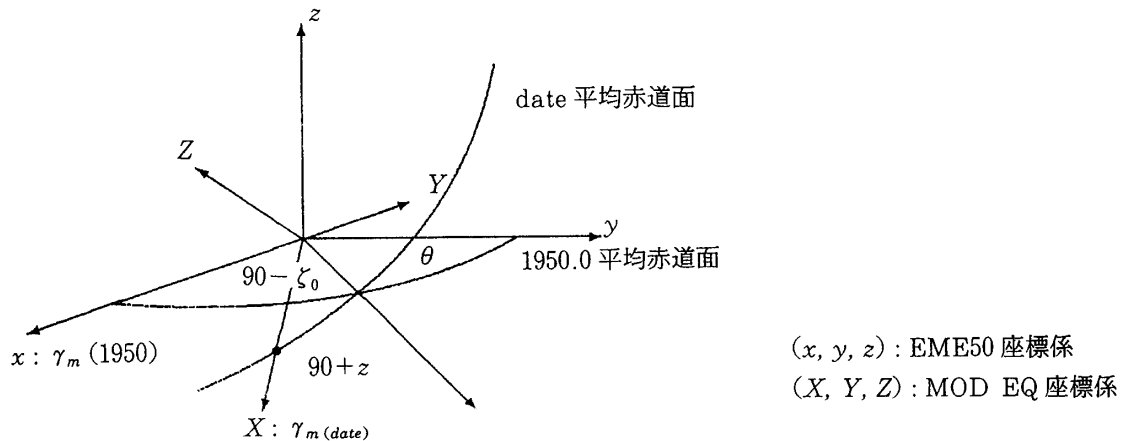


図1 EME 50 → MOD EQ 座標系

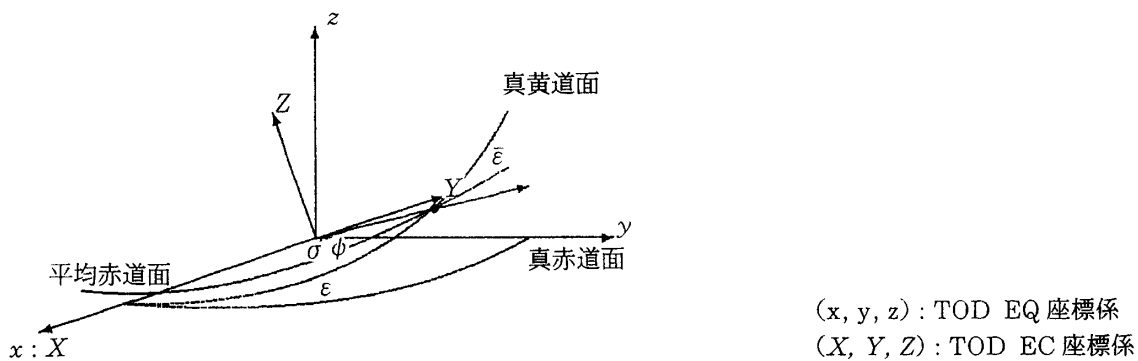


図2 MOD EQ → TOD EC → TOD EQ 座標系

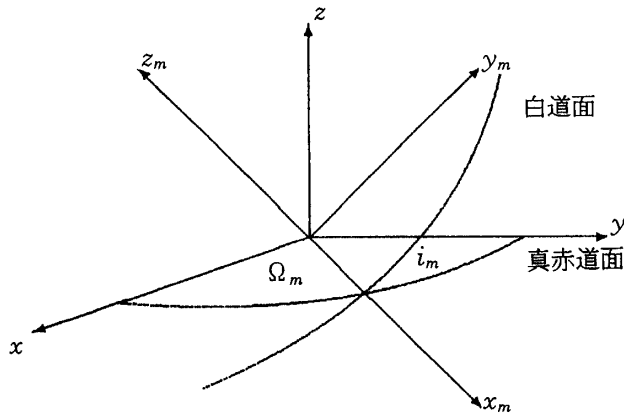


図3 TOD EQ → LOP 座標系

(x, y, z) : TOD EQ 座標系

(x_m, y_m, z_m) : LOP 座標系

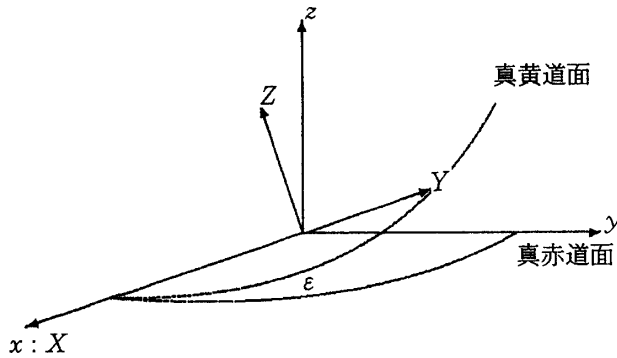


図4 TOD EQ → TOD EC 座標系

(x, y, z) : TOD EQ 座標系

(X, Y, Z) : TOD EC 座標系

上記手順で求めた月の瞬時の軌道面を白道面と定義し、図3に示す。

4. TOD EQ 上の TOD EC 座標系の定義

TOD EQ 系と TOD EC 系は X 軸を共有し、真黄道傾角分 TOD EC が回転しており、その関係は図4に示される。

<座標型> 以下に本プログラムで使用するカルテジアン、ケプレリアン、極座標型の概念を示す。

1. カルテジアン表現

衛星の状態を3次元空間の位置 r 、速度 v を用いて表す。

2. ケプレリアン表現

衛星の状態を以下のケプラー6要素を用いて表現する (図5参照)。

a : 軌道長半径

e : 離心率

i : 軌道面傾斜角

Ω : 昇交点経度

ω : 近点引数

f : 真近点離角

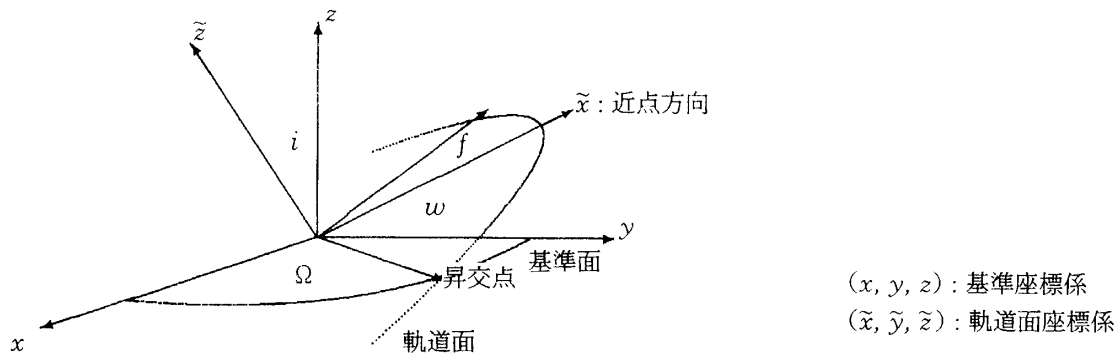


図5 軌道面座標系

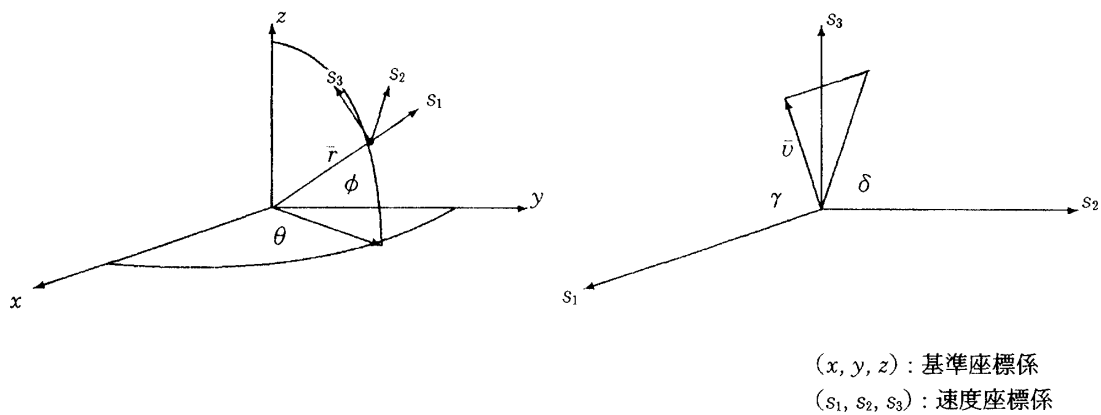


図6 極座標系

3. 極座標表現

衛星の状態を3次元空間の位置、速度に関して、各々ノルムと2角を用いて以下のように表現する(図6参照).

速度座標系の各軸は

s_1 : r に平行

s_2 : (s_1, s_2, s_3) が右手系

s_3 : 衛星位置を原点として北方向

とする.

3.1.2 座標系間変換

以下に各座標系間、座標型間の変換方法を示す. なお、以下で用いた変換行列の記述は次の規則に従う.

$R_i(\theta)$: i 軸右回り正の3軸回転行列で θ (rad)回転を示す.

i — x, y, z または s_1, s_2, s_3 を示す.

<座標系> 以下に各座標系間の変換方法を示す.

1. EME 50 \rightarrow MOD EQ 変換行列(R_{me})

図1において $\theta, 90 - \zeta_0, 90 + z$ は各々

θ : EME 50 上での現在時刻における平均赤道面のなす角
 $90 - \zeta_0$: EME 50 上での現在時刻における平均赤道面の昇交点赤経
 $90 + z$: 現在時刻における平均赤道面上での平均春分点方向からの昇交点赤経
 を表す. ここで T を 1950.0 年から 100 太陽年ではかった時刻とすると θ , ζ_0 , z は次式で与えられる.

$$\zeta_0 = 2304''.948T + 0''.302T^2 + 0''.0179t^3$$

$$\theta = 2004''.255T - 0''.426T^2 - 0''.0416t^3$$

$$z = 2304''.948T + 1''.093T^2 + 0''.0192t^3$$

$$T = \frac{T_{mjed} - 33281.923357}{36524.219878}$$

これより R_{me} は

$$R_{me} = R_z(-90 - z)R_x(\theta)R_z(90 - \zeta_0) \quad (1)$$

となる.

2. MOD EQ \rightarrow TOD EQ への変換行列 (R_{tm})

図 2 において $\bar{\epsilon}$, $\delta\phi$, ϵ は各々

$\bar{\epsilon}$: 現在時刻での平均黄道面傾斜角

$\delta\phi$: 現在時刻での黄経の章動

ϵ : 現在時刻での真黄道面傾斜角 ($=\bar{\epsilon} + \delta\epsilon$)

$\delta\epsilon$: 現在時刻での黄道面傾斜角の章動

を表す. ここで T を 1900 Jan 0.5ET からユリウス世紀ではかった時刻とすると $\bar{\epsilon}$ は次式で与えられる.

$$\bar{\epsilon} = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T + a_4t^3$$

$$a_0 = 23^{\text{deg}}27'08''.26$$

$$a_1 = -46''.845$$

$$a_2 = -0''.0059$$

$$a_3 = 0''.00181$$

$$T = \frac{T_{mjed} - 15019.5}{36525}$$

黄道面傾斜角の章動, 黄経の章動は, JPL エフェメリスファイル中の値を使用する. これにより R_{me} は

$$R_{tm} = R_x(-\epsilon)R_z(-\delta\phi)R_x(\bar{\epsilon}) \quad (2)$$

となる.

3. TOD EQ \rightarrow lunicentric LOP への変換式

図 3 に示されるように計算開始時における以下の値が必要となる.

i_m, Ω_m : 計算開始時における月の位置, 速度を元に TOD EQ 系で求めた月軌道の軌道面傾斜角, 昇交点経度

R_m : 計算時における月の位置 (TOD EQ)

V_m : 計算時における月の速度 (TOD EQ)

これより luniconcentric LOP 系での位置 r_m , 速度 v_m の変換式は

$$r_m = R_{lt}(R - R_m) \quad (3)$$

$$v_m = R_{lt}(V - V_m) \quad (4)$$

$$R_{lt} = R_x(i_m)R_z(\Omega_m) \quad (5)$$

となる. (R_{lt} の時間変化は無視する)

4. TOD EQ → TOD EC への変換行列 (R_{ct})

図4に示されるように TOD EQ から TOD EC への変換は, 真黄道面傾斜角のみである. これより R_{ct} は

$$R_{ct} = R_x(\varepsilon) \quad (6)$$

となる.

<座標型> 以下にカルテジアンからケプレリアン, 極座標への変換とその逆変換を示す.

1. カルテジアン → ケプレリアン変換

衛星の位置, 速度, 及び中心天体が与えられた時, そこでのケプラー要素は次ぎに示す値をパラメータとしてすべて表現される.

$\mu = GM_c$ — G : 重力定数, M_c : 中心天体質量

$$h = r \times v$$

$$h = \|h\|$$

$$r = \|r\|$$

$$v = \|v\|$$

$$P = a(1 - e^2)$$

これよりケプラー6要素の算出式を示す. (楕円, 双曲線軌道にかかわらず適用可)

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rv^2} \quad (7)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \quad (8)$$

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \quad (9)$$

$$\cos \Omega = \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \frac{h_z}{|h_z|} \quad (10)$$

$$\sin \Omega = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \frac{h_z}{|h_z|} \quad (11)$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{-r_x h_y + r_y h_x}{r \sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \frac{h_z}{h} \quad (12)$$

$$\sin(\omega + f) = \frac{r_z h}{r \sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \quad (13)$$

$$\cos f = \frac{P-e}{re} \quad (14)$$

$$\sin f = \frac{h}{e\mu} \frac{(r, v)}{r} \quad (15)$$

2. ケプリアン→カルテジアン変換

衛星のケプラー要素及び中心天体が与えられた時、そこでの位置、速度は次に示す値をパラメータとしてすべて表現される。

$\mu = GM_c$ — G : 重力定数, M_c : 中心天体質量

$$P = a(1-e^2)$$

$$\tilde{x} = \frac{P \cos f}{1+e \cos f}$$

$$\tilde{y} = \frac{P \sin f}{1+e \cos f}$$

$$\dot{\tilde{x}} = -\sqrt{\frac{\mu}{P}} \sin f$$

$$\dot{\tilde{y}} = \sqrt{\frac{\mu}{P}} (e + \cos f)$$

ここで軌道面座標系での位置、速度ベクトルを以下のように導入する。

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

これよりカルテジアン6要素の算出式を示す。(楕円, 双曲線軌道には変わらず適用可)

$$\mathbf{r} = R_z^t(\Omega) R_x^t(i) R_z^t(\omega) \tilde{\mathbf{r}} \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = R_z^t(\Omega) R_x^t(i) R_z^t(\omega) \tilde{\mathbf{v}} \quad (17)$$

3. カルテジアン→極座標変換

極座標6要素は図6より位置に関しては直接, また速度に関しては (s_1, s_2, s_3) 系で表したベクトル要素を元に以下の式より得られる。

$$r = \|\mathbf{r}\|$$

$$\sin \phi = \frac{r_z}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

$$v = \|\mathbf{v}\|$$

$$\begin{bmatrix} U_{s_1} \\ U_{s_2} \\ U_{s_3} \end{bmatrix} = R_y(-\phi)R_z(\theta)\mathbf{v}$$

$$\cos \gamma = \frac{U_{s_1}}{v}$$

$$\cos \delta = \frac{U_{s_2}}{\sqrt{U_{s_2}^2 + U_{s_3}^2}}$$

$$\sin \delta = \frac{U_{s_3}}{\sqrt{U_{s_2}^2 + U_{s_3}^2}}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$R_{os} = R_y(\gamma)R_x(-\sigma) \quad \text{S座標系から速度座標系への変換}$$

4. 極座標 → カルテジアン変換

カルテジアン6要素は極座標6要素より (s_1, s_2, s_3) 系で表した速度ベクトルを介して以下の式より得られる。

$$\mathbf{r} = R_z'(\theta)R_y'(-\phi) \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\mathbf{v} = R_z(-\theta)R_y(\phi)R_x'(-\sigma)R_z'(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

3.2 時系

本プログラムでは表3に示される時系を用いる。
以下に各時系間の変換方法を示す。

表3 本プログラムで使用する時系

時系記号	時系名称	使用目的
UTC	世界協定時	入出力時系
UT1	UT1	地球自転角計算
ET	暦表時	積分のための均一時系 天体エフェメリス計算時系

1. UTC → UT 1

UTC から UT 1 への変換は国際時報局 (BIH) より発表される (TAI-UTC), (TAI-UT 1) の実測値のテーブルを TIMF ファイルとして持ち, この値を用いて変換する.

2. UTC → ET

ET 時間を求めるにあたって次の条件を設定する.

- 原子時計の周波数のずれによる影響は無視する.
- 原子時計の相対論効果は, 年周期項のみ考慮する.

以上の条件より $\Delta = TAI - ET$ は次の式で与えられる.

$$\Delta = \Delta T_a + 1.658 \times 10^{-3} \sin E$$

$$E \approx M + e \sin M$$

$$M = 6.248291 + 1.99096871 \times 10^{-7} t$$

$$t = ET - 86400 \times 33282$$

ただし

ΔT_a : 32.184 (秒) オフセットの定数項

E : 地球・月重心の eccentric anomaly

M : 地球・月重心の mean anomaly

3.3 軌道制御方式

本プログラムで扱う軌道制御方式は, インパルス manoeuvre であり軌道要素で表せば, 制御速度 (\bar{v}) を与えられた時, そこの軌道要素が制御前後で (r_1, v_1) から $(r_1, v_1 + \bar{v})$ に瞬時に変わる軌道制御方式である.

また, 制御速度 (\bar{v}) を与える際のパラメータの設定方法として以下の 3 通りの方法を実現している.

1. カルテシアン manoeuvre

manoeuvre 時刻での制御速度ベクトルをカルテジアン要素 ($\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$) で指定する.

2. v, γ, δ 方式

速度空間 (e_u, e_v, e_w) 系を次のようにとる (図 7 参照).

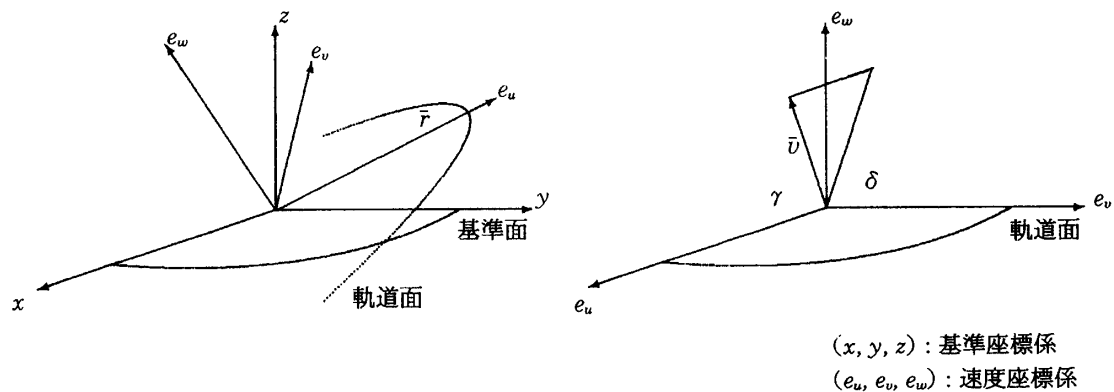


図 7 軌道面速度座標系

$e_u - r$ に平行

$e_w - r_1 \times v_1$ に平行

$e_v - (e_u, e_v, e_w)$ 系が右手系

マヌーバパラメータ v, γ, δ は

\bar{v} : マヌーバの大きさ

γ : r 方向からの傾き

δ : 軌道面からの傾き

を表し、これより制御速度ベクトルは

$$\bar{v} = v \cos \gamma e_u + (v \sin \gamma \cos \delta) e_v + (v \sin \gamma \sin \delta) e_w$$

となる。ただし

$$e_u = r_1 / \|r_1\|$$

$$e_v = \frac{v_1 - \frac{(v_1, r_1)}{(r_1, r_1)} r_1}{\|v_1 - \frac{(v_1, r_1)}{(r_1, r_1)} r_1\|}$$

$$e_w = \frac{r_1 \times v_1}{\|r_1 \times v_1\|}$$

3. タンジェンシャルマヌーバ方式

軌道制御ベクトルは、制御量 \bar{v} をパラメータとして以下のように与えられる。

$$\bar{v} = \bar{v} \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

4. 運動方程式

以下に本プログラムで対象としている運動方程式、時空間、及び積分手法に関して示す。

4.1 運動方程式

衛星の運動方程式は次に示す形式で表される。

$$\ddot{r} = h(r(t), \dot{r}(t); X_0)$$

r : 衛星位置

$$X_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ \dot{r}_0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{初期位置} \\ \text{初期速度} \end{array}$$

一般に衛星の加速度項を考える時上式における加速度項を中心天体に対する中心力とその他の摂動項とに分離して考える。ここで摂動項としては各種のものが考えられるが、本プログラムの目的の上では、次に示す摂動項を考慮すれば十分であると思われる。

h_p : 中心天体以外の天体による重力加速度

h_{obl} : 中心天体の非球対称性による加速度 (zonal 項のみ対象)

h_{srp} : 太陽輻射圧による加速度

以上より本プログラムで使用する運動方程式は以下のものとなる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}_p + \mathbf{h}_{obl} + \mathbf{h}_{srp} \quad (18)$$

$$\mathbf{h}_p = -\mu_c \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} - \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ic}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ic}\|^3} + \frac{\mathbf{r}_{ic}}{\|\mathbf{r}_{ic}\|^3} \right) \quad (19)$$

$$\mathbf{h}_{obl} = \mu_c \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \sum_{n=2}^{JN} J_n \left(\frac{a_c}{\rho} \right)^n (n+1) P_n(\sin \phi) - \frac{\mu_c}{\rho^3} \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix} \sum_{n=2}^{JN} J_n \left(\frac{a_c}{\rho} \right)^n P'_n(\sin \phi) \cos \phi \quad (20)$$

$$\mathbf{h}_{srp} = \frac{S_0(1+\Gamma)A_{sc}}{cm_{sc}} \left(\frac{R_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sc}\|} \right)^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sc}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sc}\|} \quad (21)$$

$$\rho = \|\mathbf{r}\|$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ 中心天体からの衛星位置}$$

ϕ : 中心天体上での衛星緯度

μ_c : 中心天体重力係数 (= GM_c)

μ_i : 他天体重力係数 (= GM_i)

\mathbf{r}_{ic} : 中心天体から見た他天体の位置

a_c : 中心天体赤道面半径

S_0 : 太陽定数 (= $1.35 \times 10^8 \text{ W/m}^2$)

c : 光速

Γ : 反射係数

m_{sc} : 衛星の質量

R_0 : 太陽から地球までの平均距離 (1 A.U.)

\mathbf{r}_{sc} : 地球中心よりみた太陽位置

A_{sc} : 衛星の太陽光にたいする実効断面積

4.2 時空間

衛星の運動方程式を解くに当たって使用する均一な時空間としては【暦表時, EME 50 慣性系】を用いる。

4.3 数値積分法

軌道生成のために使用する数値積分法としては通常の P-C 法 (Adams-Cowell 法) を用いる。P-C 法の各種条件を以下に示す。

- バックポイントテーブルの初期化は 8 次のルンゲークッタ法を用いる。
- 積分公式の次数は 11 次とする。
- テーブルのステップ幅は固定。
- 局所誤差制御を行う。

5. 変分方程式

以下に変分方程式の導出と、本プログラムで使用する変分式及びその積分方法を示す。

5.1 変分方程式の導出

4.1節で示したように衛星の運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; X_0) \quad (22)$$

と表される。

ここで、任意の時刻における \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ は、初期値 X_0 をパラメータとして計算されている。それゆえ、初期値 X_0 による \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ に対する偏微分が定義され、それぞれの項の関係は次のように表される。

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial X_0} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_0} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial X_0} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial X_0}$$

上式の間係を

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \\ A &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \\ B &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ C &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial X_0} \end{aligned}$$

を用いて表すと

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial X \\ \partial X_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial X \\ \partial X_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} \quad (23)$$

となる。ここで状態遷移行列 U を

$$U(t, t_0) = \frac{\partial X}{\partial X_0}$$

を用いて表すと状態遷移行列の法方程式が

$$\dot{U}(t, t_0) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \end{bmatrix} U(t, t_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} \quad (24)$$

と表される。このとき初期値 $U(t, t_0)$ は 6×6 の単位行列となる。

5.2 プログラムで使用する変分方程式

4.1節で示したように本プログラムにおいて考慮されている加速度項には速度、初期値に

依存する項は存在しない，それゆえ式25は簡易化されて

$$\dot{U}(t, t_0) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} U(t, t_0) \quad (25)$$

となる．以下に行列 A の内容を示す．

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial \mathbf{h}_p}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{h}_{obl}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{h}_{srp}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_p}{\partial \mathbf{r}} &= -\frac{\mu_c}{\|\mathbf{r}\|^3} I + \frac{3\mu_c}{\|\mathbf{r}\|^5} \mathbf{r}\mathbf{r}^t + \sum_{i=1} \left(-\frac{\mu_i}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ic}\|^3} I + \frac{\mu_i}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ic}\|^5} (\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ic})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ic})^t \right) \\ \frac{\partial \mathbf{h}_{srp}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{S_0(1+\Gamma)A_{sc}R_0^2}{cm_{sc}} \frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{sc}\|^5} \{ \|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{sc}\|^2 I - 3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{sc})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{sc})^t \} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_{obl}}{\partial \mathbf{r}} &= (\rho^2 - 5\mathbf{r}\mathbf{r}^t) \frac{3\mu_c}{\rho^5} J_2 \left(\frac{a_c}{\rho} \right)^2 P_2(\sin \phi) \\ &\quad + \{ \rho^2 (\rho^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - z\mathbf{r}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}^t + (x^2+y^2)(z\rho^2 I - 2z\mathbf{r}\mathbf{r}^t \\ &\quad + \rho^2 \mathbf{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^t + 3\mathbf{r} \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2+y^2 \end{bmatrix}^t + 3 \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2+y^2 \end{bmatrix} \mathbf{r}^t \} \\ &\quad \times \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \frac{\mu_c}{\rho^5} J_2 \left(\frac{a_c}{\rho} \right)^2 P_2'(\sin \phi) \cos \phi \\ &\quad - \frac{1}{x^2+y^2} \frac{\mu_c}{\rho^5} \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2+y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2+y^2 \end{bmatrix}^t J_2 \left(\frac{a_c}{\rho} \right)^2 \{ P_2''(\sin \phi) \cos \phi \\ &\quad - P_2'(\sin \phi) \sin \phi \} \end{aligned}$$

5.3 数値積分法

変分方程式は 6×6 要素の1次元配列 Y の連立常微分方程式として解く．

$$\frac{d}{dt} Y = f(t, Y)$$

この方程式の数値解法としては変形差分商に基づくアダムス法を用いる．

(詳細に関しては“科学計算用サブルーチンライブラリー——富士通”のODAMを参照)

6. 感度行列変換

6.1 座標変換による感度行列変換

EME 50 を基本に TOD-EQ, 白道面座標系での, 座標変換に依存したカルテシアン形式の

感度行列の変換方法，およびカルテシアン，ケプレリアン，局座標系間の相互変換を示す．

6.1.1 座標系間の変換（カルテシアン）

以下に各座標系での表現を規定する．

$r^{(0)}$: EME-50系での衛星位置（カルテシアン）

$r^{(1)}$: TOD-EQ系での衛星位置（カルテシアン）

$r^{(2)}$: 白道面座標系系での衛星位置（カルテシアン）

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} r^{(i)} \\ \dot{r}^{(i)} \end{pmatrix} \quad i=0, 1, 2$$

座標系間の変換を以下のように定める．

r_m : TOD-EQ での初期時刻 (t_1) における月の位置

S : 各時刻での EME-50 から TOD-EQ への変換行列

T : TOD-EQ から白道面座標系系への変換行列

: ただし S, T の時間変化量は無視できるので，考慮しない．

この時，各座標系での，位置，速度は

$$r^{(1)} = S r^{(0)}$$

$$\dot{r}^{(1)} = S \dot{r}^{(0)}$$

$$r^{(2)} = T(r^{(1)} - r_m)$$

$$\dot{r}^{(2)} = T(\dot{r}^{(1)} - \dot{r}_m)$$

と表される．

ここで EME-50 系での時刻 t_1 での要素に対する t_2 での軌道要素の感度を以下に定義する．

定義 衛星が時刻 t_1 に $X^{(0)}(t_1)$ で出発し，時刻 t_2 まで航行して t_2 での軌道要素が $X^{(0)}(t_2)$ だったとする．この時，この軌道の t_1 での軌道要素に対する t_2 での軌道要素の感度は，

$$\frac{\partial X^{(0)}(t_2)}{\partial X^{(0)}(t_1)} \quad \text{EME-50/EME-50}$$

で定義する．

以上より TOD-EQ 系での感度，および白道面系での感度は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(1)}(t_2)}{\partial X^{(1)}(t_1)} &= \frac{\partial X^{(1)}(t_2)}{\partial X^{(0)}(t_2)} \frac{\partial X^{(0)}(t_2)}{\partial X^{(0)}(t_1)} \frac{\partial X^{(0)}(t_1)}{\partial X^{(1)}(t_1)} \\ &= \begin{bmatrix} S(t_2) & 0 \\ 0 & S(t_2) \end{bmatrix} \frac{\partial X^{(0)}(t_2)}{\partial X^{(0)}(t_1)} \begin{bmatrix} S^t(t_1) & 0 \\ 0 & S^t(t_1) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial X^{(2)}(t_2)}{\partial X^{(2)}(t_1)} &= \frac{\partial X^{(2)}(t_2)}{\partial X^{(1)}(t_2)} \frac{\partial X^{(1)}(t_2)}{\partial X^{(1)}(t_1)} \frac{\partial X^{(1)}(t_1)}{\partial X^{(2)}(t_1)} \\ &= \begin{bmatrix} T(t_2) & 0 \\ 0 & T(t_2) \end{bmatrix} \frac{\partial X^{(1)}(t_2)}{\partial X^{(1)}(t_1)} \begin{bmatrix} T^t(t_1) & 0 \\ 0 & T^t(t_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表される.

6.1.2 座標表現型間のヤコビアン行列

TOD-EQ系でのケプレリアン, 極座標表現を $e^{(1)}$ とするその表現形式に対応する感度行列は,

$$\frac{\partial e^{(1)}(t_2)}{\partial X^{(1)}(t_1)} = \frac{\partial e^{(1)}(t_2)}{\partial X^{(0)}(t_2)} \frac{\partial X^{(0)}(t_2)}{\partial X^{(0)}(t_1)} \frac{\partial X^{(0)}(t_1)}{\partial e^{(1)}(t_1)}$$

と表される.

これより各表現形とカルテシアンとのヤコビアン $\frac{\partial e^{(1)}}{\partial X^{(1)}}$ とその逆行列を求めれば良い.

タイプ1 ケプレリアンからカルテシアンへの変換ヤコビアン

変換にあつては2対問題を仮定する.

3.1.2章に従いケプレリアンからカルテシアンへの変換式は以下のようになる.

$$\mu = GM_c \quad \text{— } G: \text{重力定数, } M_c: \text{中心天体質量}$$

$$P = a(1-e^2)$$

$$\tilde{x} = \frac{P \cos f}{1+e \cos f}$$

$$\tilde{y} = \frac{P \sin f}{1+e \cos f}$$

$$\dot{\tilde{x}} = -\sqrt{\frac{\mu}{P}} \sin f$$

$$\dot{\tilde{y}} = -\sqrt{\frac{\mu}{P}} (e + \cos f)$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = R_z^t(\Omega) R_x^t(i) R_z^t(\omega) \tilde{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} = R_z^t(\Omega) R_x^t(i) R_z^t(\omega) \tilde{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{R} = R_z^t(\Omega) R_x^t(i) R_z^t(\omega)$$

これよりケプレリアンからカルテシアンへの変換ヤコビアンは以下のように表される.

$$\frac{\partial(\mathbf{r} \mathbf{v})}{\partial(a e f)} = \begin{bmatrix} R \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial(a e f)} \\ R \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial(a e f)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{r} \mathbf{v})}{\partial(i \Omega \omega)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial i} \tilde{\mathbf{r}} & \frac{\partial R}{\partial \Omega} \tilde{\mathbf{r}} & \frac{\partial R}{\partial \omega} \tilde{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial R}{\partial i} \tilde{\mathbf{v}} & \frac{\partial R}{\partial \Omega} \tilde{\mathbf{v}} & \frac{\partial R}{\partial \omega} \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial(a, e, f)} = \begin{bmatrix} \frac{(1-e^2)\cos f}{1+e\cos f} & -a\frac{2e+(1+e^2)\cos f}{(1+e\cos f)^2}\cos f & -a(1-e^2)\frac{\sin f}{(1+e\cos f)^2} \\ \frac{(1-e^2)\sin f}{1+e\cos f} & -a\frac{2e+(1+e^2)\cos f}{(1+e\cos f)^2}\sin f & -a(1-e^2)\frac{e+\cos f}{(1+e\cos f)^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{Pa^2}}\sin f & -\sqrt{\frac{\mu}{P}}\frac{e\sin f}{1-e^2} & -\sqrt{\frac{\mu}{P}}\cos f \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{Pa^2}}(e+\cos f) & -\sqrt{\frac{\mu}{P}}\frac{1+e\cos f}{1-e^2} & -\sqrt{\frac{\mu}{P}}\sin f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

タイプ2 カルテシアンからケプレリアンへの変換ヤコビアン

3.1.2章に従いカルテシアンからケプレリアンへの変換式は以下のようになる。

$\mu = GM_c$ — G : 重力定数, M_c : 中心天体質量

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$h = \|\mathbf{h}\|$$

$$r = \|\mathbf{r}\|$$

$$v = \|\mathbf{v}\|$$

$$P = a(1-e^2)$$

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rv^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$$

$$\cos i = \frac{h_z}{h}$$

$$\cos \Omega = \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \frac{h_z}{|h_z|}$$

$$\sin \Omega = \frac{-h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \frac{h_z}{|h_z|}$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{-r_x h_y + r_y h_x}{r\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \frac{h_z}{h}$$

$$\sin(\omega + f) = \frac{-r_x h_y + r_y h_x}{r\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}$$

$$\cos f = \frac{P - e}{re}$$

$$\sin f = \frac{h}{e\mu} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{r}$$

これよりケプレリアンからカルテジアンへの変換ヤコビアンは以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial X} &= \left[\frac{2\mu^2}{(2\mu - rv^2)^2 r} \mathbf{r}^t \quad \frac{2\mu r^2}{(2\mu - rv^2)^2} \mathbf{v}^t \right] \\ \frac{\partial h}{\partial X} &= \frac{h^t}{h} \begin{bmatrix} 0 & v_z & -v_y & 0 & -r_z & r_y \\ -v_z & 0 & v_x & r_z & 0 & -r_x \\ v_y & -v_x & 0 & -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial e}{\partial X} &= \frac{1}{2e} \frac{h}{\mu a^2} \left(h \frac{\partial a}{\partial X} - 2a \frac{\partial h}{\partial X} \right) \\ \frac{\partial i}{\partial X} &= \frac{1}{h^2 \sqrt{h_x^2 + h_y^2}} [h_z h_x \quad h_z h_y \quad -(h_x^2 + h_y^2)] \frac{\partial h}{\partial X} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial X} &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} [-h_y \quad h_x \quad 0] \frac{\partial h}{\partial X} \\ \frac{\partial f}{\partial X} &= -\frac{(h^2 + \mu r)}{\mu^2 e^2 r^2} (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{h}{\mu e^2 r^3} (\mathbf{r}, \mathbf{v}) [\mathbf{r}^t \quad 0] + \frac{h(h^2 - \mu r)}{\mu^2 e^2 r^2} [\mathbf{v}^t \quad \mathbf{r}^t] \\ \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial \omega}{\partial X} &= \frac{r_z}{r^2 (h_y^2 + h_z^2)} \left\{ h r_y \frac{\partial h_x}{\partial X} - h r_x \frac{\partial h_y}{\partial X} + (r_x h_y - r_y h_x) \frac{\partial h}{\partial X} \right\} \\ &\quad + \frac{h}{r^2 (h_y^2 + h_z^2)} [-h_y r_z \quad h_x r_z \quad r_x h_y - r_y h_x \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

タイプ3 カルテシアンから極座標への変換ヤコビアン

3.1.2章に従いカルテシアンから極座標への変換式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} r &= \|\mathbf{r}\| \\ \sin \phi &= \frac{r_z}{r} \\ \cos \theta &= \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \\ \sin \theta &= \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \\ v &= \|\mathbf{v}\| \\ \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ u_{s_2} \\ u_{s_3} \end{bmatrix} &= R_y(-\phi) R_z(\theta) \mathbf{v} \\ \cos \gamma &= \frac{u_{s_1}}{v} \\ \cos \delta &= \frac{u_{s_2}}{\sqrt{u_{s_2}^2 + u_{s_3}^2}} \\ \sin \delta &= \frac{u_{s_3}}{\sqrt{u_{s_2}^2 + u_{s_3}^2}} \end{aligned}$$

これよりカルテシアンから極座標への変換やヤコビアンは以下のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{1}{r} [r_x \ r_y \ r_z \ 0 \ 0 \ 0] \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{1}{r^2 \sqrt{r_x^2 + r_y^2}} [-r_z r_x \ -r_z r_y \ r_x^2 + r_y^2 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{1}{r_x^2 + r_y^2} [-r_y \ r_x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v_x}{v} & \frac{v_y}{v} & \frac{v_z}{v} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial (v_{s_1} \ v_{s_2} \ v_{s_3})}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial R_y(-\phi) R_z(\theta) \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\partial R_y(-\phi)}{\partial \phi} R_z(\theta) \mathbf{v} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \\ + \left(R_y(-\phi) \frac{\partial R_z(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{v} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right] \left. \vphantom{\frac{\partial (v_{s_1} \ v_{s_2} \ v_{s_3})}{\partial \mathbf{X}}} \right| R_y(-\phi) R_z(\theta) \\ \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{1}{\sqrt{v_{s_2}^2 + v_{s_3}^2}} \frac{\partial v_{s_1}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{v_{s_1}}{v^2 \sqrt{v_{s_2}^2 + v_{s_3}^2}} [0 \ 0 \ 0 \ v_x \ v_y \ v_z] \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{v_{s_3}}{v_{s_2}^2 + v_{s_3}^2} \frac{\partial v_{s_2}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{v_{s_2}}{v_{s_2}^2 + v_{s_3}^2} \frac{\partial v_{s_3}}{\partial \mathbf{X}} \end{aligned}$$

(注) 速度空間での角度 σ, γ の代わりに

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\pi}{2} - \sigma \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} - \tau \end{aligned}$$

を使っても同様である.

タイプ4 極座標からカルテシアンへの変換ヤコビアン

3.1.2章に従い極座標からカルテシアンへの変換式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R_z^t(\theta) R_y^t(-\phi) \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sigma &= \frac{\pi}{2} - \delta \\ \tau &= \frac{\pi}{2} - \gamma \\ \mathbf{v}_s &= R_x^t(-\sigma) R_z^t(\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \\ \mathbf{v} &= R_z^t(\theta) R_y^t(-\phi) \mathbf{v}_s \end{aligned}$$

これより極座標からカルテシアンへの変換ヤコビアンは以下のように表される.

$$\frac{\partial r}{\partial(r \ \theta \ \phi)} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -r \cos \phi \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \phi \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & r \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(r \ v)}{\partial(r \ \theta \ \phi \ v \ \sigma \ \tau)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial(r \ \theta \ \phi)} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial(r \ \theta \ \phi)} & \frac{\partial v}{\partial(r \ \theta \ \phi)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \dot{R}_z^t(\theta) R_y^t(-\phi) v_s$$

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = -R_z^t(\theta) \dot{R}_y^t(-\phi) v_s$$

$$\frac{\partial v}{\partial(v \ \sigma \ \tau)} = R_z^t(\theta) R_y^t(-\phi) \frac{\partial v_s}{\partial(v \ \sigma \ \tau)}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial(v \ \sigma \ \tau)} = \begin{bmatrix} \sin \tau & 0 & v \cos \tau \\ \sin \sigma \cos \tau & v \cos \sigma \cos \tau & -v \sin \sigma \sin \tau \\ \cos \sigma \cos \tau & -v \sin \sigma \cos \tau & -v \cos \sigma \sin \tau \end{bmatrix}$$

6.2 軌道制御による感度行列変換

軌道制御による感度を考えるに当たって感度行列計算の手順を以下に示す。

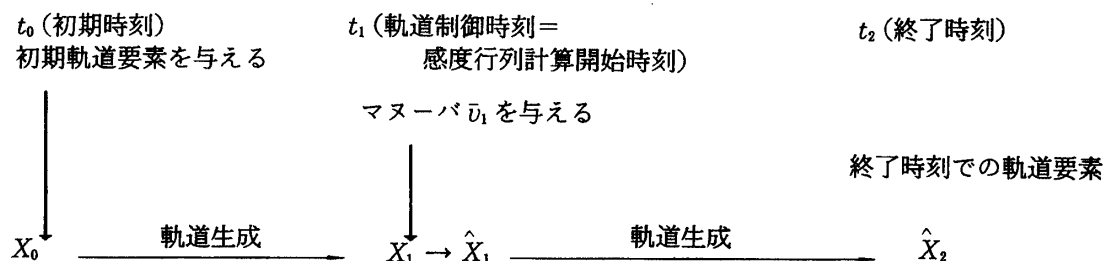


図8 感度行列計算処理手順

ここでマヌーバ \bar{v}_1 は時刻 t_1 に依存する。

以下に感度 $\frac{\partial \hat{X}^{(2)}}{\partial \hat{X}^{(1)}}$ が計算されたものと仮定して、マヌーバ時刻 t_1 及びマヌーバ \bar{v}_1 に対する \hat{X}_2 の感度を導く。

定義 軌道生成関数 g

初期時刻 t_0 と初期軌道要素 $\begin{bmatrix} r_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$ によって時刻 t までの軌道生成をする関数 g を以下のように定める。

$$g; (t; t_0, \begin{bmatrix} r_0 \\ v_0 \end{bmatrix}) \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

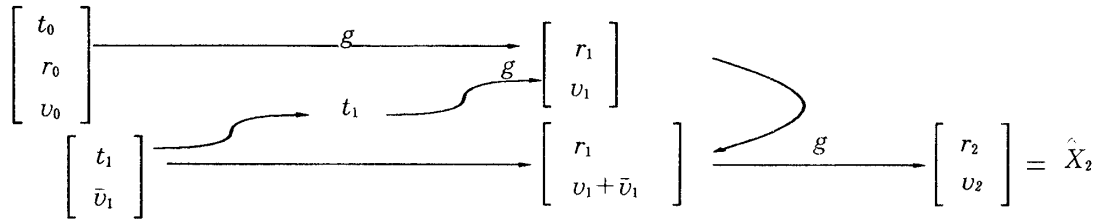


図9 マヌーバを含む軌道計算処理手順

関数 g を用いて \hat{X}_2 は以下のように表される.

$$\hat{X}_2 = g; (t_2; t_1, \begin{bmatrix} r_1 \\ v_1 + \bar{v}_1 \end{bmatrix})$$

$$v_1 = \bar{v}_1(r_1, v_1, p)$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1 + v_1$$

パラメータ感度 マヌーバベクトル作成に関するパラメータによる偏微分

パラメータ変分 Δp による影響はノミナルのマヌーバを含む初期速度に対する変分量 $\Delta \bar{v}_1$ と解釈できる. また初期速度の変分量はパラメータ変分量に対して以下の関係にある.

$$\Delta \bar{v}_1 = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial p} \Delta p$$

時間感度 マヌーバベクトル開始時刻 t_1 による偏微分

マヌーバベクトル開始時刻 t_1 による偏微分は

$$\tilde{X}(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ v(t) + \bar{v}(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{X}_2}{\partial t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{g(t_2; t, \tilde{X}(t))|_{t=t_1+\Delta t} - g(t_2; t, \tilde{X}(t))|_{t=t_1}\}$$

と表される. これを以下の2項に分けてそれぞれをノミナルのマヌーバを含む初期速度に対する変分量 $\Delta \bar{v}_1$ として表し時間感度を求める.

$$\frac{\partial \hat{X}_2}{\partial t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{g(t_2; t, \tilde{X}(t))|_{t=t_1+\Delta t} - g(t_2; t_1, \tilde{X}(t_1+\Delta t))$$

$$+ g(t_2; t_1, \tilde{X}(t_1+\Delta t)) - g(t_2; t, \tilde{X}(t))|_{t=t_1}\}$$

以上の式を元に t_1 及び \bar{v}_1 を構成するパラメータ p に関する感度は以下ようになる.

$$\frac{\partial \hat{X}_2}{\partial p} = \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial \hat{X}_1} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \frac{\bar{v}_1}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \hat{X}_2}{\partial t_1} = \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial \hat{X}_1} \begin{bmatrix} -\bar{v}_1 \\ \dot{\bar{v}}_1 \end{bmatrix}$$

6.2.1 マヌーバ型別感度式

前節より軌道制御による感度行列を計算するには各タイプ別に $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial p}$, $\dot{\bar{v}}_1$ を作成すれば良い。

タイプ1 カルテジアンタイプ

カルテジアンタイプではマヌーバベクトルが直接パラメータになるので各感度項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial p} &= I \\ \dot{\bar{v}}_1 &= 0 \\ I &= \text{単位行列} \end{aligned}$$

タイプ2 ($v \ \gamma \ \delta$) タンプ

($v \ \gamma \ \delta$) タイプではマヌーバパラメータ v, γ, δ に対してマヌーバベクトルは

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= v \cos \gamma e_u + (v \sin \gamma \cos \delta) e_y + (v \sin \gamma \sin \delta) e_w \\ e_u &= r_1 / \|r_1\| \\ e_y &= \frac{v_1 - \frac{(v_1, r_1)}{(r_1, r_1)} r_1}{\|v_1 - \frac{(v_1, r_1)}{(r_1, r_1)} r_1\|} \\ e_w &= \frac{r_1 \times v_1}{\|r_1 \times v_1\|} \end{aligned}$$

と表される。これより各感度項は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial p} &= [e_u \ e_y \ e_w] \begin{bmatrix} \cos \gamma & -v \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma \cos \delta & v \cos \gamma \cos \delta & -v \sin \gamma \sin \delta \\ \sin \gamma \sin \delta & v \cos \gamma \sin \delta & -v \sin \gamma \cos \delta \end{bmatrix} \\ \dot{\bar{v}}_1 &= v \cos \gamma \dot{e}_u + (v \sin \gamma \cos \delta) \dot{e}_y + (v \sin \gamma \sin \delta) \dot{e}_w \\ \dot{e}_u &= \frac{\dot{\alpha}}{r_1} \\ \dot{e}_y &= \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - \frac{(\alpha, \dot{\alpha})}{\alpha^3} \alpha \\ \dot{e}_w &= \frac{r_1 \times a_1}{|r_1 \times v_1|} - \frac{(r_1 \times v_1, r_1 \times a_1)}{|r_1 \times v_1|^3} r_1 \times v_1 \\ \alpha &= \bar{v}_1 - \frac{(r_1, v_1)}{r_1^2} r_1 \\ \dot{\alpha} &= a_1 - \left\{ \frac{v_1^2 + (r_1, a_1)}{r_1^2} - 2 \left(\frac{(r_1, v_1)}{r_1^2} \right)^2 \right\} r_1 - \frac{(r_1, v_1)}{r_1^2} v_1 \end{aligned}$$

タイプ3 タンジェンシャルタイプ

タンジェンシャルタイプではマヌーバパラメーター \bar{v} に対してマヌーバベクトルは

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

と表される。これより各感度項は以下のようなになる。

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}$$

$$\dot{\bar{v}}_1 = \bar{v} \left(\frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{v}_1|} - \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1)}{|\mathbf{v}_1|^3} \mathbf{v}_1 \right)$$

7. 二体問題における感度行列

前章までに主として特別摂動法を用いた場合、つまり直交座標系においてニュートン方程式を数値積分した場合における感度行列に関して詳細に記した。

本章では純粋に二体問題に限定した場合、つまりケプラーの法則が成立する場合における感度行列について論ずることとする。これはいわゆる一般摂動法の分野であるが実際には重力は中心力だけであって、他の摂動は一切含んでいない。

このケースも前章までにある程度は言及されているが、制御感度をみる場合には二体問題、つまりケプラー要素あるいはそれからもたらされるパラメータについて制御感度を求める方が直感的に分かりやすい。事実、宇宙研においても、少なくとも計画段階においては二体問題によって大体の制御感度、あるいは制御量を算出して制御計画を立て、後にこれを特別動法による厳密な計算プログラムによって、この値を検証するのが通例である。

この観点から本章では二体問題において月のスウィングバイ等で重要な役割を果たす双曲線軌道に対する感度行列、及び通常の地球周回衛星に対応する楕円軌道に関する純粋に解析的な感度行列をそれぞれ導入し、されにこの両者を結合する単純な Patched Conic 法についても簡単に述べることとする。また簡単のため制御量もすべて軌道面内にある2次元(平面)問題に限定する事とする。

ケプラー要素の記号等は前章までの記号と多少異なるが以下本章で用いられる記号については独立に定義するものとする。

7.1 Patched Conic 法を適用した軌道設計

月の SOI (Sphere of Influence) に投入時の双曲線軌道から考え、時刻 $t=0$ における地心から月を結ぶ方向を x 軸とし、白道面上で x 軸と直交する方向を y 軸として、以下の議論は白道面を用いて軌道面もこれと一致させる。

入力値として

- $a_0; e_0; \omega_0$: 双曲線軌道の初期値 (月中心)
- t_0 : 地球脱出後、月の SOI に到着する時間
- t_f : SOI 脱出点から目標地点までの飛翔時間

とする。

7.1.1 SOI点での軌道

SOIに入る点における衛星の位置と月からの衛星までの距離を r_0 とすると、近月点方向からの真近角 θ_0 に対して

$$\tanh \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{e_0-1}{e_0+1}} \tan \frac{\theta_0}{2} \quad (26)$$

$$r_0 = a_0(1 - e_0 \cosh E_0) \quad (27)$$

この時の速度 V_0 は、

$$V_0 = \sqrt{\mu_M \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_0} \right)} \quad (\mu_M: \text{月の重力定数}) \quad (28)$$

軌道飛翔角の補角は、

$$\cos \gamma_0 = \frac{e_0}{V_0} \sqrt{\frac{\mu_M}{a_0(1-e_0)^2}} \sin \theta_0 \quad (29)$$

となる。

7.1.2 軌道制御後の双曲線軌道

衛星は月をスイングバイする軌道に投入される。 V_c を速度制御量とし γ_c を補角とすると衛星の速度は、

$$V_H = (V_0^2 + V_c^2 + 2V_0V_c \cos(\gamma_0 - \gamma_c))^{1/2} \quad (30)$$

$$\cos \gamma_H = \frac{1}{V_H} (V_0 + V_c \cos \gamma_c) \quad (31)$$

双曲線軌道要素は、

$$a_H = \frac{\mu_M r_0}{2\mu_M - r_0 V_H^2} \quad (32)$$

$$e_H = \left[1 - \frac{(r_0 V_H \sin \gamma_H)}{\mu_M a_H} \right]^{1/2} \quad (33)$$

$$\tan \theta_H = \frac{\sin 2\gamma_H}{\cos 2\gamma_H + \frac{r_0}{2a_H - r_0}} \quad (34)$$

$$\omega_H = \lambda_0 - \theta_H \quad (\lambda_0: \text{初期軌道の黄経}) \quad (35)$$

というケプラー要素となる。

SOIと双曲線軌道と交点における離近点角を E_H とすれば、

$$\tanh \frac{E_H}{2} = \sqrt{\frac{e_H-1}{e_H+1}} \tan \frac{\theta_H}{2} \quad (36)$$

となり、SOIから近月点までの飛翔時間は

$$\tau = -\sqrt{\frac{-a_H^3}{\mu_M}} (e_H \sinh E_H - E_H) \quad (37)$$

で求められる。そこで遠地点（添字 a ）、近地点（添字 P ）における距離及び速度は、

$$\begin{aligned} H_{aH} &= a_H(1+e_H), & H_{pH} &= a_H(1-e_H) \\ V_{aH} &= \sqrt{\frac{\mu_M}{a_H} \frac{1-e_H}{1+e_H}}, & V_{pH} &= \sqrt{\frac{\mu_M}{a_H} \frac{1+e_H}{1-e_H}} \end{aligned} \quad (38)$$

となる。双曲線脱出時の時間を t_1 とすると

$$t_1 = t_0 + 2\tau \quad (39)$$

となる。

$$e_H \sinh E_{H_1} - E_{H_1} = \sqrt{-\frac{\mu_M}{a_H^3}} \tau \quad (40)$$

から離心点角 E_{H_1} を求め、その時の真近点角は

$$\tan \frac{\theta_{H_1}}{2} = \sqrt{\frac{e_H+1}{e_H-1}} \tanh \frac{E_{H_1}}{2} \quad (41)$$

となり、月から衛星までの距離及び黄経は

$$r_{H_1} = a_H(1 - e_H \cosh E_{H_1}) \quad (42)$$

$$\lambda_{H_1} = \theta_{H_1} + \omega_H \quad (43)$$

この時の衛星の速度及び軌道飛翔角の補角は、

$$V_{H_1} = \left[\frac{\mu_M(1 + 2e_H \cos \theta_{H_1} + e_H^2)}{a_H(1 - e_H^2)} \right]^{1/2} \quad (44)$$

$$\cos \gamma_{H_1} = \frac{e_H}{V_{H_1}} \sqrt{\frac{\mu_M}{a_H(1 - e_H^2)}} \sin \theta_{H_1} \quad (45)$$

となる。

7.1.3 大楕円軌道

月の軌道はJPLのエフェメリスデータのケプラーリアン要素を用い、地心から月までの長半径 a_M を黄経 λ_{M_1} 、月の速度 V_M 、入射角 δ_{M_1} を用いる（図10参照）。

地心から衛星までの距離 r_1 は、

$$\eta_{H_1} = \lambda_{H_1} - \lambda_{M_1} \quad (46)$$

$$r_1 = (a_M^2 + r_{H_1}^2 + 2a_M r_{H_1} \cos \eta_{H_1})^{1/2} \quad (47)$$

となり、地球と月を結ぶ方向からの角度を α_{H_1} とすると地心座標系における脱出速度 V_1 、その時の軌道飛翔角の補角 γ_1 は、

$$V_1 = (V_M^2 + V_{H_1}^2 + 2V_M V_{H_1} \cos(\delta_{M_1} - (\lambda_{H_1} + \gamma_{H_1})))^{1/2} \quad (48)$$

$$\alpha_{H_1} = \eta_{M_1} + \gamma_{H_1} \quad (49)$$

$$\cos \gamma_1^* = \frac{V_M \cos(\delta_{M_1} - \lambda_{M_1}) + V_{H_1} \cos \alpha_{H_1}}{V_1} \quad (50)$$

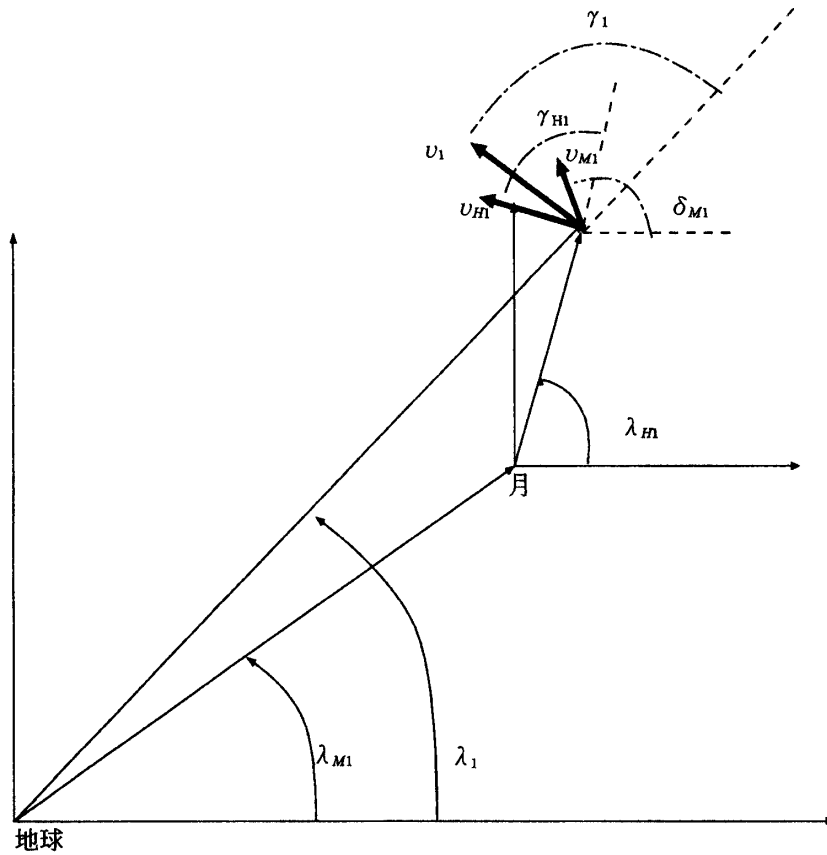


図10 大楕円軌道

$$\tan \chi = \frac{r_{H1} \sin \eta_{H1}}{a_M + r_{H1} \cos \eta_{H1}} \quad (51)$$

$$\gamma_1 = \gamma_1^* - \chi \quad (52)$$

以上より、大楕円軌道要素は、

$$a_1 = \frac{r_1 \mu_E}{2 \mu_E - r_1 V_1^2} \quad (\mu_E: \text{地球の重力定数}) \quad (53)$$

$$e_1 = \left[1 - \frac{(r_1 V_1 \sin \gamma_1)^2}{\mu_E a_1} \right]^{1/2} \quad (54)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin 2 \gamma_1}{-\left[\cos 2 \gamma_1 + \frac{r_1}{2 a_1 - r_1} \right]} \quad (55)$$

$$\tan \lambda_1 = \frac{a_M \sin \lambda_{M1} + r_{M1} \sin \lambda_{H1}}{a_M \cos \lambda_{M1} + r_{M1} \cos \lambda_{H1}} \quad (56)$$

$$\omega_1 = \lambda_1 - \theta_1 \quad (57)$$

というケプラー要素となる。また遠地点（添字 a ）、近地点（添字 P ）に対する距離及び速度は、

$$\begin{aligned} H_a &= a_1(1+e_1), & H_p &= a_1(1-e_1) \\ V_a &= \sqrt{\frac{\mu_E}{a_1} \frac{1-e_1}{1+e_1}}, & V_p &= \sqrt{\frac{\mu_E}{a_1} \frac{1+e_1}{1-e_1}} \end{aligned} \quad (58)$$

となり、大楕円軌道の周期は、

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_E}} \quad (59)$$

となる。

7.1.4 目標値の軌道要素

大楕円軌道に投入し、ある時刻 t_f だけ巡航させた時は 7.1.3 より得た真近点離角 θ_1 と離心率 e_1 を用いて

$$\tan \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} \tan \frac{\theta_1}{2} \quad (60)$$

$$t_{10} = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_E}} (E_1 - e_1 \sin E_1) \quad (61)$$

$$t_{20} = t_{10} + t_f \quad (62)$$

$$E_2 - e_1 \sin E_2 = \sqrt{\frac{\mu_E}{a_1^3}} t_{20} \quad (63)$$

位置について

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a_1(1 - e_1 \cos E_2) \\ \hat{\theta}_2 &= \theta_2 + \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{極座標} \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_2 \cos \hat{\theta}_2 \\ y_2 &= r_2 \sin \hat{\theta}_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{直行座標 (白道面)} \quad (65)$$

速度について

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu_E}{a_1} \left(\frac{1 + 2e_1 \cos \theta_2 + e_1^2}{1 - e_1^2} \right)^{1/2}} \quad (66)$$

飛翔角の補角は

$$\cos \gamma_2 = \frac{e_2}{V_2} \sqrt{\frac{\mu_E}{a_1(1-e_1^2)}} \sin \theta_2 \quad (67)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= V_2 \cos(\hat{\theta}_2 + \gamma_2) \\ \dot{y}_2 &= V_2 \sin(\hat{\theta}_2 + \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad \text{直行座標 (白道面)} \quad (68)$$

として表示される。

7.2 双曲線軌道に関する感度行列

7.2.1 制御量に対する衛星の速度感度

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \frac{\partial(r_0, \lambda_0, V_H, \gamma_H)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial V_H}{\partial V_c} & \frac{\partial V_H}{\partial \gamma_c} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \gamma_H}{\partial V_c} & \frac{\partial \gamma_H}{\partial \gamma_c} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\frac{\partial V_H}{\partial V_c} = \frac{1}{V_H} (V_c + V_0 \cos(\gamma_0 - \gamma_c)) \quad (70)$$

$$\frac{\partial V_H}{\partial \gamma_c} = \frac{V_0 V_c}{V_H} \sin(\gamma_0 - \gamma_c) \quad (71)$$

$$\frac{\partial \gamma_H}{\partial V_c} = -\frac{1}{V_H \sin \gamma_H} \left[\cos \gamma_c - \cos \gamma_H \cdot \frac{\partial V_H}{\partial V_c} \right] \quad (72)$$

$$\frac{\partial \gamma_H}{\partial \gamma_c} = \frac{1}{V_H \sin \gamma_H} \left[V_c \sin \gamma_c + \cos \gamma_H \cdot \frac{\partial V_H}{\partial \gamma_c} \right] \quad (73)$$

7.2.2 衛星の制御後の速度に対するケプラーリアン軌道要素感度

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \frac{\partial(a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_H, \gamma_H)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_H}{\partial r_0} & 0 & \frac{\partial a_H}{\partial V_H} & 0 \\ \frac{\partial e_H}{\partial r_0} & 0 & \frac{\partial e_H}{\partial V_H} & \frac{\partial \theta_H}{\partial \gamma_H} \\ \frac{\partial \omega_H}{\partial r_0} & 1 & \frac{\partial \omega_H}{\partial V_H} & \frac{\partial \omega_H}{\partial \gamma_H} \\ \frac{\partial \theta_H}{\partial r_0} & 0 & \frac{\partial \theta_H}{\partial V_H} & \frac{\partial \theta_H}{\partial \gamma_H} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{\partial a_H}{\partial r_0} = \frac{2a_H^2}{r_0^2}, \quad \frac{\partial a_H}{\partial V_H} = \frac{2a_H^2 V_H}{\mu_M} \quad (75)$$

$$\frac{\partial e_H}{\partial \gamma_0} = \frac{V_H^2 \sin^2 \gamma_H}{\mu_M a_H e_H} (a_H - r_0) \quad (76)$$

$$\frac{\partial e_H}{\partial V_H} = -\frac{V_H^2 r_0^2 \sin^2 \gamma_H}{2a_H e_H \mu_M} \left(2 - \frac{V_H}{a_H} \cdot \frac{\partial a_H}{\partial V_H} \right) \quad (77)$$

$$\frac{\partial e_H}{\partial \gamma_H} = -\frac{V_H^2 r_0^2}{2a_H e_H \mu_M} \sin 2\gamma_H \quad (78)$$

$$\frac{\partial \omega_H}{\partial r_0} = -\frac{2 \sin^2 \theta_H}{\sin 2\gamma_H} \frac{a_H \left(1 - \frac{2a_H}{r_0}\right)}{2(a_H - r_0)^2} \quad (79)$$

$$\frac{\partial \omega_H}{\partial V_0} = \frac{2 \sin^2 \theta_H}{\sin 2\gamma_H} \cdot \frac{r_0}{2a_H - r_0} \cdot \frac{\partial a_H}{\partial V_H} \quad (80)$$

$$\frac{\partial \omega_H}{\partial \gamma_H} = 2 \left(\frac{\sin \theta_H}{\sin 2\gamma_H} \right)^2 \left(1 + \frac{r_0}{2a_H - r_0} \cos 2\gamma_H \right) \quad (81)$$

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial r_0} = \frac{\sin^2 \theta_H}{\sin 2\gamma_H} \cdot \frac{2a_H}{(2a_H - r_0)^2} \left(1 - \frac{2a_H}{r_0} \right) \quad (82)$$

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial V_H} = -\frac{\partial \omega_H}{\partial V_H}, \quad \frac{\partial \theta_H}{\partial \gamma_H} = -\frac{\omega_H}{\partial \gamma_H} \quad (83)$$

• ケプラー要素に対する遠地点、近地点の距離及び速度感度

$$\mathbf{G}_{MH} = \frac{\partial (H_{aH}, H_{pH}, V_{aH}, V_{pH})}{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{aH}}{\partial a_H} & \frac{\partial H_{aH}}{\partial e_H} & 0 & 0 \\ \frac{\partial H_{pH}}{\partial a_H} & \frac{\partial H_{pH}}{\partial e_H} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_{aH}}{\partial a_H} & \frac{\partial V_{aH}}{\partial e_H} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_{pH}}{\partial a_H} & \frac{\partial V_{pH}}{\partial e_H} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \quad (84)$$

$$\frac{\partial H_{aH}}{\partial a_H} = 1 + e_H, \quad \frac{\partial H_{aH}}{\partial e_H} = a_H \quad (85)$$

$$\frac{\partial H_{pH}}{\partial a_H} = 1 - e_H, \quad \frac{\partial H_{pH}}{\partial e_H} = -a_H \quad (86)$$

$$\frac{\partial V_{aH}}{\partial a_H} = -\frac{V_{aH}}{2a_H}, \quad \frac{\partial V_{aH}}{\partial e_H} = \frac{V_{aH}}{1 - e_H^2} \quad (87)$$

$$\frac{\partial V_{pH}}{\partial a_H} = -\frac{V_{pH}}{2a_H}, \quad \frac{\partial V_{pH}}{\partial e_H} = \frac{V_{pH}}{1 - e_H^2} \quad (88)$$

7.2.3 ケプラー要素に対する極座標の位置速度感度

$$\mathbf{G}_x = \frac{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})}{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{H_1}}{\partial a_{H_1}} & \frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial e_H} & 0 & \frac{\partial r_{H_1}}{\partial e_H} \\ \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial a_{H_1}} & \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} & 1 & \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} \\ \frac{\partial V_{H_1}}{\partial a_H} & \frac{\partial V_{H_1}}{\partial e_H} & 0 & \frac{\partial V_{H_1}}{\partial \theta_H} \\ \frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial a_H} & \frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial e_H} & 0 & \frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial \theta_H} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \quad (89)$$

最初に

$$\frac{\partial E_{H_1}}{\partial a_H} = \frac{3\tau}{2(e_H \cosh E_{H_1} - 1)} \sqrt{\frac{\mu_M}{-a_H^5}} \quad (90)$$

$$\frac{\partial E_{H_1}}{\partial e_H} = \frac{\sinh E_H}{e_H^5 - 1} \quad (91)$$

$$\frac{\partial E_{H_1}}{\partial \theta_H} = \frac{1}{e_H \cosh E_{H_1} - 1} \sqrt{\frac{\mu_M}{-a_H^3}} \frac{\partial \tau}{\partial \theta_H} \quad (92)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta_H} = -\sqrt{\frac{-a_H^3}{\mu_M}} (e_H \cosh E_H - 1) \frac{\partial E_H}{\partial \theta_H} \quad (93)$$

$$\frac{\partial E_H}{\partial \theta_H} = \frac{\cosh^2\left(\frac{E_H}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_H}{2}\right)} \sqrt{\frac{e_H - 1}{e_H + 1}} \quad (94)$$

とする.

$$\frac{\partial r_{H_1}}{\partial a_H} = 1 - e_H \cosh E_{H_1} - a_H e_H \sinh E_{H_1} \cdot \frac{\partial E_{H_1}}{\partial a_H} \quad (95)$$

$$\frac{\partial r_{H_1}}{\partial a_H} = 1 - e_H \cosh E_H - a_H e_H \sinh E_H \cdot \frac{\partial E_{H_1}}{\partial a_H} \quad (96)$$

$$\frac{\partial r_{H_1}}{\partial a_H} = -a_H e_H \sinh E_{H_1} \cdot \frac{\partial E_{H_1}}{\partial a_H} \quad (97)$$

$$\frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial a_H} = \sqrt{\frac{e_H + 1}{e_H - 1}} \frac{\cos^2\left(\frac{\theta_H}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{E_{H_1}}{2}\right)} \cdot \frac{\partial E_{H_1}}{\partial a_H} \quad (98)$$

$$\frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} = -\frac{\sin \theta_H}{e_H^2 - 1} + \frac{\cos^2\left(\frac{\theta_H}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{E_{H_1}}{2}\right)} \cdot \frac{\partial E_{H_1}}{\partial e_H} \quad (99)$$

$$\frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial \theta_H} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta_H}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{E_{H_1}}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{e_H+1}{e_H-1}} \frac{\partial E_{H_1}}{\partial \theta_H} \quad (100)$$

$$\frac{\partial V_{H_1}}{\partial a_H} = -\frac{V_H}{2a_H} - \frac{\mu_M e_H \sin \theta_H}{a_H V_{H_1} (1-e_H^2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial a_H} \quad (101)$$

$$\frac{\partial V_{H_1}}{\partial e_H} = \frac{\mu_M}{V_{H_1} a_H} \left[\frac{2e_H + (1+e_H^2)\cos \theta_H}{(1-e_H^2)^2} - \frac{e_H \sin \theta_H}{1-e_H^2} \cdot \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} \right] \quad (102)$$

$$\frac{\partial V_{H_1}}{\partial \theta_H} = -\frac{1}{V_{H_1}} \frac{\mu_M e_H \sin \theta_H}{a_H (1-e_H^2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial \theta_H} \quad (103)$$

$$\frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial a_H} = \frac{1}{V_{H_1}} \cot \gamma_{H_1} \cdot \frac{\partial V_{H_1}}{\partial a_H} + \frac{1}{2a_H} \cot \gamma_{H_1} - \cot \theta_H \cot \gamma_{H_1} \cdot \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} \quad (104)$$

$$\frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial e_H} = \frac{1}{V_{H_1}} \cot \gamma_{H_1} \cdot \frac{\partial V_{H_1}}{\partial e_H} - \frac{1}{e_H(1-e_H^2)} \cot \gamma_{H_1} - \cot \theta_H \cdot \cot \gamma_{H_1} \cdot \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} \quad (105)$$

$$\frac{\partial \gamma_{H_1}}{\partial e_H} = -\cot \gamma_H \cot \theta_H \frac{\partial \lambda_{H_1}}{\partial e_H} + \frac{1}{V_{H_1}} \cot \gamma_{H_1} \frac{\partial V_{H_1}}{\partial e_H} \quad (106)$$

7.2.4 白道面の極座標に対する地心赤道面の極座標感度

$$H_x = \frac{\partial(r_1, \lambda_1, V_1, \gamma_1)}{\partial(r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})} \quad (107)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial r_{H_1}} & \frac{\partial r_1}{\partial \lambda_{H_1}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial r_{H_1}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_{H_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial V_1}{\partial \lambda_{H_1}} & \frac{\partial V_1}{\partial V_{H_1}} & \frac{\partial V_1}{\partial \gamma_{H_1}} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial r_{H_1}} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \lambda_{H_1}} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial V_{H_1}} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma_{H_1}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r_{H_1}} = \frac{1}{\gamma_1} (\gamma_{M_1} + a_M \cos \eta_{H_1}) \quad (108)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \lambda_{H_1}} = -\frac{1}{r_1} a_M r_{M_1} \sin \delta_{H_1} \quad (109)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial r_{H_1}} = \frac{r_{H_1}}{r_1^2} \sin \eta_{H_1} \quad (110)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_{H_1}} = \frac{r_{H_1}}{r_1^2} (r_{H_1} + a_{M_1} \cos \eta_{H_1}) \quad (111)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda_{H_1}} = \frac{V_M V_{H_1}}{V_1} \sin(\delta_{M_1} - (\lambda_{H_1} + \gamma_{M_1})) \quad (112)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda_{H_1}} = \frac{1}{V_1} [V_{M_1} + V_M \cos(\delta_{M_1} - (\lambda_{M_1} + \gamma_{H_1}))] \quad (113)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \gamma_{H_1}} = \frac{\partial V_1}{\partial \lambda_{H_1}} \quad (114)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial r_{H_1}} = -\frac{a_M}{r_1^2} \sin \eta_{H_1} \quad (115)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma_{H_1}} = \frac{1}{V_1 \sin \gamma_1^*} \left(V_{M_1} \sin \alpha_{H_1} + \cos \gamma_1^* \frac{\partial V_1}{\partial \lambda_{H_1}} \right) - \frac{r_{M_1}}{r_1^2} (r_{M_1} + a_M \cos \eta_{H_1}) \quad (116)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma_{H_1}} = -\frac{1}{V_1 \sin \gamma_1^*} \left(\cos \alpha_{M_1} - \cos \gamma_1^* \frac{\partial V_1}{\partial \lambda_{H_1}} \right) \quad (117)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma_{H_1}} = \frac{1}{V_1 \sin \gamma_1^*} \left(V_{M_1} \sin \alpha_{M_1} + \cos \gamma_1^* \frac{\partial V_1}{\partial \gamma_{M_1}} \right) \quad (118)$$

7.2.5 制御量に対するケプラーリアン要素感度

制御量に対するケプラーリアン要素感度 (式(75)×式(70))

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x \cdot \mathbf{E}_x &= \frac{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_H, \gamma_H)} \cdot \frac{\partial (r_0, \lambda_0, V_H, \gamma_H)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \\ &= \frac{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \quad (4 \times 4) \end{aligned} \quad (119)$$

7.2.6 制御後の衛星の速度に対する双曲線軌道脱出時の極座標感度

制御後の衛星の速度に対する双曲線軌道脱出時の極座標感度 (式(90)×式(75))

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_x \cdot \mathbf{F}_x &= \frac{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})}{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)} \cdot \frac{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_H, \gamma_H)} \quad (4 \times 4) \\ &= \frac{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})}{\partial (r_0, \lambda_0, V_H, \gamma_H)} \end{aligned} \quad (120)$$

以上の結果から制御量に対する感度行列を整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xh} &= \mathbf{G}_{MH} \cdot \mathbf{F}_x \cdot \mathbf{E}_x \\ &= \frac{\partial (H_{aH}, H_{pH}, V_{aH}, V_{pH})}{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)} \cdot \frac{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \quad (4 \times 4) \\ &= \frac{\partial (H_{aH}, H_{pH}, V_{aH}, V_{pH})}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned}
S_{x_1} &= G_x \cdot F_x \cdot E_x \\
&= \frac{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})}{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)} \cdot \frac{\partial (a_H, e_H, \omega_H, \theta_H)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \\
&= \frac{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \quad (4 \times 4)
\end{aligned} \tag{122}$$

$$\begin{aligned}
S_x &= H_x \cdot S_{x_1} \\
&= \frac{\partial (r_1, \lambda_1, V_1, \gamma_1)}{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})} \cdot \frac{\partial (r_{H_1}, \lambda_{H_1}, V_{H_1}, \gamma_{H_1})}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \\
&= \frac{\partial (r_1, \lambda_1, V_1, \gamma_1)}{\partial (r_0, \lambda_0, V_C, \gamma_C)} \quad (4 \times 4)
\end{aligned} \tag{123}$$

という3式の感度行列となる。

制御ベクトル

$$\Delta V_C = [\Delta r_0, \Delta \lambda_0, \Delta V_C, \Delta \gamma_C]^T \tag{124}$$

を与えることで、 S_{xH} , S_{x_1} , S_x の各々の感度が算出される。

7.3 大楕円軌道に関する感度行列

7.3.1 衛星の極座標に対するケプラリアン要素

$$F = \frac{\partial (a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)}{\partial (r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \quad (4 \times 4) \tag{125}$$

で各要素は式(31)に対して

$$\begin{aligned}
a_H &\rightarrow a_1, & V_H &\rightarrow V_1, & \mu_M &\rightarrow \mu_E \\
\gamma_H &\rightarrow \gamma_1, & \omega_M &\rightarrow \omega_1
\end{aligned}$$

に変えた式となる。

7.3.2 ケプラリアン要素に対する目標値の極座標

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\partial (r_1, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_1)}{\partial (a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial e_1} & 0 & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial e_1} & 1 & \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial a_1} & \frac{\partial V_2}{\partial e_1} & 0 & \frac{\partial V_2}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial e_1} & 0 & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_1} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4)
\end{aligned} \tag{126}$$

最初に

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_1} = -\frac{3 \cdot t_f}{2(1 - e_1 \cos E_2)} \sqrt{\frac{\mu_E}{a^5}} \tag{127}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial e_1} = \frac{1}{1 - e_1 \cos E_2} \left[\sin E_2 + \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \cdot \frac{\partial t_{10}}{\partial e_1} \right] \quad (128)$$

$$\frac{\partial t_{10}}{\partial e_1} = -\sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_E}} \left[\sin E_1 + \left(\frac{\sin \theta_1}{1 + e_1 \cos \theta_1} \right)^2 \frac{1 - e_1 \cos E_1}{\sin E_1} \right] \quad (129)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial \theta_1} = \sqrt{\frac{\mu_E}{a_1^3}} \frac{1}{1 - e_1 \cos E_2} \cdot \frac{\partial t_{10}}{\partial \theta_1} \quad (130)$$

$$\frac{\partial t_{10}}{\partial \theta_1} = \frac{(1 - e_1^2) \sin \theta_1}{1 + e_1 \cos \theta_1} \cdot \frac{1 - e_1 \cos E_1}{\sin E_1} \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_E}} \quad (131)$$

とする。これらを用いれば

$$\frac{\partial r_2}{\partial a_1} = 1 - e_1 \cos E_2 + a_1 e_1 \sin E_2 \cdot \frac{\partial E_2}{\partial a_1} \quad (132)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial e_1} = -a_1 \cos E_2 + a_1 e_1 \sin E_2 \cdot \frac{\partial E_2}{\partial e_1} \quad (133)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} = a_1 e_1 \sin E_2 \cdot \frac{\partial E_2}{\partial \theta_1} \quad (134)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial a_1} = -\frac{1 - e_1^2}{r_2^2 e_1^2 \sin \hat{\theta}_2} \cdot \left(r_2 - a_1 \frac{\partial r_2}{\partial a_1} \right) \quad (135)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial e_1} = \frac{1}{r_2^2 e_1^2 \sin \hat{\theta}_2} \cdot \left[r_2 (a_1 (1 + e_1^2) - r_2) + a_1 e_1 (1 - e_1^2) \cdot \frac{\partial r_2}{\partial e_1} \right] \quad (136)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \theta_1} = \frac{a_1 (1 - e_1^2)}{r_2^2 e_1 \sin \hat{\theta}_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} \quad (137)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a_1} = -\frac{V_2}{2a_1} - \frac{\mu_E e_1 \sin \hat{\theta}_2}{a_1 V_2 (1 - e_1^2)} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial a_1} \quad (138)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial e_1} = \frac{\mu_E}{V_1 a_1} \left[\frac{2e_1 + (1 + e_1^2) \cos \hat{\theta}_2}{(1 - e_1^2)^2} - \frac{e_1 \sin \hat{\theta}_2}{1 - e_1^2} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial e_1} \right] \quad (139)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{V_2} \cdot \frac{\mu_E e_1 \sin \hat{\theta}_2}{a_1 (1 - e_1^2)} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \theta_1} \quad (140)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial a_1} = \frac{1}{V_2} \cot \gamma_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_1} + \frac{1}{2a_1} \cot \gamma_2 - \cot \hat{\theta}_2 \cdot \cot \gamma_2 \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial a_1} \quad (141)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial e_1} = \frac{1}{V_2} \cot \gamma_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial e_1} - \frac{\cot \gamma_2}{e_1 (1 - e_1^2)} - \cot \hat{\theta}_2 \cdot \cot \gamma_2 \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial e_1} \quad (142)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_1} = -\cot \hat{\theta}_2 \cdot \cot \gamma_2 \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \theta_1} + \frac{\cot \gamma_2}{V_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial \theta_1} \quad (143)$$

7.3.3 目標値の極座標に対する軌道面上の直交座標感度

$$G_2 = \frac{\partial(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)}{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \hat{\theta}_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial y_2}{\partial r_2} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{\theta}_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \hat{\theta}_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial V_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \gamma_2} \\ 0 & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \hat{\theta}_2} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial V_2} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \quad (144)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial r_2} = \cos \hat{\theta}_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \hat{\theta}_2} = -r_2 \sin \hat{\theta}_2 \quad (145)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial r_2} = \sin \hat{\theta}_2, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \hat{\theta}_2} = r_2 \cos \hat{\theta}_2 \quad (146)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \hat{\theta}_2} = -V_2 \sin(\hat{\theta}_2 + \gamma_2) \quad (147)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial V_2} = \cos(\hat{\theta}_2 + \gamma_2), \quad \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \hat{\theta}_2} \quad (148)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \hat{\theta}_2} = V_2 \cos(\hat{\theta}_2 + \gamma_2) \quad (149)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial V_2} = \sin(\hat{\theta}_2 + \gamma_2), \quad \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \hat{\theta}_2} \quad (150)$$

7.3.4 ケプリアン要素に対する遠地点、近地点の距離及び速度と周期感度

$$G_H = \frac{\partial(H_a, H_p, V_a, V_p, \tau)}{\partial(a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)} \quad (4 \times 4) \quad (151)$$

となり、 4×4 行列においての各要素は式 (85) を $a_H \rightarrow a_1, e_H \rightarrow e_1, V_{aH} \rightarrow V_a, V_{pH} \rightarrow V_p$ に変えた式となり、5 行目に

$$\left[\frac{\partial T}{\partial a_1}, 0 \ 0 \ 0 \right], \quad \frac{\partial T}{\partial a_1} = \frac{3T}{2a_1} \quad (152)$$

を追加した行列となる。

7.3.5 楕円軌道投入時の衛星の極座標に対する目標の極座標感度

楕円軌道投入時の衛星の極座標に対する目標の極座標感度 (式 (127) × 式 (126))

$$\begin{aligned}
G_1 \cdot F &= \frac{\partial(\gamma_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}{\partial(a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)} \cdot \frac{\partial(a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \\
&= \frac{\partial(\gamma_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \quad (4 \times 4) \quad (153)
\end{aligned}$$

7.3.6 楕円軌道投入時の衛星の極座標に対する目標値の白道面における直交座標感度

楕円軌道投入時の衛星の極座標に対する目標値の白道面における直交座標感度（式(145)×式(154)）

$$\begin{aligned}
G_2 \cdot G_1 \cdot F &= \frac{\partial(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)}{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)} \cdot \frac{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \\
&= \frac{\partial(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \quad (4 \times 4) \quad (154)
\end{aligned}$$

7.3.7 楕円軌道投入時の衛星の極座標に対する遠地点、近地点の距離及び速度と周期感度

楕円軌道投入時の衛星の極座標に対する遠地点、近地点の距離及び速度と周期感度（式(145)×式(126)）

$$\begin{aligned}
G_H \cdot F &= \frac{\partial(H_a, H_p, V_a, V_p, T)}{\partial(a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)} \cdot \frac{\partial(a_1, e_1, \omega_1, \theta_1)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \\
&= \frac{\partial(H_a, H_p, V_a, V_p, T)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \quad (4 \times 4) \quad (155)
\end{aligned}$$

以上の結果から双曲線軌道と大楕円軌道を結合させた場合の、制御量に対する最終感度行列は、

$$\begin{aligned}
S_{T_1} &= G_1 \cdot F \cdot S_x \\
&= \frac{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \cdot \frac{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \\
&= \frac{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \quad (4 \times 4) \quad (156)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_T &= G_2 \cdot S_{T_1} \\
&= \frac{\partial(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)}{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)} \cdot \frac{\partial(r_2, \hat{\theta}_2, V_2, \gamma_2)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \\
&= \frac{\partial(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \quad (4 \times 4) \quad (157)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{TH} &= G_H \cdot F \cdot S_x \\
&= \frac{\partial(H_a, H_p, V_a, V_p, T)}{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)} \cdot \frac{\partial(r_1, \theta_1, V_1, \gamma_1)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \\
&= \frac{\partial(H_a, H_p, V_a, V_p, T)}{\partial(r_0, \lambda_0, V_c, \gamma_c)} \quad (4 \times 4) \quad (158)
\end{aligned}$$

と表される。

制御ベクトル

$$\Delta V_c = [\Delta r_0, \Delta \lambda_0, \Delta V_c, \Delta \gamma_c]^T$$

を与えれば、 S_{T_1} , S_T , S_{TH} の最終感度が算出される。

8. プログラム仕様

本章では今まで述べてきたアルゴリズムに基づいて作成されたプログラム SAPM の機能、入出力に関して記述する。

8.1 機能概要

以下に本プログラムの機能と、制御条件を示す。

・機能

1. 初期時刻で与えられた衛星の軌道要素から出発して別に指定する開始時刻から終了時刻までの軌道生成、感度行列の計算を行う。

・制御条件

1. 上記3個の時刻は全て UTC 時刻を用いる。
2. 初期時刻での軌道要素は
 - (a) 地球中心・TOD-EQ
 - (b) 地球中心・TOD-EC
 のいずれかである。
3. 衛星の加速度として考慮可能なものは
 - －9 惑星，月，太陽の中心力（地球は常に考慮）
 - －地球の非球対称成分（zonal 項，10次まで）
 - －太陽輻射圧
 である。
4. 感度解析の開始時に軌道制御を加える場合制御時の座標系としては
 - (a) 地球中心・TOD-EQ
 - (b) 地球中心・TOD-EC
 のどちらかを選ぶことができ軌道制御タイプとして
 - (a) カルテシアン
 - (b) $(V_c, \gamma_c, \delta_c)$
 - (c) タンジェンシャル
 のいずれかを選ぶことができる。

8.2 処理概要

以下に本プログラムの計算処理フローを示す。

8.3 入力仕様

入力は実行制御データと外部入力ファイルから構成される。外部入力ファイルとしては

- ・時系変換ファイル
- ・惑星エフェメリスファイル

が必要である。次に実行制御データについて記述する。

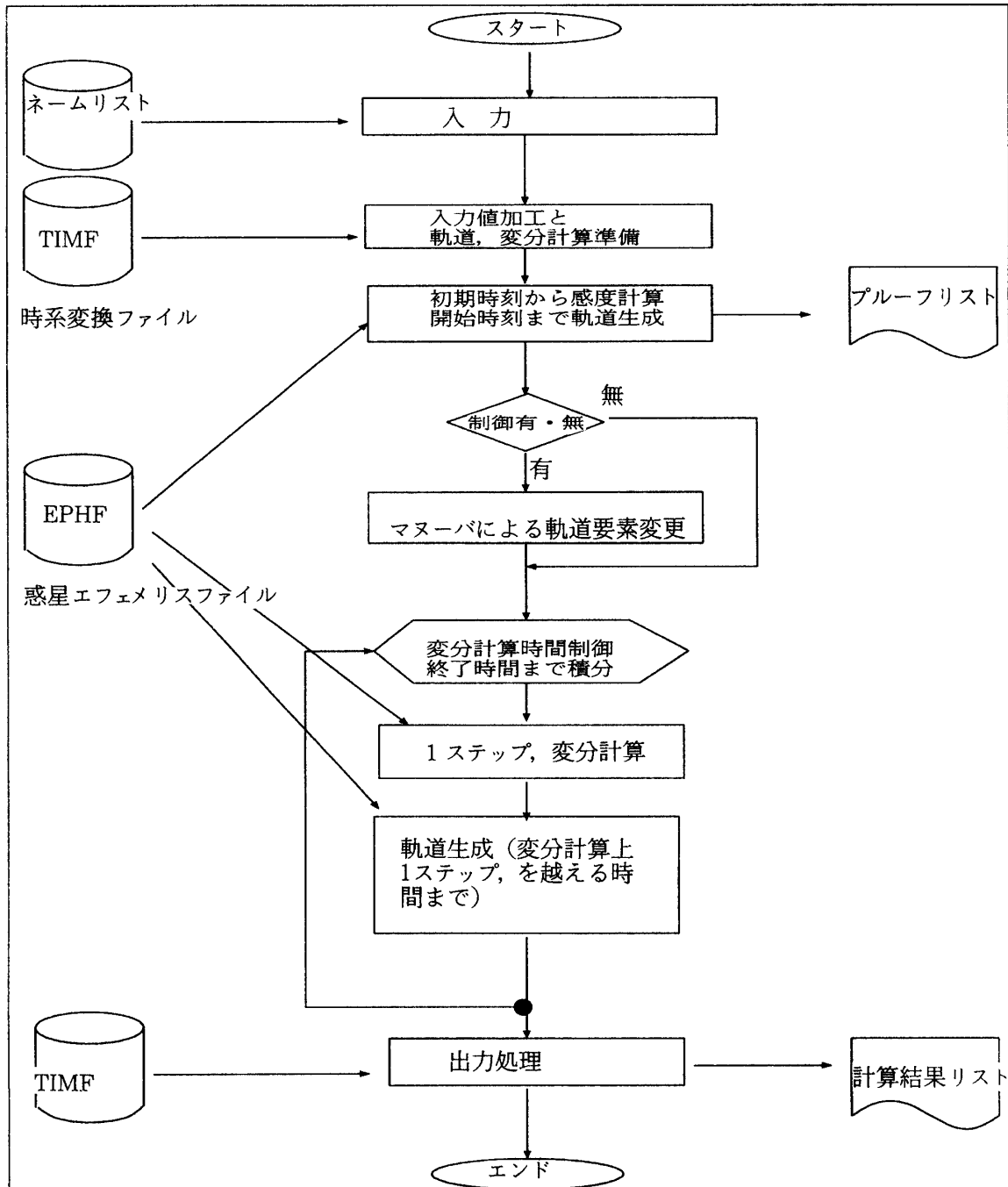


図 11 計算処理フロー

8.3.1 入力データ項目

実行時の制御データは以下のものから構成される。

- 衛星固有定数
 - 質量, 有効断面積, 太陽輻射反射係数
- 考慮加速度
 - −9 惑星, 月, 太陽の中心力 (地球は常に考慮)
 - −地球の非球対称成分 (Zonal 項, 10 次まで)
 - −太陽輻射圧
- 衛星初期情報
 - エポック時刻, カルテシアン要素 (TOD-EQ・TOD-EC) 地球中心
- 計算開始, 終了時刻, マヌーバ有, 無指示
 - マヌーバ有の場合
 - −マヌーバタイプ
 - −マヌーバ量指定 (TOD-EQ・TOD-EC)
- 軌道生成, 変分方程式の PC 積分のためのデータ
 - −積分時間幅
 - −局所誤差制御, 及び収束判定値
- TIMF・EPHF ファイル入力用機番番号

8.4 出力仕様

出力はリスト出力のみで構成される。

8.4.1 出力項目

以下に本プログラムで出力されるリスト項目を示す。

1. プルーフリスト
 - (a) 衛星固有定数
 - (b) 考慮加速度
 - (c) 衛星, 及び惑星の初期情報
 - i. 月軌道面の傾斜角, 昇交点経度
 - ii. 衛星要素 (カルテシアン, ケプレリアン, 極座標) (TOD-EQ・TOD-EC), (地球中心, 太陽中心), (月中心・白道面系)
 - iii. 使用惑星軌道要素 (太陽中心 TOD-EC) または (地球中心 TOD-EQ) または (地球中心 TOD-EC)
 - (d) 開始時刻でのマヌーバ情報, マヌーバ後の軌道要素
 - マヌーバ情報
 - i. マヌーバベクトルのカルテシアン, 極座標表現
 - ii. 地球中心, 太陽中心, 月中心
 - 軌道要素 (カルテシアン, ケプレリアン, 極座標) (TOD-EQ・TOD-EC), (地球中心, 太陽中心), (月中心・白道面系)
 - 使用惑星軌道要素 (太陽中心 TOD-EC) または (地球中心 TOD-EQ) または (地球中心 TOD-EC)

- (e) 終了時刻での軌道要素, 及び軌道感度
- i. 終了時刻
 - ii. TOD-EQ, TOD-EC, 白道面系の順で以下のものを出力する.
 - A. カルテシアン, ケプレリアン, 極座標の順で以下のものを出力する.
 - 衛星要素 (地球中心, 太陽中心)
 - マヌーバ後の軌道要素と終了時刻での軌道要素の間の感度
 - マヌーバと終了時刻での軌道要素の間の感度
 - iii. 使用惑星軌道要素 (太陽中心 TOD-EC) または (地球中心 TOC-EQ) または (地球中心 TOD-EC)

9. 実行例

一般に軌道制御という場合制御対象により以下のように分類される.

- (a) 面内制御方式
 - a, e, ω を制御する.
- (b) 面外制御方式
 - i, Ω を制御する. この時残りの軌道要素も同時に変化する.

軌道制御を設計するという事は, 制御方式に応じて目標軌道と現在の軌道状態から制御時刻, 制御量を決定することである.

一方, 月スウィング・バイを用いた軌道制御を考えた場合, 目標軌道を達成するための基本条件は, 現在の軌道状態, 月位置, 目標軌道状態となり, これより月への最接近時刻とその時の衛星の6要素が決定される. ここで最終的に設計される制御は現在の軌道状態から, 月への最接近時刻とその時の衛星6要素に移行するための制御時刻 (t_1), 制御量 (v_c) である (図12参照).

以上の状況を考える時, 月スウィング・バイを用いた軌道制御においては月による軌道修正量が大きく, また軌道制御誤差に対する感度も高くなる. そこで小楕円から大楕円, 及び小楕円から地球脱出軌道への移行をテーマにそれぞれの場合で, 月の有, 無による軌道移行量及び感度に関してSAPMを用いて解析した (図13参照).

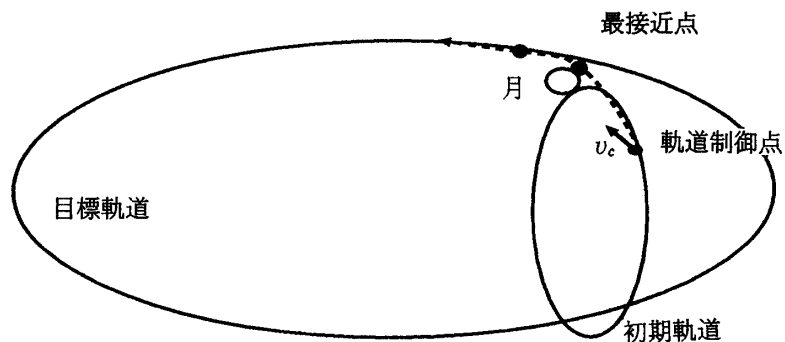


図12 月スウィング・バイを用いた軌道制御

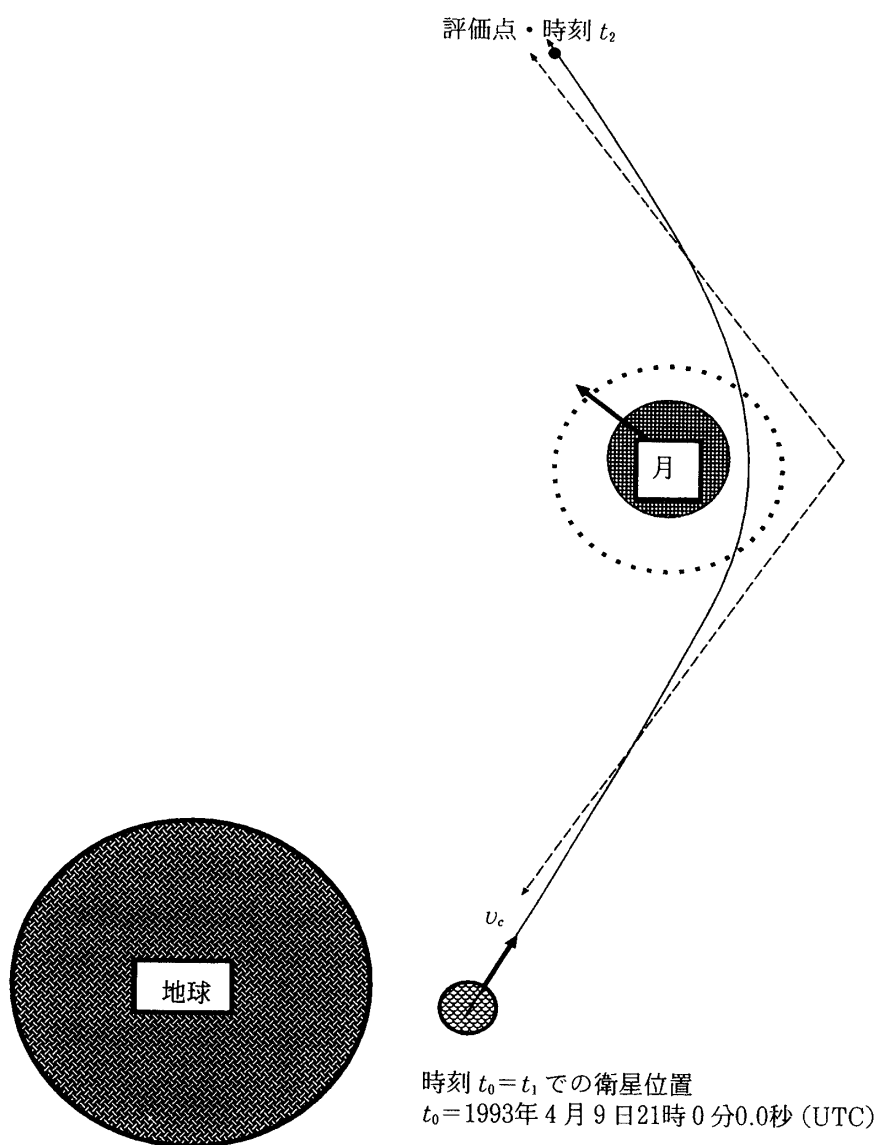


図13 SAPM を用いた解析ケース概要

SAPM を用いた解析

小楕円から大楕円及び小楕円から地球脱出軌道への移行

なお、解析にあたって衛星の初期軌道及び制御時刻は同一とし、それぞれ次頁の表の値を用いる。

衛星パラメータ	質量 143.25400 (KG)
加速度条件	考慮天体 水星 金星 地球 火星 木星 土星 月 太陽 地球偏平性 考慮する 太陽輻射圧 考慮しない
初期時刻	1993年 4月 9日 21時 0分 0.00000 秒 (UTC)
月軌道面	軌道面傾斜角 22.4908 (度) 昇交点経度 347.09893 (度)
軌道初期要素	地球中心、TOD-EQ系 カルテシアン ケプリアン 極座標 RX=-2.2655D+05(KM) a=2.8543D+05(KM) R=3.2599D+05(KM) RY=-2.1714D+05(KM) e=1.5926D-01(-) θ=2.2378D+02(度) RZ=-8.8281D+04(KM) i=2.0074D+01(度) φ=-1.5712D+01(度) VX=6.8170D-01(KM/S) Ω=3.5345D+02(度) V=1.0241D+00(KM/S) VY=-7.2713D-01(KM/S) ω=7.5051D+01(度) δ=3.4734D+02(度) VZ=-2.3558D-01(KM/S) f=1.5703D+02(度) γ=8.5835D+01(度) M=1.4905D+02(度)
軌道制御時刻	1993年 4月 9日 21時 0分 0.00000 秒 (UTC)
制御時刻での月位置	地球中心、TOD-EQ系 カルテシアン ケプリアン RX=-1.7332D+05(KM) a=3.8870D+05(KM) RY=-2.9955D+05(KM) e=7.7441D-02(-) RZ=-1.3693D+05(KM) i=2.2494D+01(度) VX=8.9685D-01(KM/S) Ω=3.4709D+02(度) VY=-5.4190D-01(KM/S) ω=1.9356D+02(度) VZ=-1.3581D-01(KM/S) f=6.0519D+01(度) M=5.3015D+01(度)

9.1 小楯円から地球脱出軌道

本ケースでは小楯円から地球脱出軌道に移行する際における実際に制御されたケプリアン要素の変化量，及びその変化量の軌道制御誤差に対する感度を月の影響のない場合と比較して検討する。

なお，月を用いて本制御を行うには衛星に速度方向（タンジェンシャル）の速度増分として330m/秒必要となる。

解析時の軌道制御データ設定を以下に示す。

軌道制御量	TOD-EQ (GEO-CENTRIC)			
	V_c (KM/S)	3.3000D-01	V_c^x (KM/S)	2.1965D-01
	γ_c (度)	8.5835D+01	V_c^y (KM/S)	-2.3428D-01
	δ_c (度)	1.4263D-15	V_c^z (KM/S)	-7.5907D-02
	LOP (LUNI-CENTRIC)			
	V_c (KM/S)	3.3000D-01	V_c^x (KM/S)	2.6641D-01
	γ_c (度)	1.6374D+02	V_c^y (KM/S)	-1.9472D-01
	δ_c (度)	1.4279D+02	V_c^z (KM/S)	-1.5219D-03
	目標時刻	1993年 4月 15日 3時 3分 24.50000 秒 (UTC)		

上記制御を踏まえて月最接近近傍での衛星状況、及び評価地点での制御量、感度に関して以下に述べる。

評価1 月最接近近傍での衛星状況

月最接近近傍での衛星状況を以下の表にまとめる。

月・衛星間距離	1.65734D+04
軌道初期要素	LOP (LUNI-CENTRIC) ケプレリアン
a(KM)	-4.9713D 04
e(-)	1.3330D 00
i(度)	2.2859D 01
Ω(度)	1.0823D 02
ω(度)	1.4940D 02
f(度)	3.6435D 00
M(度)	4.5873D-01

評価2 評価地点での制御量、感度に関して

評価地点での被制御量、及び感度に関しては、月の影響のある場合と、ない場合とを比較して検討する。

(a) 被制御量に関して

表4と表7より以下のことが判明する。

- i. 軌道エネルギーは地球脱出に十分なエネルギーを確保した。
- ii. 軌道面傾斜角、昇交点経度が各々1.7, 11.7度変化する。

(b) 軌道制御直後の要素誤差に対する感度に関して

表5と表8より以下のことが判明する。

- i. 対角項における月による倍率は

個別感度項	倍率
$\frac{\partial a_2}{\partial a_1}$	1131
$\frac{\partial e_2}{\partial e_1}$	-26
$\frac{\partial i_2}{\partial i_1}$	0.3
$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Omega_1}$	0.5
$\frac{\partial \omega_2}{\partial \omega_1}$	7

となり、非対角項の対角項に対する重みは月の有・無により以下のように変わる。

個別感度項	相対オーダー(無)	正負(無)	相対オーダー(有)	正負(有)
$\frac{\partial a_2}{\partial(e_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	3, 0, 2, 2, 2	正、正、負、負、負	6, 2, 4, 4, 4	負、正、負、負、負
$\frac{\partial e_2}{\partial(a_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	-9, -6, -4, -4, -4	正、正、負、負、負	-6, -3, -2, -2, -2	正、正、負、負、負
$\frac{\partial i_2}{\partial(a_1 e_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	-8, -2, -4, -4, -4	正、負、正、負、負	-4, 2, 0, 0, 0	負、正、正、正、正
$\frac{\partial \Omega_2}{\partial(a_1 e_1 i_1 \omega_1 f_1)}$	-8, -2, -2, -4, -4	正、負、負、負、正	-3, 2, 1, 0, 0	負、正、負、正、正
$\frac{\partial \omega_2}{\partial(a_1 e_1 i_1 \Omega_1 f_1)}$	-6, 0, -2, -4, -3	負、正、正、正、負	-4, 2, 0, 0, 0	負、正、正、正、正

(c) 軌道制御誤差に対する感度に関して

表6と表9より以下のことが判明する。

- i. V_c の変化に対応する a_2, i_2, Ω_2 が各々 1, 3, 3 桁上昇している。
- ii. γ_c の変化に対応する a_2, i_2, Ω_2 が 4 桁上昇している。
- iii. δ_c の変化に対応する a_2 が 5 桁上昇している。
- iv. t_1 の変化に対応する a_2, i_2, Ω_2 が各々 3 桁上昇している。

計算結果まとめ 1-1 月の影響のある場合

表4 地球中心・TOD-EQ系での軌道要素

要素名	月による制御後の要素	月による制御前の要素	被制御量
E(エネルギー)	4.2586D-02	-3.0581D-01	0.34840
a(KM)	-4.6779D 06	6.5171D 05	—
e(-)	1.0896D 00	5.0372D-01	0.58588
i(度)	2.1861D 01	2.0074D 01	1.78700
Ω (度)	5.1677D 00	3.5345D 02	11.71770
ω (度)	2.7531D 02	2.1963D 02	55.68000
f(度)	3.9607D 01	1.2453D 01	—
M(度)	8.0263D-01	3.5693D 00	—

表5 軌道制御直後の要素誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(a_1 e_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	(KM - 度 度 度 度)					
	1.1311D 03	-1.3663D 09	8.6686D 05	-1.3980D 07	-1.5093D 07	-1.0027D 07
	2.1951D-05	-2.6531D 01	1.5765D-02	-2.7079D-01	-2.9225D-01	-1.9404D-01
	-6.5989D-05	8.3801D 01	3.0240D-01	9.4333D-01	9.2488D-01	6.6527D-01
	-1.5808D-04	2.4763D 02	-9.7714D 00	5.6766D-01	1.3560D 00	1.0263D 00
	-5.8768D-04	6.2250D 02	1.0621D 01	7.5296D 00	7.1029D 00	3.7881D 00
	3.9072D-04	-4.2373D 02	9.5544D-02	-4.2219D 00	-4.4180D 00	-2.2756D 00

表6 軌道制御誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(V_c \gamma_c \delta_c t_1)}$	$(KM - \text{度度度度})$			
	$(KM/\text{秒度度秒})$			
	9.3718D 07	-3.0392D 06	-2.3981D 05	-4.5189D 02
	1.7911D 00	-5.8896D-02	-4.4314D-03	-8.7717D-06
	2.1657D 00	1.4942D-01	-8.7086D-02	1.2195D-05
	9.7098D 01	1.2499D-01	1.8586D 00	-3.1001D-05
	-2.1505D 02	2.1131D 00	-2.0711D 00	5.1724D-04
	1.2362D 02	-1.3559D 00	2.6227D-02	-3.3473D-04

計算結果まとめ1-2 月の影響の無い場合

表7 地球中心・TOD-EQ系での軌道要素

要素名	月による制御後の要素	月による制御前の要素	被制御量
E(エネルギー)	-3.0744D-01	-3.0581D-01	-0.00163
a(KM)	6.4826D 05	6.5171D 05	—
e(-)	5.0581D-01	5.0372D-01	0.00209
i(度)	2.0077D 01	2.0074D 01	0.00300
Ω (度)	3.5349D 02	3.5345D 02	0.04000
ω (度)	2.1783D 02	2.1963D 02	-1.80000
f(度)	9.1287D 01	1.2453D 01	—
M(度)	3.5450D 01	3.5693D 00	—

表8 軌道制御直後の要素誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(a_1 e_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	$(KM - \text{度度度度})$					
	$(KM - \text{度度度度})$					
	9.8955D-01	5.3619D 03	4.0362D 00	-4.7357D 02	-5.0878D 02	-3.5983D 02
	2.6135D-09	9.9140D-01	5.8614D-06	-4.2048D-04	-4.5085D-04	-2.1521D-04
	1.4105D-08	-2.0777D-02	1.0013D 00	7.7136D-04	-2.1612D-04	-1.8707D-04
	6.2221D-08	-8.4165D-02	-4.7742D-02	1.0024D 00	-1.2823D-04	1.8099D-04
	-4.5398D-06	8.4635D 00	4.4175D-02	1.5743D-04	1.0024D 00	-4.0312D-03
	-1.0716D-04	1.2701D 02	6.8774D-04	-9.8881D-04	-8.2056D-04	4.5672D-01

表9 軌道制御誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(V_c \gamma_c \delta_c t_1)}$	$(KM - \text{度度度度})$			
	$(KM/\text{秒度度秒})$			
	2.8620D 06	-1.1025D 02	-3.0157D 00	-2.0640D-01
	2.1663D 00	-6.2538D-04	-2.5419D-06	-3.4260D-07
	-5.7697D-03	-1.1492D-05	-1.5048D-01	1.9021D-08
	-1.5632D-02	-1.8516D-04	-5.5440D-01	-2.8882D-08
	4.1862D 01	7.2448D-01	5.2067D-01	2.4214D-04
	-4.8156D 01	-3.8939D-01	1.9180D-05	-1.5476D-04

9.2 小楕円から大楕円

本ケースでは小楕円（長半径=2.85×10⁶KM）から大楕円軌道（長半径=2.46×10⁶KM）に移行する際における実際に制御されたケプレリアン要素の変化量，及びその変化量の軌道制御誤差に対する感度を月の影響のない場合と比較して検討する。

なお，月を用いて本制御を行うには衛星に速度方向（タンジェンシャル）の速度増分として250m/秒必要となる。

解析時の軌道制御データ設定を以下に示す。

軌道制御量	TOD-EQ (GEO-CENTRIC)			
	V_c (KM/S)	2.5000D-01	V_c^x (KM/S)	1.6640D-01
	γ_c (度)	8.5835D 01	V_c^y (KM/S)	-1.7749D-01
	δ_c (度)	-6.2760D-16	V_c^z (KM/S)	-5.7505D-02
	LOP (LUNI-CENTRIC)			
	V_c (KM/S)	2.5000D-01	V_c^x (KM/S)	2.0183D-01
	γ_c (度)	1.6374D 02	V_c^y (KM/S)	-1.4752D-01
	δ_c (度)	1.4279D 02	V_c^z (KM/S)	-1.1530D-03
	目標時刻	1993年4月15日3時3分24.50000秒(UTC)		

上記の制御を踏まえて月最接近近傍での衛星状況，及び評価地点での制御量，感度に関して以下に述べる。

評価1 月最接近近傍での衛星状況

月最接近近傍での衛星状況を以下の表にまとめる。

月・衛星間距離	1.64660D+04
軌道初期要素	LOP (LUNI-CENTRIC)
	ケプレリアン
a(KM)	-1.2609D 05
e(-)	1.1303D 00
i(度)	1.6924D 01
Ω (度)	9.6548D 01
ω (度)	1.7081D 02
f(度)	5.1844D 00
M(度)	1.6732D-01

評価2 評価地点での制御量，感度に関して

評価地点での被制御量，及び感度に関しては，月の影響のある場合と，ない場合とを比較して検討する。

(a) 被制御量に関して

表10と表13より以下のことが判明する.

- i. 予定の大楕円は確保
- ii. 軌道面傾斜角, 昇交点経度が各々 2.3, 2.9 度変化する.
- iii. 近地点方向が 80 度変化する.

(b) 軌道制御直後の要素誤差に対する感度に関して

表11と表14より以下のことが判明する.

- i. 対角項における月による倍率は

個別感度項	倍率
$\frac{\partial a_2}{\partial a_1}$	620.
$\frac{\partial e_2}{\partial e_1}$	-25.4
$\frac{\partial i_2}{\partial i_1}$	0.47
$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Omega_1}$	-2.3
$\frac{\partial \omega_2}{\partial \omega_1}$	7.4

となり, 非対角項の対角項に対する重みは月の有・無により以下のように変わる.

個別感度項	相対オーダー(無)	正負(無)	相対オーダー(有)	正負(有)
$\frac{\partial a_2}{\partial(e_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	3, 0, 2, 2, 2	正、正、負、負、負	5, 2, 4, 4, 5	負、負、負、負、負
$\frac{\partial e_2}{\partial(a_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	-8, -6, -4, -4, -4	正、正、負、負、負	-6, -4, -2, -2, -2	正、負、負、負、負
$\frac{\partial i_2}{\partial(a_1 e_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	-9, -3, -3, -4, -4	正、負、正、負、負	-4, 2, 0, 0, 0	負、正、正、正、正
$\frac{\partial \Omega_2}{\partial(a_1 e_1 i_1 \omega_1 f_1)}$	-8, -2, -2, -5, -4	正、負、負、負、正	-4, 1, 0, 0, -1	正、負、負、負、負
$\frac{\partial \omega_2}{\partial(a_1 e_1 i_1 \Omega_1 f_1)}$	-5, 1, -2, -3, -3	負、正、正、正、負	-4, 2, 0, 0, 0	負、正、正、正、正

(c) 軌道制御誤差に対する感度に関して

表6と表9より以下のことが判明する.

- i. V_c の変化に対応する a_2 , i_2 , Ω_2 が各々 1, 3, 3 桁上昇している.
- ii. γ_c の変化に対応する a_2 , i_2 , Ω_2 が各々 4, 4, 3 桁上昇している.
- iii. δ_c の変化に対応する a_2 が 4 桁上昇している.
- iv. t_1 の変化に対応する a_2 , i_2 , Ω_2 が各々 3, 3, 4 桁上昇している.

計算結果まとめ 2-1 月の影響のある場合

表 10 地球中心・TOD-EQ系での軌道要素

要素名	月による制御後の要素	月による制御前の要素	被制御量
E(エネルギー)	4.2586D-02	-3.0581D-01	0.34840
a(KM)	2.4648D 06	4.8497D 05	—
e(-)	8.2944D-01	3.3491D-01	0.58588
i(度)	2.2419D 01	2.0074D 01	1.78700
Ω (度)	3.5637D 02	3.5345D 02	11.71770
ω (度)	2.9537D 02	2.1539D 02	55.68000
f(度)	3.9817D 01	1.6687D 01	—
M(度)	2.2369D 00	7.8899D 00	—

表 11 軌道制御直後の要素誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(a_1 e_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	$(KM - 度 度 度 度)$					
	6.2739D 02	-3.7839D 08	-1.4757D 05	-5.1304D 06	-5.5327D 06	-3.8739D 06
	4.2228D-05	-2.5435D 01	-9.0978D-03	-3.4614D-01	-3.7353D-01	-2.6177D-01
	-9.3751D-05	5.5250D 01	4.7007D-01	9.8911D-01	9.0616D-01	6.6152D-01
	1.7372D-04	-5.1640D 01	-7.1682D 00	-2.2687D 00	-1.3594D 00	-7.6077D-01
	-9.8657D-04	4.7974D 02	6.2052D 00	7.7900D 00	7.3680D 00	4.3349D 00
	3.3939D-04	-1.2588D 02	1.1918D 00	-2.0125D 00	-2.2871D 00	-1.0721D 00

表 12 軌道制御誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(V_c \gamma_c \delta_c t_1)}$	$(KM - 度 度 度 度)$			
	$(KM/秒 度 度 秒)$			
	4.7679D 07	-1.0265D 06	-1.2072D 04	-1.8969D 02
	3.2674D 00	-6.9196D-02	-1.0207D-03	-1.2761D-05
	-9.9976D 00	1.5175D-01	-1.1890D-01	2.4791D-05
	1.1028D 02	-4.2659D-01	1.3115D 00	-1.2612D-04
	-2.7615D 02	2.0171D 00	-1.1402D 00	5.3079D-04
	1.6122D 02	-8.5184D-01	-2.0486D-01	-2.5703D-04

計算結果まとめ 2-2 月の影響のない場合

表 13 地球中心・TOD-EQ系での軌道要素

要素名	月による制御後の要素	月による制御前の要素	被制御量
E(エネルギー)	4.8361D 05	-3.0581D-01	0.34840
a(KM)	4.8361D 05	4.8497D 05	—
e(-)	3.3951D-01	3.3491D-01	0.58588
i(度)	2.0079D 01	2.0074D 01	1.78700
Ω (度)	3.5348D 02	3.5345D 02	11.71770
ω (度)	2.1320D 02	2.1539D 02	55.68000
f(度)	1.0547D 02	1.6687D 01	—
M(度)	6.6024D 01	7.8899D 00	—

表14 軌道制御直後の要素誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(a_1 e_1 i_1 \Omega_1 \omega_1 f_1)}$	(KM - 度 度 度 度)					
	9.8867D-01	7.9293D 03	1.6408D 00	-2.1384D 02	-2.2958D 02	-1.9212D 02
	1.1349D-08	9.8839D-01	5.7174D-06	-3.9409D-04	-4.2207D-04	-2.0605D-04
	8.1144D-09	-8.9366D-03	1.0018D 00	1.4185D-03	-1.5882D-04	-1.5722D-04
	8.6471D-08	-6.7150D-02	-5.1292D-02	1.0008D 00	-6.6183D-05	1.4963D-04
	-1.0553D-05	1.2091D 01	4.7245D-02	2.3427D-03	1.0031D 00	-1.0719D-03
	-1.6830D-04	8.8085D 01	7.9288D-04	1.6126D-03	1.9670D-03	4.9176D-01

表15 軌道制御誤差に対する感度

$\frac{\partial(a_2 e_2 i_2 \Omega_2 \omega_2 f_2)}{\partial(V_c \gamma_c \delta_c t_1)}$	(KM - 度 度 度 度)			
	(KM/秒 度 度 秒)			
	1.4999D 06	-3.4071D 01	-1.0061D 00	-8.3588D-02
	2.0060D 00	-8.1957D-04	-1.7431D-06	-3.8318D-07
	-6.0558D-03	4.6771D-06	-1.2149D-01	1.8285D-08
	-2.2873D-02	-1.2170D-04	-4.4522D-01	-1.3046D-08
	8.6099D 01	7.6486D-01	4.1815D-01	2.6138D-04
	-1.1211D 02	-4.3517D-01	1.0343D-05	-1.6688D-04

9.3 感度解析結果まとめ

前記2例を見ればわかるように月スウィング・バイを用いた軌道制御を考えた場合、通常のフライバイによる軌道制御と比較して制御誤差感度が高くなるので通常のフライバイによる軌道制御精度と同等な軌道制御精度を確保する場合は制御誤差感度が高くなる分、軌道決定精度及び軌道制御精度を上げなければならない。

参 考 文 献

- [1] 西村 “深宇宙ミッションにおけるロケット最終段誘導制御方式及び感度解析プログラム”. 宇宙研報告, No. 19, Mar. 1984.
- [2] 西村, 加藤, 牛越 “さきがけ”, “すいせい” の軌道決定と軌道決定プログラム ISSOP”. 宇宙研報告, No. 42, Dec. 1986.
- [3] 西村, 市川, 牛越, 小坂 “MUSES-A “飛天” の軌道決定と軌道決定プログラム ISSOP” 宇宙研報告 No. 70, Mar. 1991.