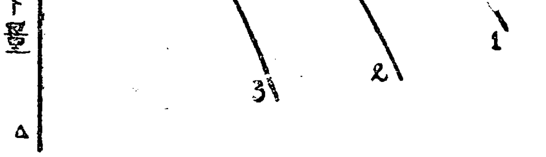
No. 21　　粘性地盤の支持力に關する一考察

最　上　武　雄

(1947 年 5 月 21 日受理)

1.　Housel の研究

地盤が如何程の載荷に耐へ得るかと言ふ所謂地盤支持力の問題は土木工學に於て古くから重要な問題であるが困難なものである．地盤は知られてゐるように支持力に關し，1) 彈性體の力學が當てはまる如きもの 2) 土壓論的考察が成立し得べきもの 3) 軟弱地盤，4) 地盤の反力が上に載つてゐる板の變位に比例すると考へ得べきもの等に分けられ，一律に之れを論じる事は出來ない．又地上の載荷による地中の應力分布を定める事も支持力問題と密接な關係があるが，之れは現在の所 1) の型の地盤及び 2) の型の地盤に關して稍や見るべき研究があるに過ぎない．筆者が此處で論じようと思ふのは 3) の型の地盤の支持力並びに地上載荷による地中の應力分布である．此種の地盤の支持力に關する問題に就ての研究で代表的と思はれるのは，米國の H usel のものである．彼は 1927, 1928 に相當大規模な實驗を行ひ次のような實驗公式を得た．[1] これを紹介する前に載荷試驗につき簡單に說明すると，地盤の上に適當な大さ (Housel の場合には 1 平方呎



第　1　圖

2 平方呎，4 平方呎) の載荷板を置き，適當な方法で其れに荷重をかけて行く．

そして其際の板の沈下量を測定する．載荷强度 p と沈下量 Δ との關係は第 1 圖の樣になる．圖中 1, 2, 3, と添記したのは夫々大きな板，中位の大さの板，小さな板に對する試驗結果に對應する．初めは p と Δ とは略ぼ直線的であるが，ある所まで荷重が增加すると曲線は曲がつて來，荷重の增加率に比し沈下の增加率が大きくなる．あたかも材料の降伏の現象に似てゐる．

この曲線の曲がり方が急になる所を以つて支持力の限界とするのが普通である．しかし，圖で分かる通り板の大いさに依つて變るから，板の大いさを如何なる形で入れるかが問題である．Housel は此點に於て成功したものである．卽ち，第 1 圖に於ける各曲線の關係を求めるのに，板の大いさをあらはす parameter として，

$$x=(\text{板の周邊の長さ})/(\text{板の面積}) \qquad (1)$$

なる量を考へる．この x を周積比となづける．

一定沈下量 Δ_1 に對する載荷强度を $p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots$ とし，その載荷强度に對應する板に對する周積比を x_1 $x_2, \cdots\cdots$ とし，$p_1, p_2, \cdots\cdots$ を代表的に $p, x_1, x_2, \cdots\cdots$ を代表的に x とすれば

$$p=mx+n \qquad (2)$$

なる關係がある．m, n は沈下と共に變化する量である．(2) の式を Housel の實驗公式と名づける．尤も Williams は理論的に (2) の關係を導き出してゐるがこれはむしろ半實驗的とも言ふべきものであつて，Williams の理論の中には壓力傳播に關する假定とか一定深さに於ける鉛直方向の壓力分布を一樣なりとすると言うような假定が含まれてゐる．從つて直接に地盤の常數に結び付いた理論とは言ひ難いと思はれる．Housel は (2) 式の m, n と沈下量 Δ より

$$K_1=\Delta/n, \quad K_2=m/n \qquad (3)$$

なる式で定義される地盤の物理的特性係數なるものを求め，沈下と共に K_1, K_2 なる量の變化する模樣を調べた．K_1 は地盤の抵抗の中載荷板の面積に依るものであつて，載荷試驗の際に載荷板の下に生ずるとされてゐる所謂壓力球根中の土の容積變化に依つて起る沈下に關係し，K_2 の方は剪斷抵抗と容積變化に對する抵抗の比であると Housel は考へたのである．沈下に對して K_1, K_2 の變化を調べて Housel は地盤の性質の沈下に依る變動を論じた．尙ほ彼は 1933 に發表した論文[2] に於て，地盤が單一層より成る場合，二層

よりなる場合について行つた載荷試驗について前論文の趣旨を應用した結果を報告してゐる．其の場合には沈下と共に，K_2 の値が增加し極大値をとる事及びそれより，K_2 が極大値をとる沈下量 Δ_0 を以つて地盤の支持力の限界とすべきだと主張してゐる．しかし，1929 の論文中に書かれてゐる沈下量と K_2 との關係にはこのような事が見られず，兩論文に統一性がないように思はれる．この事は Housel の地盤の物理的特性係數 K_1, K_2 が未だ單純な特性係數となつゐない事を想像せしめるのである．

扨て，地盤を彈性體と考へて行ふ Boussinesq 的計算に依つて Housel の實驗公式 (2) を導く事は不可能と思はれる．彈性常數を一樣と考へた時は勿論，一樣でないとしても，載荷板下の壓力分布を一樣と考へても，一樣でなく拋物線としても (2) の關係は出て來ないのである．即ち，粘性地盤を彈性體と考へる近似はあまり良いものではないと思はれる．

2. 筆者の研究

以上の樣な考へから，筆者は地盤を粘彈性體とした計算を行つて見た．土を粘彈性體と考へて，粘性係數彈性係數を實測する事は既に石本，飯田兩氏に依つて行はれてゐる．[3] 其結果粘性係數の値は土の含水量に依つて著しく變化するものなる事も明らかになつてゐる．一方，筆者等が行つた可成り大規模の載荷試驗の經驗より推測するに，載荷に依つて地盤中の水分に可成りの變動のあるべき事，更に地盤中の含水量の分布は一樣ではない事等は容易に想像出來る事である．從つて，地盤中の彈性係數並びに粘性係數を一樣にして不變なりとする計算が近似計算なる事は言うまでもない．しかも筆者は計算の便宜のために，土を非壓縮と考へた．これも少しく亂暴な話で．少なくも載荷板の直下，所謂壓力球根内では壓縮の生じてゐる事は容易に想像される所である．依つて筆者の計算は色々の方面から考へてあらつぽいものである．しかし，土を粘彈性體なりとし，以上の樣な假定を置くと Housel 實驗公式 (2) を導き出す事が出來，更に載荷に依る地盤の力學的特性の變化を Housel よりも明瞭に論ずる事が出來るように思はれる．此樣な計算を進める前に境界條件即ち載荷板の下の壓力分布に就て述べて置かねばならぬ．尤も，そのためには，計算結果を多少用ひねばならぬのであるが，この事を許されるとして述べる．半無限粘彈性體の上に剛な滑らかな (實は滑らかでなくても良い．この事は後に述べる．) 圓板をおき，これを押し込むと，彈性體の場合のように周邊に於て無限に大きな壓力を生ずる．しかし實際にはこのような壓力を生ずる迄に周邊に於ける土は塑性變形を起して周邊の壓力は無限大とはならず却つて，いくらか板が小さくなつたような效果を與へるから，結局，板の中心附近の方が周邊よりもいくらか大きな壓力を生ずるようになる．事實多くの人が地盤載荷の際の載荷板下の壓力分布を測定した結果も其樣になつてゐる．板が軟かくなり曲がり易くなれば，上に凹に曲がるから，剛の場合に比して土を周邊に於て壓すことが少くなり土の周邊に於ける流動を容易ならしめるから，板の中央部に於ける壓力集中の度合ひは增加する理であり事實さうなつてゐる．從つて，通常の載荷板を用ひる場合を理論付ける場合の境界條件としては，板下の壓力分布を一樣なりと考へる方が板を剛なりとするよりは眞に近いであらうと思はれる．さて，現下の印刷事情のため，計算過程に就ての讀者の御批判を仰げぬのは遺憾である (いづれ將來適當な機會に此部分の發表をして御批判を仰ぎ度いと思つてゐるが．) 初めの基本式，と結果とを書けば次の通りである．此他に色々な載荷條件の場合地盤が二層より成る場合の計算もあるが，印刷出來ぬため割愛する．土を非壓縮粘彈性體即ちその內に生ずる應力成分を σ, τ, 歪成分を ϵ, γ, 剛性

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\widehat{rz}}{\partial z}+\frac{\widehat{rr}-\widehat{\theta\theta}}{r}&=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial\widehat{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\widehat{zz}}{\partial z}+\frac{\widehat{rz}}{r}&=\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

u, w は夫々 r, z 方向の變位

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=-p+2K\frac{\partial u}{\partial r}, & \widehat{r\theta}&=0\\ \widehat{\theta\theta}&=-p+2K\frac{u}{r}, & \widehat{\theta z}&=0\\ \widehat{zz}&=-p+2K\frac{\partial w}{\partial z}, & \widehat{rz}&=K\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\qquad(8)$$

$$\frac{\partial^2p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2p}{\partial z^2}=0\qquad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}u=\sum_n\int_0^\infty\Big[&B_nJ_1(\alpha r)+\frac{r}{2\nu}\Big\{J_0(\alpha r)\\ &-\frac{1}{\alpha r}J_1(\alpha r)\Big\}e^{-\frac{\mu}{\nu}t}\int A_ne^{-\frac{\mu}{\nu}t}\,dt\Big]e^{-\alpha z}\,d\alpha\\ w=\sum_n\int_0^\infty\Big[&B_nJ_0(\alpha r)+\frac{1}{2\nu\alpha}\Big\{J_0(\alpha r)\\ &-\alpha rJ_1(\alpha r)\Big\}e^{-\frac{\mu}{\nu}t}\int A_ne^{-\frac{\mu}{\nu}t}\,dt\Big]e^{-\alpha z}\,d\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

但し $A_n=A_m\cos\kappa_nt+Ak_n\sin\kappa_nt$
$B_n=B_m\cos\kappa_nt+Bk_n\sin\kappa_nt$

$$w_{z=0}=\frac{a}{2\mu}\left(p_0+p_1t-\frac{\nu}{\mu}p_1\right)d\alpha\times\int_0^\infty\frac{J_0(\alpha r)\,J_1(\alpha r)}{\alpha}\qquad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}_{z=0} &= -\frac{4\mu}{\pi}\left(w_0+w_1t+\frac{\nu}{\mu}w_1\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}, \quad r<a\\ &=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \quad r>a\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

係數を μ, 粘性係數を ν, 時間を t であらはせば

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= -p+2K\varepsilon\\ \tau &= K\gamma\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

但し

$$K=\mu+\nu\partial/\partial t \;;\; p \text{ は平均壓力} \tag{14}$$

の如き關係が成立つとする．今地表面を $z=0$ とする地中に向ふ軸を持つ圓壔坐標を考へると，應力平衡式は (6) の樣になる．これに應力歪の關係 (7) を代入して不壓縮の條件 (8) を使つて p の滿す式を作ると (9) となる．これを解き再び變位の方程式を解けば (10) を得，これを (7) に入れれば應力成分が求められる．さて境界の條件として

$$z=0 \text{ で} \quad \left.\begin{aligned}\widehat{zz} &= -(p_0+p_1t) & r&\leq a\\ &=0 & a&<r\\ \widehat{rz} &=0\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

とすれば，結局 (11) を得

$$z=0 \text{ で} \quad \left.\begin{aligned}\widehat{zz} &=0 & a&\leq r\\ w &= w_0+w_1t & r&<a\\ \widehat{rz} &=0\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

とすれば 結局 (12) を得る．前に述べたように後の場合には板の周邊で應力は無限大となるが旣述の如く載荷試驗の結果を檢討するには (11) に依る方が良いと思はれる．從つて，(11) を採用し (11) の積分の項を ξ であらはし，左邊を $\varDelta$ と書き，$p_0+p_1t=p$ とすれば

$$p=(2\mu\varDelta)/(a\xi)+(\nu p_1)/\mu \tag{17}$$

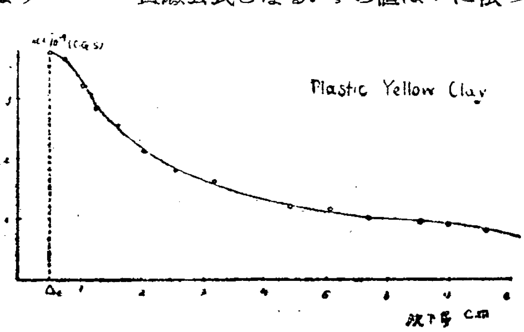
となる．この場合の周積比 x は

$$x=(2\pi a)/(\pi a^2)=2/a \tag{18}$$

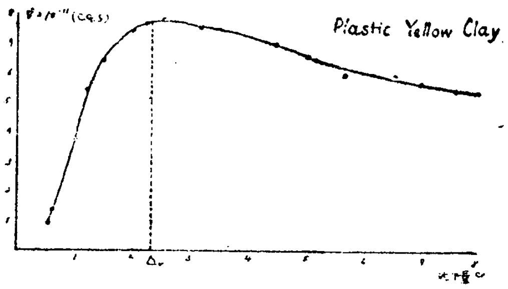
であるから (13) は

$$\left.\begin{aligned}&p=mx+n\\ &\text{但し}\quad m=(\mu\varDelta)/\xi, \quad n=(\nu p_1)/\mu\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

となり Housel 實驗公式となる．ξ の値は r に依つて

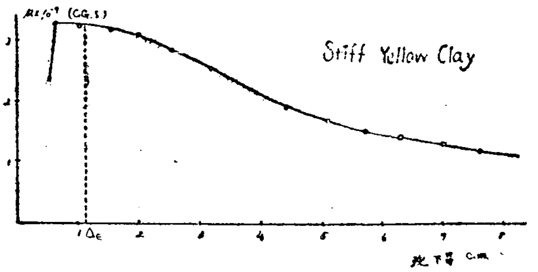


第 2 圖

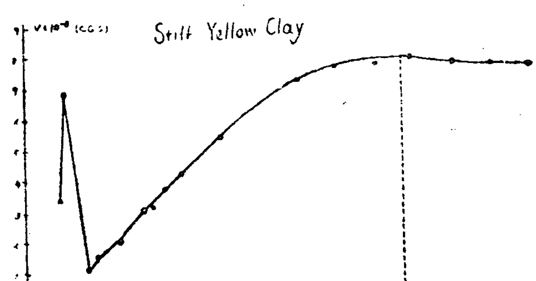


第 3 圖

變るが，0.669 から 1.0000 まで變る．そこで $\varDelta/\xi$ の値を $\varDelta_1$ とおき，しかも $\xi\fallingdotseq 1$ と考へて $\varDelta_1$ を沈下量にとれば，載荷試驗の結果から m, n を求め，それより μ, ν の値を算出する事が出來る事になる．Housel の實驗結果を使つて，μ, ν の値を計算して沈下に對して圖示すれば第2圖〜第7圖の如くになる．第2圖〜第5圖は，1929 の報告に於ける資料より，第6圖〜第7圖は 1933 の報告に於ける資料より算出したものである．我々も戰爭中可成り大規模な載荷試驗を行ひ同樣の結果を得たが終戰時の混亂により紛失して並置出來ないのは遺憾である．以上の計算に於ては勿論 μ, ν を一定なりとして來たのであるが，(15) を正しいとして μ, ν を逆算して見ると，沈下と共に μ, ν の値が變化してゐるのが分かる．つまり，ある沈下を生ずる



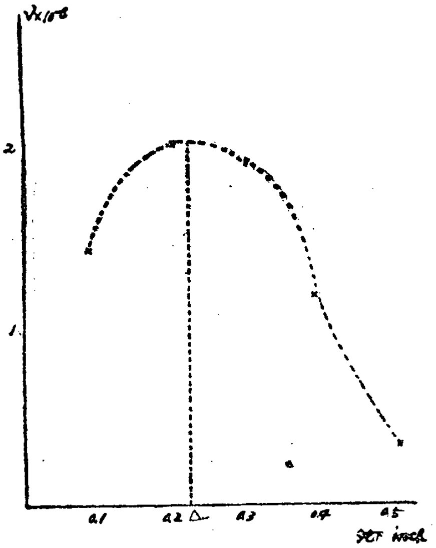
第 4 圖



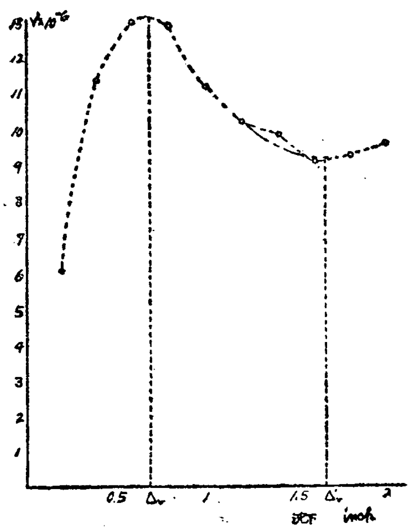
第 5 圖

迄 μ, ν の値は變化してゐるのだが，假りに一種の平均値を採つて一定なりと考へた時の平均の値が沈下と共に變つて來ると考へるべきであらう．このようにした時の μ, ν を假りに地盤の剛性率，粘性係數と呼ぶ

ことにしよう．そうすれば，地盤の剛性率は沈下が Δ_E になるまで殆ぼ一定であるがそれを越えると漸次減少して行くが，その減少率は次第に小になる．一方地盤の粘性係數は沈下と共に増大し Δ_v に至つて最大となり，以後一定を保つか，或ひは減少して行く．一般に $\Delta_E < \Delta_v$ であり，固い土程 Δ_E は大きく Δ_v も大きく $\Delta_v - \Delta_E$ の値も大きい．1933 の Housel の資料によるものの中第7圖に書いたものは地盤が二層よりなるもので，これを簡單に (15) で處理し ν の變化を調べたものであるが，これは最大値を示すと共に極小値



第 6 圖



第 7 圖

をも示してゐる．これは上の地盤が無力化されて來ると共に下の地盤が助力に乘り出して來る事を示すものと思はれる．これ等に依つて判斷するに，地盤が載荷されると，初めの中は地盤の彈性が抵抗の主役であるが，沈下が進むと共に粘性が效き出し，主として粘性が外力に抵抗するに至るが，それも或程度の沈下に達して最大に達し，以後は力の加はると共に小さな抵抗を示すのみとなつて了ふと思はれる．扨て，地盤の支持力を決定する方法としては，載荷試驗を行つて，その結果より (19) を用ひて μ, ν を求め沈下に對する其變化を調べて Δ_E, Δ_v を求める．Δ_E, Δ_v が小，$\Delta_v - \Delta_E$ が小なる程地盤は軟弱であるから，それ等の事情を考へ合せて，Δ_v 又は Δ_E を限界沈下量として採用し，その時の μ, ν の値を用ひて Housel 實驗公式の m, n を定めれば任意の大いさの板に對する支持力が求められるのである．

倚ほ表面に加へられた剪斷應力の影響を調べるために

$$z=0 \text{ にて } \widehat{zz}=0$$

として見ると

$$z=0 \text{ にて } w=0$$

を得る．從つて表面に於ける沈下を問題にする限り，表面に働く剪斷應力は無視して良いと思はれる．又上に略述した計算結果が使へるとすれば，それに依つて地盤中の應力分布，變形分布も調べられる譯で，その方から粘性地盤の支持力についてより本質的な解明が出來るかも知れない言う見込みがある．これについても若干計算を試みてあるが，いづれ機を見て報告する事にする．倚ほ，筆者は地盤支持力を對象として考へたが，上述の計算は他の材料の場合，例へば金屬の塑性變形の場合にも，場合に依つては使へるのではないかと思つてゐる．

文　獻

(1) W. S. Housel : A practical method for the selection of foundation based on fundamental research in soil mechanics. Engineering Research Bulletin, No. 13 Oct. 1929.

(2) W. S. Housel : Bearing power of clay is determinable. Eng. News Record, 1933 Feb. 23, p. 244-248.

(3) 石本已四雄，飯田汲事；土の粘彈性と剪斷抵抗，地震研究所彙報 14 (1936), 534〜542