乱れの H 関数*

巽　友　正**　　池　田　紀　人**

H Function of Turbulence

By

Tomomasa TATSUMI and Norito IKEDA

Abstract: The H function of turbulence which represents the randomness of turbulence is defined in terms of the probability distribution of turbulent variables. The time derivative of the H function is calculated for turbulences both in incompressible viscous fluid and collisionless plasma.

It is found that the H function of turbulence increases monotonically in time for incompressible viscous fluid and stays constant for collisionless plasma. This conclusion may be interpreted as follows: the randomness of turbulence is not increased in time although turbulent fields usually become more and more complicated in time.

1. 乱れの H 関数

Vlasov plasma における一体分布関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ から作られる H 関数

$$H=\int f\ln f d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}$$

については $\dfrac{dH}{dt}=0$ なることが知られている．すなわち，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ の持つ不規則さの程度は，時間と共に変化しない．乱れた plasma に対しては，体系はこの H 関数で表わされたものとは違った種類の不規則さを含んでいると考えられる．乱れは，初期時刻における微小かく乱が成長した結果生じたものであるが，この微小かく乱の様子が，統計的にしか指定できないために，体系は以後の各時刻において，初期条件の，この不規則さに由来する不規則さを含んでいる．

この事情は，非圧縮粘性流体の乱れの場合と同様であるから，その時の Hopf[1]の取扱いを適用することができる．すなわち，乱れの問題は決定的方程式にしたがう変数 $\boldsymbol{X}$ が与えられた時，初期時刻におけるその変数の確率分布を仮定して，以後の時刻におけるその変数の確率分布を求めることに帰着する．

非圧縮粘性流体の場合は，確率変数 $\boldsymbol{X}$ として速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，方程式は Navier-Stokes 方程

---

* 第8回電磁流体力学シンポジウム（昭和41年2月25日）における講演題目は「Vlasov plasma の H 定理」であったが，この論文では題目を上のように改める．なお，講演者は池田紀人

** 京都大学理学部

式，Vlasov plasma の場合は $\boldsymbol{X}$ として，一体分布関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$，方程式は Vlasov 方程式をとればよい．分布密度を $P(\boldsymbol{X})$ とするとき，乱れの不規則さは $P(\boldsymbol{X})$ の中に含まれ，その関数形に依存するから，乱れの不規則さの指標として，乱れの H 関数

$$H=\int P(\boldsymbol{X})\ln P(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X} \tag{1}$$

をとるのが適当である．

確率変数 $\boldsymbol{X}$ に対する決定的方程式は，形式的に

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}] \tag{2}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{X}$ は一般には関数であり，$\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]$ は各種の演算を含む．

いま，$\boldsymbol{X}$ が n 次元ベクトル，$\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]$ が $\boldsymbol{X}$ の関数である場合を考える．確率保存の関係から，分布密度 $P(\boldsymbol{X})$ に対する方程式

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot(P(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]) \tag{3}$$

が導かれる．H の時間的変化の方程式は，これを用いて，

$$\frac{dH}{dt}=-\int P(\boldsymbol{X}, t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]d\boldsymbol{X} \tag{4}$$

の形に求められる．

2.　非圧縮粘性流体の乱れ

x, y, z 各方向に周期的な流れの場を考える．周期は 2π として一般性を失わない．このとき，速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ は Fourier 成分に分解できて，

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\sum_{\kappa}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa})e^{i\kappa\cdot x}$$

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa})$ に対する方程式は Navier-Stokes 方程式と連続の式から

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa})}{\partial t}=-\nu\kappa^2\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa})-i\sum_{\kappa'}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')\left\{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa}')-\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\kappa^2}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa}'))\right\} \tag{5}$$

$\mathrm{Re}V_i(\boldsymbol{\kappa})$，$\mathrm{Im}\,V_i(\boldsymbol{\kappa})j$；$(i=1, 2, 3)$を成分

とするベクトルを確率変数 $\boldsymbol{X}$ としてとれば，

（5）の右辺は $\boldsymbol{X}$ の関数となり，（4）に適用することができる．ただし，ここで $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ が少なくとも $\boldsymbol{x}$ の連続関数であり，$|\kappa_j|\to\infty$ のときに $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa})$ が十分早く 0 に収束するとして，（5）の右辺の無限和のうち，十分大きい $\boldsymbol{\kappa}$ までの有限和のみを考える．

このとき，有限次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に対する H 関数 $\int P(\boldsymbol{X})\ln P(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X}$ は $|\boldsymbol{\kappa}|$ のこの限界以上の波数成分における不規則さを無視した範囲内で，乱れの不規則さを表わしている．

$\boldsymbol{X}$ の各成分に対する $\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]$ は，（5）の右辺の実部と虚部をとることにより

$$\frac{\partial V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa})}{\partial t}=Q_{j,\kappa,1}$$

$$=-\nu\kappa^2V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa})+\sum_{\kappa'}\Big[\kappa_m V_{m,2}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')\Big(V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa}')-\frac{\kappa_j}{\kappa^2}\kappa_l V_{l,1}(\boldsymbol{\kappa}')\Big)$$

$$+K_m V_{m,1}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')\left(V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa}')-\frac{\kappa_j}{\kappa^2}\kappa_l V_{l,2}(\boldsymbol{\kappa}')\right)\Bigg]$$

$$\frac{\partial V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa})}{\partial t}=Q_{j,\kappa,2}$$

$$=-\nu\kappa^2 V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa})+\sum_{\kappa}\Bigg[\kappa_m V_{m,2}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')\left(V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa}')-\frac{\kappa_j}{\kappa^2}\kappa_l V_{l,2}(\boldsymbol{\kappa}')\right)$$

$$-\kappa_m V_{m,1}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')\left(V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa}')-\frac{\kappa_j}{\kappa^2}\kappa_l V_{l,1}(\boldsymbol{\kappa}')\right)\Bigg] \tag{6}$$

ただし

$$\mathrm{Re}\,V_j(\boldsymbol{\kappa})=V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa})$$
$$\mathrm{Im}\,V_j(\boldsymbol{\kappa})=V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa})$$

なお，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ が実であるための条件 $\boldsymbol{V}^*(-\boldsymbol{\kappa})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\kappa})$ より，$\boldsymbol{X}$ の成分としては $V_{j,s}(\boldsymbol{\kappa})$, $V_{j,s}(-\boldsymbol{\kappa})$，$s=1,2$ のどちらか一方だけをとる．

（4）の $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]$ は $\dfrac{\partial Q_{j,\kappa,s}}{\partial V_{j,s}(\boldsymbol{\kappa})}$; $j=1,2,3$; $s=1,2$ を計算し，j, s, $\boldsymbol{\kappa}$ について加え合せることによって得られる．

$$\frac{\partial V_{j,1}(-\boldsymbol{\kappa})}{\partial V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa})}=1, \qquad \frac{\partial V_{j,2}(-\boldsymbol{\kappa})}{\partial V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa})}=-1$$

に注意してこの計算を行なうと，

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial Q_{j,\kappa,1}}{\partial V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa})}=-3\nu\kappa^2+2(\kappa_m V_{m,2}(0)+\kappa_m V_{m,2}(2\boldsymbol{\kappa}))$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial Q_{j,\kappa,2}}{\partial V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa})}=-3\nu\kappa^2+2(\kappa_m V_{m,2}(0)-\kappa_m V_{m,2}(2\boldsymbol{\kappa}))$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial Q_{j,\kappa,1}}{\partial V_{j,1}(\boldsymbol{\kappa})}+\frac{\partial Q_{j,\kappa,2}}{\partial V_{j,2}(\boldsymbol{\kappa})}\right)=-6\nu\kappa^2+4\kappa_m V_{m,2}(0)$$

が得られる．

$$V_{m,2}(0)=\mathrm{Im}\int u_m(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=0$$

であるから，（4）は

$$\frac{dH}{dt}=6\nu\sum_{\kappa}\int\kappa^2 P(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\geq 0$$

となり，$\nu \fallingdotseq 0$である限り，乱れの H 関数は時間と共に単調に増加する．

この結果は，$|\boldsymbol{\kappa}|$ の上限が十分大きい限り，上限に無関係に成り立つから，無限大の波数成分での差異を区別しない範囲で，連続関数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の集合の上に与えられた確率分布のもつ不規則さは，時間と共に単調に減少することを表わしている．ただし，この H 関数増加の結果は，エントロピー増大（H 関数減少）の原理と矛盾するものではない．乱れた流体の運動に付随する H 関数は，熱的な H 関数と，乱れの H 関数の和として表わされ，乱れの H 関数が増大しても，熱的な H 関数の減少が，それを上まわることによって，全体の H 関数が減少し熱力学の第 2 法則が保たれる．

3. Vlasov plasma の乱れ

イオンが静止し，外部電場，外部磁場のない場合の非衝突プラズマを考える．

電子に対する一体分布関数 $f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)$ は次の Vlasov 方程式にしたがう．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=0$$

$$e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=n_0\iint\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{x}}\{f(\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{v}',\ t)-\delta(\boldsymbol{v}')\}d\boldsymbol{x}'d\boldsymbol{v}'$$

$$\phi=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\tag{7}$$

適当なスケール変換を行なったのち，f, $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{x}$ について周期 2π で周期的.

$|V_j|\geq\pi$; $j=1,\ 2,\ 3$ では $f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)=0$ であるとして各量を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ について Fourier 展開する.

$$f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)=\sum_{\kappa,\chi}g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)e^{i(\kappa\cdot x+\chi\cdot v)}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t)=\sum_{\kappa}\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\kappa},\ t)e^{i\kappa\cdot x}$$

$$\boldsymbol{v}=\sum_{\chi}\widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\chi})e^{i\chi\cdot v}$$

$g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$ に対する方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}g(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\chi},t)=-i\sum_{\chi'}\boldsymbol{\kappa}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\chi}')g(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}',t)$$

$$+i\sum_{\kappa'}\boldsymbol{\chi}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\kappa}',t)g(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}',\boldsymbol{\chi},t)\tag{8}$$

有限の $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\chi}$ に対する $\mathrm{Re}g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$, $\mathrm{Im}\,g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$ からなるベクトルを確率変数 $\boldsymbol{X}$ として用いる． $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\kappa},\ t)$ は $g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$ に依存するが，その形は

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\kappa},\ t)=\begin{cases}(2\pi^3)\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\kappa})g(\boldsymbol{\kappa},\ 0,\ t), & \boldsymbol{\kappa}\neq0\\(2\pi^3)\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\kappa})\{g(\boldsymbol{\kappa},\ 0,\ t)-1\}, & \boldsymbol{\kappa}=0\end{cases}$$

ただし，$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\kappa})$ は $\dfrac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{x}}$ の Fourier 展開係数で，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\sum_{\kappa}\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\kappa})e^{i\kappa\cdot(x-x')}$$

$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\kappa})$ は $\boldsymbol{\kappa}\to0$ の時発散するから $\boldsymbol{\kappa}=0$ に対する表示は適当ではないが，

$$g(0,\ 0,\ t)=\iint f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}=1$$

がすべての $f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)$ について成立するから，$g(0,\ 0,\ t)$ は確率係数 $\boldsymbol{X}$ の成分に含めないとすると，$\boldsymbol{E}(0,\ t)=\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t)d\boldsymbol{x}<\infty$ は確率変数 $\boldsymbol{X}$ に無関係な量である.

$$g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)=\mathrm{Re}g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$$

$$g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)=\mathrm{Im}\,g(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{\kappa},\ t)=\mathrm{Re}\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\kappa},\ t)$$
$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{\kappa},\ t)=\mathrm{Im}\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\kappa},\ t)$$
$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1(\boldsymbol{\chi})=\mathrm{Re}\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\chi})$$
$$\tilde{\boldsymbol{v}}_2(\boldsymbol{\chi})=\mathrm{Im}\,\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\chi})$$

と書いて，$g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$，$g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$ に対する方程式を（8）から導く．ただし，確率変数$\boldsymbol{X}$の成分としては，$g_s(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)$，$g_s(-\boldsymbol{\kappa},\ -\boldsymbol{\chi},\ t)$；$s=1,\ 2$ のどちらか一方をとる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)&=\sum_{\chi'}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_1(\boldsymbol{\chi}')g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}',\ t)+\boldsymbol{\kappa}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_2(\boldsymbol{\chi}')g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}',\ t))\\&\quad-\sum_{\kappa'}(\boldsymbol{\chi}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{\kappa}',\ t)g_2(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}',\ \boldsymbol{\chi},\ t)+\boldsymbol{\chi}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{\kappa}',\ t)g_1(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}',\ \boldsymbol{\chi},\ t))\\&=Q_{1,\kappa,\chi}(\boldsymbol{X})\\\frac{\partial}{\partial t}g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)&=\sum_{\chi'}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_2(\boldsymbol{\chi}')g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}',\ t)-\boldsymbol{\kappa}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_1(\boldsymbol{\chi}')g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}',\ t))\\&\quad-\sum_{\kappa'}(\boldsymbol{\chi}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{\kappa}',\ t)g_2(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}',\ \boldsymbol{\chi},\ t)-\boldsymbol{\chi}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{\kappa}',\ t)g_1(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}',\ \boldsymbol{\chi},\ t))\\&=Q_{2,\kappa,\chi}(\boldsymbol{X})\end{aligned}\tag{9}$$

$$\frac{\partial g_1(-\boldsymbol{\kappa},\ -\boldsymbol{\chi},\ t)}{\partial g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)}=1\qquad\qquad\frac{\partial g_2(-\boldsymbol{\kappa},\ -\boldsymbol{\chi},\ t)}{\partial g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)}=-1$$

に注意して，

$$\frac{-\partial Q_{s,\kappa,\chi}(\boldsymbol{X})}{\partial g_{s(\kappa,\chi,t)}};\qquad s=1,\ 2$$

を計算すると，

$$\frac{\partial Q_{1,\kappa,\chi}}{\partial g_1(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)}=\frac{\partial Q_{2,\kappa,\chi}}{\partial g_2(\boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\chi},\ t)}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_2(0)-\boldsymbol{\chi}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(0)$$
$$\tilde{\boldsymbol{v}}_2(0)=\mathrm{Im}\int\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}=0$$
$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(0)=\mathrm{Im}\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0$$

であるから，（4）の $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]=0$，

ゆえに

$$\frac{dH}{dt}=-\int P\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]d\boldsymbol{X}=0$$

が得られた．ここで $\int P\boldsymbol{X}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X}]d\boldsymbol{X}$ の積分は $\boldsymbol{X}$ の全空間にわたっての積分ではなく，$f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)\geq 0$ なる $\boldsymbol{X}$ についての積分であるが，被積分関数$=0$ であるから，このことによって結果に差異の生ずることはない．

この結果，非衝突プラズマでは乱れの不規則さは初期に与えられた値のままで増加も，減少もしない，という結論が得られた．

4. 議　　論

流体における乱れでは，粘性のある限り，乱れの不規則さは減少し，非衝突プラズマでは

乱れの不規則さが変らないことがわかった．このことは乱れは場の複雑さを増すだけで，不規則さを増すものではないことを意味している．

1966年10月27日

参考文献

[1] Hopf, E.: J. Rat. Mech. Analysis, **1**, 87 (1952)