プロペラの合理的設計法

所員 河田三治

1. 吾々が航空機の翼を撰定するにあたつて、如何なる方法を取てゐるかを考へてみやう。翼型(aero foil)に就いては無數の風洞實驗の結果が發表されてゐて、その延長率、入射角、揚力、抗力、モーメントの値が與へられてゐる。翼の長さ、或は深さには或る制限ができてくるわけであるから、實驗された、そのまゝの延長率(aspect ratio)の翼は實際に使用できない場合が多い。延長率が變れば、翼の性質もまたちがつてくるのであるから、實驗で出た値をそのまゝ使用できない。然し此の場合には、一つの延長率の性能を任意の延長率に換算する式があつて、或一つの延長率の翼に就いて實驗しておけば、どんな延長率のものでもその性能がわかる。故に翼の撰定は、實驗を基礎として、簡單な計算で容易に求められる。

他方プロペラの場合を考へてみやう。翼の場合の入射角に對應するものは $\frac{v}{nD}$ (V—速度、n—回轉數、D—直徑)であり、揚力係數、抗力係數に對應するものは、推力係數 T_c、トルク係數 Q_c であつて、プロペラの實驗の結果は、通常 T_c, Q_c 及効率 η を $\frac{v}{nD}$ の函數としてあげてある。プロペラの實驗の結果も隨分多く發表されてゐるが、プロペラの撰定にあたつて、與へられた $\frac{v}{nD}$ で T_c=與へられた値、η=最大(例へば)の條件にあはねばならないので、實驗そのまゝのうちからは、なかなかうまいものが見付からない。此の爲に、プロペラの設計と云へば、適當な、理論を基として、プロペラの翼素たる翼型の實驗性能を基として、初めるのがならはしとなつてゐる。プロペラの理論として、まだ完全なるものなくて、何れも何等かの單純化假定をおいてゐる。そのうちで最も完全に近い渦理論に於ても、翼相互の干渉、尖端の影響等を考へに入れることができない。

斯の如き理論を基として、根本たる翼素(blade element)から遂々と設計を初めるのでは、實際とあはぬ方が寧ろ當然である。最も合理的な設計法としては、翼の撰定にあたつてとつた様に、實驗の結果と、最後に求めるものとの間の gap を出來るだけ少くして、その gap を理論でうめるものでなければならない。之が爲には、實驗されて性能のわかつてゐるプロペラのうちで最も要求に近いものを取り、理論によつて求める性能を持つ様に改造することにしなければならない。

以下述べるところは、此の考へから出發した設計法で、概要は、且つて昭和二年十月の造船協會々報に載せたことがあるものである。

2. プロペラの渦の理論

渦の理論に就いては既に發表してあるから(1)、此處には重ねて述べないことにして、唯根本の假定と、最後に到達した結果とのみをあげてみることゝする。

所謂流入速度 (inflow velocity) の計算にあたつては、その攻擊面 (disc area) の上の圓周に沿ふての平均値をとる。翼の數は無限とする、自由渦のピツチをきめるには、流入速度が進行速度に比して小さいものとして省略する。又同じ目的の爲に後流の縮みを省略する。此等が根本假定であるが、その結果の方は

W_a——軸方向流入速度

W_t——切線方向流入速度

ρ——空氣の密度

N——翼の數

v——プロペラの進行速度

R——半徑

r——任意翼素に到る中心からの距離

ω——角速度

Γ——循環

c_{x0}——翼素の形狀抵抗係數、換言すれば、延長率 ∞ のときの抵抗係數

t——翼素の幅

T——推力

Q——トルク

とすれば

$$W_a=\frac{N\omega\Gamma}{4\pi v}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$W_t=\frac{N\Gamma}{4\pi r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$dT=\left[\rho NI\left(\omega r-\frac{N\Gamma}{4\pi r}\right)-\frac{1}{2}\,c_{x0}\rho\,Nt\,v\sqrt{v^2+\omega^2r^2}\right]dr\quad\cdots\cdots(3)$$

$$dQ=\left[\rho N\Gamma r\left(v+\frac{N\omega\Gamma}{4\pi v}\right)+\frac{1}{2}\,c_{x0}\,\rho Nt\,\omega r^2\sqrt{r^2+\omega^2r^2}\right]dr\quad\cdots\cdots(4)$$

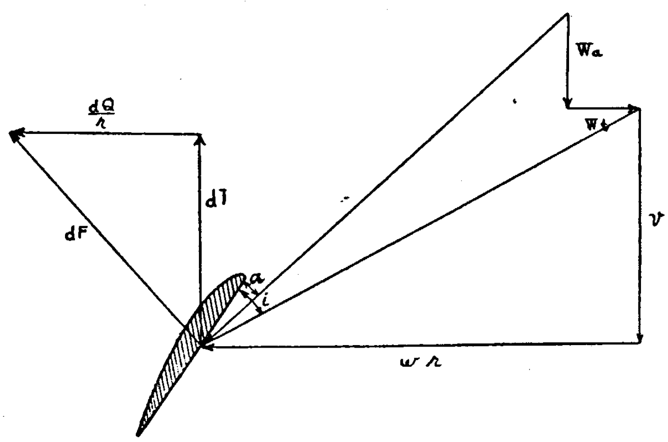
(1) 造船協會會報、第四十號、昭和二年十月。
S. Kawada: The Vortex Theory of Airscrew and Some of its Applications.

となり、一翼素に働く諸力を考へてみると、第一圖の如くになる、而して實效入射角 α は

$$\alpha = i - \beta \doteqdot \frac{N\Gamma}{4\pi vr} \quad \text{......................................}(5)$$

となる。

之等が渦の理論より導き出された根本式である。(3) 及 (4) を積分して、全體の推力、トルクを求めるには Γ の r に對しての分配をきめなければならない。



第　一　圖

實際のプロペラに於ては、ボス及尖端に於ては循環は順次に零におちなければならない。例へば循環の形として

$$\Gamma = \Gamma_0 r\,(R-r), \qquad \Gamma_0 = \text{定數} \qquad (6)$$

と取ると、上の條件に適合することゝなる。實際のプロペラの循環の分配は此の通りでないかも知れないが、翼型の延長率換算式に、循環の形が楕圓形であるとして、一般の形の翼に應用して、實用上差支へないと同じに、これから取扱ふ問題に對しては (6) の循環を採用して差支へないと私は思ふ。

さて (6) の如き循環を假定すれば (3), (4) 式より全體の推力及トルクは夫々、次の如くに計算される。但し、簡單にする爲 boss の存在を省いてしまつた。

$$T = \int_0^R \left[\rho N\Gamma_0 r\,(R-r)\left\{\omega r - \frac{N\Gamma_0\,(R-r)}{4\pi}\right\} - \frac{1}{2}\,c_{x0}\,\rho N t\, v\sqrt{v^2+\omega^2 r^2}\,\right] dr$$

$$= \rho N\Gamma_0\left(\frac{\omega R^4}{12} - \frac{N\Gamma_0 R^4}{48\pi}\right) - \frac{1}{4}\,c_{x0}\,\rho N v^2\,\varepsilon R^2\,\sigma_1 \quad \text{......................................}(7)$$

$$Q=\int_0^R\left[\rho N\Gamma_0 r^2(R-r)\left\{v+\frac{N\omega\Gamma_0 r(R-r)}{4\pi v}\right\}+\frac{1}{2}c_{x0}\rho N\omega r^2\sqrt{v^2+\omega^2r^2}\right]dr$$

$$=\rho N\Gamma_0\left(\frac{vR^4}{12}+\frac{N\omega\Gamma_0R^6}{240\pi v}\right)+\frac{1}{8\omega}c_{x0}\rho Nv^3\varepsilon R^2\sigma_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\eta=\frac{vT}{\omega Q}=\frac{1-\dfrac{N\Gamma_0}{4\pi\omega}-\dfrac{c_{x0}v^2\varepsilon\sigma_1}{\omega R^2\Gamma_0}}{1+\dfrac{N\omega\Gamma_0R^2}{20\pi v^2}+\dfrac{3c_{x0}v^2\varepsilon\sigma_2}{2\omega R^2\Gamma_0}}$$

但し

$$Z=\frac{\omega R}{v}$$

$$\varepsilon=\frac{t}{R}\ \text{の平均}$$

$$\sigma_1=\sqrt{1+Z^2}+\frac{1}{Z}\log e\left(Z+\sqrt{1+Z^2}\right)$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_1+\sqrt{(1+Z^2)^3}$$

推力の式 (7) に於ては第二、第三項は第一項に比して小さいもので通常 2~3% を出でないから T の大約の値として

$$T\fallingdotseq\rho N\Gamma_0\frac{\omega R^4}{12}$$

$$\Gamma_0=\frac{12T}{\rho N\omega R^4}=\frac{6\pi v^2T_c}{N\omega R^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\left(T_c=\frac{T}{\frac{1}{2}\rho v^2\pi R^2}\right)$$

となるから、効率の式に入れて、効率は次の如く T_c の函数で示される。

$$\eta=\frac{1-\dfrac{3T_c}{2Z^2}-\dfrac{Nc_{x0}\varepsilon\sigma_1}{2\pi T_c}}{1+\dfrac{3T_c}{10}+\dfrac{Nc_{x0}\varepsilon\sigma_2}{4\pi T_c}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

3. いよいよ、本題に入ることゝして、先づ次の様な條件を滿足する一群のプロペラを考へて、それらの間の關係を求めてみる。

即　1° 同一半徑を有し、

2° 同一半徑では相似の斷面 (profile) を持つ。

3° 同一の働きの條件即、同一の v, ω, の値に對して、相似な循環の分布を有する。

4° 實効入射角は同一とする。

文字の下に 1 及 2 の數字を附して、斯の如き條件を滿す任意二つのプロペラの諸量をあらはせば、先づ

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\frac{t_1}{t_2}$$

なる關係は明かである。

次に 4° の條件を滿す爲に

$$\theta_1-\frac{N_1\Gamma_1}{4\pi vr}=\theta_2-\frac{N_2\Gamma_2}{4\pi vr}$$

(10) の關係を入れて

$$\theta_1-\frac{3(1-r/R)\ Tc_1}{2Z}=\theta_2-\frac{3(1-r/R)\ Tc_2}{2Z}\quad\cdots\cdots(11)$$

次に　　$t_2=\lambda t_1$　とおけば　$\Gamma_2=\lambda\Gamma_1$ なる故

$$T_2=\int_0^R\left[\rho N\lambda\Gamma_1\left(\omega r-\frac{N\lambda\Gamma_1}{4\pi r}\right)-\lambda\frac{1}{2}c_{x0}\rho Nt_1v\sqrt{v^2+\omega^2r^2}\right]dr$$

$$=\lambda T_1-\lambda(\lambda-1)\int_0^R\rho N\Gamma_1\frac{N\Gamma_1}{4\pi r}dr\quad\cdots\cdots(12)$$

(6) を入れて、これは次の如く書くことができる

$$Tc_2=\lambda Tc_1-\lambda(\lambda-1)\frac{3\,Tc_1^2}{2Z^2}\quad\cdots\cdots(13)$$

第二項は小さいから略すれば

$$Tc_2=\lambda Tc_1$$

$$\lambda=\frac{Tc_2}{Tc_1}$$

之が、此の群のプロペラの同の翼素の幅及、翼角の間の關係である。

次に第二の群として

1° 半徑等しく、

2° 同一の半徑では同一の循環を有し、

3° 實効入射角等しく、

4° 併し、ω 及 v は相等しくない。

と云ふ條件を有するプロペラの群を考へることゝする。前と同じく、同じ群のうちから、任意の二つを取出して

$$\lambda=\frac{t_2}{t_1}\quad とすれば$$

循環等しい條件 2° から

$$\Gamma_1=\Gamma_2=\frac{1}{2}c_z t_1\sqrt{v_1^2+\omega_1^2 r^2}=\frac{1}{2}c_z t_2\sqrt{v_2^2+\omega_2^2 r^2}$$

$$\therefore\qquad \lambda=\frac{t_2}{t_1}=\frac{\sqrt{v_1^2+\omega_1^2 r^2}}{\sqrt{v_2^2+\omega_2^2 r^2}}$$

實際の應用に際しては、$v_1=v_2,\ \ \omega_1\neq\omega_2$ とするか、$v_1\neq v_2,\ \ \omega_1=\omega_2$ とするのが都合がよい。

$v_1=v_2,\ \ \omega_1\neq\omega_2$ のときは

$$\lambda=\frac{v_1\sqrt{1+Z_{r1}^2}}{v_2\sqrt{1+Z_{r2}^2}}=\frac{\sqrt{1+Z_{r1}^2}}{\sqrt{1+Z_{r2}^2}}\quad\cdots\cdots\cdots(15)$$

$v_1\neq v_2,\ \ \omega_1=\omega_2$ のときは

$$\lambda=\frac{\omega_1 r\sqrt{1/Z_{r1}^2+1}}{\omega_2 r\sqrt{1/Z_{r2}^2+1}}=\frac{\sqrt{1/Z_{r1}^2+1}}{\sqrt{1/Z_{r2}^2+1}}\quad\cdots\cdots\cdots(16)$$

但
$$Z_r=\frac{\omega r}{v}$$

次に、實効入射角の等しい條件から

$$\theta_2-tg^{-1}\frac{v_2}{\omega_2 r}-\frac{N_2\Gamma}{4\pi v_2 r}=\theta_1-tg^{-1}\frac{v_1}{\omega_1 r}-\frac{N_1\Gamma}{4\pi v_1 r}$$

或は
$$\theta_2-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r2}}-\frac{N_2\Gamma}{4\pi v_2 r}=\theta_1-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}}-\frac{N_1\Gamma}{4\pi v_1 r}$$

(6) を入れて

$$\theta_2-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r2}}-\frac{3Tc_1(1-r/R)}{2Z_1}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)=\theta_1-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}}-\frac{3Tc_1(1-r/R)}{2Z_1}$$

$v_1=v_2$, $\omega_1\neq\omega_2$ のときは

$$\theta_2-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r2}}=\theta_1-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

$v_1\neq v_2$, $\omega_1=\omega_2$ のときは

$$\theta_2-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}}-\frac{3Tc_1(1-r/R)}{2Z_1}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)=\theta_1-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}}-\frac{3Tc_1(1-r/R)}{2Z_1}\quad(18)$$

推力係數の變化は

$$T_2=\int_0^R\left[\rho N\Gamma\left(\omega_2 r-\frac{N\Gamma}{4\pi r}\right)-\frac{1}{2}c_{xo}\rho Nt_2v_2\sqrt{v_2^2+\omega_2^2r^2}\right]dr$$

循環と、實効入射角は相等しいと假定したから

$$\frac{1}{2}c_{xo}\rho Nt_2\sqrt{v_2^2+\omega_2^2r^2}=\frac{1}{2}c_{x0}\rho Nt_1\sqrt{v_1^2+\omega_1^2r^2}$$

故に

$$\frac{1}{2}c_{xo}\rho Nt_2v_2\sqrt{v_2^2+\omega_2^2r^2}=\frac{1}{2}c_{xo}\rho Nt_1v_1\sqrt{v_1^2+\omega_1^2r^2}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

$$T_2=\frac{\omega_2}{\omega_1}\int_0^R\left[\rho N\Gamma\left(\omega_1 r-\frac{N\Gamma}{4\pi r}\right)-\frac{1}{2}c_{xo}\rho Nt_1v_1\sqrt{v_1^2+\omega_1^2r^2}\right]dr$$

$$+\int_0^R\frac{1}{2}c_{xo}\rho Ntv_1\sqrt{v_1^2+\omega_1^2r^2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-\frac{v_2}{v_1}\right)dr+\int_0^R\rho N\Gamma\frac{N\Gamma}{4\pi r}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)dr$$

$$=\frac{\omega_2}{\omega_1}T_1+\frac{1}{4}c_{xo}\rho Nv_1^2\varepsilon_1R^2\sigma_{11}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-\frac{v_2}{v_1}\right)+\int_0^R\rho N\Gamma\frac{N\Gamma}{4\pi r}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)dr$$

(6) 及 (9) とから

$$Tc_2=\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2Tc_1+\frac{1}{4}c_{xo}\varepsilon_1\sigma_{11}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-\frac{v_2}{v_1}\right)+\frac{3Tc_1^2}{2Z_1^2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)\quad(19)$$

然し通常第一項のみが優勢であるから(1)

$$Tc_2 \doteqdot \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 Tc_1 \quad \cdots\cdots(19')$$

と見なすことが出來る。

故に $v_1=v_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$ のときは

$$Tc_2=\frac{\omega_2}{\omega_1}\,Tc_1=\frac{Z_2}{Z_1}Tc_1 \quad \cdots\cdots(20)$$

$v_1 \neq v_2$, $\omega_1=\omega_2$ のときは

$$Tc_2=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 Tc_1=\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 Tc_1 \quad \cdots\cdots(21)$$

之が吾々の求めてゐる關係である。

効率の方の關係は如何と云ふに、兩者は同一の實効入射角で働いてゐるから、c_{x0} の値は同じである。

故に効率の式は夫々

$$\eta_1=\frac{1-\dfrac{3Tc_1}{2Z_1^2}-\dfrac{Nc_{x0}\,\varepsilon_1\,\sigma_{11}}{2\pi Tc_1}}{1+\dfrac{3Tc_1}{10}+\dfrac{Nc_{x0}\,\varepsilon_1\,\sigma_{21}}{4\pi Tc_1}} \quad \cdots\cdots(22)$$

$$\eta_2=\frac{1-\dfrac{3Tc_2}{2Z_2^2}-\dfrac{Nc_{x0}\,\varepsilon_2\,\sigma_{12}}{2\pi Tc_2}}{1-\dfrac{3Tc_2}{10}+\dfrac{Nc_{x0}\,\varepsilon_2\,\sigma_{22}}{4\pi Tc_2}} \quad \cdots\cdots(23)$$

此等の式にして、Tc_1, Tc_2, Z_1, Z_2, σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, は既知であるから、何れか一方の η がわかれば未知なる c_{x0} の値を知り、他の効率を計算することが出來る。尚、此の効率の關係は第一、第二群を通じて成立する。

4. 以上求めた關係は、次の如くにして、プロペラの設計に應用できる。航空機の進行速度 v, プロペラの角速度 ω, 半徑 R, 推力 T（即航空機の抵抗）を與へられたものとして、此等の條件を滿足して、その時効率最大になる、プロペラが入要であるとする。

模型實驗なり、實物實驗なりで、性能のわかつたプロペラのうちから色々さがして、すべての條件が一致するもの見付かれば、問題はそれきりであるが、今假に、v, ω, R の與へられた値で効

(1) 第二、第三項も計算に入れるときに、C_{x0} の値がわかつてゐないが、これは効率の式から計算できる。後の効率の式參照。

率最大になるが、唯推力 T の値が要求してゐるものと違つてゐるプロペラがあるものとする。然らば、此のプロペラと要求してゐるプロペラとは v, ω, R が同一で、T だけ異るのであるから、同一の第一群に屬してゐることゝなる。故に

$$t_2 = t_1 \times \frac{Tc_2}{Tc_1} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\theta_2 - \frac{3(1-r/R)\,Tc_2}{2Z} = \theta_1 - \frac{3(1-r/R)\,Tc_1}{2Z} \quad \cdots\cdots (15)$$

の關係で、既知の t_1, ϑ_1 を基として計算できる。此の改造にあたつては、實効入射角、循環の分配の形が變らぬものとしたから、改造に得たプロペラも最大効率に近い狀態で働くことゝなる。その効率は、(22) 及 (23) の式で求められる。

次に、同じ v, ω, R の値で最大効率になる樣なものが見あたらないものとする。此の場合には、R と v 又は ω の何れかを與へられた値にとれば、ω 又は v は與へられた値とは異る値で、効率最大になることゝなる。

求めるプロペラは Z_2 の値で最大効率が望ましいのに、性能の知れてゐるプロペラの方は、Z_1 の値で効率最大になつてゐる。Z_1 のとき効率最大と云ふことは此のときの循環の分配も適當であり、又形狀、抵抗の値も小さいことを示してゐるのであるから、此の循環の分配をそのまゝ變えず又實効入射時も變えずに Z_2 のとき働く樣に、翼の幅及翼角を變えて得たプロペラはその効率最大とはゆかずとも、それに近いものである。

此の二つのプロペラは前にあげた第二群のものであるから (15) 乃至 (21) の式で既知のプロペラから求めることができる。効率は矢張り、(22), (23) の式で求められる。

以上述べた方法が、私が最も合理的な設計法と思つてゐるところであるが、次に例を以て明かにしやう。

次の條件を滿足するプロペラが必要であるとする。

$$\begin{cases} T = 310 \text{ キログラム} \\ v = 53 \text{ 米/秒} \\ \omega = 188 \text{ ラヂアン } (=1800\ r.p.m.) \\ \rho = \dfrac{1}{8} \\ R = 1.25 \text{ 米} \\ \text{効 率 最 大} \end{cases}$$

此の場合には、$\dfrac{v}{nD}=0.707$, $Tc=0.358$ となるから、性能のわかつてゐるプロペラのうちから、$\dfrac{v}{nD}=0.707$, $Tc=0.358$ で効率最大になるものを撰べばよいのである。

Durand の 124 號プロペラは $R=1.25$ にとれば $\dfrac{v}{nD}=0.707$ で最大効率 0.80 を示してゐるが Tc の値が異つて 0.25 となつてゐる。故に此のプロペラは第一の方法に依つて、効率を最大に保ちながら改造できる。

即

$$t_2=t_1\times\frac{Tc_2}{Tc_1}=1.43\,t_1$$

$$\theta_2-\frac{3(1-r/R)\,Tc_2}{2Z}\times 57.3=\theta_1-\frac{3(1-r/R)\,Tc_1}{2Z}\times 57.3$$

$$\theta_2=\theta_1+2.08(1-r/R)$$

で翼角、翼幅を求めてみると

r	t_1	t_2	θ_1	θ_2
0.278	0.208	0.298	45.0°	46.6°
0.486*	0.224	0.321	29.8	31.1
0.695	0.218	0.312	22.0	22.9
0.903	0.186	0.266	17.2	17.8
1.111	0.132	0.189	14.0	14.2

効率は如何と云ふに、元の Durand のプロペラに就いて、

$$Tc_1=0.25,\quad Z=4.44,\quad \eta_{max}=0.80$$

である故

$$\eta_1=0.80=\frac{1-\dfrac{3Tc_1}{2Z^2}-\dfrac{Nc_{x_0}\varepsilon_1\sigma_1}{2\pi Tc_1}}{1+\dfrac{3Tc_1}{10}+\dfrac{Nc_{x_0}\varepsilon_1\sigma_2}{4\pi Tc_1}}$$

$$Nc_{x_0}\,\varepsilon_1=A_1 \qquad \text{とおけば}$$

$$0.80=\frac{0.981-3.22\,A_1}{1.075+31\,A_1}$$

$$A_1=0.00432$$

改造して得たプロペラは元と同じ實効入射角で働いてゐるから、c_{x0} は等しく、又 N も等しく、t_2 は t_1 の 1.43 倍である故

$$A_2=1.43\times A_1=0.00618$$

故に効率は (23) により

$$\eta_2=\frac{1-\dfrac{3Tc_2}{2Z^2}-\dfrac{0.00618\,\sigma_1}{2T\pi c_2}}{1+\dfrac{3Tc_2}{10}+\dfrac{0.00618\,\sigma_2}{4\pi Tc_2}}$$

$$=0.773$$

次の例として、基本プロペラに

$$R=1.25$$

$$\frac{v}{nD}=0.65$$

$$Tc=0.278$$

$$\eta=0.778$$

(Technical Reports, Research Committee. 1922—1923. 頁 194 参照)

なる性能を有するものをとることゝしやう。

これは最大効率に對應する $\dfrac{v}{nD}$ の値が要求するものと異るので、第二の方法で改造しなければならない。

$\dfrac{v}{nD}$ の相異が v より來るものとして、$\dfrac{v}{nD}=0.707$ で同じ循環を有する様に改造すれば

$$t_2=t_1\times\frac{\sqrt{\dfrac{1}{Z_{r1}^2}+1}}{\sqrt{\dfrac{1}{Z_{r2}^2}+1}}$$

$$Tc_2=\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 Tc_1=0.843\times Tc_1=0.235$$

$$\theta_2-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r2}}-\frac{3Tc_1(1-r/R)}{2Z_1}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)\times 57.3=\theta_1-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}}-\frac{3Tc_1(1-r/R)}{2Z_1}\times 57.3$$

$$\theta_2-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r2}}-4.55\left(1-\frac{r}{R}\right)=\theta_1-tg^{-1}\frac{1}{Z_{r1}}-4.95\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

r	t_1	t_2	θ_1	θ_2
0.375	0.169	0.165	36.6°	38.6°
0.562	0.203	0.201	26.3	28.1
0.75	0.205	0.204	20.4	21.8
0.938	0.181	0.180	16.5	17.6
1.125	0.127	0.127	13.9	14.9

斯の如く、求められたプロペラは次の性能を持つことゝなる。

$$\frac{v}{nD}=0.707, \qquad Tc=0.[illegible]35, \qquad \eta=\text{最大}$$

要求してゐるものと異るのは、唯 Tc の値のみとなつた。故に前例の方法で更に之を改造すればよい。その結果は θ_3, t_3 で翼角及翼幅をあらはせば

r	t_3	θ_3
0.375	0.251	40.3°
0.562	0.306	29.4
0.75	0.310	22.8
0.938	0.274	18.2
1.125	0.193	15.1

効率を計算するには、元のプロペラに就て

$$\eta_1=0.778=\frac{1-\dfrac{3Tc_1}{2Z_1^2}-\dfrac{Nc_{xo}\varepsilon_1\sigma_{11}}{2\pi Tc_1}}{1+\dfrac{3Tc_1}{10}+\dfrac{Nc_{xo}\varepsilon_1\sigma_{21}}{4\pi Tc_1}}$$

$$=\frac{0.983-3.1A_1}{1.083+35.5A_1}$$

$$\therefore \qquad A_1=Nc_{xo}\varepsilon_1=0.00456$$

最後に得たプロペラの幅は元の 1.52 倍になつてゐるから、$A_3=Nc_{xo}\varepsilon_3$ の値も元の 1.52 倍にならなければならない。

即 $$A_3=0.00692$$

故に其の效率は

$$\eta_3=\frac{1-\dfrac{3\,Tc_3}{2Z_3^2}-\dfrac{A_3\,\sigma_{13}}{2\pi Tc_3}}{1+\dfrac{3\,Tc_3}{10}+\dfrac{A_3\,\sigma_{23}}{4\pi Tc_3}}$$

$$=\frac{0.957}{1.257}=0.761$$

以上は $\dfrac{v}{nD}$ の値の相異が v のみによるものとしての計算であるが、n (或に ω) のみによるものとしても、同じ結果に到着する。Tc_2 の計算にあたつての省略の爲「(19′) により」極めて小さい相異が生ずるが、全體からみてたいしたことはない。

5. 最後に、此の方法で改造したものがどれほど實際と一致するかを驗べてみやう。英國で行はれたプロペラの實驗のうちに、一定の位置の翼素は同じ斷面を有し、翼角のみの異るもの、及び翼角同一で、斷面相似であるが、幅が異るものに就いて實驗したものがある。(Technical Reports Research Committee, 1922—1923. vol. 1) これに就いて、以上の方法を check することにしやう。

實驗のうちから五本を撰ぶ、そのうち第一號、第四號、第五號は、斷面同一であるが、翼角異り、第二號、第三號は翼角同一で、幅 t が異るものとする。今假に、すべてのプロペラの直徑を 1 米としやう。然るときは、翼角、翼幅は次の樣になる。

中心からの距離	0.15米	0.225	0.30	0.375	0.45	
第一號プロペラ	27°54′ 0.0676米	19°24′ 0.0812	14°48′ 0.082	12° 0′ 0.0722	10° 0′ 0.0508	θ t
第二號	27°54′ 0.1015	19°24′ 0 1217	14°48′ 0.123	12° 0′ 0.1082	10° 0′ 0.0762	θ t
第三號	27°54′ 0.0507	19°24′ 0.0609	14°48′ 0.0615	12° 0′ 0.0542	10° 0′ 0.0381	θ t
第四號	17°36′ 0.0676	12° 0′ 0.0812	9° 0′ 0.082	7°15′ 0.0722	6° 0′ 0.0508	θ t
第五號	36°36′ 0.0676	26°18′ 0.0812	20°24′ 0.082	16°30′ 0.0722	13°54′ 0.0508	θ t

第一號プロペラを標準として、第二號以下第五號に到るまでのプロペラを第一號と同じ性能を持つ樣に改造して、この結果を比較してみやう。第一號は $\frac{v}{nD}=0.456$ で最大效率 0.734 となり、そのときの推力係數 $T_c=0.689$ であるから、外のプロペラを皆 $\frac{v}{nD}=0.456$, $T_c=0.689$ になる樣に改造することになるが、各プロペラの效率最大の處を基礎として改造すると、第一號とは翼角、翼幅共に異るものができて、比較に不便であるから、翼幅が殆んど同じ大きさになる樣に、改造の基礎となる $\frac{v}{nD}$ の値を、種々ためして、丁度よいところを採用した。その値は次の樣になる。

	第二號	第三號	第四號	第五號
$\frac{v}{nD}$	0.405	0.48	0.23	0.665
Z	7.76	6.54	13.65	4.73
効率	0.648	0.738	0.50	0.773
T_c	0.979	0.354	0.204	0.250
最大効率になる $\frac{v}{nD}$	0.475	0.456	0.300	0.624

之を基礎として、改造してみると、次の表に示す樣な結果になる。

中心からの距離	0.15米	0.225	0.30	0.375	0.45	
第一號プロペラ	27°54′	19°24′	14°48′	12° 0′	10° 0′	θ
	0.0376	0.0812	0.082	0.0722	0.0508	t
第二號プロペラ	27°34′	18°59′	14°23′	12°15′	10°30′	θ
	0.0667	0.0811	0.082	0.0726	0.0512	t
第三號プロペラ	27°59′	19°29′	14°43′	12° 0′	9°45′	θ
	0.0676	0.0808	0.0816	0.0718	0.0506	t
第四號プロペラ	25°21′	18°50′	13° 0′	11° 5′	9°50′	θ
	0.0626	0.0781	0.0801	0.0713	0.0502	t
第五號プロペラ	28°41′	20°13′	15°19′	12°15′	10° 0′	θ
	0.0730	0.0836	0.0828	0.0726	0.0506	t

效率は

第一號	第二號	第三號	第四號	第五號
0.734	0.730	0.701	0.731	0.69

比較をわかり易くする爲、第一號プロペラの θ, t を各半徑につき 100 ととり、他のプロペラの θ, t をこれに對する割合であらはしてみると

中心からの距離	0.15	0.225	0.30	0.375	0.45	
第一號プロペラ	100	100	100	100	100	θ
	100	100	100	100	100	t
第二號プロペラ	99	98	97	102	105	θ
	98.7	99.9	100.2	100.6	100.7	t
第三號プロペラ	100.5	100.5	100	100	98	θ
	100	99.5	99.5	99.5	99.5	t
第四號プロペラ	91	97	88	92.5	100	θ
	92.6	96.2	97.6	98.7	99	t
第五號プロペラ	103	104	103	102	100	θ
	108	103	101	100.5	99.7	t

效　率

第一號	第二號	第三號	第四號	第五號
100	99.5	95.5	99.5	94.0

之によつてみれば $\frac{v}{nD}$ の値が標準の第一號とあまり異らない、第二號、第三號は改造の結果、第一號と極めて近いものになるが、$\frac{v}{nD}$ の大いに異る第四、第五號は少し異なつてゐる。

これだけの比較では、まだ充分ではないが、此の方法は、改造するプロペラを要求するプロペラに出來るだけ近い性能のものを撰べば、實際とよく合ふ結果を與へることがわかる。翼素から設計する方法より遙かに確かで、且計算が容易である。　　(終り)