

燃焼ガスである。

文 献

- (1) C. G. William, Automotive Ind. Vol. 81. No. 12 (1939)
- (2) 横堀武夫: 機械學會論文集 Vol. 13. No. 45 (1947). 149~163
- (3) 横堀武夫: 航研彙報 第249號 1945/5
- (4) 横堀武夫: 機械學會誌 第51卷 第359號 1948
- (5) 横堀武夫: 機械學會論文集, Vol. 13. No. 45 (1947) 133~143
- (6) 横堀武夫: 航研彙報 第250號 1945/6

壓縮された矩形平板の超安定限界状態の逐次近似解法

吉 村 慶 丸

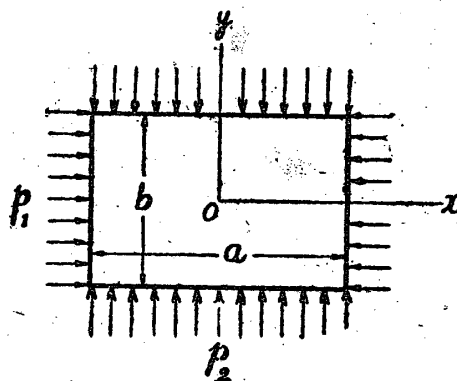
(1948年7月30日受理)

1. 緒 言

Schnadek⁽¹⁾は、1923年に Über die Knickung von Platten に於いて壓縮荷重による平板の挫屈後の特性を論じた際、既に mittragende Breite なる概念を提出し、その後數回にわたつてこの事柄に關する計算を行つている^{(2),(3)}。其の後同じ問題を Th. v. Kármán 等⁽⁴⁾; H. L. Cox⁽⁵⁾; 山本及び近藤⁽⁶⁾; Timoshenko⁽⁷⁾; 最近に於いては K. Marguerre⁽⁸⁾が取扱ひ夫々の立場において異なる結果が得られている。この相異は主として夫々の計算の基礎をなす假定の相異に由來するものであつて、例えば Th. v. Kármán, Cox, 山本及び近藤は何れも荷重方向に直角な方向の直應力は0であり、荷重方向の直應力はその方向に沿つて一様であると假定し、且つ板の其の面内の變位は考慮に入れず、従つてそれに対する境界條件も考えていないの對して、K. Marguerreはこの境界條件を考慮して計算を行い、挫屈した矩形板の強度として Cox 等の結果よりも20~30% 大きな値を得た。併し Marguerre の計算に於いても エネルギー法によつたため、撓みの函數形を直観によつて定めなければならないのであつて、結果もその定め方に左右せられることは當然である。換言すれば、撓みの形を適當に選びさえすれば與えられた實驗結果を説明することが出来るであろうが、これは微分方程式の解とは全く無關係に選び得るもので、その選定の妥當性を判定する基準が存在しない。

筆者はこの種の非線型問題に對する一つの逐次近似解法を提出する意味に於いて、これ等の事柄を再検討して見度いと思ふ。本方法に於いては、撓みの第0近似を假定しなければならぬが、その假定における不完全さは近似を進めることによつて順次に除かれて行

くと同時に、逐次近似の結果の收斂性によつて最初の假定の適否、並びに得られた結果の信頼性を判定することが出来る。圓筒形殻の挫屈の問題の未解決の現在矩形板においてこれ等の基礎的問題を吟味することは、あながち無意味ではないであらう。



第 1 圖

本報告においては各邊の長さ、abの矩形板が一般に各邊に平行な壓縮荷重を受けて挫屈限界を超えた状態にある場合の應力、歪、撓み並にそれ等の間の關係を第2近似まで求め、特にその結果を一方の壓縮荷重の場合に適用して從來得られている結果と比較する。尙境界條件としては取扱ひ上の便宜から各邊共單純支持の場合を考え、且つ撓みとしては各邊に平行な方向に對して半波形が一個存在する様な場合を取扱つたので、自然縦横比が一定の範圍の板を考えることになつたが、この他の場合に擴張することは困難ではない。

2. 超安定限界状態の第1近似解

薄い平板の基礎方程式として次の如き兩立の條件及び釣合の方程式が成立つ。

$$\nabla^4 w = w_{xx}^2 - w_{xx}w_{yy} \quad (1)$$

$$B\nabla^4 w = p + Et[\phi_1 w_{xx} + 2\phi_2 w_{xy} + \phi_3 w_{yy}] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{T_1}{Et} = \chi_{yy}, & \phi_{12} &= \frac{S_1}{Et} = -\chi_{xy}, \\ \phi_2 &= \frac{T_2}{Et} = \chi_{xx} \end{aligned} \quad (3)$$

w : 板の撓み, T_1, T_2, S_1 : 直合應力及び剪斷合應力, p : 板の面に垂直な壓力, t : 板厚, E : ヤング率, ν : ポアソン比, $B = Et^3/[12(1-\nu^2)]$: 曲げ剛性
 簡単のために周邊單純支持の場合を考えるならば、境界条件として

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & x &= \pm \frac{a}{2}; \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & y &= \pm \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} (4)$$

この他に尙我々は板の面内の變位成分或ひは應力に對する境界条件を考えなくてはならない。これは實際に如何なる支持材を使うかによつて異なるものであつて例へば丈夫な縁材を嵌付けにする場合には縁材に直角及び平行な方向の變位が拘束されなくてはならない。

$$\left. \begin{aligned} u_x = \pm a/2 = \mp \alpha_1 \frac{a}{2}, & \quad v_y = \pm b/2 = \mp \alpha_2 \frac{b}{2} \\ v_x = \pm a/2 = -\alpha_2 y, & \quad u_y = \pm b/2 = -\alpha_1 x \end{aligned} \right\} (5)$$

α_1, α_2 : x, y 方向の縁材の歪

但しこの場合には w に對する單純支持の条件が成立たないのが普通であらうが、特にこの条件に矛盾しないためには板と縁材との間にゴムの様なものはさんで置いたと考えればよい。之に對して例へばV溝で支持する場合には摩擦力を無視するならば周邊における剪斷應力が0でなくてはならない。

$$\left. \begin{aligned} u_x = \pm a/2 = \mp \alpha_1 \frac{a}{2}, & \quad v_y = \pm b/2 = \mp \alpha_2 \frac{b}{2} \\ S_1 &= \frac{Et}{2(1+\nu)}(v_x + u_y + w_x w_y) \\ &= \begin{cases} 0, & x = \pm \frac{a}{2} \\ 0, & y = \pm \frac{b}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} (5)'$$

但しこの第一条件はこの場合の充分条件であつて必要条件ではない。次にスリットのある圓管で支える様な場合(これは負荷しない邊の場合だけのことである)には周邊に於ける直應力、剪斷應力は何れも0である。

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 - \nu(v_y + \frac{1}{2} w_y^2) \right] \\ &= \begin{cases} 0, & x = \pm \frac{a}{2} \\ 0, & y = \pm \frac{b}{2} \end{cases} \\ S_1 &= \frac{Et}{2(1+\nu)}(v_x + u_y + w_x w_y) \\ &= \begin{cases} 0, & x = \pm \frac{a}{2} \\ 0, & y = \pm \frac{b}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} (5)''$$

板が挫屈した場合の變形は一般に應力函數 χ を基礎方程式(1), (2)から消去して得られる筈の w の方程式を境界条件を満足する如く解くことによつて得らるべきであるが、之は極めて困難なことである。そこで微分方程式を正確に解くことを欲するならば、實現されない様な假定の簡單化を行わなくてはならず、假定の簡單化を成可く行わないためには近似解法によらなければならないのであつて、之に關しては Ritz の方法, Galerkin の方法等が従来用いられた。併し之等は近似を進めることが合理的に行われ得ないばかりでなく、圓筒形殼に應用する場合に不都合を生ずるもの様である。次に述べる方法は之等の點で改善されているものと思ふ。

最初假定する變位は境界条件を満足しなければならないことは勿論であるが、その上にそれによつて得られる逐次近似解の收斂のよいもの程望ましい。そのためには w の函數形を(1), (2)の解に近いものに假定すればよいのだが、それを豫見出来ない現在において、單に境界条件(4)を満足する撓みとして、従来多く用いられている次の表式を採用する。

$$w(x, y) = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (6)$$

而してこの w は

$$w(0, 0) = f \quad (7)$$

なる条件を満足して居り、これは以下の計算に於いて恒に満足されるべき条件である。式(6)に對する應力函數從つて應力は(1), (3)より容易に求めることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi_p - \frac{p_2}{2E} x^2 - \frac{p_1}{2E} y^2 \\ \chi_p &= -\frac{f^2}{32} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{T_1}{t} = E \frac{\pi^2 f^2}{8a^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - p_1 \\ \sigma_2 &= \frac{T_2}{t} = E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} - p_2 \\ \tau_1 &= \frac{S_1}{t} = 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

p_1, p_2 : 荷重が一樣に作用したと考へた場合の平均應力(但し壓縮力を正とす)

即ち剪斷應力は板全面にわたつて0であり、(5)', (5)''に於ける S_1 の条件は自然満足されて居るが、(5)''における T_1, T_2 の条件は満足されていない。もしこの条件を満足せしめようとするならば、 $\nabla^2 \chi = 0$ の適當な解を更に χ に付け加えればよい。

次に歪 α_1, α_2 を

$$\alpha_1 = -\frac{2}{a} \int_0^{a/2} u_x dx, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{b} \int_0^{b/2} v_y dy \quad (10)$$

の如く定義して、

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \phi_1 - \nu \phi_2 - \frac{1}{2} w x^2 \\ v_y &= \phi_2 - \nu \phi_1 - \frac{1}{2} w y^2 \end{aligned} \right\} (11)$$

を用いれば

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{p_1}{E} - \nu \frac{p_2}{E} + \frac{\pi^2 f^2}{8 a^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{p_2}{E} - \nu \frac{p_1}{E} + \frac{\pi^2 f^2}{8 b^2} \end{aligned} \right\} (12)$$

或いは

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\alpha_1 + \nu \alpha_2 - \frac{\pi^2 f^2}{8} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \right] \\ p_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\alpha_2 + \nu \alpha_1 - \frac{\pi^2 f^2}{8} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} (13)$$

式(11)から得られる u, v は、(5) 或ひは (5)' の境界条件 $u_{\pm a/2} = \mp \alpha_1 \frac{a}{2}, v_{\pm b/2} = \mp \alpha_2 \frac{b}{2}$ を満足しているが、(5) の第2の条件の代りに

$$\left. \begin{aligned} u_{\pm a/2} &= -\alpha_1 x - \nu \frac{\pi f^2}{16b} \sin \frac{2\pi x}{a}, \\ v_{\pm b/2} &= -\alpha_2 y - \nu \frac{\pi f^2}{16a} \sin \frac{2\pi y}{b} \end{aligned} \right\} (14)$$

が成立ち、板の縁と支持材との間に「ずれ」を生ずることが分る。若しこれを防止しようとするなら前と同様に x の餘函数を附加すればよい。結局現在の様な解に対しては實際問題として V 溝で支持した場合の境界条件(5)'が満足されていることになる。 u, v に対する境界条件は w に對するそれに比べて結果に及ぼす影響が小さいと考えてよいか否か疑問であるが、現在は周邊条件の影響を吟味するのが目的でないから、簡単のために上の境界条件の場合に限ることとする。

式(6), (8)を用いて式(2)を解けば w の第1近似が得られる。(但し $p=0$)

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (A_1 + A_3) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ &+ B_3 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + C_3 \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 &= \frac{Et}{B} \frac{1}{\pi^4 H_{1,1}} \left[-\frac{\pi^4 f^3}{16} \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) + \frac{\pi^2 f}{E} \left(\frac{p_1}{a^2} + \frac{p_2}{b^2} \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= -\frac{Et}{B} \frac{f^3}{16 a^4 H_{1,9}}, \\ C_3 &= -\frac{Et}{B} \frac{f^3}{16 b^4 H_{9,1}}, \\ H_{\lambda, \mu} &= \left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} (16)$$

ここに添字は f に関する次数を表はし、 w は f に関して1次及び3次の項からなることが後述することによつて分る。而してこの w に対しても条件(4)は自然に満足されて居り、同時に条件(7)が満足されなくてはならぬことから荷重-撓みの関係を求めることが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{a^2} + \frac{p_2}{b^2} &= \frac{\pi^2 B}{t} H_{1,1} + \frac{\pi^2 E}{16} f^2 H_{1,1} \\ &\left[\frac{1/a^4 + 1/b^4}{H_{1,1}} + \frac{1/a^4}{H_{1,9}} + \frac{1/b^4}{H_{9,1}} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

或ひは p_1, p_2 を α_1, α_2 で表はせば

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) &= \frac{\pi^2 t^2}{12} H_{1,1} \\ &+ \frac{\pi^2 f^2}{16} \left\{ (3-\nu^2) \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) + \frac{4\nu}{a^2 b^2} \right. \\ &\left. + (1-\nu^2) H_{1,1} \left[\frac{1/a^4}{H_{1,9}} + \frac{1/b^4}{H_{9,1}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

式(13), (17), (18)が $p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2; f$ の間の関係を與えるところの我々の目的とする結果であつて、その中の何れか三式が獨立である。従つて $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, f$ の中の何れか二つを獨立變數と考へれば残りの三つがそれ等の函数として決定される。(18)は Marguerre が同じ假定(6)を用いてエネルギーの方法で求めた結果⁽⁸⁾と比較すれば、現在の場合の方が f^2 の項における $(1-\nu^2)H_{1,1} [1/(a^4 H_{1,9}) + 1/(b^4 H_{9,1})]$ が餘計に加はつているだけである。併しこの頃の影響は極めて小さいので、結果に於いては Marguerre の場合と大した相異がないことが分る。この様な結果の類似はこの方法の妥當性を示すものと考えてよいであらう。而してこの方法によれば、エネルギー法やその他の方法では得ることが出来ない w の高次の近似を求めることが出来ることが特徴であり、これを基として更に次の近似に進むことが出来る。

拙屈荷重を遙に越えた状態を解析するために天降りの的に Marguerre⁽⁸⁾は (但し正方形板)

$$\begin{aligned} w &= f_1 \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - f_3 \cos \frac{3\pi x}{b} \\ &\left(\cos \frac{\pi y}{b} - \gamma \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \end{aligned}$$

Timoshenko⁽⁷⁾は

$$w = f_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + f_3 \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b}$$

を假定して居り、Marguerre の假定は筆者の得た第1

近似に可成り近いものである。

式 (16) の A_1+A_3 の式における p_1+p_2 は f の函数であつて、(17) によつて f で表せば、 f 及び f^3 の頂からなることが分る。従つて

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= f \\ A_3 &= -(B_3+C_3) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と取ることが出来て、之等の係数の添字は f に関する次数を表すことが分る。

3. 第2近似解

第2近似解は、前節に於いて式 (6) を基にして行つたのと同様の計算を式 (15) を基にして繰返すことによつて求められる。但しこの場合には總て f に関して5次の項まで取り、6次以上を省略すべきである。と云うのは f^6 以上の項は次の近似の際に影響されるものであつて、第2近似に於いてそれ等を考えることは無意味だからである。以下にその結果を列記する。但し第1近似の場合の相應する式と同番號の式に*印をつけて表した。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{4\pi^2}{b^2} \left[P_{02} \cos \frac{2\pi y}{b} + 4 P_{04} \cos \frac{4\pi y}{b} \right. \\ &\quad + P_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \\ &\quad + 4 P_{24} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} \\ &\quad \left. + P_{24} \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - \frac{p_1}{E}, \\ \phi_2 &= \frac{4\pi^2}{a^2} \left[P_{20} \cos \frac{2\pi x}{a} + 4 P_{40} \cos \frac{4\pi x}{a} \right. \\ &\quad + P_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \\ &\quad + 4 P_{42} \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \\ &\quad \left. + P_{24} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} \right] - \frac{p_2}{E}, \\ \phi_{12} &= \frac{4\pi^2}{ab} \left[P_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right. \\ &\quad + 2 P_{24} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b} \\ &\quad \left. + 2 P_{42} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \\ P_{20} &= \frac{a^2}{16b^2} \left(\frac{A_1^2}{2} + A_1 A_3 + A_1 C_3 \right), \\ P_{02} &= \frac{b^2}{16a^2} \left(\frac{A_1^2}{2} + A_1 A_3 + A_1 C_3 \right), \\ P_{40} &= \frac{a^2}{4^3 b^2} A_1 C_3, \quad P_{04} = \frac{b^2}{4^3 a^2} A_1 B_3, \\ P_{22} &= \frac{1}{4a^2 b^2 H_{1,1}} A_1 (B_3 + C_3), \\ P_{24} &= \frac{1}{16a^2 b^2 H_{1,4}} A_1 B_3, \\ P_{42} &= \frac{1}{16a^2 b^2 H_{4,1}} A_1 C_3 \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\alpha_1 + \nu \alpha_2 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1}{a^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\nu}{b^2} \right) (A_1^2 + 2A_1 A_3) \right] \\ p_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\alpha_2 + \nu \alpha_1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\nu}{a^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{b^2} \right) (A_1^2 + 2A_1 A_3) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

$$w = \sum W_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (15^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{Et} H_{1,1} W_{1,1} &= -\frac{1}{16a^4} (A_1^3 - 3A_1^2 C_3) \\ &\quad - \frac{1}{16b^4} (A_1^3 - 3A_1^2 B_3) + \left[\frac{1}{\pi^2 a^2} \frac{p_1}{E} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2 b^2} \frac{p_2}{E} \right] (A_1 + A_3) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{Et} H_{1,3} W_{1,3} &= -\frac{1}{16a^4} (A_1^3 + A_1^2 B_3 \\ &\quad - 3A_1^2 C_3) - \frac{9}{16b^4} A_1^2 B_3 + \frac{A_1^2 A_3}{a^4 b^4 H_{1,1}} \\ &\quad + \frac{A_1^2 B_3}{16a^4 b^4 H_{1,4}} + \left[\frac{1}{\pi^2 a^2} \frac{p_1}{E} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{\pi^2 b^2} \frac{p_2}{E} \right] B_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{Et} H_{3,1} W_{3,1} &= -\frac{1}{16b^4} (A_1^3 - 3A_1^2 B_3 \\ &\quad + A_1^2 C_3) - \frac{9}{16a^4} A_1^2 C_3 + \frac{A_1^2 A_3}{a^4 b^4 H_{1,1}} \\ &\quad - \frac{A_1^2 C_3}{10a^4 b^4 H_{4,1}} + \left[\frac{9}{\pi^2 a^2} \frac{p_1}{E} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b^2} \frac{p_2}{E} \right] C_3 \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{Et} H_{9,9} W_{3,3} &= -\frac{9}{16} \left[\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^4 b^4 H_{1,4}} \right] A_1^2 B_3 \\ &\quad - \frac{9}{16} \left[\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4 b^4 H_{4,1}} \right] A_1^2 C_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{Et} H_{1,25} W_{1,5} &= -\frac{3}{16} \left[\frac{1}{a^4} + \frac{3}{a^4 b^4 H_{1,4}} \right] A_1^2 B_3 \\ \frac{B}{Et} H_{25,1} W_{5,1} &= -\frac{3}{16} \left[\frac{1}{b^4} + \frac{3}{a^4 b^4 H_{4,1}} \right] A_1^2 C_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{Et} H_{9,25} W_{3,5} &= -\frac{A_1^2 B_3}{16a^4 b^4 H_{1,4}} \\ \frac{B}{Et} H_{25,9} W_{5,3} &= -\frac{A_1^2 C_3}{16a^4 b^4 H_{4,1}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{a^2} (1 + D_1 f^2) + \frac{p_2}{b^2} (1 + D_2 f^2) \\ &= \frac{\pi^2 B}{t} H_{1,1} + Q f^2 - R f^4 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{3(1-\nu^2)}{4t^2} H_{1,1} \left\{ \frac{1}{H_{1,1}} \left[\frac{1}{a^4 H_{1,9}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{b^4 H_{9,1}} \right] - \frac{1}{a^4 H_{1,9}^2} - \frac{9}{b^4 H_{9,1}^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \frac{3(1-\nu^2)}{4t^2} H_{1,1} \left\{ \frac{1}{H_{1,1}} \left[\frac{1}{a^4 H_{1,9}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{b^4 H_{9,1}} \right] - \frac{9}{a^4 H_{1,9}^2} - \frac{1}{b^4 H_{9,1}^2} \right\} \\
 Q &= \frac{\pi^2 E}{16} H_{1,1} \left\{ \frac{1}{H_{1,1}} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a^4 H_{1,9}} + \frac{1}{b^4 H_{9,1}} \right\} \\
 R &= \frac{3(1-\nu^2)}{64} \frac{\pi^2 E}{t^2} H_{1,1} \left\{ -\frac{3}{a^4 b^4 H_{1,1}} \right. \\
 &\quad \cdot \left[\frac{1}{H_{1,9}} + \frac{1}{H_{9,1}} \right] + \frac{1}{H_{1,9}} \left[\frac{1}{a^4 H_{1,9}} \right. \\
 &\quad \cdot \left(\frac{1}{a^4} + \frac{9}{b^4} + \frac{16}{a^4 b^4 H_{1,1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a^4 b^4 H_{1,4}} \right] + \frac{1}{b^4 H_{9,1}} \left(-\frac{3}{a^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16}{a^4 b^4 H_{1,1}} \right) \left. + \frac{9}{H_{9,1}} \left[\frac{1}{a^4 H_{1,9}} \left(\frac{1}{b^4} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{a^4 b^4 H_{1,4}} \right) + \frac{1}{b^4 H_{9,1}} \left(\frac{1}{a^4} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{a^4 b^4 H_{4,1}} \right) \right] + \frac{3}{a^4 H_{1,9} H_{1,25}} \left(\frac{1}{a^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{a^4 b^4 H_{1,4}} + \frac{3}{b^4 H_{9,1} H_{25,1}} \left(\frac{1}{b^4} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{a^4 b^4 H_{4,1}} \right) + \frac{1}{a^4 b^4 H_{1,9} H_{1,4} H_{9,25}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a^4 b^8 H_{9,1} H_{4,1} H_{25,9}} \right\} \quad (17^*)
 \end{aligned}$$

これ等の式の中のもの \$A_1, \dots, C_3\$ はすべて \$f\$ によつて表わすことが出来、その結果これらの表示式は何れも \$f^2, f^4\$ の項よりなることが分る。これは平板であることの當然の結果である。

第1近似の場合と同様に、式(13*), (17*)によつて挫屈後の状態が完全に決定される。第1, 第2近似を比較すると、式(13*)の \$f^4\$ の項を省略すれば式(13)に全く一致し、式(17*)に於いて \$D_1, D_2, R\$ の項を省略すれば式(17)と全く一致することが分る。即ち第1近似は第2近似の特別の場合としてその中に含まれる。尚第2近似の場合も第1近似の場合と同じ境界条件(5)'が満足されていることは \$u, v\$ については(11)を用いて計算し、\$S_1\$ に関しては(9*)を見れば容易に分る。第1近似では剪断力が到る處0であつたのに対し、この場合には式(9*)の如き値を持つのであるがこれが周邊に於いて0となることは都合のよいことである。

4. 一方向の壓縮の場合

前節の一般的結果を一方向の壓縮に適用するに當つて \$p_2=0, \alpha_2=0\$ の二つの場合が考えられるが、從來の多くの研究結果が \$p_2=0\$ の場合に対して得られてゐるので比較に便利のためこゝでもその場合を考えることにする。

縦横比 \$k=b/a\$ をパラメーターとして \$p_1, \alpha_1, f\$ の關係及び有効幅は次の如く得られる。

(1) 第一近似

$$\frac{p_1}{p_1^*} = 1 + \beta^{(1)} \frac{f^2}{t^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_1^*} = 1 + \beta^{(1)'} \frac{f^2}{t^2} \quad (18)$$

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1 + \beta^{(1)} f^2/t^2}{1 + \beta^{(1)'} f^2/t^2} = \left(\frac{p_1}{p_1^*} \right) / \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^*} \right) \quad (19)$$

(2) 第二近似

$$\frac{p_1}{p_1^*} \left(1 + \delta_1 \frac{f^2}{t^2} \right) = 1 + \beta^{(2)} \frac{f^2}{t^2} + \gamma^{(2)} \frac{f^4}{t^4} \quad (20)$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1^*} \left(1 + \delta_1 \frac{f^2}{t^2} \right) = 1 + \beta^{(2)'} \frac{f^2}{t^2} + \gamma^{(2)'} \frac{f^4}{t^4}$$

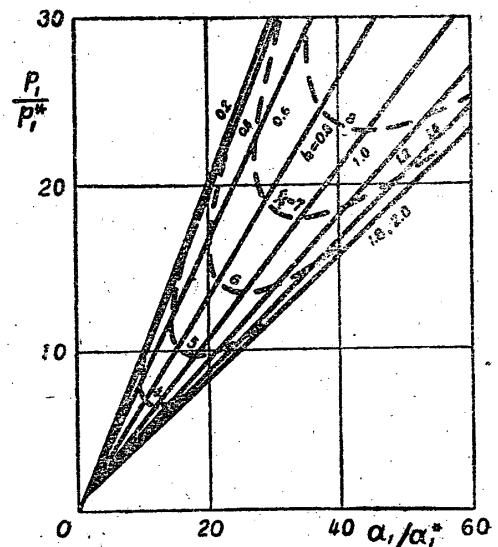
$$\frac{b_e}{b} = \frac{1 + \beta^{(2)} f^2/t^2 + \gamma^{(2)} f^4/t^4}{1 + \beta^{(2)'} f^2/t^2 + \gamma^{(2)'} f^4/t^4} = \left(\frac{p_1}{p_1^*} \right) / \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^*} \right) \quad (21)$$

$$p_1^* = \frac{\pi^2 E t^2}{12(1-\nu^2)b^2} \frac{(1+k^2)^2}{k^2}, \quad \alpha_1^* = \frac{p_1^*}{E} \quad (22)$$

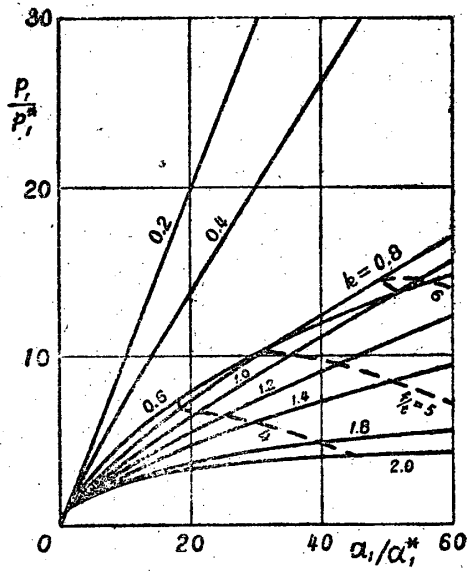
\$b_e\$: 有効幅

こゝに係數 \$\beta^{(1)}, \beta^{(1)'}, \delta_1, \delta_2, \beta^{(2)}, \beta^{(2)'}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(2)'}\$ はすべて \$k, \nu\$ の函數であり、その形をこゝに記すことは紙面の都合上省略する。その間には \$\beta^{(1)} = \beta^{(1)'}\$ の關係あり。特に第1近似に於いて正方形板 (\$k=1\$) の場合を取れば、\$p_1 - p_1^* = 0.51 E (\alpha_1 - \alpha_1^*)\$ となり Marguerre の場合と同様である。

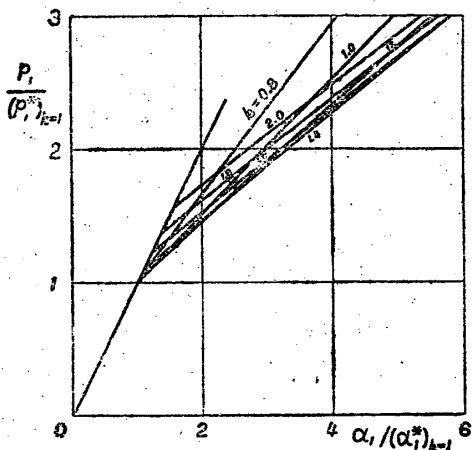
式(18), (20)によつて挫屈後の \$p_1/p_1^*, \alpha_1/\alpha_1^*\$ 及び \$f/t\$ の關係が \$k=b/a\$ をパラメーターとして與えられその結果を第2圖に示す((a): 第1近似, (b): 第2近似, 以下同様)。圖は \$k=0.2\$ 乃至 \$2.0\$ に對して畫いてあり、第2近似が第1近似より可成り \$p_1\$ の値が小さくその傾向は \$k\$ の大なるもの程強い。第2圖の \$p_1^*, \alpha_1^*\$ の値として夫々の \$k\$ に對する値をとつてあ



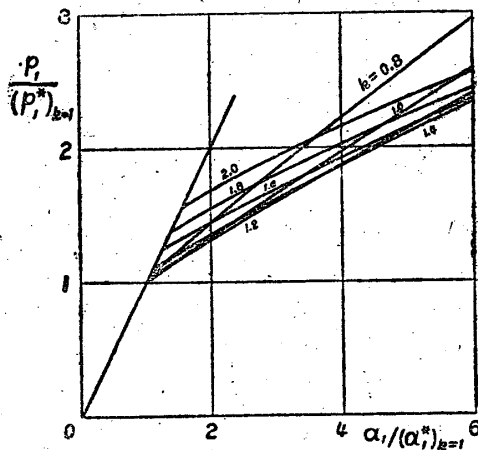
第2圖 (a)



第2圖 (b)



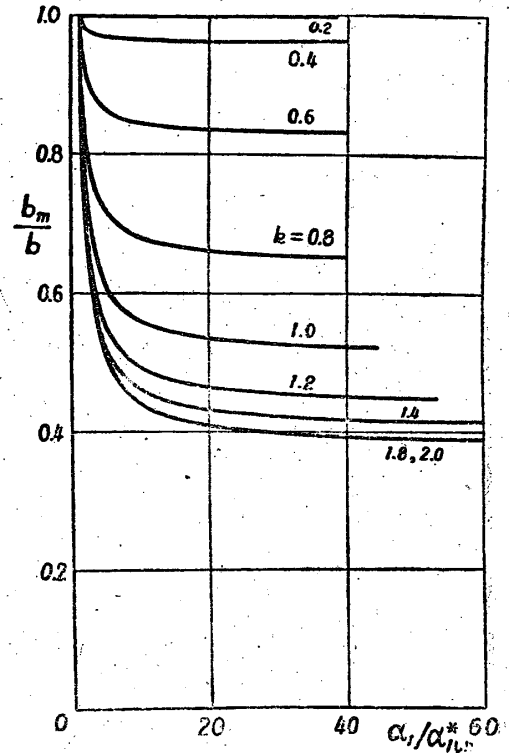
第3圖 (a)



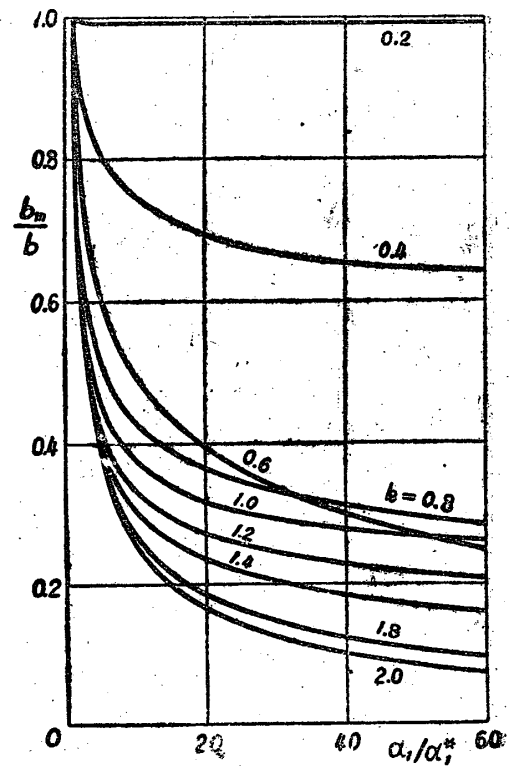
第3圖 (b)

り、各々の α_1 に対する荷重の絶対値 p_1 は分らない。このために p_1^* , α_1^* の代りに $(p_1^*)_{k=1} = p_1^* \min. (\alpha_1^*)_{k=1} = \alpha_1^* \min.$ を基準にとり $p_1/(p_1^*)_{k=1}$ と $\alpha_1/(\alpha_1^*)_{k=1}$ との関係を書いたものが第3圖である。即ち挫屈限界荷重は正方形板の場合に極小となり、 k の値の減少或

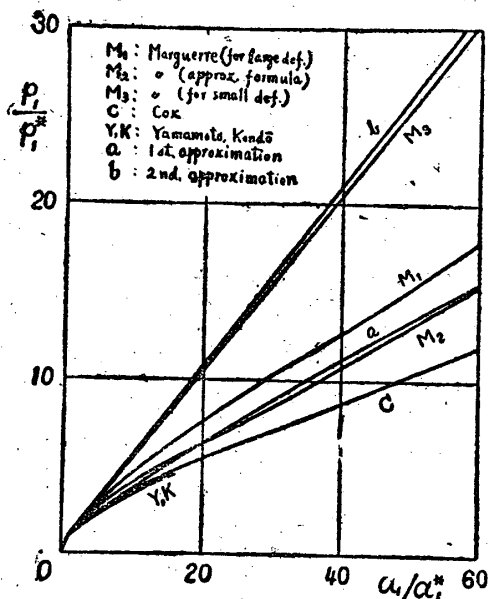
ひは増加と共に増大することは周知の事柄であるが、挫屈後の剛性は k の大なるもの程小となり挫屈限界點附近では正方形板の強度 (支え得る荷重) が他のものより小さいのに対して、挫屈が進むに従つて、最小の強度をもつ短形板が順次に k の大なる値のものに移つ



第4圖 (a)



第4圖 (b)



第 5 圖

て行くことが分る。次に挫屈による變形の α 方向の半波の數を m とすれば、 $\infty > k \geq 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ なる k に對しては、 $m=1$ に對する p_1^* の値が他の m に對する p_1^* より小であり、 $1/\sqrt{2}$ 以下の k の値に對しては k が減少するに従つて階段的に $m=2, 3, \dots$ に對する p_1^* の値が次々に他の m に對するものよりも小さくなることは明かであるが、この關係が p_1^* を越えるすべての p_1 の値に對して成立つか否かは明かでない。即ち一定の短形板をとつた場合に挫屈が進むに従つて半波の數 m が次々に減少してゆくことも圓筒の場合の類推から推察するに難くないのであつて、これらの事柄に關しては更に一般の場合の計算を行つた上でなければ結論を下し得ない。併し挫屈の進行と共に m が增大することはない筈であるから、こゝで取

扱つた $\infty < k \geq 1/\sqrt{2}$ の場合に對しては現在の計算で充分であらう。尙第2圖(b)に於いて $k=0.6$ の曲線が特殊の傾向を示してゐるのは上述した様に $k=1/\sqrt{2}$ の附近であるためと思はれる。次に式(19), (21)によつて有効幅を示したものが第4圖であり、第2近似の方が可成り小さい値を示す。これ等の結果を $k=1$ の場合に對して Marguerre, Cox 及び山本, 近藤の結果と比較すると(第5圖), α_1/α_1^* の小さいところ(約 $\alpha_1/\alpha_1^* = 10$ 以下)では Cox, 山本, 近藤の結果に近いが α_1/α_1^* の大なるところでは Marguerre の結果に近い。更に正確な議論をするためには第3或ひはそれ以上の近似を求めて、その結果が收斂するか否かを調べなくてはならない。それによつて最初の w に關する假定の妥當性を試すことも出来る。尙實驗結果との比較検討が残されているが、このためには境界條件を相當嚴密に考慮した資料を必要とするのでこの準備も現在進めている状態である。これらの残された問題については次の機会にゆづり度い。

文 献

- (1) G. Schnade', Werft, R. ederei, Hafen, 9 (1928), S. 500.
- (2) Ditt, (1930).
- (3) G. Sc'nadel, Proc. 3rd. Intern. Congr. Appl. Mech., 3 (1930) p. 73.
- (4) T. von Kármán, E. E. Sechler and L. H. Donnell, Trans. A. S. M. E., 54 (19 2), p. 53.
- (5) H. L. Cox, Aeron. Res. Comm. R. and M., 1554 (1933).
- (6) M. Yamamoto and K. Kondo, Rep. Aeron. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., No. 119 (1935).
- (7) S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability (1936), p. 360.
- (8) K. Marguerré, Luft., 14 (1937), S. 121.

監修龜山直人・編輯矢木榮・牧島象二	
季刊 工業物理化學	1輯 定價200圓 千40圓 2輯 定價300圓 千40圓
小野薫・田中尙著	
新刊 應用力學	A 5 定價 26圓 千40圓
水間・朝永・高尾著	
新刊 超短波磁電管	A 5 定價 30圓 千40圓
電氣通信學會編	
新刊 電氣通信學會論文集 第一輯	B 5 定價 200圓 千40圓
學術研究會議・森田清・木村六郎編	
新刊 超短波測定の進歩	B 5 定價 250圓 千40圓
小野薫・加藤涉著	
新刊 應用彈性學の基礎	B 5 定價 350圓 千40圓
濱田成徳著	
真空管工學	A 5 定價 200圓 千40圓
前田憲一著	
電波傳播	B 5 定價 190圓 千40圓

發行所 株式 會社 コロナ社

東京都文京區鴛籠町26番地
電話大塚(86) 237 振替東京 14844