7. プラズマの分布関数と電磁場の効果

丹　生　慶　四　郎*

1. まえがき

プラズマが外部電磁場のなかに存在する場合，これら電磁場が外力としてプラズマの運動に影響をおよぼすことは当然であるが，プラズマの運動を支配する輸送方程式中の外力の項に，ただ相当する力を考慮するだけではすまされない場合が起こってくる．外部電磁場は，たとえばプラズマの輸送方程式中の輸送係数の性格を変更し，場合によっては我々をして輸送方程式の性格そのものを根本から検討しなおす必要に迫らせることすらある．このことは粒子の運動論的な立場にたてば，粒子相互間の衝突の機構にこれら電磁場が影響を及ぼし，したがって粒子の分布関数そのものの型が変更されることを意味している．

しかし分布関数型そのものにまでさかのぼってプラズマの運動を解析することは，一般的にみてはなはだ困難である．完全電離のプラズマの粘性係数・熱伝導係数・電気伝導係数等が温度の 5/2 乗あるいは 3/2 乗に比例するという通常よく使用される関係も，電子・イオンの分布関数型として Maxwell 型またはそれに類似した仮定をおって求められたものである[*1～4*].

以下は分布関数型に電磁場の効果を考慮してこれまでに解析されてきた数少ないプラズマ運動のうち，その二，三について略述する．

2. 外部電場中の分布関数

部分電離のプラズマが外部電場中に存在しているとしよう．状態は定常一様であるとすれば，電子に対する Boltzmann 方程式は，

$$\boldsymbol{F}_e\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{C}_e}=\iiint(f_n'f_e'-f_nf_e)gbdbd\varepsilon d\boldsymbol{C}_n \tag{1}$$

で与えられる．ここに f は分布関数，$\boldsymbol{C}$ は速度，g は相対速度，b は衝突径数，ε は方位角で，添字 e は電子，n は中性粒子に対して付されている．電子に対する外力 $\boldsymbol{F}_e$ は，

$$\boldsymbol{F}_e=e\boldsymbol{E}/m_e \tag{2}$$

として表わされる．$\boldsymbol{E}$ は電場を示す．（1）式においては中性粒子の数が圧倒的に多く，電子相互間および電子・イオン間の衝突は，電子・中性粒子間の衝突に比して無規できると考えている．さてここで中性粒子の分布関数を Maxwell 型

$$f_n=n_m\left(\frac{m_m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_mC_m^2}{2kT}\right) \tag{3}$$

と仮定し，電子の分布関数を次のように展開する．

$$f_e=f_e^{(0)}+\boldsymbol{F}_e\cdot\boldsymbol{C}_ef_e^{(1)}+\boldsymbol{F}_e\boldsymbol{F}_e:\boldsymbol{C}_e^{\circ}\boldsymbol{C}_ef_e^{(2)}+\cdots\cdots \tag{4}$$

* 大阪大学基礎工学部

k は Boltzmann 常数，m は質量，n は数密度，T は温度で，° を付したテンサーは non-divergent であることを示す．（3），（4）両式を（1）式に代入し，スカラーだけの項，ベクトル $\boldsymbol{F}_e$ を含む項で等式をつくると，

$$F_e{}^2\left(f_e{}^{(1)}+\frac{1}{3}C_e\frac{\partial f_e{}^{(1)}}{\partial C_e}\right)=\iiint(f_m{}'f_e{}^{(0)\prime}-f_nf_e{}^{(0)})gbdbd\varepsilon d\boldsymbol{C}_e \tag{5}$$

$$\frac{\boldsymbol{F}_e\cdot\boldsymbol{C}_e}{C_e}\frac{\partial f_e{}^{(0)}}{\partial C_e}+\frac{4}{15}\boldsymbol{F}_e{}^2\frac{\boldsymbol{F}_e\cdot\boldsymbol{C}_e}{C_e{}^4}\frac{\partial(f_e{}^{(2)}C_e{}^5)}{\partial C_e}=\iiint\{f_m{}'f_e{}^{(0)\prime}(\boldsymbol{F}_e\boldsymbol{C}_e{}')-f_nf_e{}^{(1)}(\boldsymbol{F}_e\cdot\boldsymbol{C}_e)gbdbd\varepsilon d\boldsymbol{C}_e \tag{6}$$

を得る．$f_e{}^{(2)}$ は省略して，（5），（6）両式より $f_e{}^{(1)}$，$f_e{}^{(1)}$ を求めると，結局

$$f_e{}^{(0)}=A\exp\left\{-\int\frac{m_eC_ed\boldsymbol{C}_e}{kT+m_eF_e{}^2e^213C_e{}^2}\right\},\qquad f_e{}^{(1)}=\frac{m_eC_el}{kTC_e{}^2+m_nF_e{}^2l^2/3}f_e{}^{(0)} \tag{7}$$

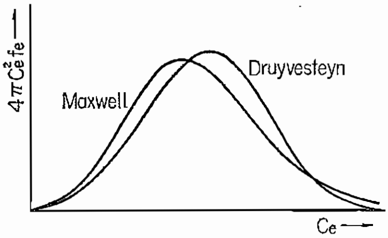
となる．l は自由行路で一般に C_e の関数だが弾性衝突を仮定して一定と考え，E_e が十分大きい場合を想定すると，（7）式は

$$f_e{}^{(0)}=A\exp\left(-\frac{3m_eC_e{}^4}{4m_nF_e{}^2l^2}\right),\qquad f_e{}^{(1)}=\frac{3m_eC_e}{m_nF_e{}^2l}A\exp\left(-\frac{3m_eC_e{}^4}{4m_nF_e{}^2l^2}\right) \tag{8}$$

となる．ここに A は数密度 n_e に関係する項で，

$$n_e=\pi A\left(\frac{4m_nF_2{}^2l^2}{3m_e}\right)^{3/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \tag{9}$$

と与えられる．（8）式はよく知られた Druyvesteyn 分布を与えるもので[5]，Fig. 1 に示すように Maxwell 分布に比べて高速度の粒子成分がカットされている．



第 1 図

3.　電子の runaway

完全電離のプラズマに急に外部電場がかせられた場合を考えると，勿論イオンも電場によって加速されるが，電子に比して質量が大きいので，イオンの分布関数のくずれは電子のそれに比して時間的に十分遅れるであろうと想像される．このような過渡期の初期状態に対しては，§ 2 の中性粒子をイオンに置きかえて，完全電離プラズマ中の電子の分布関数型を求めてみたい誘惑にかりたてられる．しかし完全電離プラズマにおける電子の自由行路 l は

$$l=\frac{m_e{}^2C_e{}^4}{4\pi n_ie^4\ln\dfrac{m_e}{\gamma e^3}\left(\dfrac{kT}{4\pi n_e}\right)^{1/2}C_e{}^2},\qquad \gamma=0.384 \tag{10}$$

で示されるごとく著しく速度に依存するので，（8）式のようなもっともらしい分布型は得られず，電子の分布は速度の大きい領域にかたよったものとなる．すなわち電子は電場からエネルギーをもらって速度を増すが，速度の速い電子の自由行路が大きく，したがってますます電場で加速される．かくして電子の分布は速度の大きい方へ大きい方へと移ってゆくのであって，定常解を求めようとする試みそのものが無理なのである．

そこで問題を非定常にもどして，電子が電場よりエネルギーをもらって，低速領域から高

速領域に移ってゆく単位時間当りの個数を求める問題を考えることにしよう[6]. 問題を簡単にするためにイオンの運動は無視して Lorentz プラズマとし，衝突項を Fokker-Planck 式で表示するとすれば，電子に対する Boltzmann 方程式は適当な変数の規格化の後

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}-\boldsymbol{E}\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{C}_e}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}_e}\left\{C_e^{-3}(C_e\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_e\boldsymbol{C}_e)\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{C}_e}\right\} \tag{11}$$

で与えられる．$\boldsymbol{I}$ はユニット・テンサーである．ここで $\boldsymbol{E}$ を微少量と考え， C_e が小さく衝突の優位な領域での分布関数 f_e を求めることを考えよう．f_e を

$$f_e=f_e^{(0)}+f_e^{(1)}+f_e^{(2)}+\cdots\cdots \tag{12}$$

と展開し，$f_e^{(n)}$ は E^n の order とする．また

$$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{E}/E, \qquad \mu=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{C}_e/C_e \tag{13}$$

と変数を変換し，(12)，(13)を用いて (11) 式の最も優位な項を残すと，

$$\frac{\partial f_e^{(2)}}{\partial t}-\frac{E^2}{6}\frac{\partial}{\partial C_e}\left(C_e^3\frac{\partial f_e}{\partial C_e}\right)-\frac{E^2}{3}C_e\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial C_e}=0 \tag{14}$$

となる．

$$\tau=E^2t/6 \tag{15}$$

で t より τ に変換すると，右肩の添字を落して (14) 式は結局

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau}=C_e^{-2}\frac{\partial}{\partial C_e}\left(C_e^5\frac{\partial f_e}{\partial C_e}\right) \tag{16}$$

となる．

一方電子速度の大きい領域については，

$$\boldsymbol{S}=E^{1/2}\boldsymbol{C}_e \tag{17}$$

なる変数変換をし，(11)式に代入して優位の項のみを残すと

$$\mu\frac{\partial f_e}{\partial s}+\frac{1-\mu^2}{s}\frac{\partial f_e}{\partial \mu}=s^{-3}\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial f_e}{\partial \mu}\right\} \tag{18}$$

を得る．この方程式の解は

$$f_e=\alpha\{s^{-4}+2s^{-2}\mu-4/5\ln s+\mu^2+0(s^2)\}+\beta \tag{19}$$

となる．α, β は常数だが α を τ の関数と考え， s が小さい領域で最も優位な項のみを取り出せば，

$$f_e=\alpha(\tau)s^{-4} \tag{20}$$

となる．

(16) 式の解で C_e の大きいとき (20) に接続するものは，

$$f(C_e,\tau)=C_e^{-2}\tau^{-1}\exp\left(-\frac{1}{C_e\tau}\right)\int_0^\infty f(u,0)I_4\left\{\frac{2}{\tau(uC_e)^{1/2}}\right\}\exp\left(-\frac{1}{u\tau}\right)du \tag{21}$$

となり，また

$$\alpha=\frac{1}{24}\tau^{-5}\int_0^\infty f(u,0)u^{-2}\exp\left(-\frac{1}{u\tau}\right)du \tag{22}$$

と求まる．

一方 runamay の電子の数はこの α を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{C_e} 4\pi C_e{}^2 f dC_e = 4\pi C_e{}^5 \frac{\partial f}{\partial C_e} = 16\pi\alpha \tag{23}$$

として求めることができる.

4. C.G.L. 方程式

3 まではプラズマに外部電場をかけたときについて考察を進めてきたが，次にプラズマに強い外部磁場がかせられた場合を考えよう[7]. 強い磁場中にある荷電粒子は磁場のまわりに旋回運動を行なうので，旋回半径が自由行路の役割を演じることは十分予想がつく. そこで磁場が十分強く，旋回半径が自由行路に比して十分小さい状態では，Boltzmann 方程式は衝突項を省略したいわゆる Vlasov 方程式にきせられる.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{C}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{e}{m}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{C}} = 0 \tag{24}$$

ただし $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，$\boldsymbol{B}$ は磁場，e は電子の電荷である. ここで m/e を小さい量とみなして f を

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \cdots\cdots \tag{25}$$

と展開し，$f^{(n)}$ を $(m/e)^n$ の order と考える. まず m/e の零次，一次の order はそれぞれ

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{C}} = 0 \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{C}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right) f^{(0)} + \frac{e}{m}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{C}} = 0 \tag{27}$$

となる. (26) 式より $f^{(0)}$ は

$$f^{(0)} = f\{(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{a})^2,\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{r},\ t\},\quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/B^2 \tag{28}$$

となるので，このことを利用して (27) 式のモーメント方程式をつくれば，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{v} = 0 \tag{29}$$

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} + \mathrm{curl}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} + \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right\}\times\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{30}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{P_n B^2}{\rho^3}\right) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{P_s}{\rho B}\right) = 0 \tag{32}$$

を得る. また Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{33}$$

となる. ここに $\boldsymbol{P}$ は圧力テンサーで磁場方向に p_n，磁場に垂直方向に p_s なる成分をもち ρ は密度，$\boldsymbol{v}$ は平均速度で，(31)，(32)両式では速度の三次のモーメントは無視してある.

(29)～(33) 式を一次元化すれば collisionless shock を与える式が得られるように思われるが，これらの方程式はちょうど完全流体の方程式に相当しているので，ただ shock relation に相当するものを与えるに過ぎない. すなわち一次元化された (29)～(33) 式は

$$vB=C_1=v_1B_1=0 \tag{34}$$

$$\rho u=C_2=\rho_1u_1 \tag{35}$$

$$uB=C_3=u_1B_1 \tag{36}$$

$$p_nB^2/\rho^3=C_4=p_{n1}B_1^2/\rho_1^3 \tag{37}$$

$$p_3/\rho B=C_5=p_{s1}/\rho_1B_1 \tag{38}$$

を導く．u および v は磁場に垂直および平行な速度成分で，添字1は衝撃波前方の値を示す．また C_1〜C_5 は常数で，衝撃波は磁場を含む面内に存在し，衝撃波前方において流れは磁場に直交すると考えている．今

$$\gamma P_{s1}/\rho_1=q_1^2,\quad B_1^2/P_1=V_{a1}^2,\quad q_1^2+V_{a1}^2=V_1^2,\quad \gamma=2,\quad u_1^2/V_1^2=M_1^2 \tag{39}$$

でマッハ数 M を定義し，$u'=u/u_1$ で速度を規格化すると，

$$u'=(1+\sqrt{1+8M_1^2})/4M_1^2 \tag{40}$$

なる関係を得る．この関係は通常の shock relation と対応して考えられそうであるが，エネルギー式として (31)，(32) の断熱関係式を用いているので衝撃波の前後では等エントロピーであり，通常の意味の衝撃波とは考えにくい．Buneman[8]が Vlason 方程式から Collisionless shock を導くことは不可能であると述べているが，これらの関係は今後の研究にまたねばならない．

参考文献

[1] L. Spitzer, Jr; Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, 1956)
[2] T. Kibara; J. Phys. Soc. Japan **14** (1959) 402.
[3] 丹生慶四郎: 東京大学航空研究所集報 **3** (1963) A7.
[4] K. Niu; J. Phys. Soc. Japan **19** (1964) 999.
[5] S. Chapman & T.G. Cowling; The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (Cambridge, 1952)
[6] M.D. Kruskal & I.B. Bernstein; Phys. of Fluide **7** (1964) 407.
[7] G.F. Chew, M.L. Goldberger & F.E. Low; Proc. Roy. Soc. **236A** (1956) 112.
[8] O. Buneman; Phys. of Fluids **Supplement** (1964) s 4.