6. 電離気体の流れを記述する基礎方程式の近似

森　岡　茂　樹*

比較的低い密度の一部分電離した気体の流れを記述する基礎方程式の近似について考えてみよう．簡単のために1種類の単原子気体で自由電子，1価イオン，中性原子だけが共存する温度範囲を考える．たとえば温度が1万度前後の大気圧以下にあるアルゴンの流れを考えればよい．まず3流体理論の一つとして次の形式を採用する．すなわち流れを記述する変数として2成分（たとえば自由電子とイオン）に関した密度 ρ_s，圧力 p_s，温度 T_s，流れ速度 $\boldsymbol{v}_s$（ただし $s=1,2$ は電子，イオンを示す）と全体にみた密度 ρ，圧力 p，温度 T，流れ速度 $\boldsymbol{v}$ および電場の強さ $\boldsymbol{E}$，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ を用いる．これらの変数を関係づける方程式は2成分についてのおよび全体に見た状態方程式，連続の式，運動量の式，エネルギーの式と Maxwell の電磁方程式で，次のように書き表わすことができる[1]．

$$P_s=\frac{k}{m_s}\rho_s T_s \quad (s=1.2)$$

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho_s\boldsymbol{v}_s=\phi_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s\boldsymbol{v}_s+\mathrm{div}(\rho_s\boldsymbol{v}_s\boldsymbol{v}_s-\mathfrak{T}_s)+\mathrm{grad}\,p_s=\rho_{es}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_s\times\mu\boldsymbol{H})+P_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s e_{ts}+\mathrm{div}(\rho_s e_{ts}\boldsymbol{v}_s-\mathfrak{T}_s\cdot\boldsymbol{v}_s+p_s\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{q}_s)=\rho_{es}\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{E}+\phi_s$$

$$p=\frac{k}{m}\rho T$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{v}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\boldsymbol{v}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-\mathfrak{T})+\mathrm{grad}\,p=\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\mu\boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e_t+\mathrm{div}(\rho e_t\boldsymbol{v}-\mathfrak{T}\cdot\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{v}+\boldsymbol{q})=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}+Q$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon}\rho_e$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0$$

ここで k は Boltzmann 定数，m_s は s 粒子の質量，m は粒子の平均質量を示す．e_{ts}，

* 大阪大学基礎工学部

$\mathfrak{T}_s$, $\boldsymbol{q}_s$ は s 成分の単位質量あたりの総エネルギー，粘性応力テンソル，熱流ベクトル，e_t, $\mathfrak{T}$, $\boldsymbol{q}$ は全体に見たそれらを表わす．流れの方程式の右辺の項は Boltzmann 方程式の電磁場との相互作用および衝突-ふく射項に対応するもので，ϕ_s, P_s, ψ_s は単位体積あたりの s 成分の質量，運動量，エネルギーの湧出す割合を表わし，Q は単位体積あたりのふく射エネルギーの放出・吸収を表わす．ρ_{es} は s 成分の電荷密度で $\boldsymbol{J}(=\sum_s \rho_{es}\boldsymbol{v}_s)$, $\rho_e(=\sum_s \rho_{es})$ は電流密度，超過電荷密度である．電媒定数 ε, 透磁率 μ は一定と仮定されている．

今電離気体が電気的に中性 $(n_1=n_2)$ で，電子の質量がイオン（または中性原子）の質量に較べて十分小さく，したがってそれらの間のエネルギー交換が非常に悪いためにイオンと中性原子では温度および流れ速度は等しいが電子のそれらとは異なると仮定すれば，イオンに関した量は他の変数で代数的に表示できる．そこで流れを記述する基礎方程式は電子および全体についての状態方程式，連続の式，運動量の式，エネルギーの式と Maxwell の方程式だけで閉じる．

しかしまだ電子の運動量の式，エネルギーの式は複雑であるのでこれらの2式については更に局所的準平衡（局所的に定常かつ一様）の状態を仮定する．これは運動量またはエネルギーの湧出しと電磁場との相互作用による力または仕事だけを考慮することに相当する．電子の質量が非常に小さいために電子の質量に比例する時間・空間的変動の項を無規することが保証される．かくして電子の運動量の式およびエネルギーの式はそれぞれ一般化された Ohm の法則および電子-気体間の温度差を与える代数関係に帰着する[2][3]．電離度 $c=n_1/(n-n_1)$ および電子の拡散速度 $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}$ を導入し，いくらか式を変形すれば次の近似基礎方程式が得られる．

$$p=\frac{k}{m}\rho T \quad \text{または} \quad =\frac{k}{m}\rho(T_2+cT_1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=0$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\operatorname{grad}p-\operatorname{div}\mathfrak{T}=\boldsymbol{J}\times\mu\boldsymbol{H}$$

$$\rho\left\{\frac{de}{dt}+p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}-\mathfrak{T}\cdot[\nabla\boldsymbol{v}]+\operatorname{div}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{J}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})+Q$$

$$\rho\frac{dc}{dt}+\operatorname{div}(c\rho\boldsymbol{w}_1)=\phi$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})$$

$$\frac{T_1-T_2}{T_2}=\psi$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$$

これらの式では変位電流，対流電流，$\rho_e\boldsymbol{E}$ の力からの寄与は無規されている．e（単位質量あたりの内部エネルギー）$\mathfrak{T}$, $\boldsymbol{q}$, $c\rho\boldsymbol{w}_1$ は気体運動論の助けを借りて他の変数で表わすこ

とができる[4][5]. 一方 ϕ, σ, ψ, Q に対する表式は衝突-ふく射機構の考察から決定されねばならない. これらの表式は一般に複雑な非線型の性質をもつものでこれまでに多くの人々によって議論されていることは周知の通りである[3〜9].

実際に電離気体を用いて流れと電磁場との相互作用の実験を行なうとき, これらの衝突-ふく射項からの寄与は重大である. 測定結果を定量的に検討するためにはこれらの効果を考慮した議論が必要になる.

参　考　文　献

[1] S. I. Pai; Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics (Springer, 1962)

[2] H. Grad; Notes on Magneto-hydrodynamics No. IV (1956)

[3] H. Petschek and S. Byron; Ann. Phys. **1** (1957) 270

[4] F. A. Goldsworthy; Progress in Aeronautical Science Vol. 1 (Pergamon, 1961)

[5] S. Chapman and T. G. Cowling; The Mathematical Theory of Non-uniform Gases (Cambridge, 1960)

[6] A. R. Kantrowitz et al; J. Appl. Phys. **26** (1955) 83, 95

[7] D. R. Bates, A. E. Kingston and P. W. P. McWhirter; Proc. Roy. Soc. A 267 (1962) 297, A 270 (1962) 155

[8] S. Byron, P. I. Bortz and G. R. Russel; Proc. 4th Smp. Engi. Aspects MHD (1963)

[9] M. J. Lighthill; J. Fluid Mech. **8** (1960) 161