

圧縮性流体による潤滑の理論（特に空気軸受について）

甲藤好郎・曾田範宗

(1953年10月2日受理)

Theory of Lubrication by Compressible Fluid with Special Reference to Air Bearing.

Yoshirô KATTÔ and Norimune SODA.

(Received October 2, 1953)

ABSTRACT: Both the experiment by Kingsbury on a full journal bearing using air as a lubricant and its mathematical analysis by Harrison have historical values in the theory of lubrication. Harrison, however, could not integrate the fundamental differential equation in any form convenient for calculation, and he only succeeded in the numerical integration by using the data of Kingsbury. The results of his calculation coincided well with those of Kingsbury's experiment, but his method was very troublesome, and he failed in knowing the whole characteristics of the air-lubricated journal bearing.

The authors succeeded in solving the problem mathematically with good approximation, and the pressure distribution in the bearing, the most important characteristic thereof, was found to be given by the following formulas,

$$p = \frac{\nu}{s^3} \left(\frac{6 \eta Ur}{\delta^2} \right) \left(1 - \frac{c}{1+\nu^2} \frac{c + \cos \theta}{1+c \cdot \cos \theta} + \frac{cs\nu}{1+\nu^2} \frac{\sin \theta}{1+c \cdot \cos \theta} \right),$$

$$\frac{6 \eta Ur}{\delta^2 p_0} = \frac{1+\nu^2}{\nu} \frac{s^3}{s^2 + \nu^2},$$

where p is the pressure of air in the bearing clearance, p_0 the pressure which determines the total mass of air in it, η the viscosity of air, r the radius of journal, δ the radial clearance of bearing, U the circumferential velocity of journal, c the eccentricity (and $s^2 = 1 - c^2$), θ the angle measured in the direction of rotation from the point of maximum clearance, and ν a parameter.

Based on these formulas, the authors deduced the whole characteristics of air bearing, such as friction coefficient, eccentricity and others, as functions of running conditions. Interesting features peculiar to bearings lubricated by compressible fluid were discussed in comparing with those for which the lubricant was assumed to be incompressible.

1. まえがき

軸受の潤滑に関する Tower の実験 (1883, 1885 年) や、それにつづく Reynolds の理論

(1886 年) については、いまさら述べる必要はない。しかし、ここで流体潤滑の機構が潤滑剤として使用した流体の粘性に依存していることが明らかにされた以上、当然、空気のような気体でも軸

受の潤滑作用を行なわせることは出来ることは明白であつた。たゞ、通常の軸受では空気の粘性が小さすぎて、軸の回転によつて発生する流体力学的な膜圧力が弱く、しかも境界潤滑に対して空気が無能力なため、ほとんど潤滑能力がないに等しい。従つて現在でさえ、潤滑といえばまことに油やグリースが念頭に浮かび、また一般に空気軸受といつているものはすべて、軸の回転によつて発生する圧力分布にはよらず、圧力空気を使用し、それが軸受隙間を流れる間に送入口から軸受端部にかけて形成する圧力分布によつて軸を支持する形式のものである。まして、その当時にあつては空気などによつても軸受の潤滑が出来るなどということは、特殊なものを除けば一般には思いもおよばぬことであつたであろう。

しかしながら、それを実証する実験は意外に早くあらわれた。すなわち Reynolds の論文が発表されてから約 10 年後の 1897 年、かの有名な Kingsbury は空気を潤滑剤として使用した全周ジャーナル軸受の実験結果を発表した⁽¹⁾。当時、“ねじり-圧縮” 試験機というものを作つてネジとナットの摩擦の研究をしていた彼は、その圧縮に使用した気筒一ピストン機構において空気が両者の間の潤滑作用をいとなんていることを見出し、それについて実験をおこなつたのであつた。はじめ彼は Reynolds の論文の抄録を前に見たことがある程度で、その実験結果の解釈も間違つていたらしい⁽²⁾から、歴史的にはこの実験は Reynolds に無関係に開始されたといつてもいいかも知れない。しかし、その途中で彼は Reynolds の論文を読み、それと対照しつつ実験をふたたび行なつて、膜の圧力分布、摩擦係数、軸心の移動等について精密な測定を行なつたのである。

その後、Harrison⁽³⁾は、Kingsbury の求めた圧力分布がその偏心率との関連において、非圧縮性流体の潤滑理論によつて示される状態から著しい偏りを有していることに注意をむけた。この偏りはもちろん空気の圧縮性によるものである。そこで彼は圧縮性流体に対する微分方程式を導き、これを解こうと試みた。けれども計算に便利な形にはどうしても解き得なかつたので、Runge の方法で数値積分をおこない、二・三の回転速度に対して圧力分布を算出した。この結果は Kingsbury

の実験結果とよく一致した。しかし、前述の方法はきわめて煩雑* であつて、特に軸心の移動とか摩擦係数などということになるとほとんど不可能に近い。

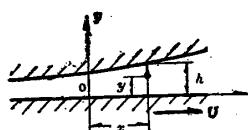
この問題が、ここまで来たまま長い間放置されていたのは、最初に述べたような理由から実用的に余り問題にならなかつたためであろう。しかし条件によつては、この形式の軸受を実際に使用することも出来るのであり、また潤滑理論といつて一つの学問分野においても、これは重要な問題である。この見地からわれわれは、上述の微分方程式に対して最近一つの近似解をえたのでそれをここに報告する。そしてこれによつて空気をはじめ、他の圧縮性流体を使用した場合、非圧縮性の場合に比してどんな特性があらわれるかが容易に判るようになつた。

2. 基礎方程式

ほとんど平行で、しかも隙間の狭い二層間においては、流体の運動方程式および連続方程式を次のようにおくことが出来るであろう（第1図）。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$



第 1 図

ここで u および v は、それぞれ x 軸、 y 軸方向の速度成分； p は圧力； η は粘性係数； ρ は密度である。

圧力と密度の間の関係には次の條件を与える、

$$p = K \rho \quad (3)$$

ここで K は常数、つまり温度一定と考えるのである。なお粘性係数 η は、気体においては圧力にほとんど無関係であり、また温度一定なる時は常数と見做すことが出来る。

次に境界条件としては、

$$y = 0 \text{ において, } u = U, \quad v = 0$$

$$y = h \text{ において, } u = 0, \quad v = 0.$$

さて (1) 式右より p は x のみの函数であるから (1) 式左は積分出来て

* 周方向の周期条件をみたす解を得るために試行錯誤法によらねばならない。

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \frac{U}{h}(y-h) \quad (4)$$

ただし積分常数は境界条件をみたすように選んである。ところで(2), (3)式より

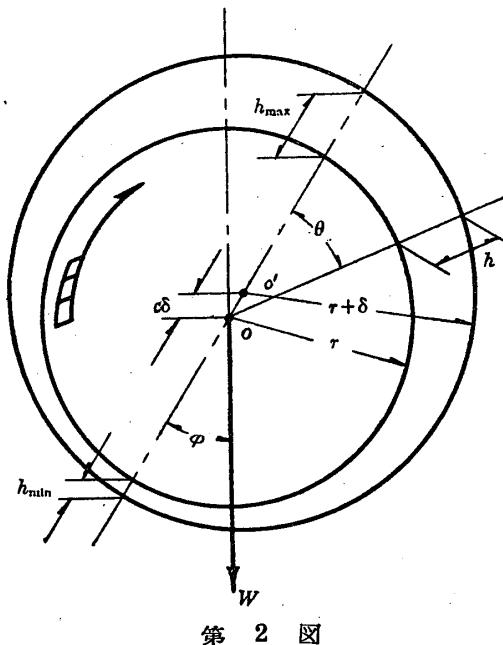
$$[pv]_{y=0}^{y=h} = - \int_0^h \frac{\partial(pu)}{\partial x} dy$$

であるが、左辺は境界条件より零なる故に、右辺へ(4)式を代入して

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[p \left(-\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2} Uh \right) \right] = 0$$

従つて [] 内は、 x および y に無関係な常数でなければならない。いまこの常数を $6U\kappa$ とおけば次式が得られる。

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta U}{h^3} \left(h - \frac{\kappa}{p} \right) \quad (5)$$



第2図

(5)式を第2図のような全周無限軸受に適用する場合、その x および h を、それぞれ

$$x = r\theta \quad (6)$$

$$h = \delta(1 + c \cdot \cos \theta) \quad (7)$$

とおけばよいことは周知の通りである。たゞここで、 r は軸頸の半径； $r + \delta$ は軸受の半径； c は偏心率である。

3. 基礎方程式の解

さて問題は(5), (6), (7)式を解いて ψ を θ の函数としてあらわすことであるが、この解が

みたすべき條件として次の二つのことを考慮に入れておかねばならない。すなわち

(I) ψ は連続にして、 2π を周期とする周期函数であること。

(II) 軸受隙間に含まれる流体の全質量が指定されねばならぬこと。

後者の條件は、圧縮性流体を取扱つている以上当然必要となるもので、もつとくわしく述べると次のようになる。この流体が単に軸受隙間に相当する体積を占める場合の圧力を p_0 とすれば、(3)式により、その全質量は軸受の単位長さあたり

$$\int_0^{2\pi} \frac{p_0}{K} h r d\theta = \frac{2\pi r \delta p_0}{K}$$

また、前記の圧力分布をなす場合の全質量は

$$\int_0^{2\pi} \frac{p}{K} h r d\theta = \frac{r}{K} \int_0^{2\pi} p h d\theta$$

これら両者は相等しくなければならぬから

$$\int_0^{2\pi} p h d\theta = 2\pi \delta p_0 \quad (8)$$

これが前記の條件 (II) に相当するものである。

次に(5), (6), (7)式をそのまま取扱うのは不便なので、まず

$$6\eta U = A \quad (9)$$

$$1 - c^2 = s^2 \quad (10)$$

$$s \frac{\delta \kappa}{Ar} = \nu \quad (11)$$

であらわされる新らしい符号 A , s , ν を使用することにしよう。そして次式

$$\cos \beta = (c + \cos \theta) / (1 + c \cdot \cos \theta) \quad (12)$$

$$\psi = s^2 \left(\frac{\delta}{\kappa} \right) p \quad (13)$$

によつて変数 θ , 函数 ψ を新らしい変数 β , 函数 ψ に変換する。なお簡単のために

$$1 - c \cdot \cos \beta = \tau(\beta) \quad (14)$$

とおく。このようにすると(5), (6), (7)式は

$$\frac{d\psi}{d\beta} = \frac{\tau}{\nu} \left(1 - \frac{\tau}{\psi} \right) \quad (15)$$

と簡単な形に変形される。すなわち問題は(15)式を解くことに帰着する。ここで ψ に関する前述の第一條件 (I) から、やはり ψ は連続にして、 β に関する 2π を周期とする周期函数でなければ

ならぬことが容易に導かれる。

さて (15) 式において、もし ν が負数である場合には、変数 β の代りに $-\beta$ を使用すれば ν が正数の場合と同じ形の方程式になつてしまふ。なぜなら τ は β の偶函数であるからである。従つて以下には $\nu > 0$ なる場合についてのみ考えることにしよう。

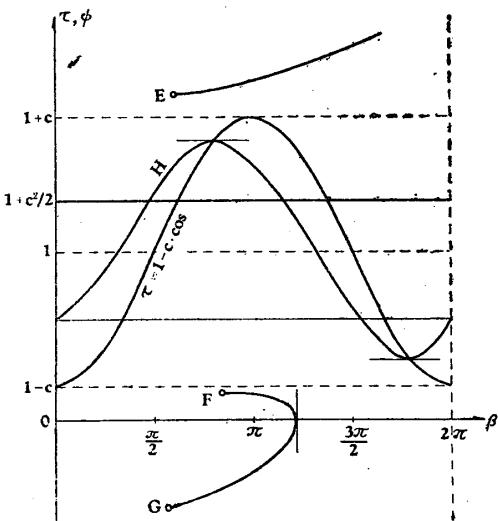
(15) 式にあらわされる τ は (14) 式で示される。ところで偏心率 c は 0 と 1 の間の値のみをとる。従つて τ は β のいかなる値に対しても決して負にはならず、これを β の函数として図示すれば第 3 図のようになる。そして (15) 式より $d\psi/d\beta$ の符号は $\nu > 0$ なるとき、

$$\psi > \tau \quad \text{なる時}, \quad d\psi/d\beta > 0$$

$$\psi = \tau \quad " , \quad " = 0$$

$$\tau > \psi > 0 \quad " , \quad " < 0$$

$$0 > \psi \quad " . \quad " > 0$$



第 3 図

となり、従つて第 3 図 E のようにもし ψ が $1 + c$ より上部に出ることがあつたとすれば、その後 β の増大と共に無限に増大して周期函数とはなり得ない。また F, G のように ψ が $1 - c$ より下部にある場合もまた周期函数となり得ぬことは、容易にわかるであろう*。故に ψ が 2π を周

* (15) 式は、 τ/ψ が 1 に比して無視し得る、すなわち $|\psi| \gg \tau$ なる領域に ψ が存在する時、および τ/ψ に比して 1 が無視し得る、すなわち $|\psi| \ll 1$ なる領域に ψ が存在する時、それぞれ近似的に $d\psi/d\beta = \tau/\nu$ あるいは $d\psi/d\beta = -\tau^2/\nu\psi$ となり、その近似解は容易に求められる。

期とする連続周期函数であるためには、少くとも

$$1 + c \geq \psi \geq 1 - c$$

なる範囲になければならない。そしてその形は第 3 図の H のようになる筈である。

なお (15) 式から連続周期函数 ψ が求められた場合、この ψ の有する性質として次のようなことも容易に見出される。すなわち (15) 式の両辺に $\psi^n (-\infty < n < \infty)$ を乗れば

$$\psi^n d\psi = \frac{1}{\nu} (\tau \psi^n - \tau^2 \psi^{n-1}) d\beta \quad (16)$$

この両辺を $\beta = 0$ から $\beta = 2\pi$ まで積分すると、左辺の積分値は変数変換の関係が第 3 図 H のようになつているから零となり、従つて

$$\int_0^{2\pi} \tau \psi^n d\beta = \int_0^{2\pi} \tau^2 \psi^{n-1} d\beta \quad (17)$$

また (16) 式の両辺を $\tau^m (m > 0)$ で除し、両辺を $\beta = 0$ から $\beta = 2\pi$ まで積分すると、左辺の積分値は、変数変換の関係と、その間の τ の値の大小を考えてみれば明らかに正となるから、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\psi^n}{\tau^{m-1}} d\beta > \int_0^{2\pi} \frac{\psi^{n-1}}{\tau^{m-2}} d\beta \quad (18)$$

さてわれわれはここで、(15) 式の ν が無限に大きい場合、および無限に小さい場合の両極限の解について考えてみよう。まず $\nu \rightarrow \infty$ の場合には (15) 式において τ, ψ がそれぞれ有界である故に、 $d\psi/d\beta \rightarrow 0$ となり、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi$ は β 軸に平行な直線となる。すなわち ψ は定数となり、その値は (17) 式より

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi = 1 + c^2/2 \quad (19)$$

また $\nu \rightarrow 0$ の場合は、 $d\psi/d\beta$ が β の全域にわたって有界なることを考慮して (15) 式より

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} (1 - \tau/\psi) = 0$$

すなわち

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \psi = \tau \quad (20)$$

が得られる。

結局、 $\nu \rightarrow \infty$ の ψ の極限は (19) 式に求められたような β 軸に平行な直線であり、 ν が減少して零に近づくにつれて ψ は、第 3 図 H 曲線の形を経て τ に無限に接近して來るのである。従つて、 $\beta = 0$ および 2π の間ににおける τ/ψ の最大値について考えてみると、これは τ と ψ とが最も相違した形になる場合、つまり $\nu \rightarrow \infty$ の時に

最も大きくなると想像される。しかもこの場合でさえ、その値は $(1+c)/(1+c^2/2)$ であつて、 $0 \sim 1$ の c の値に対して 2 を越えない。また τ, ψ ともに正であるから τ/ψ は正。よつて ν のあらゆる値に対して

$$|1 - \tau/\psi| < 1$$

従つて (15) 式より

$$\left| \frac{\nu}{\tau} \frac{d\psi}{d\beta} \right| < 1 \quad (21)$$

が導かれる。

ところで (15) 式を書き直すと

$$\psi = \tau \cdot \frac{1}{1 - \frac{\nu}{\tau} \frac{d\psi}{d\beta}}$$

となるが、(21) 式の関係より、右辺の分数式は級数展開が可能で

$$\psi = \tau \left\{ 1 + \frac{\nu}{\tau} \frac{d\psi}{d\beta} + \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{d\psi}{d\beta} \right)^2 + \dots \right\}$$

となる。故にいま上式の右辺第二項までとつて近似解を求めてみると

$$\frac{d\psi}{d\beta} = \frac{1}{\nu} \psi - \frac{\tau}{\nu}$$

$$\therefore \psi = e^{\frac{1}{\nu} \int d\beta} \left\{ D - \frac{1}{\nu} \int \tau e^{-\frac{1}{\nu} \int d\beta} d\beta \right\}$$

ただし D は積分常数であるが $\psi(\beta=0) = \psi(\beta=2\pi)$ なる条件より $D=0$ となり、結局

$$\psi = 1 - \frac{c}{1+\nu^2} \cos \beta + \frac{c\nu}{1+\nu^2} \sin \beta \quad (22)$$

が得られる。この近似式はその導出経過を考えればわかるように、 $\nu \rightarrow 0$ なるほど近似度は高まるわけで、実際 (22) 式は $\nu \rightarrow 0$ のとき $\tau = 1 - c \cdot \cos \beta$ に一致する。ところで $\nu \rightarrow \infty$ のとき (22) 式は 1 となる。この場合、正しい値は (19) 式に求めたように $1 + c^2/2$ である。

しかしこれまで、軸受の運動状態とは全く無関係に ν の値を考えて来た。そこで上記の誤差の問題に関連して少し考慮してみよう。 (8) 式に (7) 式を代入し、(12), (13) の変換をおこない、(11) 式を使用すれば

$$\int_0^{2\pi} \frac{\psi}{\tau^2} d\beta = [2\pi \left(\frac{\delta^2 p_0}{Ar} \right) / \nu] \quad (23)$$

となるが、この式の左辺の積分値については次の

範囲になければならぬことが容易に証明される。

$$(1+c) \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{\tau^2} > \int_0^{2\pi} \frac{\psi}{\tau^2} d\beta > \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{\tau}$$

すなわち左の関係は、 ψ の取り得る最大値が $1+c$ である（第3図参照）ことにより、また右の方の関係は (18) 式において $n=1, m=3$ とおけばよい。従つて上式に (23) 式の右辺を代入し左右の積分をおこなえば

$$1 > \frac{\nu}{s \left(\frac{\delta^2 p_0}{Ar} \right)} > 1 - c \quad (24)$$

が得られる。故に軸受として問題になる ν の値（ ν の物理的意味については後述の (27) 式参照）はたかだか $s \cdot (\delta^2 p_0 / Ar)$ の程度の大きさで、これは軸受では一般に余り大ではないから、結局 (22) 式は近似式といつても、その誤差はそれほど問題にはならない。

なお前に ν が負である時は、変数 β の代りに $-\beta$ を使えば同じ形式の解となることを述べたが、(24) 式より $A (= 6\eta U)$ の正負と ν の正負が一致することがわかり、これは単に回転方向に座標の正方向をとるか否かによつて $\nu \geq 0$ となることをあらわしているわけで、従つてこの見地からも $\nu < 0$ の場合は取扱う必要のないことがわかる。

4. 軸受の諸特性をあらわす関係式

われわれは前節において微分方程式 (15) の近似解 (22) を得た。従つてこれをもととして種々の関係式を導出することが出来る。

まず初めに、無限に長い軸受の隙間内に p_0 — (8) 式参照 — で指定される質量の流体が入つているとき、軸を偏心率 c の位置に固定して回転した場合の圧力分布を求めてみよう。 (22) 式に (12), (13) の変換をおこない、(11) 式を使えば

$$p = \frac{\nu}{s^3} \left(\frac{Ar}{\delta^2} \right) \left(1 - \frac{c}{1+\nu^2} \frac{c+\cos \theta}{1+c \cdot \cos \theta} + \frac{c s \nu}{1+\nu^2} \frac{\sin \theta}{1+c \cdot \cos \theta} \right) \quad (25)$$

そしてこの (25) 式を (8) 式に代入すれば

$$\left(\frac{Ar}{\delta^2 p_0} \right) = \frac{1+\nu^2}{\nu} \frac{s^3}{s^2 + \nu^2} \quad (26)$$

本式は ν について三次方程式であるが実根は 1 個であることが容易に証明される。従つて軸の半径

r , 隙間 δ , 流体の質量 p_0 , 偏心率 c 従つて s , 回転速度 $A (= 6\eta U)$ に対して (26) 式を解いて ν を得, これを (25) 式に入れれば所要の圧力分布が得られる。

なお, ここで ν は一種のパラメータとして使用されているが, 上述の分布圧力の合成力の方向を考えることによつて, この ν に具体的な意味を与えることが出来るので, それについて述べよう。いまこの合成力が第2図に示すように, 隙間最小の位置から φ の方向に軸心を通つて働く力 W と釣合つているとする。もちろん軸の単位長さあたりの力の釣合である。そして後の便宜上, $p_m = W/2r$ なる平均軸受荷重 p_m を使用すると

$$p_m \cos \varphi = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta$$

$$p_m \sin \varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta$$

なる関係が力の釣合より得られる。この両式に (25) 式を代入し, 右辺の積分をおこなうと

$$\tan \varphi = \nu \quad (27)$$

$$p_m = \pi \left(\frac{Ar}{\delta^2} \right) \frac{1-s}{cs^2} \frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}} \quad (28)$$

すなわち (27) 式からわかるように, 今までずっと使用して来た ν は, 分布圧力の合成力の方向に關係した角度 φ の正切に他ならないのである。

そして軸受においては, 摩擦によつて発生する力もまた軸受荷重の支持に影響をおよぼすことになるが, これはごく微少なので一般に無視される。従つて上述の力の釣合はそのまま軸受に適用され φ は偏心角そのものとなる。つまり軸受においては, ν は偏心角 φ の正切である。そして与えられた運転條件に対し, (26), (28) 式から ν (つまり偏心角 φ) および偏心率 c , すなわち軸心の位置が求められ, それから (25) 式によつて圧力分布が決定される。

またこの時の摩擦係数は次のようにして求められる。軸外面に作用する摩擦力を f_j , 軸受内面に作用する摩擦力を f_b とすれば, (4) 式より

$$f_j = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\eta U}{h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad (29)$$

$$f_b = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{\eta U}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad (30)$$

いずれにせよ摩擦モーメントは軸受の単位長さあ

たり

$$M = \int_0^{2\pi} r \cdot f r d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} f d\theta$$

であるから, この式に (29), (30) 式を入れ, (25) 式を使用すれば

$$M = \pi \left(\frac{Ar^2}{\delta} \right) \frac{1}{s} \left(\frac{1}{3} \pm \frac{\nu^2}{1+\nu^2} \frac{1-s}{s} \right)$$

よつて μ を摩擦係数とすると, $M = \mu Wr = 2\mu p_m r^2$ なるを以て

$$\mu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{A}{\delta p_m} \right) \frac{1}{s} \left(\frac{1}{3} \pm \frac{\nu^2}{1+\nu^2} \frac{1-s}{s} \right) \quad (31)$$

ただし (+) および (-) は, それぞれ軸および軸受に対するものである。

5. 無次元表式および計算線図

以上に得られた結果を無次元形にあらわすために

$$\bar{A} = \frac{Ar}{\delta^2 p_0}, \quad \bar{p}_m = \frac{p_m}{p_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}$$

とおけば (26), (28), (25), (31) 式に対応して次の諸式が得られる。

$$\bar{A} = \frac{1+\nu^2}{\nu} \frac{s^3}{s^2 + \nu^2} \quad (32)$$

$$\bar{p}_m = \pi \frac{s(1-s)}{c} \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{s^2 + \nu^2} \quad (33)$$

$$\bar{p} = \frac{1+\nu^2}{s^2 + \nu^2} \left(1 - \frac{c}{1+\nu^2} \frac{c + \cos \theta}{1+c \cdot \cos \theta} + \frac{cs\nu}{1+\nu^2} \frac{\sin \theta}{1+c \cdot \cos \theta} \right) \quad (34)$$

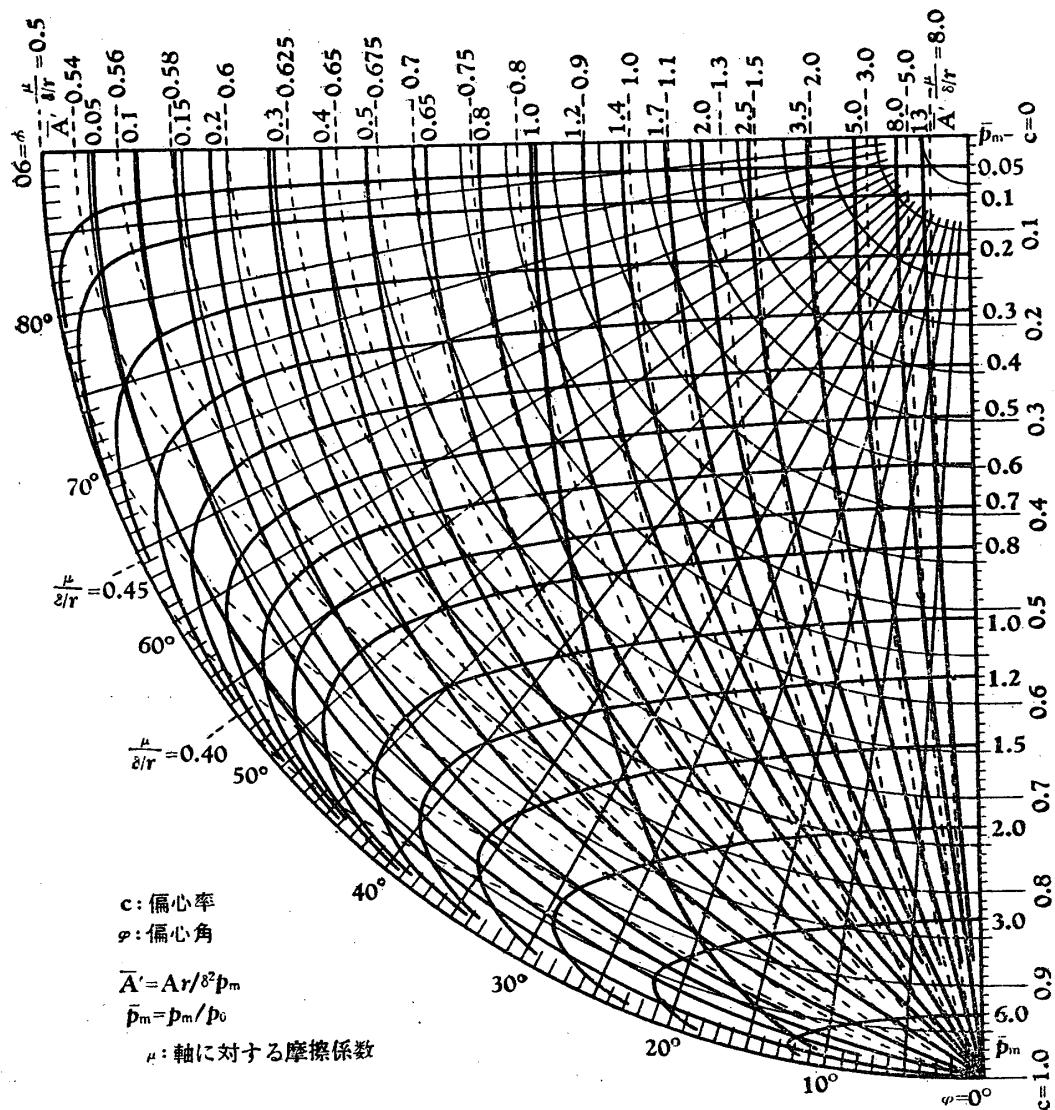
$$\frac{\mu}{\delta/r} = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{\nu} \frac{cs}{1-s} \pm \frac{1}{2} \frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}} c \quad (35)$$

なお, 圧力 p の最大, 最小値は $dp/d\theta = 0$ より

$$\frac{\sin \theta_m}{c + \cos \theta_m} = -\frac{\nu}{s} \quad (36)$$

を満足する θ_m に存在する。

これらの諸式はすべて偏心角 φ ($\tan \varphi = \nu$) および偏心率 c の函数となつてゐるから軸心の位置によつて定まつた値をとる。従つて第4図のように軸心位置をパラメータとして線図を作つておくと便利である。同図には $\bar{p}_m = \text{一定}$ の線, および



第4図 計算線図(軸心位置の座標). \bar{A}' を一定に保ち \bar{p}_m を減少させる時, 中央部太線(本論文末尾の附記参照)より右の領域では μ が減少し, 左の領域では μ が増大する.

都合上 \bar{A}' の代りにこれを \bar{p}_m でわつた

$$\bar{A}' = \frac{Ar}{\delta^2 p_m} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1 + \nu^2}}{\nu} \frac{cs^2}{1 - s} *$$

が一定の線が一応示されているが, これによつて軸受の運動条件に対応する軸心位置を知ることが出来, それから必要な計算をおこなうことが出来る.

なお, 軸の回転速度が大になると, 第4図にみられるように軸心は図の右方の垂直軸の附近へ来て, 与えられた軸受荷重 \bar{p}_m に対応して偏心率 c がほぼ一定となる**が, このような状態の場合に

* \bar{A}' は, いわば Sommerfeld 数に相当する.

** 非圧縮性流体潤滑の軸受では, 回転速度の増大とともに軸心は一般に軸受中心にむかつて移動する. しかし圧縮性の場合には, いかに速度が増し

は以下に述べる諸式を使用すると便利である. すなわち (24) 式および $1 > s > 0$ を考慮すれば

$$\left(\frac{\delta^2 p_0}{Ar} \right) > \frac{\nu}{s} > \nu$$

となるから, 軸の回転速度 (A に比例) が大になつて上式左辺の自乘, すなわち $1/\bar{A}^2$ が 1 に比して無視し得る程度になると, ν^2/s^2 および ν^2 は 1 に比して無視することが出来, 前述の諸式は簡単となり, その上 (32) 式より $\nu = s/\bar{A}$ となるから

$$\bar{p}_m = \pi \left(\frac{1 - s}{cs} \right) \quad (37)$$

ても無偏心回転にならうとはせず, 軸受中心の下に釣りさがつたような形にならうとする.

$$\bar{p} = \frac{1 + (c/A)\sin\theta}{1 + c\cos\theta} \quad (38)$$

$$\frac{\mu}{\delta/r} = \frac{c\bar{A}}{6(1-s)} \quad (39)$$

$$\frac{\sin\theta_m}{c + \cos\theta_m} = -\frac{1}{\bar{A}} \quad (40)$$

$$\tan\varphi = s/\bar{A} \quad (41)$$

が得られる。(37)式より軸受荷重に対応して偏心率 c が定められる。そして軸の回転速度 \bar{A} を与えると(38)～(41)の値は容易に求められる。

6. 非圧縮性の場合との比較

以上に取扱つた問題を非圧縮性として解いてみると次のような結果になる^{(4), (5)}。ただし使用する符号は前と同じものをあらわしている。

$$\bar{p}_m = \pi\bar{A} \frac{c}{(2+c^2)s} \quad (42)$$

$$\bar{p} = 1 + \bar{A} \frac{c \cdot \sin\theta \cdot (2 + c \cdot \cos\theta)}{(2 + c^2)(1 + c \cdot \cos\theta)^2} \quad (43)$$

$$\frac{\mu}{\delta/r} = \frac{1 + 2c^2}{3c} \text{ (軸)}, \quad \frac{s^2}{3c} \text{ (軸受)} \quad (44)$$

$$\varphi = \pi/2 \quad (45)$$

まず初めに、軸を偏心率 c の位置に固定して回転した場合の圧力分布について、非圧縮性と圧縮性の場合を比較してみる。非圧縮性の場合には(43)式よりわかるように、圧力分布の形は偏心率 c のみによつて決定されてしまい、回転速度 \bar{A} は単に、圧力分布の形を比例的に大きくしたり小さくしたりするだけである。従つてこの状態($c = \text{一定}$)で回転数を増大させると、圧力のひろがりは無限に大きくなつて来る。

これに反して圧縮性の場合には、(32), (34)両式からわかるように圧力分布の形も、圧力のひろがりも一定のものになろうとする。すなわち、(32)式より $\bar{A} \rightarrow \infty$ のとき $\nu \rightarrow 0$ であることがわかる。そしてこの時、(34)式より

$$\bar{p} \rightarrow \frac{1}{s^2} \left(1 - \frac{c^2 + c \cdot \cos\theta}{1 + c \cdot \cos\theta} \right) = \frac{1}{1 + c \cdot \cos\theta} \quad (46)$$

である。

上述の著しい相違は軸受の場合の軸心の移動に

差を与えることとなる。非圧縮性の場合には、もし偏心率 c が一定のまま回転数が増大すると圧力のひろがりが大となり、そのため分布圧力の合成力も大となつてしまふ。従つてそれが一定の軸受荷重と釣合うためには偏心率 c が回転数と共に減少しなければならない。このことをあらわすのが

(42)式であつて、 $\bar{p}_m = \text{一定}$ のとき $\bar{A} \rightarrow \infty$ とともに $c \rightarrow 0$ となる。圧縮性の場合は、前述のことから $\bar{A} \rightarrow \infty$ とともに偏心率 c がかえつて一定となることが容易にわかるであろう。そしてその結果、前頁の脚注で述べたように軸は軸受中心の下に釣りさがつたようになろうとするのである。

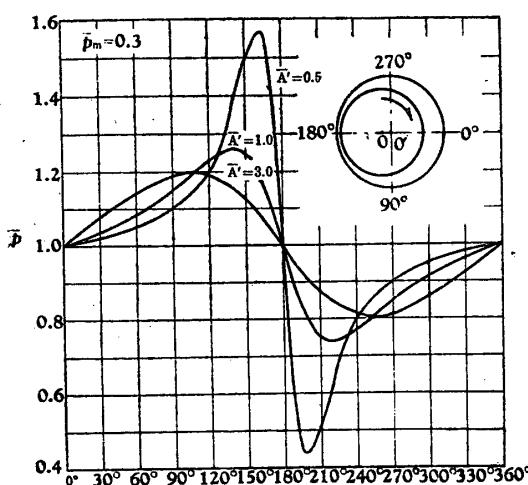
なおまた、非圧縮性の場合には(43)式からわかるように、 $\theta = 0 \sim \pi/2 \sim \pi$ および $\theta = 0 \sim -\pi/2 \sim -\pi$ の領域(第2図参照)において圧力分布が $\bar{p} = 1$ の上下に対称な形となる。従つて第2図の $00'$ の方向には分布圧力の合成力成分が零となり、その結果、軸受荷重 W を支持するためには常に偏心角 φ が 90° でなければならない。

(45)式はそのことを表わしたものに他ならない。

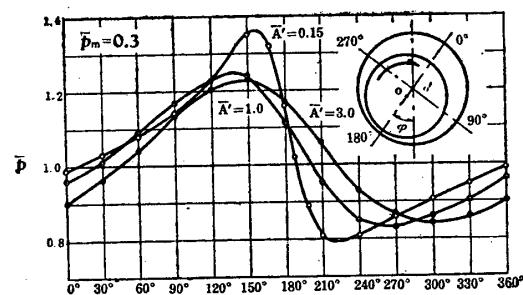
しかし圧縮性の時には(34)式にみられるように、圧力分布の形が少し複雑であつて合成力の $00'$ 方向の成分が零になるということはない、むしろ(46)式からわかるように、回転数が大になると、 $\theta = -\pi/2 \sim 0 \sim \pi/2$ および $\theta = \pi/2 \sim \pi \sim 3\pi/2$ の領域(第2図参照)において圧力分布が $\bar{p} = 1$ の上下に對称な形になろうとして、結局 $00'$ に垂直な方向にこそ合成力の成分が零になろうとする。その結果、軸受荷重 W を支持するためには、ますます $00'$ が W の方向と一致せねばならず、偏心角 φ が零になろうとするのである。

上述の説明によつて、非圧縮性の場合と圧縮性の場合の相違が明白になつたであろう。しかし、もう少し具体的な説明を附記しておくのも無駄ではないと思われる。

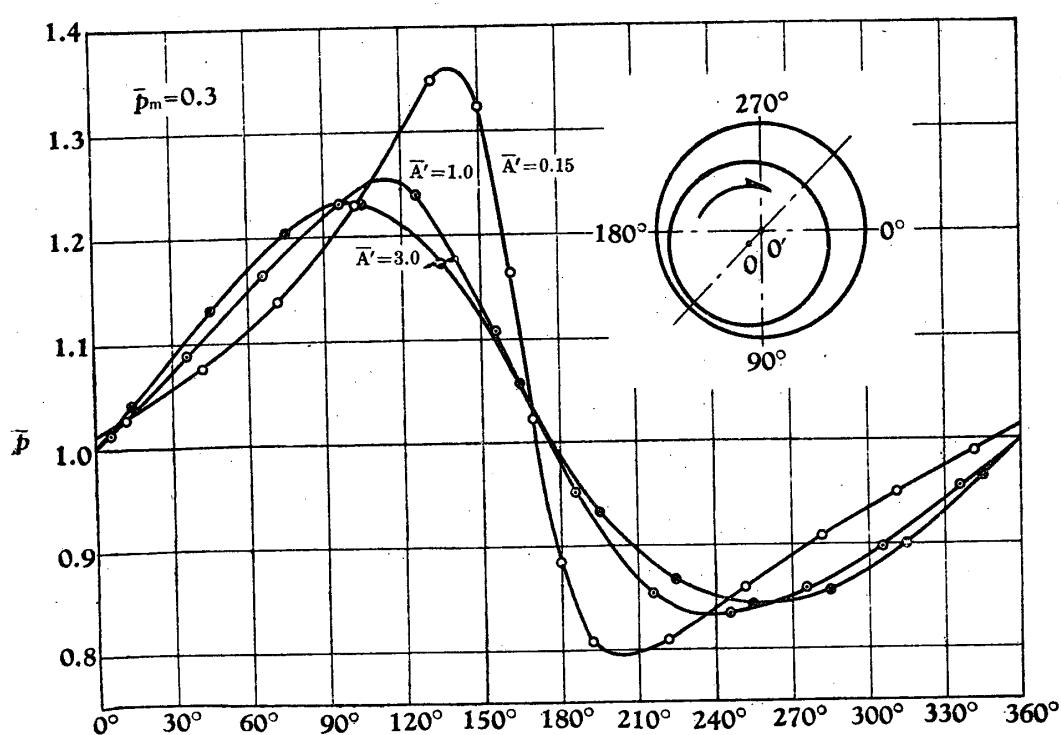
非圧縮性の場合、軸は常に第5図右上のような状態を保つ。そして軸受荷重として $\bar{p}_m = 0.3$ を例として選び、 $\bar{A}' = \bar{A}/\bar{p}_m = 0.5, 1.0, 3.0$ の三つの回転速度の場合の圧力分布を(42), (43)式から求めたのが第5図である。



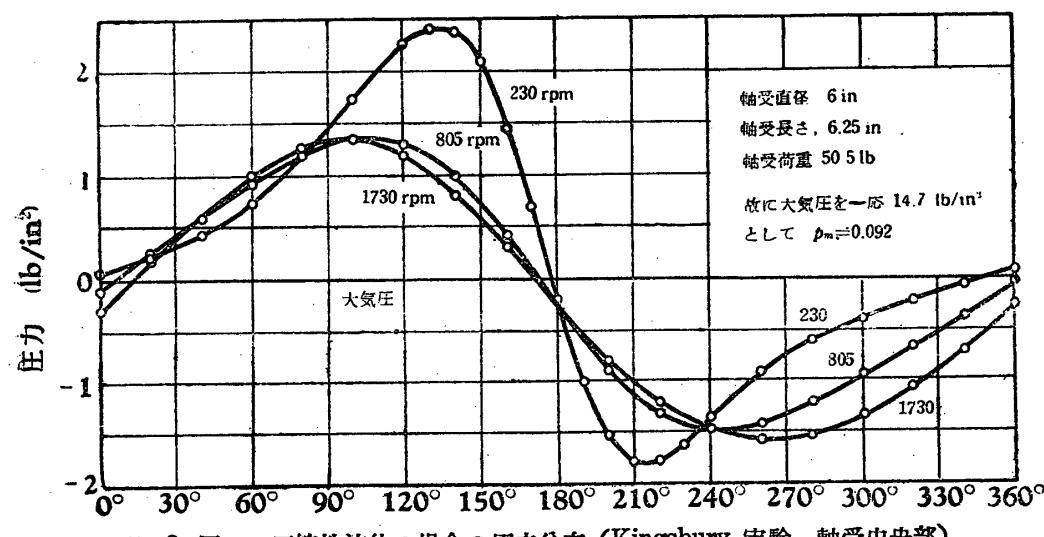
第5図 非圧縮性流体の場合の圧力分布（理論）



第6図 圧縮性流体の場合の圧力分布（理論）



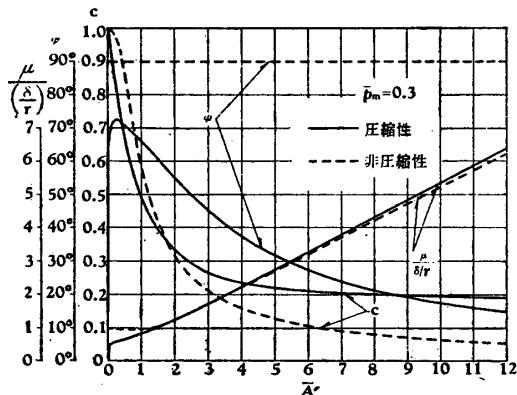
第7図 圧縮性流体の場合の圧力分布（理論）



第8図 圧縮性流体の場合の圧力分布 (Kingsbury 実験, 軸受中央部)

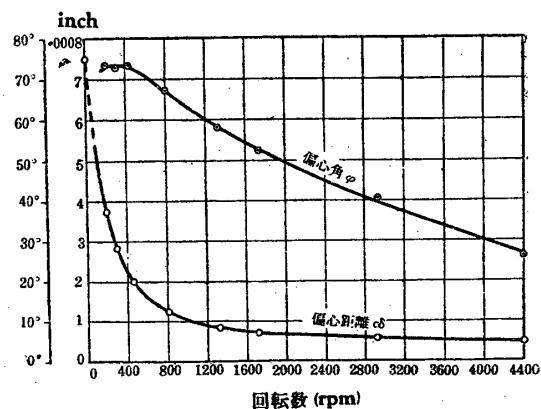
これに対し圧縮性の場合には第4図において、 $\bar{p}_m = 0.3$ であらわされる軌跡上を軸心が移動する。そして $\bar{A}' = 0.15, 1.0, 3.0$ の各状態の圧力分布を(34)式から求めた結果が第6図である。しかしこの場合には、前の非圧縮性の場合とは違つて偏心角 φ の変動のため、角度目盛の原点である最大隙間の位置が変るから、第5図のような固定角度目盛に対する圧力分布を求めるには偏心角の補正をしなければならない。そしてその結果求められたものが第7図である。なお第8図は Kingsbury が空気軸受の実験によつて得た結果である。荷重状態や回転速度は両者相違するが、非常に相似した特性を示している。

第5, 7, 8図を比較してわかるように、圧縮性の場合には、荷重支持領域の圧力分布と、その反対領域の分布とが対称にならない。また第5図では軸受隙間の最大点および最小点、すなわち $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ で $\bar{p} = 1$ となつてゐるが、第6図では決してそうはならない。ただ後者でも第7図右上のような角度目盛に対しては 0° および 180° 近傍で $\bar{p} = 1$ となる。



第9図 偏心角 φ , 偏心率 c , 摩擦係数 μ
と回転速度との関係（理論）

また第9図は、やはり $\bar{p}_m = 0.3$ に対し、偏心角 φ 、偏心率 c 、摩擦係数 μ （軸に対するもの）の変化を回転速度 \bar{A}' に対して計算したものである。なお、第10図は第8図と同じく Kingsbury の実験結果で、ただ偏心率のかわりに偏心距離をそのまま示してある。実験の方は荷重が $\bar{p}_m = 0.3$ より小であるので、回転数が大きい時の偏心が第9図より小さくなつてゐる。また実験の方は有限長さの軸受でもあるが、それでも傾向はよく似て



第10図 偏心角、偏心距離と回転速度
との関係（Kingsbury 実験）

いる。

7. む す び

以上、圧縮性流体によつてジャーナル軸受を潤滑した場合の特性を理論的に明らかにしたが、特に前節において非圧縮性の場合に比較して圧縮性の場合独特の興味ある現象を詳細に検討した。今後この方面的研究に役立つことと思う。なお本研究は文部省科学研究費によつて行われたことを附記し謝意を表するものである。

文 献

- (1) A. Kingsbury : J. of Ame, Soc. Nav. Engs., 14 (1897), 267.
- (2) A. Kingsbury : Mech. Engg., 72 (1950), 957.
- (3) W. J. Harrison : Trans. Camb. Phil. Soc., 22 (1912~1923), 39.
- (4) W. J. Harrison : ibid.
- (5) H. A. S. Howarth : Trans. A. S. M. E., 45 (1923), 421.

附 記

(32)～(35)式の計算において、 $\nu = \tan \varphi$ なる故に

$$\frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{\nu}{1+\nu^2} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \text{ 等},$$

また、 ω をパラメータとして $c = \cos \omega$ とおけば $s = \sin \omega$ となり、これらを使用すると便利である。特に第4図の中央部太線は \bar{A}' を一定としたときの μ の最小値をつらねた曲線であるが、

$$\bar{A}' = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\cos \omega \sin^2 \omega}{1 - \sin \omega}$$

$$\mu = \frac{\delta}{r} \left(\frac{1}{6} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\cos \omega \sin \omega}{1 - \sin \omega} + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \omega \right)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{3} \frac{\sin \omega - \sin^3 \omega}{2 - \sin \omega - 4 \sin^2 \omega + 3 \sin^3 \omega}$$

なる故に、求める曲線の方程式は

すなわち

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{A}'}{\partial \omega} - \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{A}'}{\partial \varphi} = 0$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{3} \frac{s - s^3}{2 - s - 4s^2 + 3s^3}$$

より