

中央線の片側に圓孔のある板梁の 曲げ應力分布に就いて

福井伸二, 三木 教*, 久能木真人**

On the Bending Stress Distributions of Plate Beams Having Circular Holes Unsymmetrically.

Shinji FUKUI, Satoshi MIKI, Mahito KUNOGI.

ABSTRACT: Bending stress distributions of plate beams having one circular hole of radius R , or two holes on one side in regard to their central lines, were studied under uniform bending moment. Analytical solutions were obtained by combining Suehiro's and Tuzi's stress functions, using polar co-ordinates, or Jeffery's function using bi-polar co-ordinates, and compared with the photo-elastic experimental results. Factors of stress concentration obtained analytically and experimentally, agreed fairly with each other. Taking distance between the central line and the center of hole as mR , then the factor of stress concentration N_A at the farthest peripheral point from the central line was expressed approximately as $N_A = 3 - 1/(m+1)$, and N_B at the nearest point as $N_B = 3 + 1/(m-1)$. Point where the bending stress is zero, situated very near to the central line. (Received May 31, 1951)

I. 緒 言

曲げ作用をうける構造部分に、鋸孔又は窓の様な圓孔のある場合は船體の側壁等の實際構造上屢々見られる處である。従つてかかる場合の曲げ應力分布については從來諸學者の注意が向けられ、中央線上に中心のある圓孔一つ、又中央線に對稱に圓孔が二つある板梁が均一曲げモーメントを、受ける場合は Coker⁽¹⁾ 教授により實驗的に取扱われ、更に圓孔一つの場合は辻二郎博士⁽²⁾により理論、並びに實驗的に詳細に取扱われ、又中央線上に二つ、及び對稱に二つある場合は小川貞英博士⁽³⁾によつて理論的に取扱われた。圓孔が中央線の片側又は非對稱にある場合も當然研究さるべきであつて、既に小田、松平兩氏⁽⁴⁾はセルロイド製の試験片を用いて偏光弾性實驗を行つて居り、理論的取扱いをするに必要な根本思想は井口常雄博

士⁽⁵⁾によつて述べられ、西村源六郎博士⁽⁶⁾は球狀窩の場合を理論的に取扱つて居る。本文では、板梁の中央線の片側に圓孔が一つ、二つある場合、孔縁の應力集中狀況、及び中立軸の位置を理論、並びに實驗的に調べた結果を報告する。

II. 極坐標による應力解析

前述の辻博士によれば無限平板が半径 R なる圓孔の中心を中心として均一曲げモーメント M を受ける時の應力函數 F_B は、 r, θ を圓の中心を原點とした極坐標で、 I を $R=0$ の場合の斷面二次モーメントとすれば、

$$F_B = \frac{M}{I} R^3 \left\{ \left(\frac{R}{2r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \sin \theta + \left(\frac{r^3}{6R^3} - \frac{R}{2r} + \frac{R^3}{3r^3} \right) \sin \theta \right\} \dots \dots \dots (1)$$

である。

又半径 R の圓孔が一つある無限平板が T なる一様垂直應力をうける場合は、周知の如く末廣恭二博士⁽⁷⁾によつて解かれ。應力函數 F_T で現せば、

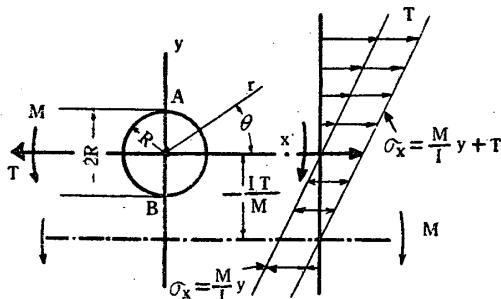
* 兵庫縣中央工業試験所

** 科學研究所

$$F_T = \frac{T'}{4} \left\{ r^2 - 2R^2 \ln T - \frac{(r^2 - R^2)^2}{r^2} \cos 2\theta \right\} \dots (2)$$

と與えられて居る。

今この兩者を加へ合せた $F_1 = F_B + F_T$ を考えると、これから求められる應力成分は孔縁では自由表面の條件を満足し、第1圖の様に、 $\theta = 0$ 、 π を x 軸、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3}{2}\pi$ を y 軸とすれば、孔から遠く離れた場所、 $r \rightarrow \infty$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3}{2}\pi$ では、 x に平行な垂直應力 σ_x 、 y に平行な σ_y 、剪断應力 τ_{xy} は、 $\sigma_x = yM/I$ 、 $\sigma_y = 0$ 、 $\tau_{xy} = 0$ となり、均一曲げの條件を満足する。こゝで $R=0$ とし σ_x を出せば $\sigma_x = y(M/I) + T$ となり、 $y_c = -IT/M$



第1圖 極座標の取り方

で $\sigma_x = 0$ となる。従つて F_1 は $y=0$ に孔の中心がある無限有孔板梁が、孔のない場合に $y = -IT/M$ が中立面である様な均一曲げモーメントを受けた場合、云いかえれば中央線から IT/M の距離に半径 R の圓孔の中心がある場合の應力分布を與える解である。そして(1)、(2)で孔の影響は局所的で有限巾の板に對して相當よい近似を與える事が知られて居るから、(3)も有限巾の板梁において、孔があまり縁に近くない場合には、相當よい近似を與えるであろうと想像される。吾々の最も注意すべきは $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3}{2}\pi$ 即ち y 軸に沿つた應力分布であるから、是等を調べる。孔の中心と板の中央との間の距離 $(IT/M) = mR$ とおけば、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 y 軸の(+)側、圖で孔より上の應力成分は、 F_1 より

$$\sigma_r = (M/I)(1 - R^2/r^2)(R^4/r^3 + 3mR^3/2r^2) = \sigma_y \dots (4)$$

$$\sigma_\theta = (M/I)(r + R^6/r^5 + mR + mR^3/2r^2 + 3mR^5/2r^4) = \sigma_x \dots (5)$$

$$\tau = 0$$

であり、

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ 、 y 軸の(-)側、孔より下の應力成分は、同様に

$$\sigma_r = (M/I)(1 - R^2/r^2)(3mR^3/2r^2 - R^4/r^3) = \sigma_y \dots (6)$$

$$\sigma_\theta = (M/I)(mR + mR^3/2r^2 + 3mR^5/2r^4 - r - R^6/r^5) = \sigma_x \dots (7)$$

$$\tau = 0$$

となる。 $\sigma_\theta = \sigma_x$ が曲げ應力で、これの孔縁の應力集中が問題であるから、中央より遠い、圖では上の縁点 A では $r=R$ であるから(5)式から $\sigma_\theta = R(2+3m)M/I$ となり、若し孔がない時には中央からの距離は $(m+1)R$ であるから、 $\sigma_A = R(m+1)M/I$ となり、應力集中係数を N_A とすれば

$$N_A = \sigma_\theta / \sigma_A = 3 - 1/(m+1) \text{ となる。} \dots (8)$$

又中央に近い、圖では下の縁点 B では(7)式から $\sigma_\theta = R(3m-2)M/I$ で、中央からの距離は $(m-1)R$ であるから、孔のない時は $\sigma_B = R(m-1)M/I$ で、應力集中係数 N_B は

$$N_B = \sigma_\theta / \sigma_B = 3 + 1/(m-1) \text{ となる。} \dots (9)$$

孔の中心が中央にある時は $m=0$ で何れも2となり、離れて $m \rightarrow \infty$ では3に近くなり、從來の結果と一致する。

次に中立軸を考えると、 $\tau=0$ であるから、 σ_r 、 σ_θ が主應力になるが、共に0、即ち全く應力の無い中立軸はない事になる。そこで $\sigma_\theta = 0$ なる點を $r_1 = n_1 R$ とすれば(7)式から

$$n_1/m = (2n_1^6 + n_1^4 + 3n_1^2)/(2n_1^6 + 2) \dots (10)$$

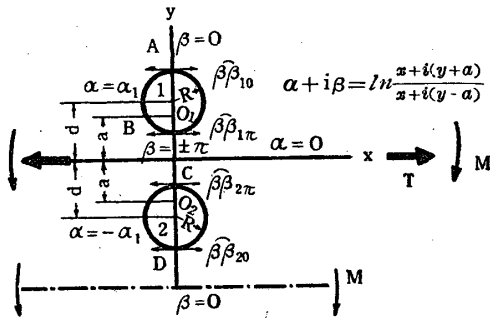
となり、(7)は孔以外の場所の應力状態を示すから $n_1 \geq 1$ であるを要し、この範圍では全て $n_1 > m$ で、 $n_1=1$ の時この比は最大で1.5となり、 n_1 が大きくなると共に小さくなり遂に1に近づく。即ちこの點は孔の中心に對し常に梁の中央より遠く、圖では中央線より下にある事を意味し、中心が中央から $2R/3$ にある時、孔の縁にあつて、孔が中央から遠ざかると次第に中央に近づく事を示す。又普通偏光弾性實驗では $\sigma_\theta - \sigma_r = 0$ の點が零次の黒縞として求められるから、この點を $r_2 = n_2 R$ とすると、(6)、(7)式から

$$n_2/m = (n_2^6 - n_2^4 + 3n_2^2)/(n_2^6 - n_2^2 + 2) \dots (11)$$

となり、 $n_2 \geq 1$ である必要があり、 $n_2=1$ なら $m=2/3$ で、 n_1 と同様である。この分母、子は $n_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1.847$ の時等しくなり、 $1 < n_2$

<1.847 の範囲では $n_2 > m$, 即ち中央より孔に對して外側にあり, $1.847 > n_2$ の範囲では逆に $n_2 < m$, 即ち逆に内側にある。

III. 双極坐標による應力解析



第2図 双曲坐標の取り方

第2図の様な双極坐標については周知の様に Jeffery⁽⁸⁾, により應力函数が求められ, 渡邊恵弘⁽⁹⁾, 小川貞英⁽¹⁰⁾, 鶴戸口英善⁽¹¹⁾氏等により一様垂直應力, 均一曲げの場合が研究されて居るので, 其等を組合わせると計算する事が出来る, $\alpha=0$, 即ち x 軸上で $\alpha\alpha, \alpha\beta=0$ の解を使えば前述の様な孔1個が直線縁の近くにある場合であつて, 孔1個について考え, y 軸上の孔縁の接線應力を曲げモーメント M によるものを $(\beta\beta_{20})_M$, $(\beta\beta_{2\pi})_M$ とし, 一様垂直應力 T によるものを $(\beta\beta_{20})_T$, $(\beta\beta_{2\pi})_T$, x, y 坐標原点上のを夫々 $(\beta\beta_0)_M$, $(\beta\beta_0)_T$ とし, 中央線の位置を y_c とし, $y_c(M/I) + T = 0$ で関係づけられ,

$$\begin{aligned} (\beta\beta_{20})_M &= \frac{Ma}{I} \left[1 + \frac{2\sinh\alpha_1}{\cosh\alpha_1 - 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}(\cosh\alpha_1 - 1) \sum_{n=2}^{\infty} N_{Bn} \right] \\ (\beta\beta_{2\pi})_M &= \frac{Ma}{I} \left[1 + \frac{2\sinh\alpha_1}{\cosh\alpha_1 + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}(\cosh\alpha_1 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n N_{Bn} \right] \\ (\beta\beta_0)_M &= \frac{Ma}{6I} \left[(1 - \cos\beta) \left\{ \frac{12\cos\beta}{1 - \cosh 2\alpha_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} 4n A_{Bn} \cos n\beta \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但し } N_{Bn} &= \frac{n(n^2-1)\sinh\alpha_1 \sinh n\alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \\ &\quad - 2n(n^2-1)\sinh\alpha_1 e^{-n\alpha_1} \\ A_{Bn} &= \frac{-n(n^2-1)\sinh^2 \alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta\beta_{20})_T &= \frac{-My_c}{I} \left[2 + (\cosh\alpha_1 - 1) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{\sinh\alpha_1} + 4e^{-2\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} N_{Tn} \right\} \right] \\ (\beta\beta_{2\pi})_T &= \frac{-My_c}{I} \left[2 + (\cosh\alpha_1 + 1) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{\sinh\alpha_1} - 4e^{-2\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n N_{Tn} \right\} \right] \\ (\beta\beta_0)_T &= \frac{-My_c}{I} \left[1 + 4e^{-\alpha_1} \operatorname{cosech}\alpha_1 \right. \\ &\quad \left. - 8 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n A_{Tn} \right] \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} N_{Tn} &= \frac{n(n-1)\sinh(n+1)\alpha_1 - n(n+1)\sinh(n-1)\alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \\ &\quad - 4n(n\sinh\alpha_1 - \cosh\alpha_1)e^{-n\alpha_1} \\ A_{Tn} &= \frac{n^2 \sinh^2 \alpha_1 - n\sinh\alpha_1 \cosh\alpha_1 + e^{-n\alpha_1} \sinh n\alpha_1}{2(\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \end{aligned}$$

従つて y_c にある中央線の周りに曲げモーメント M を受ける時は

$$(\beta\beta_{20}) = (\beta\beta_{20})_M + (\beta\beta_{20})_T = (\sigma_x)_{20} \cdots \cdots (12)$$

$$(\beta\beta_{2\pi}) = (\beta\beta_{2\pi})_M + (\beta\beta_{2\pi})_T = (\sigma_x)_{2\pi} \cdots \cdots (13)$$

が孔縁の應力であり, 又最小断面の直線縁上では

$$(\beta\beta_0) = (\beta\beta_0)_M + (\beta\beta_0)_T = (\sigma_x)_0$$

で與えられる。更に圓孔2個が $2d$ の中心距離の位置にある時は, 無限平板として取扱えば, 曲げモーメント M による孔縁 $\alpha=\alpha_1$, 上の $\beta=0$ 点及び $\beta=\pi$ 点の接線應力は

$$\begin{aligned} \beta\beta_{0M} &= \frac{Ma}{I} \left[1 + \frac{1}{\cosh\alpha_1 (\cosh 2\alpha_1 - 1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cosh 2\alpha_1 - 1} + \frac{2\sinh\alpha_1}{\cosh\alpha_1 - 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh\alpha_1 - 1}{6} \sum_{n=2}^{\infty} R_n \right] \\ \beta\beta_{\pi M} &= \frac{Ma}{I} \left[1 - \frac{1}{\cosh\alpha_1 (\cosh 2\alpha_1 - 1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cosh 2\alpha_1 - 1} + \frac{2\sinh\alpha_1}{\cosh\alpha_1 + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh\alpha_1 + 1}{6} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n R_n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但し } R_n &= (n-1)^2(n+1)e^{-(n-1)\alpha_1} - (n+1)^2(n-1)e^{-(n+1)\alpha_1} \\ &\quad + (n+1)^2 \frac{(n-1)(n+1 - ne^{-2\alpha_1} + e^{-2n\alpha_1})}{\sinh 2n\alpha_1 - n\sinh 2\alpha_1} \sinh(n+1)\alpha_1 \end{aligned}$$

$$+(n-1)^2 \frac{(n+1-ne^{2\alpha_1}-e^{-2n\alpha_1})}{\sinh 2n\alpha_1 - n \sinh 2\alpha_1} \sinh(n-1)\alpha_1 \\ - 8n(n^2-1)e^{-n\alpha_1} \sinh \alpha_1$$

であり、又一様垂直應力 $T = -(My_0/I)$ によるものは、

$$\widehat{\beta\beta_{0T}} = \frac{-2My_0}{I} \left[K \sinh \alpha_1 \left\{ 2 \sinh \alpha_1 - (\cosh \alpha_1 - 1) \left(1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n \right) \right\} + 1 + (\cosh \alpha_1 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} S_n \right] \\ \widehat{\beta\beta_{\pi T}} = \frac{-2My_0}{I} \left[K \sinh \alpha_1 \left\{ 2 \sinh \alpha_1 - (\cosh \alpha_1 + 1) \left(1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q'_n \right) \right\} + 1 + (\cosh \alpha_1 + 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_n \right]$$

但し

$$S_n = \frac{n(n-1) \cosh(n+1)\alpha_1 - n(n+1) \cosh(n-1)\alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} - 2n(n \sinh \alpha_1 - \cosh \alpha_1) e^{-\alpha_1} \\ K = \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sinh^2 \alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} \right] / \left[\frac{1}{2} + \frac{\sinh^2 \alpha_1}{\cosh \alpha_1} - 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n^2 \sinh^2 \alpha_1 - \sinh^2 n\alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1} \right\} \right] \\ Q'_n = e^{-n\alpha_1} - \frac{\sinh n\alpha_1}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1}$$

で与えられるので、 y_0 にある中央線の周りに曲げモーメント M が働く時は、

$$\widehat{\beta\beta_{10}} = \widehat{\beta\beta_{0M}} + \widehat{\beta\beta_{0T}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\widehat{\beta\beta_{1\pi}} = \widehat{\beta\beta_{\pi M}} + \widehat{\beta\beta_{\pi T}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\widehat{\beta\beta_{20}} = \widehat{\beta\beta_{0T}} - \widehat{\beta\beta_{0M}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

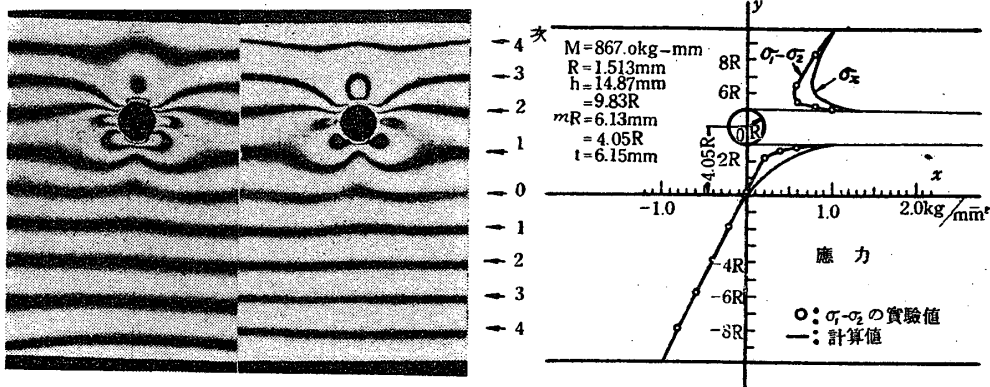
$$\widehat{\beta\beta_{2\pi}} = \widehat{\beta\beta_{\pi T}} - \widehat{\beta\beta_{\pi M}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を計算すれば、最小断面、即ち y 軸上の孔縁点の應

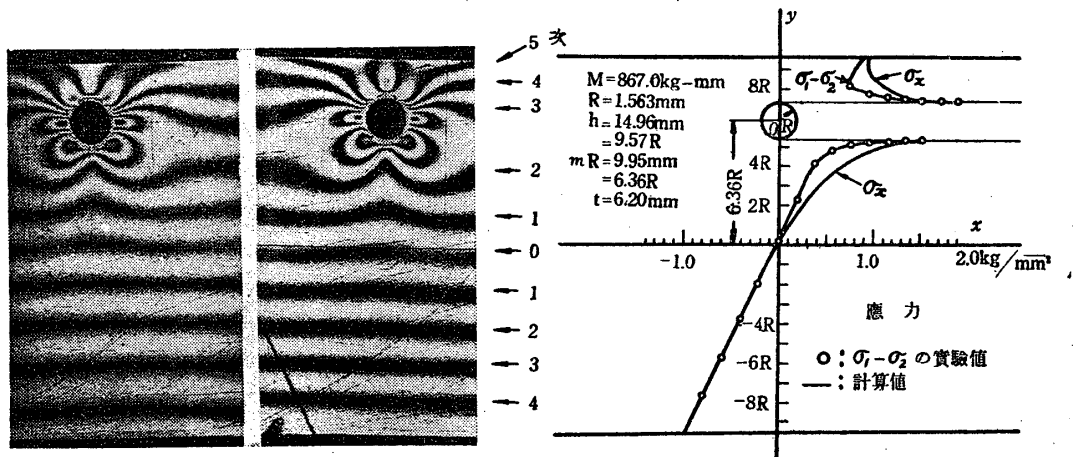
力が求められる。

IV. 偏光弾性実験結果と理論値との比較

理研 フェノライト、厚さ約 6mm、梁の巾約 30mm の試片を用い、4 点支持で荷重し、長さ約 60mm の範囲に均一曲げモーメントが働く様にした。第 3 圖は $R=1.51\text{mm}$ の孔が 1 個、中央よりその中心が $6.13\text{mm}=4.05R$ の位置にある場合で、 $m=4.05$ 、梁の巾 $2h=29.74\text{mm}=19.66R$ 、厚さ $t=6.15\text{mm}$ 、偏光弾性係数 $\alpha=0.81$ 本/kg/mm の試片に均一曲げモーメント $M=867\text{kg-mm}$ を掛けた時の写真である。向つて左は孔が引張應力側にある場合、中央は孔が圧縮側にある場合で、この兩者の結果を平均して初應力による誤差を除いた。何れも孔の附近には應力綫が多少集り、應力集中を示し、孔の無い方の側では綫は一見殆んど等距離に現れ、普通の均一曲げモーメントを受けた場合の結果と大差なく、孔の存在の影響が殆んどない事が看取される。又兩者の間では綫の分布が多少相違して居るのは初應力の爲であつて、兩者を平均してその影響を消去したのは前述の通りである。右側は孔の中心を通る最小断面即ち y 軸上の應力分布であつて、横軸は應力値を kg/mm^2 で示して居る。○點は写真中の應力綫を夫々の次數に従つて圖示した者で、主應力差 $(\sigma_1 - \sigma_2)$ で、この断面に對して對稱であるから、 σ_θ , σ_r , 又は σ_x , σ_y が主應力となり、これらの差を与える。實線は極坐標により、(4), (5), (6), (7) 式で計算した $(\sigma_\theta - \sigma_r) = (\sigma_x - \sigma_y)$, 及び $\sigma_\theta = \sigma_x$ で、夫々圖中に記入した通りである。主應力差は實驗の誤差範囲内で一致して居ると見て差支えなく、孔縁の接線應力も同様で、孔のない側では殆んど孔の影響を受けず、普通の曲げ應力



第 3 圖 孔 1 個, $m=4.05$ の場合の結果

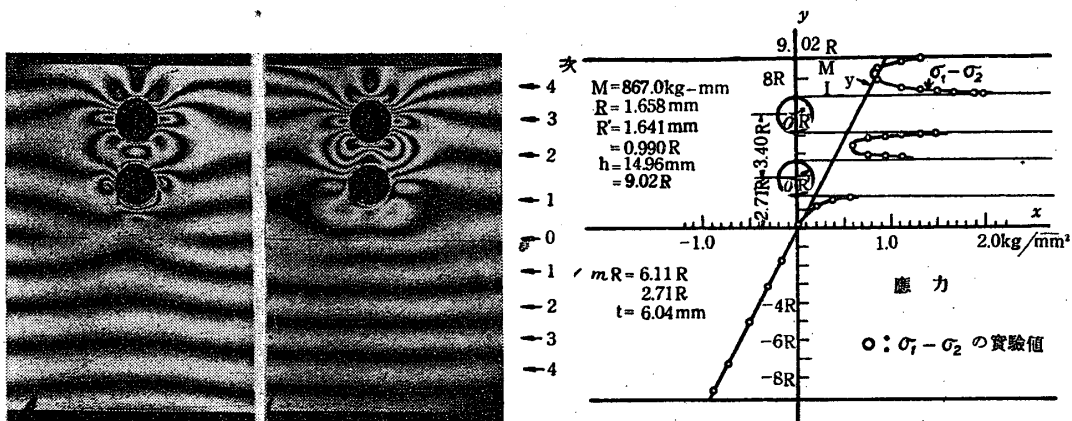
第4図 孔1個, $m=6.35$ の場合の結果

分布に似た, 大體直線的分布をして居る, 又梁の中央の極く近所に於いて, σ_θ は中央に對して孔の反対側, $\sigma_\theta - \sigma_r$ は孔のある側で0となる.

第4圖は孔の位置の異つた $m=6.36$, 即ち中央から少し遠ざかり, 梁の縁に近よつた場合の結果で, 半径 $R=1.56\text{mm}$, $mR=9.95\text{mm}=6.36R$, $h=14.96\text{mm}=9.57R$, 厚み $t=6.20\text{mm}$, 偏光弾性係数 $\alpha=0.84\text{本/kg/mm}$ で, 與えた曲げモーメントは前者と同様 $M=867\text{kg-mm}$ である. そして向つて左は孔が引張側にある場合, 中央は壓縮側にある場合, 右は實驗結果と計算結果の比較である. 總ての傾向, 及び實驗結果と, 極坐標を用いての計算結果の一致は前者と同様である. 中央の極く近所で, σ_θ は孔の反対側, $\sigma_\theta - \sigma_r$ は孔側で0となる. 従つて孔の位置, 及びその大いさと梁の中の割合が此等の様な場合には, 無限巾とし, 普通の極坐標を用いて計算し, 應力集中係数は(8), (9)式で計算して大體差支えないと考えられる. 又 $\sigma_\theta=0$ なる點は(10)式から計算すると

常に孔の反対側にあり, 孔の中心が $2R/3$ 丈離れると, 中央から $R/3$, 丁度孔の縁にあり, 其れ以上離れると次第に中央に近づく. 又 $\sigma_\theta - \sigma_r=0$ なる點は, 孔の中心が $2R/3$ 丈離れると, 中央から $R/3$ 丈中心の反対側, 即ち丁度孔の縁にあり, 其れ以上離れると次第に中央に近づき, 遂に $1.847R$ 離れた時に中央に一致し, 其れ以上離れると中央より孔の側に移り, 遂に又次第に中央に近づく. 實驗値は計算結果と同傾向を示すが, よく一致しない. これはこの量が非常に小さく, 測定が困難な爲で, 應力分布がよく合う事から考えて, これらの點も計算値は相當信用してよからうと考えられる. これらの點は中央から離れて居るとは云え, いづれにもせよ其の距離はごく僅かで, 大體に於いて應力0の點は孔があつても, 梁の中央にあると考えて大いした誤はなく, 其の原因は孔の縁に應力集中が起る結果と考えられる.

第5圖は中央の片側に2個孔があり, 其等の中心は中央線に垂直な同一斷面上にある場合の結



第5圖 孔2個の場合の結果

第 1 表 孔縁應力集中係数の實驗及計算結果

孔 の 數	1		1		2			
孔の直径 $2R$ mm	3.02		3.12		3.31		3.28	
孔の中心と梁の中央との距離 mR mm	6.13 (4.05 R)		9.95 (6.36 R)		10.12 (6.11 R)		4.50 (2.71 R)	
	A 點	B 點	A 點	B 點	A 點	B 點	C 點	D 點
實驗による値	2.8	3.4	2.9	3.2	2.5	2.8	2.9	3.8
極坐標による計算値	2.8	3.4	2.9	3.2	2.9	3.2	2.7	3.2
双極坐標による値	2.85	3.4	2.9	3.35	2.9	3.3	2.8	3.9

果で、試片の寸法は、中央より遠い孔の半径 $R=1.658\text{mm}$ 、中心と中央との距離 $=10.12\text{mm}=6.11R$ 、中央に近い方の孔の半径 $R=1.641\text{mm}=0.990R$ 、中心と中央との距離 $=4.50\text{mm}=2.71R$ 、中心と中心との距離 $=3.40R$ 、梁の巾の半分 $h=14.96\text{mm}=9.02R$ 、厚さ $t=6.04\text{mm}$ 、偏光弾性係数 $\alpha=0.88$ 本/kg/mm で、荷重方法、及び曲げモーメントは孔 1 個の場合と同様である。圖から明かな様に孔の縁には應力集中が生じ、その實測値は、中央より遠い孔の、遠い方の縁 A 點では、孔の無い場合の曲げ應力の 2.5 倍、近い方の縁 B 點では 2.8 倍、近い方の孔の、遠い方の縁 C 點では 2.9 倍、近い方の縁 D 點では 3.8 倍の應力が現れて居る。孔のない方の側には殆んど影響はなく、普通の曲げ應力と大差ない直線的分布を示し、 $\sigma_\theta - \sigma_r = 0$ なる點は中央と殆んど一致して居る。

更に以上の實驗結果と、計算結果を孔縁の應力集中係数によつて比較したのが第 1 表である。孔 1 個の場合、極坐標による計算値は (8), (9) 式によるもので、双極坐標のは (12), (13) 式の結果である。孔 2 個の場合は、極坐標による時は互に他の孔がないとして計算し、双極坐標による時は (14), (15), (16), (17) 式による結果である。孔 2 個の場合の中央より遠い孔を除いて、何れも實驗値と計算値はよく合致して居るとみられる。合致しないのは計算の場合に無限幅として取扱つた事に主なる原因があると考えられる。

V. 結 言

以上を總括すると、

1) 半径 R の圓孔 1 個が、その中心と板梁の中央線との距離 mR の位置にあつて、均一曲げモーメントを受ける場合を、從來もとめられた、極坐標、又は双極坐標を使つた一樣垂直應力をう

ける場合と、孔の中心が中央線上にある場合の解を組合せて取扱つた。梁の幅を無限と假定すれば、孔縁點の應力集中係数は

中央線より遠い縁點で $N_A = 3 - 1/(m+1)$,

中央線に近い縁點で $N_B = 3 + 1/(m-1)$,

で與えられ、應力集中は孔の附近にだけ顯著である。その結果、梁の幅が有限でも、孔縁と梁縁の間が孔の直径程度以上あれば、偏光弾性による實驗結果と以上の計算結果とはよく一致し、更に双極坐標を用い、幅有限として取扱つた結果も同様である。

又應力が 0 である嚴密な中立點はないが、主應力差、又はその一つが 0 であつて、中立點とみなされる點は中央線のごく近くにあり、その違いは一般に省略して差支えない程度である。

2) 圓孔 2 個の場合も同様に取扱ひ、偏光弾性實驗の結果と比較した。應力集中係数の値は、孔一つの場合と同程度で、中央線に近い孔では比較的良好が、遠い方の孔では實驗値が小さく出る。これは梁を無限幅として計算した事に主な原因があると考えられる。

以上の研究に對し御指導を賜つた井口常雄先生、又試片の入手に便宜を與えられた辻二郎博士等に厚く感謝の意を表すると共に、昭和 22 年度に文部省科學研究費の補助を受けたので、併せて謝意を表する。

文 献

- (1) E. G. Coker: *Engg.*, **XCIII**, (1912—3—8), 325—326.
- (2) 辻二郎: *Sci. Pap. I. P. C. R.* 9 (1928—8), 65—85.
- (3) 小川貞英: 造船協會會報, 52 (昭 8—12), 213—231.
- (4) 小田千馬木, 松平直一: 東大工學部造船學科卒業論文 (正大 15 年)

- (5) 井口常雄: 造船協会会報, 50 (昭7-10), 59.
 (6) 西村源六郎: 火兵學會誌, 28 (昭8-1) 5. 355.
 (7) 末廣恭二: *Engg. XCH* (1911), 280~282.
 (8) G. B. Jeffery: *Phil. Trans. Roy. Soc. London. A*, 221 (1921), 265~293.
 (9) 渡邊恵弘: 九州帝國大學工學部彙報, 6 (昭6) 86-104 頁.
 (10) 小川貞英: 前出
 (11) 鶴戸口英善: 日本機械學會誌, 49~339 (昭21-8), 306~309.
 : 應用力學 1~3 (昭22-5) 87~93 頁
 : 應用力學 (昭22-1) 20~32 頁
 : 應用數學・力學 (1947-6) 14~28 第1卷第1號(1947-7)61~81第1卷第2號

以上の文献により, 双極座標を用いて計算した際の應力函数の形を参考の爲附記する. 第2圖により, 寫像擴大率を h とすれば

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2, \quad h = \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{a}$$

(x, y) 座標についての Airy の應力函数を χ とすれば, (α, β) 座標については,

$$a\alpha\hat{\alpha} = \{(\cosh \alpha - \cosh \beta)(\partial^2/\partial \beta^2) - \sinh \alpha (\partial/\partial \alpha) - \sin \beta (\partial/\partial \beta) + \cosh \alpha\} (h\chi)$$

$$a\beta\hat{\beta} = \{(\cosh \alpha - \cos \beta)(\partial^2/\partial \alpha^2) - \sinh \alpha (\partial/\partial \alpha) - \sin \beta (\partial/\partial \beta) + \cos \beta\} (h\chi)$$

$$a\alpha\hat{\beta} = -(\cosh \alpha - \cos \beta) [\partial^2(h\chi)/\partial \alpha \partial \beta]$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (h\chi) = 0.$$

Jeffery は $h\chi$ の一般解を求めた.

$$h\chi = \{B_0\alpha + K \log(\cosh \alpha - \cos \beta)\}(\cosh \alpha - \cos \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(\alpha) \cos n\beta + \psi_n(\alpha) \sin n\beta\}$$

$$\text{但し } \varphi_n(\alpha) = A_n \cosh(n+1)\alpha + B_n \cosh(n-1)\alpha + C_n \sinh(n+1)\alpha + D_n \sinh(n-1)\alpha, \quad (n \geq 2)$$

$$\psi_n(\alpha) = A'_n \cosh(n+1)\alpha + B'_n \cosh(n-1)\alpha + C'_n \sinh(n+1)\alpha + D'_n \sinh(n-1)\alpha, \quad (n \geq 2)$$

$$\varphi_1(\alpha) = A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + C_1 \sinh 2\alpha$$

$$\psi_1(\alpha) = A'_1 \cosh 2\alpha + C'_1 \sinh 2\alpha$$

積分常数 $B_0, K, A_1, B_1, A_n, B_n$ は境界条件によつて決定され, 特に境界 $\alpha = \alpha_1$ の一定圓周が自由境界の時,

$$[\partial(h\chi)/\partial \alpha]_{\alpha=\alpha_1} = \rho$$

$$(h\chi)_{\alpha=\alpha_1} = \rho \tanh \alpha_1 + \sigma (\cosh \alpha_1 \cos \beta - 1) + \tau \sin \beta$$

ρ, σ, τ は Michell の自由境界の三常数である. 一圓孔を有する半無限平板が, 一樣引張を受ける場合の應力函数は Jeffery により求められ, 鶴戸口氏により訂正されて居る. 孔を $\alpha = -\alpha_1$ とすると, $\alpha < 0$ では,

$$\begin{aligned} {}_1(h\chi)_r = & aT \left[-(1/2) \sinh \alpha - (1/2) \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) \right. \\ & \times \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 - (1/2) \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \cosh(2\alpha_1 \\ & \left. + \alpha) \sinh \alpha \cos \beta \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{n \sinh \alpha_1 \sinh(\alpha + \alpha_1) \sinh n\alpha}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \right. \right. \end{aligned}$$

同じく一圓孔の場合, 第2圖にて x 軸を中立軸とする曲げモーメントがかかつた時, $\alpha < 0$ の所で,

$$\begin{aligned} {}_1(h\chi)_M = & (Ma^2/6I) \left[-\cosh \alpha + B_0 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) - 2 \cos \beta - {}_1A_1 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta \right. \\ & + ({}_1B_0/2) \sinh 2\alpha \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n-1) e^{(n+1)\alpha} \\ & - (n+1) e^{(n-1)\alpha} - {}_1A_n [\cosh(n+1)\alpha \\ & - \cosh(n-1)\alpha] + {}_1E_n [(n-1) \sinh(n+1)\alpha \\ & \left. - (n-1) \sinh(n-1)\alpha] \} \cos n\beta \right] \end{aligned}$$

$${}_1B_0 = 6 \sinh 2\alpha_1 / (1 - \cosh 2\alpha_1)^2 \quad {}_1A_n = A_{Bn}$$

$${}_1A_1 = 3 / (1 - \cosh 2\alpha_1)$$

$${}_1E_n = \frac{e^{-n\alpha_1} \sinh n\alpha_1 + n \sinh \alpha_1 (n \sinh \alpha_1 + \cosh \alpha_1)}{\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1}$$

等大二圓孔 $\alpha = \alpha_1, -\alpha_1$ を有する無限平板が, x 軸に平行な引張を受ける場合は鶴戸口氏が求めて居る.

$$\begin{aligned} {}_2(h\chi)_r = & aT \left[(1/2) \sinh \alpha + K (\cosh \alpha - \cos \beta) \log(\cosh \alpha - \cos \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \alpha e^{-n\alpha_1} \right. \\ & \left. + {}_2T A_n \cosh(n+1)\alpha + {}_2T B_n \cosh(n-1)\alpha \right] \cos n\beta \quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

$${}_2T A_1 = e^{-\alpha_1} (K \sinh \alpha_1 - e^{-\alpha_1}/2) / \sinh 2\alpha_1$$

$${}_2T B_1 = (K/2) \cosh 2\alpha_1 \tanh \alpha_1 - (\sinh 2\alpha_1 - 1) / 2 \sinh 2\alpha_1$$

$${}_{2T}A_n = \frac{e^{-n\alpha_1} \{ (ne^{(n-1)\alpha_1} \sinh \alpha_1 - \cosh n\alpha_1) + 2K(ne^{(n-1)\alpha_1} \sinh \alpha_1 + \sinh n\alpha_1) / n(n+1) \}}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1}$$

$${}_{2T}B_n = \frac{-e^{-n\alpha_1} \{ (ne^{(n+1)\alpha_1} \sinh \alpha_1 - \cosh n\alpha_1) + 2K(ne^{(n+1)\alpha_1} \sinh \alpha_1 + \sinh n\alpha_1) / n(n-1) \}}{n \sinh 2\alpha_1 + \sinh 2n\alpha_1}$$

中央軸の兩側に對稱に等大二圓孔がある場合は小

$${}_{2M}B_0 = 6 \cosh 2\alpha_1 / \{ \sinh 2\alpha_1 (\cosh 2\alpha_1 - 1) \}$$

川貞英氏により求められ、 $\alpha > 0$ では、

$${}_{2M}C_1 = 3 / \{ \sinh 2\alpha_1 (\cosh 2\alpha_1 - 1) \}$$

$${}_2(h\chi)_M = (Ma^2/6I) [\cosh \alpha + {}_{2M}B_0 \alpha \cosh \alpha$$

$$+ \{ 2 - {}_{2M}B_0 \alpha + {}_{2M}C_1 \sinh 2\alpha \} \cos \beta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1) e^{-(n-1)\alpha} - (n-1) e^{-(n+1)\alpha}$$

$$+ {}_{2M}C_n \sinh(n+1)\alpha + {}_{2M}D_n \sinh(n$$

$$-1)\alpha \} \cos n\beta]$$

$${}_{2M}C_n = \frac{(n-1)(n+1 - ne^{-2\alpha_1} + e^{-2n\alpha_1})}{\sinh 2n\alpha_1 - n \sinh 2\alpha_1}$$

$${}_{2M}D_n = \frac{(n+1)(n-1 - ne^{2\alpha_1} e^{-2n\alpha_1})}{\sinh 2n\alpha_1 - n \sinh 2\alpha_1}$$

である。

(1951 年 5 月 31 日受理)