

(種々御指導をいただいた中西, 河田兩先生に深く御禮申上げる次第です。)

1. まえがき

軸流回轉機とは, 軸流送風機及び軸流タービンを一しよにして云つたものである。

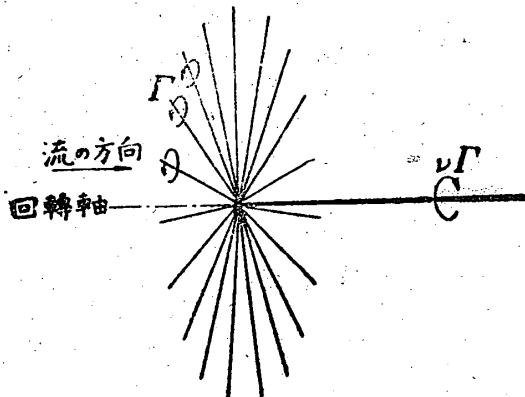
軸流送風機における翼のとりあつかい方をみると, 半径方向に生えている翼を回轉軸を軸とする圓筒で切つて, それを平面に展開したとき出てくる翼列を無限翼列としてとりあつかひ, この無限翼列における各翼に働く力などが, そのまゝ軸流送風機の翼のその断面に働くと考えることが一般に行われているようである。はたしてこの考え方が正しいかどうか, 渦理論の立場から考えてみた。

2. 假 定

まず一番かんたんな場合として次の假定的場合についてやつてみる。

- 假定 1. 理想流體とする。
- 2. 各翼は一本の太さのない渦でできているとする。
- 3. 各翼の渦の強さは半径方向に一定である
- 4. 翼はすべて回轉軸に直角なる一平面上にあり且回轉軸と交るものとする。

この外に軸流回轉機の形として, 内外二つの回轉軸を軸とする圓筒の間を流體が流れる場合を考えるのであるが, この境界條件をいきなり考えずに, まず内側

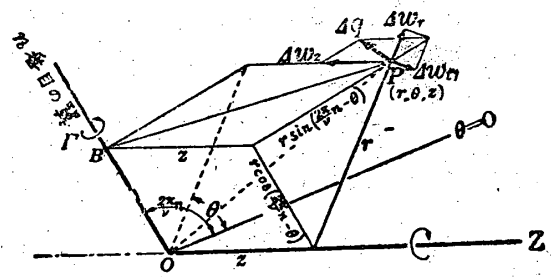


第 1 圖

の圓筒の半径が 0, 外側のそれが ∞ になつた場合について考えてみることにする。

3. 誘起速度

上述の假定の様な軸流回轉機において渦はどうなつているかを考えてみると, 各翼の渦は半径方向に強さは一定であるから翼の途中から, らせん状の自由渦は出ていない。r = ∞ の方は問題ないとして, r = 0 から自由渦が回轉軸にそつて出ていることになる。(第 1 圖参照)



第 2 圖

$$\Delta g = \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{z^2 + r^2} \sin(\frac{2\pi}{\nu}n - \theta)} \left\{ 1 + \frac{r \cos(\frac{2\pi}{\nu}n - \theta)}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right\} \quad (1)$$

但し ν: 全体の翼數

$$\Delta u_r = \Delta g \frac{z \sin(\frac{2\pi}{\nu}n - \theta)}{\sqrt{z^2 + r^2} \sin(\frac{2\pi}{\nu}n - \theta)}$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1}} \frac{\sin(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n)}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \cos(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n)} \quad (2)$$

$$u_r = \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta u_r$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1}} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\sin(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n)}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \cos(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n)}$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1}} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \log \left[ \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \cos(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n) \right]$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1}} \frac{\partial}{\partial \theta} \log \prod_{n=0}^{\nu-1} \left[ \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \cos(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n) \right] \quad (3)$$

$$\prod_{n=0}^{\nu-1} [x^2 + y^2 - 2xy \cos(\theta - \frac{2\pi}{\nu}n)] = x^2 + y^2 - 2x^2 y^2 \cos \nu \theta \quad (4)$$

$$u_r = -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1}} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} + \frac{z}{r} \right) + \left( \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \frac{z}{r} \right) - 2 \cos \nu \theta \right]$$

$$= -\frac{\nu \Gamma}{4\pi r} \frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1}} \frac{2 \frac{z}{r} \sin \nu \theta}{\left( \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} + \frac{z}{r} \right) + \left( \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \frac{z}{r} \right) - 2 \cos \nu \theta} \quad (5)$$

いまこの翼の渦の一本とそれに伴う自由渦をとりだしてみると第2圖のようになる。まず  $n$  番目の翼だけによつて圖の P に誘起される速度  $w_1$  は OB, OP に垂直で且その大きさは (1) 式のようになる。(  $\theta=0$  に第0番目の翼があるとす。)

まず之の  $r$  方向の成分を考えると、それは (2) 式であらわされる。 $\nu$  本の渦が等間隔に配置されているとして、 $w_r$  の式を作つてみると (3) 式となる。

而して (4) なる公式<sup>2)</sup> を用いることによつて (5) 式を得る。

次に  $z$  方向の成分は (6) 式で表される。

之は  $\Delta w_r$  とよく似た式であり、全く同様な方法で全翼による誘起速度がもとめられ (7) 式をうる。

次に切線方向の成分は (8) 式で表される。

全翼による誘起速度は (9) 式となる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}{a - b \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} \\ & = \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{2}{\frac{2}{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} - \frac{2}{a - b \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}} \\ & = - \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{2}{\frac{2}{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} - \frac{2}{a - b \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}} \\ & = - \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{2}{\frac{2}{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} - \frac{2}{a - b \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}} \\ & = - \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{2}{\frac{2}{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} - \frac{2}{a - b \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}} \end{aligned}$$

以上の式を (9) に用いることによつて (10) を得る。

次に自由渦による誘起速度を考えると、之は切線方向のみであり (11) のようになる。

$$\Delta w_{t1} = -\Delta g \frac{r \sin(\frac{2\pi n}{\nu} - \theta)}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2(\frac{2\pi n}{\nu} - \theta)}} \quad (6)$$

$$w_{t1} = \frac{\nu \Gamma}{4\pi r} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1}} \frac{2 \sin \nu \theta}{(\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} + \frac{r}{a}) + (\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} - \frac{r}{a}) - 2 \cos \nu \theta} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_{t2} &= \Delta g \frac{z \cos(\frac{2\pi n}{\nu} - \theta)}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2(\frac{2\pi n}{\nu} - \theta)}} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1}} \frac{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} - \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} \quad (8) \end{aligned}$$

$$w_{t2} = -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1}} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} - \cos(\theta - \frac{2\pi n}{\nu})} \quad (9)$$

$$w_{t1} = \frac{\nu \Gamma}{4\pi r} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1}} \frac{(\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} + \frac{r}{a})^{\nu-1} - (\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} - \frac{r}{a})^{\nu-1} + 2 \frac{r}{a} \cos \nu \theta}{(\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} + \frac{r}{a}) + (\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1} - \frac{r}{a}) - 2 \cos \nu \theta} \quad (10)$$

$$w_{t2} = -\frac{\nu \Gamma}{4\pi r} \left[ 1 + \frac{\frac{r}{a}}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1}} \right] \quad (11)$$

故に切線方向の全誘起速度は

$$w_t = w_{t1} + w_{t2} \dots \dots \dots (12)$$

翼列と比較のため次の變換を試みる。

$$\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} + \frac{z}{r} = e^{\frac{z}{r}}$$

とおけば

$$\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \frac{z}{r} = e^{-\frac{z}{r}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{r} &= \sinh \frac{z}{r} \\ \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} &= \cosh \frac{z}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

又

$$\left. \begin{aligned} r\theta &= y \\ r \frac{2\pi}{\nu} &= a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

即ち半径  $r$  なる圓筒面上での翼の刻みを  $a$  とする。かくすると (5) (7) (12) は

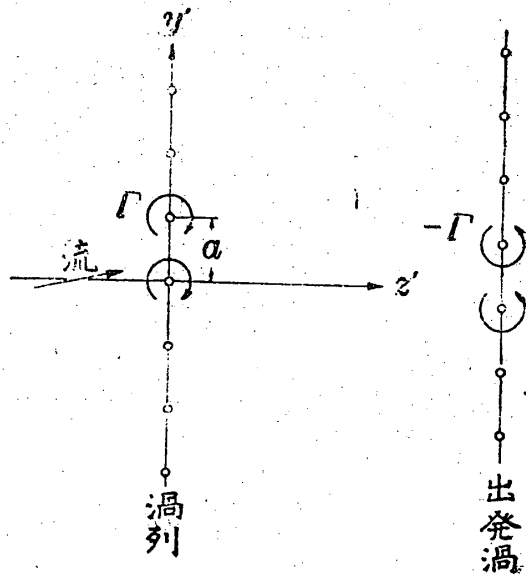
$$w_r = -\frac{\Gamma}{2a} \frac{1}{\cosh \frac{1}{2} \frac{2\pi z}{a}} \frac{\sinh \frac{1}{2} \frac{2\pi z}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{a}}{\cosh \frac{2\pi z}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \quad (15)$$

$$w_z = \frac{\Gamma}{2a} \frac{1}{\cosh \frac{1}{2} \frac{2\pi z}{a}} \frac{\sin \frac{2\pi y}{a}}{\cosh \frac{2\pi z}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \quad (16)$$

$$w_t = -\frac{\Gamma}{2a} \left[ 1 + \frac{\sinh \frac{2\pi z}{a}}{\cosh \frac{2\pi z}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \right] \quad (17)$$

4. 渦列の誘起速度

單葉翼のまわりに循環が生ずるのは、翼と流體が相對運動をはじめたときに放出される出發渦にもとづくものであることはプラントルも述べているところであるが、翼列の場合も之と同じことがいえる。<sup>(3)</sup>  $\Gamma$  なる循環をもち、刻み  $a$  なる翼列があれば、その  $\infty$  後方には  $-\Gamma$  なる強さで刻み  $a$  なる渦列が存在する。單葉翼の場合にはこの出發渦は一つであるから、之が  $\infty$



第 3 圖

に行つてしまえばその影響は考えなくてもよいが、翼列の場合は渦の数が無限に多いから、この出發渦を無視するわけにはゆかない。

さて本すちにたちもどつて、今の場合は第3圖のごとき渦列を考える。

(z', y')における渦列による誘起速度の z' 成分, y' 成分を w'z, w'y1 とすると(18), (19), のようになる。(4)

次に出發渦による誘起速度は全領域で一様であり、且 y' 方向のみである。その大きさは

$$w'_{y2} = -\frac{\Gamma}{2a}$$

結局 y' 方向の誘起速度は(20)式であたえられる。

$$w'_z = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sin \frac{2\pi}{a} y'}{\cosh \frac{2\pi}{a} z' - \cos \frac{2\pi}{a} y'} \quad \text{---(18)}$$

$$w'_{y1} = \frac{\Gamma}{2c} \frac{\sinh \frac{2\pi}{a} x'}{\cosh \frac{2\pi}{a} z' - \cos \frac{2\pi}{a} y'} \quad \text{---(19)}$$

$$w'_y = w'_{y1} + w'_{y2} = -\frac{\Gamma}{2a} \left[ 1 + \frac{\sinh \frac{2\pi}{a} x'}{\cosh \frac{2\pi}{a} z' - \cos \frac{2\pi}{a} y'} \right] \quad \text{---(20)}$$

### 5. w<sub>r</sub> に對する考慮 (流管の状態)

流の上流∞において r なる半径のところにある流線は z に對して如何なる半径のところにあるかをしらべてみる、流線の満足する方程式は

$$\frac{w_r}{dr} = \frac{w_n + w_z}{dZ} = \frac{w_t + w_{t0}}{r d\theta} \quad \text{---(21)}$$

但し w<sub>n</sub>: 上流∞における軸流速度

w<sub>t0</sub>: 上流∞における切線速度

上流∞において半径 r にある流線のすべてについて上述の式をとけば流管の形が得られる。流管が如何なる凸凹を有するか、即ち圓筒からどの位はずれるかをしらべるには結局(21)を各々の流線に沿つて積分してみればよいわけである。しかしこれは非常に困難なことであるし今の場合にはたゞその凸凹の程度がわかればよいことにする。それには次の様なやり方をする。まず凸凹の最大の位置は凸凹が翼の渦に起因するものである以上翼の近くであるに違いない。實際は自由渦の影響がある關係上嚴密に z=0 ではないと思はれるけれど、凸凹の程度をしらべるには Z=0 におけるそれをしらべてみれば事足りるであろう。流線の圓筒よりの外れの最大を dh で表すと(21)より

$$\frac{dh}{r} = \int_{-\infty}^0 \frac{w_r}{w_n + w_z} \frac{dZ}{r} \quad \text{---(22)}$$

但し積分は流線に沿つて行わねばならぬ。

今 θ=0, θ=2π/ν の間の w<sub>r</sub> の符號の變化をし

らべてみると

Z < 0	0 < θ < 1/2 * 2π/ν	において	+
	1/2 * 2π/ν < θ < 2π/ν	"	-
Z < 0	0 < θ < 1/2 * 2π/ν	"	-
	1/2 * 2π/ν < θ < 2π/ν	"	+

そこで今 Z < 0 w<sub>r</sub> > 0 なる領域について考えて、

$$\int_{-\infty}^0 \left( \frac{w_r}{w_n + w_z} \right)_{\max} \frac{dz}{r} \quad \text{---(23)}$$

なる積分を考える。但しこの場合 r 一定として z なる場所で θ に関して max をもとめ、それを z について積分する。この式は流線の如何にかゝらず(22)式より大なる値をとると考えられる。(r 一定としても dh の小なるところをしらべるのには差支ないであろう。) 故に dh の程度をみる式として(23)を用いることにする。

$$\frac{dh}{r} < \int_{-\infty}^0 \left( \frac{w_r}{w_n + w_z} \right)_{\max} \frac{dz}{r} = \frac{dH}{r} \quad \text{---(24)}$$

とおく、(5), (7)を用いて

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{w_r}{w_n + w_z} \right) = 0$$

を計算すると(25)式をうる。

之が z において (w<sub>r</sub> / (w<sub>n</sub> + w<sub>z</sub>))<sub>max</sub> の θ をあたえる式である。(24)式に(5), (7)を代入し、且(25)を用い

$$\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} + \frac{z}{r} = t$$

あるいは

$$\sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \frac{z}{r} = \frac{1}{t}$$

なる變換を行うと、(26)式をうる。

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} + \frac{z}{r} \right)^\nu + \left( \sqrt{\frac{z^2}{r^2} + 1} - \frac{z}{r} \right)^\nu \right] \cos \nu \theta = 1 \quad \text{---(25)}$$

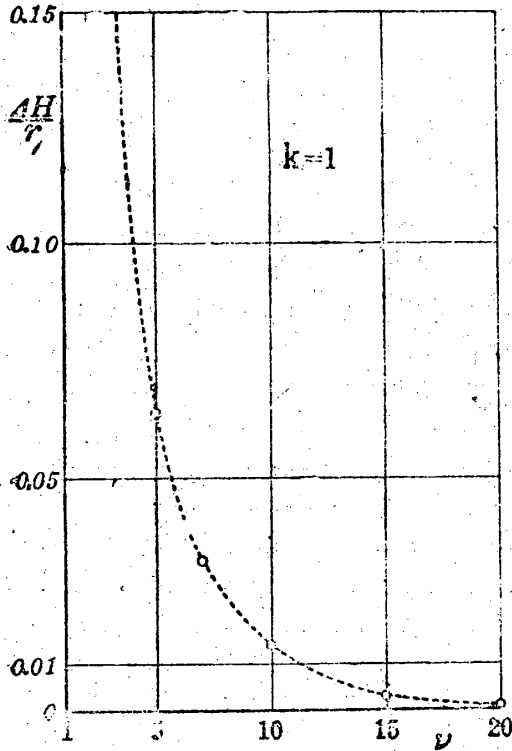
$$\frac{dh}{r} < \frac{dH}{r} = \int_{t_0}^1 \frac{(\frac{1}{t} - t) \frac{1}{t}}{\frac{1}{2} (\frac{1}{t} + t) \sqrt{(\frac{1}{t} - t)^\nu + 1}} dt \quad \text{---(26)}$$

$$\text{但し } k = \frac{\nu \Gamma}{4\pi r w_n}$$

この式は近似積分できる。

第4圖に k=1 としたときの ν と dH/r の關係を示す。(ν が大なるところでは dH/r は大體 k に比例す)

凸凹の程度が ν に比して 1% 以下なれば流管が大體圓筒であるとみなすことができるとすれば ν 即ち翼数が 12~3 枚以上なればよい。20 枚以上ならばほとんど完



第 4 圖

全な圓筒とみなすことができる。軸流回轉機が内外二つの圓筒でできている場合翼數が12~3枚以上なれば翼が  $r=0$  より  $r \rightarrow \infty$  までのびているものとするこゝによつて近似的に境界條件を満足させることができることが分る。而してこの場合流線は回轉軸を軸とする圓筒上にあると考えてよいことも同時に分る。

實際の軸流回轉機の翼は決して一本の渦ではおきかえられないが、之を何本かの渦でおきかえることによつて、(その渦は必ずしも正確には回轉軸に直角方向には向いてはいないけれども) 翼の細い場合は大體以上の論議より同様な結論が得られるものと思ふ。

翼數が12~3枚以上の場合流管は大體圓筒と見なしうることが分つたから、この様な場合に翼のまわりの流を考えるには回轉軸を軸とする圓筒で切つてその面上で考えればよいことになる。この面上の流の状態を平面に展開したとき、之が翼列の流と同じであるならば、その圓筒面で切られた翼の断面の各部分に動く力などは、翼列のものと同じであるといえる。そこで今度はこの圓筒面上での流をしらべてみる。

6.  $w_z$  に対する考慮

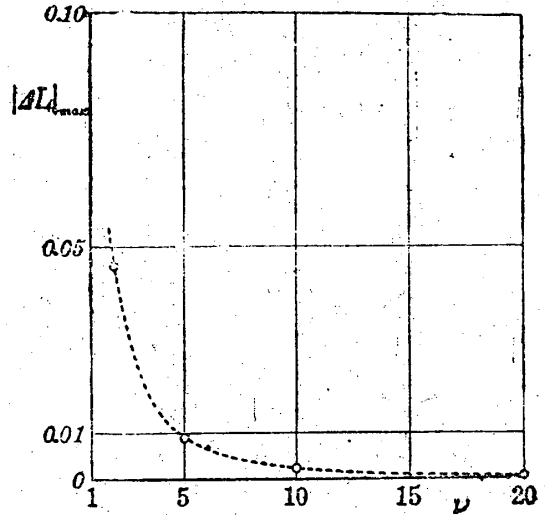
(16) と (18) 式を比べてみればよい

$$\left. \begin{aligned} w_z &= \frac{\Gamma}{2a} L \\ w'_z &= \frac{\Gamma}{2x} L' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

とにおいて

$$\Delta L = L - L'$$

を  $\nu$  をいろいろに變えて計算し圖の上で  $|\Delta L|_{\max}$  をもとめた。結果を第5圖に示す。



第 5 圖

7.  $w_t$  に対する考慮

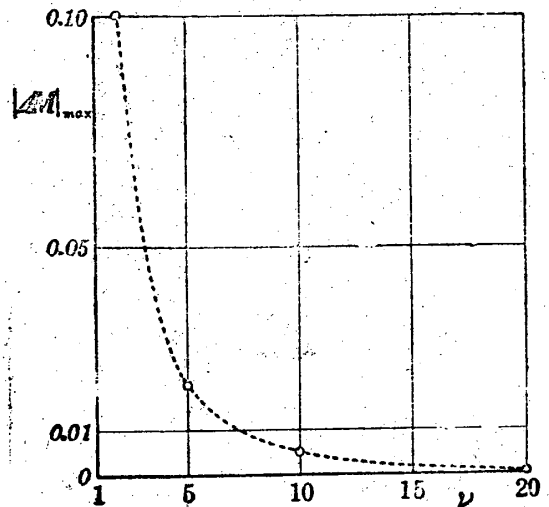
(17) と (20) 式を比べてみればよい。

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{\Gamma}{2a} [1+M] \\ w'_y &= -\frac{\Gamma}{2a} [1+M'] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

とにおいて

$$\Delta M = M - M'$$

をもとめる。この場合  $|\Delta M|_{\max}$  は  $y=0$  に於ておこるので、計算は  $w_z$  の場合より簡單である。結果を第6圖に示す。



第 6 圖

第5, 6圖より  $\nu$  が前ののべた12~3枚以上なれば軸流回轉機と翼列の間の流はほとんど同一とみなしうる

ことが分つた。以上は翼が一本の渦で出来ているとした場合であるが、實際の翼の場合でも之を何本かの渦でおきかえることにより、翼が細い場合は大體同じような結論が得られるものと思はれるのは、流管の項でのべたと同様である。

### 8. 結 論

翼の循環の強さが半径方向に一定である軸流回轉機械において、その翼数が12~3枚以上ならばその翼を回轉軸を軸とする圓筒で切つて、それを平面に展開したとき出て来る翼列を無限翼列と考え、この無限翼列における各翼に働く力などがそのまま軸流回轉機械の翼のその断面に働くと考えることができる。その誤差は翼数が12~3枚のときには1%程度であるが、枚数が増加するにつれて急激に減少し20枚以上ならば、ほとんど無視しうる程度であらう。

なお、ここで注意すべきは、以上の議論はあくまで循環一定の假定のもとに立つものであるが、この假定の成立しない軸流回轉機械及び成立しない状態でこの結論があてはまるかどうかは別にしらべてみなければならぬ。例えば軸流送風機のサージングの問題などについては、サージングのおこる状態では循環一定の假定が成立していないものと思はれるから、翼列の失速からこの點を推定することは正しくないであらう。

### 9. 附 記

$\nu$  が非常に大なる軸流回轉機、即ち  $\nu \rightarrow \infty$  とした場合には(この場合翼は回轉軸に垂直なる一つの渦面を形成する。)

$$\left. \begin{aligned} w_r &= 0 \\ w_z &= 0 \\ w_\theta &= 0 \dots \dots \dots (\text{翼の上流}) \\ &= -\frac{\nu \Gamma}{2\pi r} \dots \dots \dots (\text{翼の下流}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

之より明なる如く、翼は上流の流には何等影響をあたえない。又翼の後方の誘起速度は  $\nu$  に無関係である。而して翼の上流の流が切線速度をもっている場合もこの結論には變りない。實際の軸流回轉機では  $\nu$  は  $\infty$  ではないにしても、以上の事柄はその設計をいちぢるしくたやすくしてくれる有力な根據となる。それは各回轉翼、固定翼、或は各段は何れも獨立に設計出来、又それらをどの位の距離だけ離すかということも自由であることを示すからである。例えば軸流送風機において、第一段の回轉翼に向つてくる流は軸に平行であるとし、之が回轉翼をすぎると(29)式で表される切線速度をもつことになる。次の固定翼はそれより上流の流には影響をあたえず、下流にはやはり(29)式であたえられる切線速度を誘起することになるから、之と回轉翼による誘起速度の和が固定翼後の切線速度となるわけである。かくて順々に設計をすゝめてゆくことができるわけである。之は在來の設計のやり方と一致するものであるが、循環が半径方向に一定ならざる翼を有する軸流回轉機にもこのやり方をするのは誤りであると思う。それはこの場合一つの翼車はその前方の流に影響をあたえることがありうるからである。

### 文 獻

- (1) 軸流回轉機の研究
  - 第1報 「タービンの中の流體の流れ方について」 航研彙報 241 號
  - 第3報 「任意無限薄翼列の一解法」 航研彙報 246 號
  - 第3報 「反りも厚みも小なる任意無限翼列の一解法」 航研彙報 246 號
- (2) 例えば 掛谷宗一・蓮池良太郎著「平面球面三角法」文政社發行 参照
- (3) 河田三治；航研彙報 64 號 73u 頁
- (4) 前掲第2報参照

## No. 32 Sb II, Sb III 及び Bi II のスペクトルについて (第2報)

村 川 梨・諏 訪 繁 樹

(1947年5月23日受理)

### 3. Sb II の偶數タームの特異點

第2表を見て氣の付く最も興味ある事實は  $7p^3D_1$  と  $7p^1P_1$  と  $7p^3P_0$  との位置が Rydberg-Ritz の式

から計算した位置よりも遙かに低い所にあることである。このタームの實在することに對しては我々は何等の疑いも持たないが、上述の對應については未だいくらかの疑問の餘地が残っていると考へている。著者は