

# MHD 非平衡流れ

森 岡 茂 樹\*

**Abstract:** The influences of the collision term in Boltzmann's equation to the generalized MHD relations are investigated. The approximated expressions for the reaction rate, the radiative loss, the electrical and the thermal conductions, and the effects of these terms to the MHD flow are discussed on the basis of the linearized theory. The reaction rate and the perturbation of the electrical conductivity exert only the secondary effects on the flow, but the radiative loss and the thermal conduction may alter the flow field considerably.

## 1. ま え が き

まず何が問題になるかということから始めよう。これには代表的な個々の現象を挙げるのも一方法であるが、ここではそれらの現象を支配するある基礎の関係式をとって考えてみる。かような基礎の関係式として一般化した Boltzmann 方程式と Maxwell の電磁方程式をとれば、それらは次のように書くことができる[1].

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{c}_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_s}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{c}_s} = \frac{\partial_e f_s}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_e$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

ただし、 $f_s$  は速度分布関数、 $\mathbf{c}_s$  は粒子の速度、 $\mathbf{r}$  は粒子の位置ベクトル、 $\mathbf{F}_s$  は粒子に働く力、 $m_s$  は粒子の質量、 $\mathbf{E}$  は電場の強さ、 $\mathbf{H}$  は磁場の強さ、 $\mathbf{j} = \sum_s e_s \int \mathbf{c}_s f_s d\mathbf{c}_s$  は電流密度、 $\rho_e = \sum_s e_s \int f_s d\mathbf{c}_s$  は空間電荷密度、 $e_s$  は粒子の電荷、 $\mu, \varepsilon$  は透磁率および誘電率で一定と仮定する。添字  $s$  は粒子の種類を示す。電子の励起-反励起といった内部自由度は右辺の衝突-ぶく射項  $\partial_e f_s / \partial t$  の中に含まれている。

\* 大阪大学基礎工学部

ここで普通の気体の場合と違っている三つの点に着目しよう。第1は、添字  $s$  からわかるように、電離気体が本質的に混合体であることである、われわれが扱っている一部分電離した気体では、少なくとも3種類の粒子—中性原子、1価イオン、自由電子—から成る混合体を考えなければならない。これは3流体理論を用いるとか、従来の流体力学の式に一般化した Ohm の法則や反応速度の式を加えねばならないことになる。第2は、左辺の第3項に電磁力が含まれていて、それが Maxwell の電磁方程式に結び付くことである。これはいわゆる電磁場と荷電気体間の相互作用という非常に興味ある問題を与える。第3は、右辺の衝突項が電離気体では非常に重要になると同時に複雑な性質をもつことである。普通の気体で考えられている近接弾性衝突のほか、荷電粒子間のクーロン相互作用、電子-原子間の Ramsauer-Townsend 効果、イオン-原子間の分極効果が問題になり、また電離-再結合や励起-反励起を伴う非弾性衝突、光子の放出・吸収に伴う電子の吸収・放出などが重要な役を演ずる。実際にこの部分が非平衡の原因を与えるもので、電離気体の流れで非平衡が特に問題となる理由はここにある。

これから述べる MHD 非平衡流れというのは、従来の MHD 流れにかような衝突-ふく射項からの寄与を加えようとするもので、実際にわれわれが実験室で大気圧またはそれ以下にあるプラズマの流れを使って MHD の現象を観測しようとするれば、この効果が非常に大きく現われて、その間の事情をはっきりさせない限り、測定データの理解ができないためである。

以下では、この一般化した Boltzmann 方程式から出発して、流体力学の基礎方程式を導き、具体的な解の得られるところまで近似を進めて行くことになるが、その間特に、右辺の衝突-ふく射項が流体力学の式のどの部分に顔を出し、それらが衝突-ふく射過程の内容の違いによってどのように表わされ、結局それらの表式を用いて流体力学の式を解いたとき、どのような結果を招くかということに注意しながら進みたいと思う。

## 2. 混合体の処理

MHD 非平衡流れの基礎方程式を与える場合、まず先ほど述べた第一の問題点、即ち“電離気体が本質的に混合体である”ことを処理しなければならない。これは問題を3流体理論で取扱うか、2流体近似にするか、あるいは1流体近似まで持込むかということで、実際には与えられる問題の条件や流体の物理的特性によって、また一方ではそれを取り扱う人々の採用するモデル化の違いによって、いろいろな近似が持込まれることになる。

ここでは一般化した MHD 方程式または2流体近似理論と呼ばれるものを考えるのであるが、他の取り扱い方との関連および衝突-ふく射項の行方をはっきりさせるために、一般化した Boltzmann 方程式からそれに至るまでの手順を簡単に説明しておこう。これにもある程度具体的な対象を決めておいた方が近似の基準を決めるのに都合がよいから、ここではわれわれが実験室で扱っている大気圧またはそれ以下にある  $10^4\text{K}$  前後のアルゴンのような単原子気体のプラズマの流れを念頭におくことにする。

まず3種類の粒子—中性原子、1価イオン、自由電子—に対応する3組の Boltzmann 方程式について流体力学の近似をとる。よく知られているように、これは3組の Boltzmann

方程式のそれぞれについて、0次、1次、2次のモーメントをとればよいわけで、それぞれの流体について適当なマクロの量を定義すれば、状態方程式を加えて、次のように書ける[2].

$$p_s = \frac{k}{m_s} \rho_s T_s$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = \phi_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \mathbf{v}_s) + \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s - \mathfrak{S}_s) - \rho_{es}(\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mu \mathbf{H}) = \mathbf{P}_s + \phi_s \mathbf{u}_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \bar{e}_s) + \text{div}(\rho_s \bar{e}_s \mathbf{v}_s - \mathfrak{S}_s \cdot \mathbf{v}_s + \mathbf{q}_s) - \rho_{es} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{E} = \psi_s$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\mathbf{j} = \sum_s \rho_{es} \mathbf{v}_s)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_e \quad (\rho_e = \sum_s \rho_{es})$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

ここで  $k$  は Boltzmann 定数,  $\mathfrak{S}_s$  は応力テンソル,  $\bar{e}_s$  は単位質量あたりの全エネルギー,  $\mathbf{q}_s$  は熱流ベクトルを表わす. 質量, 運動量, エネルギーのきわ出し  $\phi_s$ ,  $\mathbf{P}_s + \phi_s \mathbf{u}_s$ ,  $\psi_s$  は衝突-ふく射項から導かれたもので, 適当な衝突-ふく射機構の考察からのみ決定できる.

これらはいわゆる3流体理論の基礎式であるが, これとは別の形式の3流体理論を立てることもできる. それは  $\rho = \sum_s \rho_s$ ,  $p = \sum_s p_s$ ,  $T = \frac{1}{n} \sum_s n_s T_s$ ,  $\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \mathbf{v}_s$  といった全体についての量を定義し, これらの全体についての量と, 3成分中の二つ, たとえば電子とイオンに関する量を変数に選び, これらの変数を支配する流体力学の式を考えるやり方で, 実際にさらに近似を進めていく上で, また実験データと対応させる上でこの形式の方が都合がよい. 全体についての流体力学の式を得るには, 各種類の対応せる式を総和し, 上に定義した全体についての量を用うればよい.

$$p = \frac{k}{m} \rho T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad } p - \text{div } \mathfrak{S} - \mathbf{j} \times \mu \mathbf{H} - \rho_e \mathbf{E} = 0$$

$$\rho \left\{ \frac{d\bar{e}}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\} - \mathfrak{S} \{ \nabla \mathbf{v} \} + \text{div } \mathbf{q} - \mathbf{j} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu \mathbf{H}) = Q,$$

$m$  は粒子の平均質量,  $\mathfrak{S}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\mathbf{q}$  は全体としてみた, 粘性応力テンソル, 単位質量あたりの内部エネルギー, 熱流ベクトル,  $Q$  は単位体積あたりのふく射エネルギーの吸収-放出を表わす.

いずれにしても, この近似の段階では取り扱いはまだ非常にむずかしい. そこで電離気体

が電氣的に中性を保とうとする強い傾向をもっていること、また電子の質量がイオンや中性原子の質量に比べて非常に小さく、従ってそれらの間の運動量やエネルギーの交換が非常に悪いことに着目して、 $n_i \approx n_e$ ,  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_a$ ,  $T_i \approx T_a$ と仮定する(添字  $a, i, e$  はそれぞれ中性原子、イオン、自由電子を示す)(1回の衝突で交換される運動量やエネルギーは、電子-重い粒子間の方が二つの重い粒子間よりも  $m_e/m_a$  倍程度小さいが、逆に衝突頻度は  $\sqrt{m_a/m_e}$  倍程度大きいから、実際には  $\sqrt{m_e/m_a}$  倍程度に小さいと見られる)。そこでイオンに関する量は他の変数で代数的に与えられるから、流れを記述する基礎式は本質的に全体と電子についての状態方程式、連続の式、運動量の式、エネルギーの式と Maxwell の式だけで閉じることになる。

それでもまだ電子に関する運動量の式とエネルギーの式は相当複雑である。しかしその運動量の式については、電子の運動量が非常に小さいために、一般に慣性力、粘性力、電離-再結合によるわき出し-吸込みの項からの寄与を無視することができる。残された部分は拡散速度  $\mathbf{w}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}$  および電流密度  $\mathbf{j}$  の定義を用いて次のように書ける。

$$\text{grad } p_e + \rho_{ee}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu \mathbf{H}) + \mathbf{j} \times \mu \mathbf{H} - \rho_{ei} \mathbf{w}_i \times \mu \mathbf{H} = \mathbf{P}_e$$

イオン滑りの項  $\rho_{ei} \mathbf{w}_i \times \mu \mathbf{H}$  は強い磁場中の稀薄な気体でなければ問題にならない。また  $\frac{1}{c} \frac{U}{L} \frac{1}{\omega_i} \ll 1$  の条件が成り立つ範囲では(ただし  $c$  は電離度、 $U$  と  $L$  は代表的な速さと長さ、 $\omega_i$  はイオンの角振動数)、Hall 効果や圧力勾配からの寄与も無視できて、結局お馴染みの Ohm の法則に帰着する[3]。

$$\frac{\mathbf{P}_e}{\rho_{ee}} = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}) = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu \mathbf{H}$$

一方、電子のエネルギー式については、一般に運動量の式のような単純化は許されないが、もし局所的に準平衡の仮定が許されるならば、左辺の時間-空間的変動の部分を落すことができる(従って  $-\rho_{ee} \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E} = \phi_s$ )[4][5]。これは電場のなす仕事と衝突-ふく射によるエネルギーのわき出し-吸込みだけの間のバランスを考えることで、電子と重い粒子間の弾性衝突で電子気体に輸送されるエネルギーの割合が  $(T - T_e)$  に比例することを考慮して次の形に書き直すことができる。

$$T - T_e = \phi$$

以上のような手続きを経て、結局次の一般化した MHD 方程式が得られる。

$$p = \frac{k}{m} \rho T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \text{div } \mathfrak{S} + \mathbf{j} \times \mu \mathbf{H} + \rho_e \mathbf{E}$$

$$\rho \left\{ \frac{d\mathcal{E}}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\} = \mathfrak{S} \cdot [\rho \mathbf{V}] - \text{div } \mathbf{q} + Q + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu \mathbf{H})$$

$$\rho \frac{dc}{dt} + \text{div}(c \rho \mathbf{w}_e) = \phi$$

$$\mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu \mathbf{H})$$

$$T - T_e = \phi$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_e$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$\phi$ ,  $\sigma$ ,  $\phi$ ,  $Q$  の表式は衝突-ふく射過程の考察から決定されねばならぬもので、5で詳しく述べる。熱流ベクトル  $\mathbf{q}$ , 電子の拡散速度  $\mathbf{w}_e$ , 粘性応力テンソル,  $\mathfrak{S}$  は気体運動論を用いて他の変数で表わすことができるが、衝突-ふく射過程はそれらに含まれる輸送係数を通して間接的にも影響する。

### 3. 問題の種類と取り扱い方

ここでもう一度いま導いてきた基礎式をふり返り、実際上の問題への適用を考えてみよう。まず Boltzmann 方程式の第1項は時間的変動を表わすもので、それから導かれた部分は問題に定常か非定常かという区別を与える。第2項から導かれた部分は空間的変動を表わすもので、静止または一様な流れという最も簡単な場合から、一次元、二次元、三次元の流れと順次複雑になる。第3項からきた部分は電磁場との相互作用を与えるもので、電場だけの場合磁場だけの場合などが考えられ、さらにそれらが一様か一様でないか、どちらを向いているかなどによっても区別される。また右辺の衝突-ふく射項からきた部分は、前にも述べたように流れに非平衡性を与えるもので、質量、運動量、エネルギーのわき出し-吸込みに関係するが、弾性衝突だけを考慮するか、非弾性衝突やふく射まで含めるか、含めるにしてもどの範囲までにとどめるかによって違ってくる。

さて最も一般的な問題はと言えば、勿論、非定常、三次元の流れで、非一様な電磁場が存在し、すべての衝突-ふく射過程を含むものであるが、簡単でないことは明らかである。そこでどれかの部分を省略または単純化することになるが、電磁場中の非平衡性に重点を置くならば、まず時間-空間的変動の部分を取り扱うことになる。たとえば非平衡 MHD 発電に関する初期の取扱いはこの段階にある。しかしこれでは流体力学者の出る幕がないから、一次元的な変化を取入れた問題を考えることになる。たとえば一次元衝撃波層の構造や安定性の問題、一次元ノズル中の非平衡流れの問題等はこの段階にある。しかしこの場合でも非平衡流れの複雑な非線型性はまともに扱う限りほとんど解析的な扱いを許さず、大抵の場合は電子計算機による数値計算に持込む羽目になる。

さてわれわれのように前向伴流や渦跡といったような空間的分布が問題の本質となるものでは、一次元的な変化だけでは済まされず、どうしても二次元以上の流れの場を考えなければならぬ。したがって衝突-ふく射項のかなりあらっばい扱いを覚悟してかからねば到底解決のめどは立たないと思われる。

そこで線型化近似を用いて、時間-空間的変動の部分、電磁場との相互作用の部分、衝突-ふく射過程の部分に同じ程度の役割をもたせながらそれらの間の結び付きを解析的に調べようという考え方が出てくる。

4.  $\phi$ ,  $Q$ ,  $\sigma$ ,  $\psi$  の表式

Boltzmann 方程式の右辺の衝突-ふく射項から出てきた  $\phi$ ,  $Q$ ,  $\sigma$ ,  $\psi$  が一般にどのような内容を持ち、特に線型化近似の範囲でどのように表わせるかを簡単に説明してみよう。

(i) 反応速度  $\phi$  話は電離-再結合反応が主として衝突が支配的な過程 ( $A+e \rightleftharpoons A^*+e$ ,  $A^*+e \rightleftharpoons A^++2e$ ,  $A^*$  は励起状態の原子) で行なわれるか、またはふく射が支配的な過程 ( $A+h\nu \rightleftharpoons A^*$ ,  $A^*+h\nu \rightleftharpoons A^++e$ ) で行なわれるかによって違ってくる。詳しいことは水素について Bates et al[6] が、またヘリウム、アルゴンについては Byron et al[7][8] が議論しているが、結局それらは形式的に、衝突が支配的な場合は  $\phi = \frac{1}{\tau}(c_e - c)$ , ふく射が支配的な場合は  $\phi = -\gamma c^2$  のように表わせる[9]。ここで  $c$  は電離度,  $c_e$  はその平衡値を示す。 $\tau$  は反応の特性時間で, Frozen の条件のもとでは  $\tau \rightarrow \infty$ , 準平衡の条件のもとでは  $\tau \rightarrow 0$  になる。一方  $\gamma$  はふく射再結合係数に相当する。一般に  $\tau$  および  $\gamma$  は共に電子温度, 電子密度などの複雑な関数であるが、特に線型化近似の範囲では基準点の状態に關係した定数とみなせる。

(ii) ふく射エネルギーの吸収-放出  $Q$ [8~11] われわれが念頭に置いている一部分電離した気体では、エネルギー上の寄与から見て、励起ふく射が最も重要であり、制動ふく射はもちろんのこと、再結合ふく射もあまり問題にならない。また励起ふく射に伴う各線スペクトルの間には、放出されるエネルギーの大きさや、光学的厚み（吸収の遷移確率, 吸収原子の粒子密度, プラズマの代表的長さ）に比例する）に関して大きな違いがある。一般に低い準位で、また近い準位間の遷移で起るふく射ほど、それらの程度は大きい。このような特徴は、ある線スペクトルについては光学的に十分厚いが、他のスペクトルについては光学的に十分薄いとみなすモデル化を許す（実際に光学的厚み  $\alpha_\nu$  は  $\exp\left(-\int_0^r \alpha_\nu dr\right)$  の形で關係することに注意したい）。

線ふく射のエネルギー吸収-放出  $Q$  は一般に次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 - Q_2 \\ Q_1 &= \sum_{ij} B_{ij} h\nu_{ij} \rho_{ij} n_i \\ Q_2 &= \sum_{ij} (A_{ji} + B_{ji} \rho_{ij}) h\nu_{ij} n_j \end{aligned}$$

$Q_1$ ,  $Q_2$  はそれぞれ吸収, 放出の部分を表わす。 $Q_2$  の右辺の第1, 第2項はそれぞれ自然放出, 誘導放出を表わす。 $A_{ji}$ ,  $B_{ji}$  は自然放出, 誘導放出の遷移確率で、それらの間には  $\frac{A_{ji}}{B_{ji}} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2}$ ,  $\frac{B_{ji}}{B_{ij}} = 1$  (ただし  $c$  は光速) の關係が成り立つ。 $h\nu_{ij}$  は光子のエネルギー,  $n_j$  は  $j$  準位の励起原子の粒子密度である。 $\rho_{ij}$  は考えている点でのふく射密度で一般には“全空間にわたる”気体のふく射状態に左右される。

さて光学的に十分薄いふく射については、 $Q_1$  への寄与を無視できる。また  $h\nu_{ij} \gg kT$  か、 $\rho_{ij}$  が平衡値より十分小さければ、誘導放出からの寄与は無視できる。さらに線型化近似の範囲で、自然放出の部分が衝突の支配的な場合は  $c_e$  に、ふく射の支配的な場合は  $c$  の1ないし2乗に比例することが示されている[9]。一方光学的に十分厚いふく射については、いわゆる Rosseland の拡散近似が用いられる。

$$Q_v = \text{div} \left( -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\alpha_v} \frac{dB_{ij}}{dT} \text{grad } T \right)$$

特に  $\frac{1}{\alpha_v} \frac{dB_{ij}}{dT} \rightarrow 0$  の光学的に十分厚い極限では、吸収と放出は局所的に互いに打ち消し合い、このふく射の部分からの寄与は消える。

(iii) 電導率  $\sigma$  電導率は主として電子の運動状況によって左右される。電磁場が比較的弱い場合の電導率は、電子-中性原子間の弾性衝突が支配的な電離度の十分小さいところ ( $10^{-4}$  以下) では電離度に比例するが [1], 電子-イオン間の弾性衝突が支配的な電離度の大きいところ ( $10^{-2}$  以上) では電子温度の  $3/2$  乗に比例する [12]。また中間の電離度では両方の調和平均がとられる [13]。

さて一部分電離した気体では、一般に  $\sigma$  はかなり小さく、流速や磁場の強さが非常に大きくない限り誘導される電流もまた小さい。したがって線型化近似の範囲では、 $\sigma$  の変動部分は流れの場に2次的な効果をおよぼすに過ぎない。それゆえかような条件のもとでは  $\sigma$  を一定とみなす簡単化が許される。

(iv) 電子-気体間の温度差  $\phi$  [4][5] 先に述べたように、 $T - T_e$  は電子と重い粒子間の弾性衝突で電子気体に輸送されるエネルギーの割合を表わす項に含まれる因数である。したがって  $\phi$  はそれを支える電場のなす仕事および非弾性衝突により電子気体から失われるエネルギーの割合に関係する。電場や、再結合過程に関連した非弾性衝突では  $T_e > T$  ならしめる傾向があり、一方電離過程に関連した非弾性衝突では  $T_e < T$  ならしめる傾向がある。

さて一部分電離した気体を利用した MHD の実験等では一般に誘起される電場は弱く、電子の熱伝導は比較的大きいから、たとえば  $T_e > T$  にある加熱部から出発するような流れでは熱伝導や対流の部分を見捨てるわけにはいかない。しかし、もしこれ以外のすべての関係係が  $T_e$  を直接含まない形に書けるならば (実際に線型化近似の範囲では書ける)、この関係は他の量が決定された後に  $T_e$  を決める関係とみなすことができる。

## 5. 反応速度およびふく射損失の流れへの影響

前節で導いたわき出し-吸込み項の結果を用いて、MHD 非平衡流れの線型化した基礎方程式を与えることができる。熱伝導、拡散、粘性の項は無視する。問題の要点を簡単に説明するために、以下では二次元の流れだけを扱うことにする。また例題として Aligned 磁場を含む流れをとる。これは非平衡性の前向伴流への影響に関連した問題である。

ふく射が支配的で光学的に十分薄い場合、基礎方程式は主流方向の変動速度について次のように与えられる [9] (主流方向に  $x$ , これと直角方向に  $y$  をとる)。

$$(1 - M_f^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + Nu \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + Nf$$

$M_f$  は Frozen Mach 数,  $N$  は磁気 Oseen 数,  $f = f(x)$  はふく射再結合速度  $\phi$  およびふく射損失の割合  $Q$  から決る  $x$  の関数である。この方程式の解は

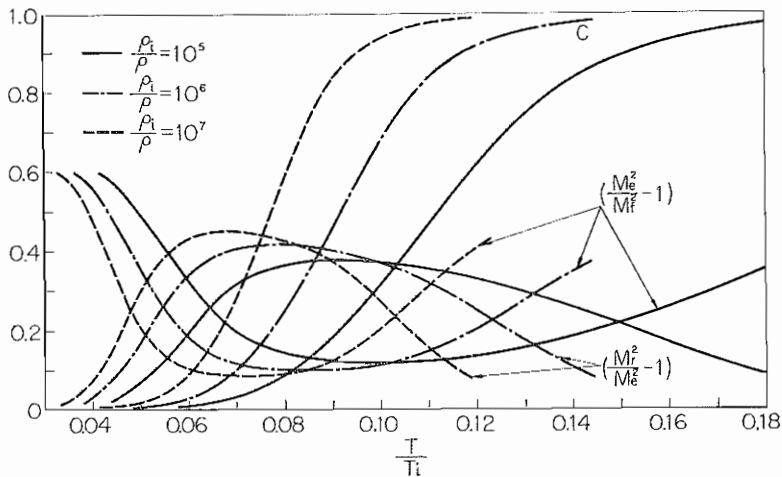
$$u = u_0 + \frac{1}{1 - M_f^2} \int_0^x f(x) dx$$

の形に与えられる。\$u\_0\$ は普通の MHD の解で積分を含む項はふく射の効果を与える。\$\phi, Q\$ が共に \$c^2\$ に比例するとすれば、積分を含む項の具体的な形が \$\frac{\epsilon x}{1+\beta x}\$ (\$\beta, \epsilon\$ は反応速度、ふく射損失に関する正のパラメータ) のように与えられる[9]。\$M\_f < 1\$ の場合、この解はふく射過程の前向伴流への影響を示すが、結果は明らかにふく射損失過程が流れ方向の減速を引き起し、前向伴流による減速に重なり合うことを示している。もし磁気 Oseen 数 \$N\$ が比較的小さく、ふく射損失パラメータ \$\epsilon\$ が大きいときは、前向伴流による流れの減速はふく射損失過程による流れの減速に圧倒されて、その観測はむずかしくなるであろう。

一方、衝突が支配的な場合の基礎方程式は次の形に与えられる[9]。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x} + R \right) \left\{ (1 - M_f^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + Nu \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \\ & = (M_e^2 - M_f^2) \left( \beta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{M_f^2 - M_e^2}{M_e^2 - M_f^2} R \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + Nu \right) \end{aligned}$$

パラメータ \$\beta\$ と \$R\$ は電離-再結合反応速度とふく射損失に関する。\$M\_f, M\_e, M\_r\$ はそれぞれ Frozen Mach 数, Modified Equilibrium Mach 数, ふく射損失に関連して出てきた新しい Mach 数を表す。この基礎式は定数係数の同次の線型方程式ではあるが、高階のため取り扱いは厄介になる。しかし \$\gamma\$ に関して 2 階の項だけを含み、三つの Mach 数が温度、圧力の全範囲にわたってあまり変わらないといった実際の電離気体の特性に着目するとき、それらを利用して、近似解は比較的容易に見出される。図 1 はアルゴンについて 3 種類の Mach



第1図 アルゴン電離気体の電離度 \$C\$ およびパラメータ \$\left(\frac{M\_e^2}{M\_f^2} - 1\right)\$, \$\left(\frac{M\_r^2}{M\_e^2} - 1\right)\$ の値の温度による変化 (\$\rho\_i = 149 \text{ gcm}^{-3}\$, \$T\_i = 1.82 \times 10^{50} \text{ K}\$)[9]

数が温度、圧力の全範囲にわたってあまり変わらないことを示す。

上式の右辺には \$(M\_e^2 - M\_f^2)\$ の因数が含まれているが、いまこれを \$\delta M\_e^2\$ とおき、\$\delta \ll 1\$ とみなせば \$u = u\_0 + \delta u\_1 + \dots\$ のような \$\delta\$ 展開形式の解が考えられる。したがって、もし上流で一般的な条件が与えられるならば、非平衡性は普通の MHD 流れに 2 次的な効果を与え



るに過ぎないであろう。実際に電離-再結合反応に伴う非平衡だけを考慮して、ふく射損失を無視すれば、上流で一樣な条件を与えることが許され、次のような簡単な近似解が得られる[14].

$$u = u_0 + \beta e^{-\beta x} \int_{-\infty}^x (u_\infty - u_0) e^{\beta x} dx + 0(\delta^2)$$

明らかにこの解は Frozen および Equilibrium の両極限解  $u_0$  および  $u_\infty$  と反応速度パラメータ  $\beta$  だけから構成されていて、実際に“反応に伴う非平衡が2次的変動を与えるに過ぎない”ことを示す。

しかしふく射損失が存在するときは、上流で一樣な条件を与えることは許されず、流れはつねに減速される。これはふく射損失の割合に比例した1次的変動を流れに加え、磁場との相互作用からくる1次的変動と重なり合う。この場合にはふく射損失を無視したときのような簡単な形の近似解は成り立たないで、 $\beta$ ,  $R$  を含む2次的修正をこれらの1次変動の上に加える。

## 6. 熱伝導の流れへの影響

電離気体では、質量の軽い電子の活発な運動によって、熱伝導や拡散が異常に大きくなる傾向がある。この節では熱伝導について考えてみよう。

一般に一部分電離した気体の熱流ベクトルは複雑な内容をもっているが、その大部分は各種の粒子の衝突と両極性拡散に原因する部分で占められる[2][15]。電離度が1に近い高温の気体では軽い電子が多数存在するために熱伝導は非常に大きくなる。また中間の温度では(電離度が0.5のあたりをピークにして)両極性拡散による熱伝導の異常な増加が現われる。特に電子温度が気体温度よりも高い非平衡状態ではさらに大きくなる。図2は Tan et al がアルゴンについて計算した結果であるが、この間の事情を理解するのに有用である[15]。4で光学的に十分厚いふく射のエネルギー損失が熱伝導の型に与えられることを述べたが、これがまた熱伝導を見かけ上増すことや、他方、密度が小さくなると対流項や衝突項との比が増すことにも注意せねばならない。

さて熱流ベクトルを次のように表わす。

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T$$

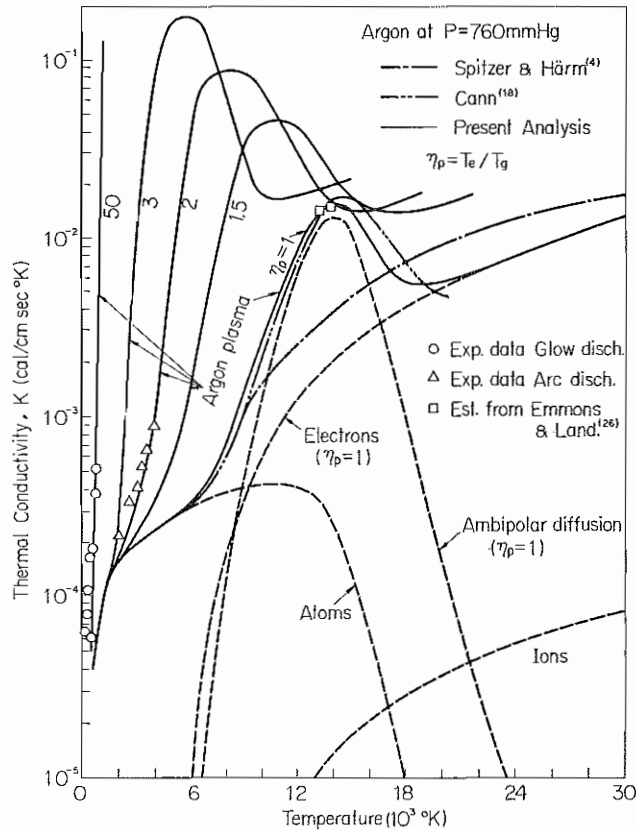
$T$  は全体についての温度で、 $T = \frac{k}{m_a} \frac{p}{(1+c)\rho}$  により  $p$ ,  $\rho$ ,  $c$  に関係付けられる。したがって特に線型化近似の範囲では

$$\text{div } \mathbf{q}' = -\lambda_0 \Delta (p' - \rho' - c')$$

ただし、 $\mathbf{q}'$ ,  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $c'$  は基準点の値で無次元化した熱流ベクトル、圧力、密度、電離度の変動を表わす。 $\lambda_0$  は基準点の熱伝導パラメータで、対流項との比が  $O(P_r R_e)^{-1}$  の定数とみなされる ( $P_r$  は Prandtl 数,  $R_e$  は Reynolds 数)。

簡単のためにふく射損失を無視し、反応が Frozen していると仮定すれば、Aligned 磁場を含む流れの線型化した基礎式は次のようになる。

$$\lambda_0 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - M_f^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + Nu \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0$$



第2図 アルゴン電離気体の熱伝導率[15]

これは  $\lambda$  の程度に応じた変動を流れの場に加える。またその形からもわかるように、流れに直角な方向の速度プロファイルにも影響する。一般的な場合の詳細は今後の論文にゆずる。

## 7. ま と め

流れの非平衡が Boltzmann 方程式の衝突-ふく射項に原因することに注意し、それが一般化した MHD 方程式のどの部分に関係してくるか調べた。それは反応速度、電導率、電子-気体間のエネルギー交換、ふく射損失等のフラックスのわき出し-吸込みを通して、また熱伝導、拡散等の輸送係数を通して影響する。

これらの諸項は一般に複雑な内容をもっているが、ここでは線型化近似の範囲でそれらがどのように表わされまたは処理されるかを簡単に説明した。それらの結果を用いて非平衡性の MHD 流れへの影響を調べるとき、次のようなことがわかる。(i) 反応速度に伴う非平衡は(下流での累積効果を除き)流れに2次的効果をおよぼすに過ぎない。(ii) ふく射損失の効果は流れ方向の速度プロファイルを損失割合に比例して大きく変える可能性がある。

- (iii) 電導率は磁気 Reynolds 数の小さい線型化流れを考える限りでは一定とみなせる。  
(iv) 電子-気体間の温度差関係は電子のエネルギー式以外の関係式を電子温度を直接含まない形に書き表わすことによってすべての量が決定された後に電子温度を与える関係として処理できる。(v) 電離気体の熱伝導は異常に大きくなるいくつかの要素をもっている。そして流れの場にかなり影響する可能性がある。

1966年10月24日

## 参 考 文 献

- [1] Chapman, S. & Cowling, T.G.: The Mathematical Theory Non-Uniform Gases (Cambridge, 1962) 46, 321  
[2] Pai, S.I.: Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics (Springer, 1960) 6  
[3] Kulikovskiy, A.G. & Lyubimov, G.A.: Magnetohydrodynamics (Addison-Wesley, 1965) 27  
[4] Petschek, H. & Byron, S.: Ann. Phys., **1** (1957) 270  
[5] Kerrebrock, J.L.: AIAA Jour., **2** (1964) 1072  
[6] Bates, D.R., Kingston, A.E. & McWhirter, R.W.P.: Proc. Roy. Soc., **A 267** (1962) 297, **A 270** (1962) 155  
[7] Byron, S., Stabler, R.C. & Bortz, P.I.: Phys. Rev. Letters **8** (1962) 376  
[8] Byron, S., Borts, P.I. & Russel, G.R.: Proc. 4th Symp. Engi. Aspects MHD (1963) 93  
[9] Murasaki, T. & Morioka, S.: J. Phys. Soc. Japan, **20** (1965) 1474  
[10] Vincenti, W.G. & Kruger, C.H.: Introduction to Physical Gas Dynamics (Wiley, 1965) 436  
[11] Pai, S.I.: Radiation Gas Dynamics (Springer, 1966)  
[12] Spitzer, L.: Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, 1962) 138  
[13] Lin, S.C., Resler, E.L. & Kantrowitz, A.: J. Appl. Phys., **26** (1955) 96  
[14] Morioka, S.: J. Phys. Soc. Japan, **21** (1966) 177  
[15] Tan, C.W., Soo, S.L. & Bahadori, M.N.: Z. A. M. P. **16** (1965) 255