

第 5 圖

荷重 II 平均壓力 8.6 kg/mm²

●印は第1圖における値, 他は第2, 3圖に於けると同じ値を示す。

にはほぼ一致し, 第1圖と全く同じ曲線上にのる。即ち新しい油の温度上昇に伴う摩擦係数の増大はその粘度の低下に原因するものである。

尙この實驗の途中で時々調べた固体摩擦係数の平均は 0.453 であった。

6. ま と め

曾田氏設計の振子式摩擦試験機に就き炭化水素油を用いて二三の實驗を行い, その性能を確かめ, 次の結果を得た。

i) この試験機は大體境界潤滑の條件の下での摩擦係数を測定出来る。

ii) 適當な注意をすれば再現性がよく, 土數%で一致した値を與える。

iii) 摩擦係数は粘度に無關係ではない。本實驗の結

果では, 粘度 110 cst 以下では粘度が小さくなるに従い摩擦係数は増大し, これを粘度 0 に外挿すると大體固体摩擦係数に一致する。

iv) 測定温度を順次に上昇し 120°C 以上に到らしめ更に順次に降下させて摩擦係数を測定し, その結果から温度—摩擦係数曲線を描くと第2圖の如くループを生ずる。これは炭化水素油の酸化に依ると考えられる。

v) 或る一定温度までは, 炭化水素油は化學的變化は受けないと思はれる。この場合の温度—摩擦係数曲線は温度上昇降下の間でループを生ぜず, 温度上昇につれて摩擦係数は上昇し, 降下と共に低下する。これは温度に依る粘度の變化に原因する。

vi) 酸化を受けたと思はれる油に就いても, その畫く温度—摩擦係数曲線は温度上昇降下間でループを示さないが, 温度上昇と共に稍々摩擦係数を低下し, 降下と共に稍々上昇する傾向を有する。

文 獻

- (1) 曾田宗範, 岡本昇二: 航空研究所報告, No. 276 (昭和18), 應用物理 15 (昭和21) No. 3 ~4. 9.
- (2) 本資料は昭和石油株式会社よりの贈與に依る。厚く感謝の意を表す。
- (3) 幾つかの資料を傳染病研究所淺野研究室の諸氏より戴いた。これもその一つである。

空洞共振器の回路理論について

霜 田 光 一

(1948年5月27日受理)

1. ま え が き

波長にして約 1 m から數 mm 位迄の電磁波は極波, Microwave 又は極超短波と呼ばれている。この極波の回路は, 通常の無線電氣工學の回路とはちがついて導波管, 空洞共振器等の組合せで出來ている。これらの所謂立體回路の中の電磁波は導體内を流れる電流というよりも, 導體で限られた空間をつたわる空間的な波という概念で直観される。しかし周波數のもつと低い電磁波では, 立體回路ではないので電氣工學で廣く使用されて來た様に, 電壓, 電流及びインピーダンスが極めて有用な概念として用いられる。これらの使

いながれた概念を波長の短い極波の領域にまで擴張しようという試みは少くない。例えば導波管についてその特性インピーダンス (波動抵抗) を定義しようとしたものは色々ある^{(1)~(4)}。しかし夫等の定義は互いに一致せず, いづれもある限定された範圍で使えば便利なものであるが, 長波長の場合の様に廣く驅使することは出来ない。

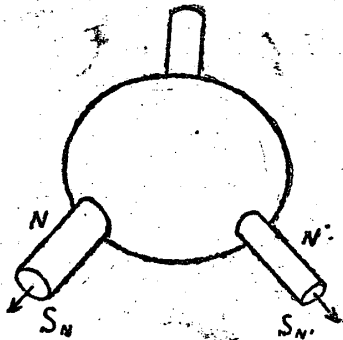
之に對して朝永振一郎, 宮島龍興兩氏は波をそのまま直観的に理解する方法をとり, “特性マトリックス” や “輻射マトリックス” と呼ばれるものによつて, 回路の性質を表示することを研究された⁽⁵⁾。この一般論のままでは, 實際問題に携わる場合に取扱い難い。

で、それを展開して具體的應用についての幾つかの結果を得たのでここに報告する。空洞共振器を使用する時にその設計基礎などに役立つのではないかと思う。

2. 一般理論

朝永、宮島兩氏の理論⁽⁵⁾によれば、1個の空洞に何個かの導波管が結合されている場合に、その空洞の特性マトリックスの成分は次式で表わされる。

$$a_{N'l}^{N'V} = \left\{ \begin{matrix} Q_{N'l}^{-1/2} & Q_{N'l'}^{-1/2} \\ \frac{\omega}{\omega_0} - 1 + \frac{j}{2Q} \end{matrix} + j\delta_{NN'} \delta_{ll'} \right\} e \times P \{ j(\theta_{N'l} + \theta_{N'l'} + \theta) \} \quad (1)$$



第1圖 導波管のついた空洞共振器

但し N 及び N' は導波管の番號であつて、導波管とは言つても共軸ケーブル等も含めた廣義のものである。電磁波の角周波數 ω は空洞の固有振動の角周波數 ω_0 に近い場合を考え、 l 及び l' は夫々 N 番目、 N' 番目の導波管から入り、出る波の次數 ((mode) を示している。

そうすると (1) 式に示す特性マトリックスの成分は N 番目の導波管から l 次の單位振幅の波が這入るときに、 N' 番目の導波管から出て行く l' 次の波の振幅を表わしている。但し各 mode の波の直交基準化はエネルギー流が振幅の自乗で表わされるようにきめる。

空洞壁は完全導體であつて、空洞内の媒質にも損失がないと考えると、空洞の Q 値は次式で定義される。

$$Q = \omega_0 W / S \quad (2)$$

ここに W は空洞に蓄えられている全エネルギーであつて、 S は空洞へ流入するエネルギーの無い時に導波管から流れ出るエネルギー流 (單位時間に流れるエネルギー) である。 N 番目の導波管だけから流れ出る l 次の波のエネルギー流を S_{Nl} とおけば

$$S = \sum_{N,l} S_{Nl}$$

であるから

$$\frac{1}{Q} = \sum_{N,l} \frac{1}{Q_{Nl}}, \quad Q_{Nl} = \omega_0 W / S_{Nl} \quad (3)$$

と表わすことができる。

實際の空洞共振器では、空洞壁は完全導體ではなくて、必ず熱損失がある。空洞内に蓄えられたエネルギーが W のときの熱損失を S_0 とし、空洞自身の(無負荷時の) Q 値 (unloaded Q 又は intrinsic Q)

$$Q_0 = \omega_0 W / S_0 \quad (4)$$

を考慮しなければならない。更に又實際問題として、導波管は殆ど常に $l=1$ の只一つの mode 波だけが通り得るだけのものが用いられている。即ち太すぎない共軸ケーブルや H_{11} 波のみを通す導波管などである。そこでこれからは suffix の l を略すことにする。さうすると

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \sum \frac{1}{Q_N} \quad (5)$$

$$a_{NN'} = \left\{ \begin{matrix} Q_N^{-1/2} & Q_{N'}^{-1/2} \\ \delta + j/2Q \end{matrix} + j\delta_{NN'} \right\} e^{j(\theta_N + \theta_{N'} + \theta)} \quad (6)$$

但し、 $\delta = \omega / \omega_0 - 1$

と表わされる。ここに θ_N などは各々の導波管で位相を考える基準面のとり方できまる位相角である。

3. 導波管が二つ結合された空洞

(6) 式でもまだ一般的すぎてわかり難い。種々の波長計、速度變調管、濾波器、送受切換回路などに用いられる空洞共振器は、大抵導波管が二つの結合されているものである。そこで $N=1, 2$ のみの場合について具體的に少し詳しく計算を進めることにする。斯様な回路の一方 ($N=1$) から電波を送る時の電力透過率及び電力反射率を夫々 T 及び R とすれば、(5)、(6) 式から次の結果が導かれる。

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \quad (7)$$

$$T = |a_{12}|^2 = |a_{21}|^2 = \frac{1}{Q_1 Q_2 (\delta^2 + 1/4Q^2)} \quad (8)$$

$$R = |a_{11}|^2 = \frac{\delta^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{Q} - \frac{2}{Q_1} \right)^2}{\delta^2 + 1/4Q^2} \quad (9)$$

定常波の振幅の最大と最小、又は最小と最大との比を振幅平流率 (voltage standing wave ratio) σ とすれば

$$R = (1 - \sigma)^2 / (1 + \sigma)^2$$

$$\frac{1}{\sigma} \text{ 又は } \sigma = (1 - R^{1/2}) / (1 + R^{1/2}) \quad (10)$$

となる。

空洞が共振している時は $\delta=0$ で、共振點に於ける回路特性を示す値は一括して第1表に示す。第1表には又特殊例として 1) 反射率0の場合、2) $Q_1=Q_2$ の場合、及び 3) 導波管が一つのみの場合についても計

算した結果をのせてある。

て最大の透過率を與える條件である。R=0, σ=1 とする條件は

1) R=0 の場合は送受切換回路の放電管空洞 (T-R cavity) などで用いられるが、之は一定の Q₂ に對し

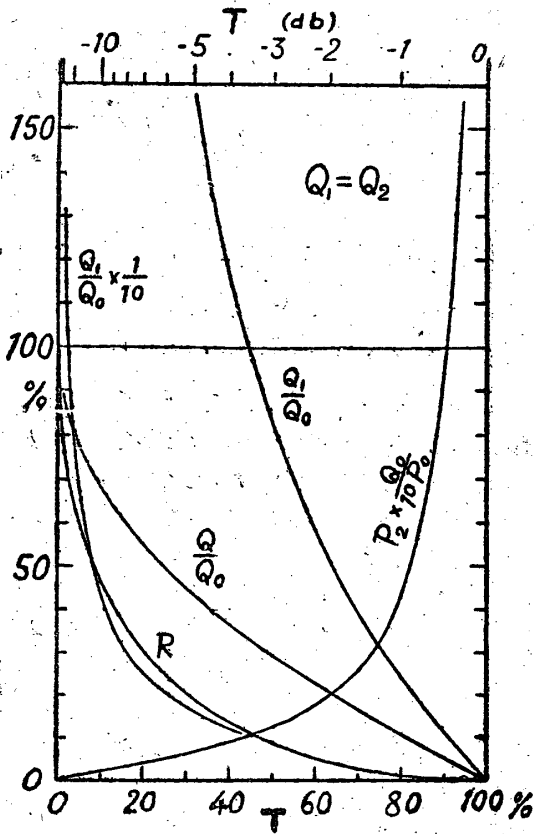
$$Q_1 = 2Q \quad (11)$$

第1表 空洞共振器の諸量間の關係

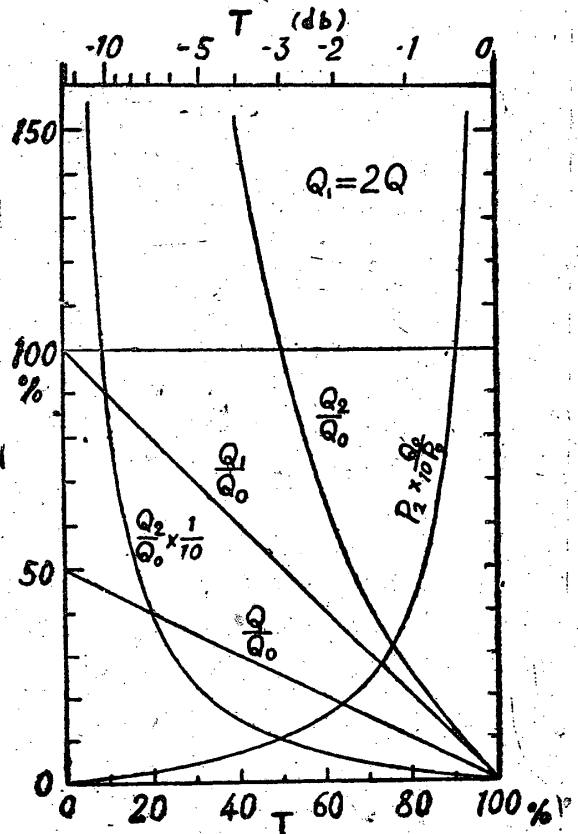
諸 量	ω=ω ₀ の時の一般式	特 殊 例		
		1) Q ₁ =2Q	2) Q ₁ =Q ₂	3) Q ₂ =∞
透 過 率	$T = \frac{4Q^2}{Q_1Q_2}$	$\frac{Q_1}{Q_2} = 1 - 2\frac{Q}{Q_0}$	$\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)^2 = \frac{4\sigma^2}{(1+\sigma)^2}$	0
反 射 率	$R = \left(1 - 2\frac{Q}{Q_1}\right)^2$	0	$\frac{Q^2}{Q_0^2} = \left(1 - \sqrt{T}\right)^2$	$\left(\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1 + Q_0}\right)^2$
振 幅 平 流 率	$\sigma = \frac{Q}{Q_1 - Q}$	1	$\frac{Q_0 - Q}{Q_0 + Q} = \frac{\sqrt{T}}{2 - \sqrt{T}}$	$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{Q_0}{Q} - 1$
實 效 的 Q 比	$\frac{Q}{Q_0} = \frac{4\sigma - (1+\sigma)^2 T}{4\sigma(1+\sigma)}$	$\frac{1-T}{2}$	$1 - \sqrt{T} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$	$\frac{Q_1}{Q_1 + Q_0}$
入 力 側 Q 比	$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{4\sigma - (1+\sigma)^2 T}{4\sigma^2}$	1-T	$2\frac{1-\sqrt{T}}{\sqrt{T}} = \frac{1-\sigma}{2}$	$\frac{Q}{Q_0 - Q}$
出 力 側 Q 比	$\frac{Q_2}{Q_0} = \frac{4\sigma - (1+\sigma)^2 T}{(1+\sigma)^2 T}$	$\frac{1-T}{T}$	$2\frac{1-\sqrt{T}}{\sqrt{T}} = \frac{1-\sigma}{2}$	

となり、この時 Q₂ = Q₁Q₀ / (Q₀ - Q₁) である。反射波を零とするこの整合條件は若しも空洞に損失が無ければ Q₁ = Q₂ となるが、一般に Q₁ の方が小さい。

2) Q₁ = Q₂ という場合は、一定の Q₀ 及び Q (loaded Q) に於て透過率 T を最大とする條件であり、又透過率及び Q₀ が一定のときに最大の Q 値を得る條件で



第2圖 Q₁=2Q の空洞の特性



第3圖 Q₁=Q₂ の空洞の特性

ある。従つてこれは波長計、濾波器、誘電體損の測定器などの空洞に採用すべき条件である。

この二つの場合については、第1表から知られる關係を透過率を横軸にとつて第1圖及び第2圖に示す。之によつて空洞に導波管を結合させる場合に、透過率をどの位にすれば Q はどれだけ下るかを容易に計算することができる。簡単な形の空洞では、一般に Q_0 は比較的容易に計算されるので、之から空洞に窓やループを付けて導波管を結合させた時の Q 値が求められる。しかし幾何學的寸法から Q_1 又は Q_2 を計算によつて知ることは困難であつて、之等は實驗的に決定しなければならない。その値は空洞壁に於ける窓又はループの位置及びその大きさ、空洞及び導波管の形と大きさによつて違つてくる。窓による結合の場合には導波管内の電氣ベクトルと直角方向の窓の幅が最も著しく利いてくる。

次に ω が共振點を外れている場合の空洞の特性を論じよう。但し ω は ω_0 に近くて、他の共振角周波數からは遠くはなれているものとする。この場合は (8) 及び (9) 式によつて所謂同調曲線が表わされる。透過率は $\omega = \omega_0$ で極大を示し、反射率は極小を示す。

(8) 及び (9) 式からわかる様に、 $1/T$ 及び $1/(1-R)$ は δ^2 に對して直線的な關係にあるので、之によつて同調曲線から Q 値を求めることができる。しかし通常は透過率や反射率よりも平流率の方がずっと測定し易いので、それから Q を求める方がよい。(9) 及び (10) 式から次の關係式が得られる。導き方は異なるが文獻 (9) に同様の内容の式がある。

$$\frac{(1+\sigma)^2}{4\sigma} = \frac{Q_1 \left(\delta^2 + \frac{1}{4Q_2^2} \right)}{\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1}} \quad (12)$$

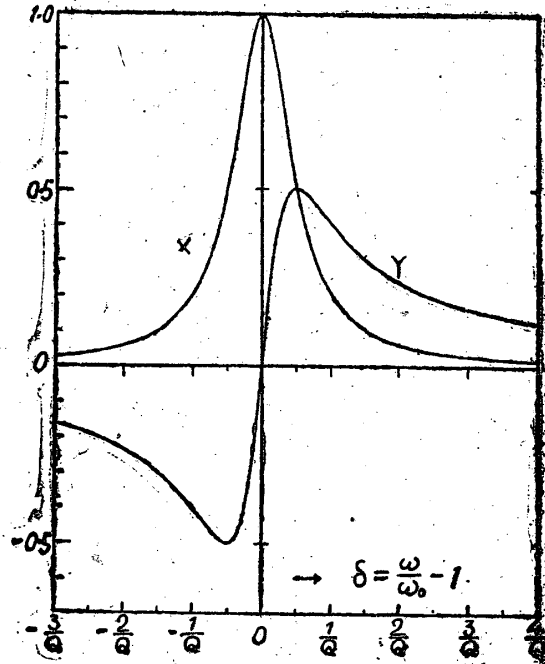
この式の右邊は δ^2 に對して直線的に變化するから、 δ^2 に對して $(1+\sigma)^2/4\sigma$ を圖示すれば、圖式的に Q 値を求めることができる。通常よく行ふような半値幅から Q を求める方法では二三の測定點から Q がきめられることになるが、この方法では多數の測定値から Q が求められるので、實驗誤差が少なくなつて具合がよい。空洞共振器を用いて物質の誘電率を精密に測定する時などに應用することができる。

空洞共振器の共振特性を表わすのに次の函數が用いられる。即ち

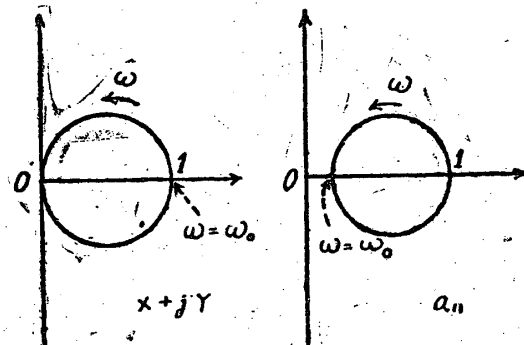
$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1/4Q^2}{\delta^2 + 1/4Q^2} \\ Y &= \frac{\delta/2Q}{\delta^2 + 1/4Q^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とおく。 X 及び Y は第4圖に示すように δ によつて

變化している。



第4圖
(13) 式のグラフ表示



第5圖
(14) (15) 式の複素平面表示

之を用いて空洞共振器の特性マトリックスの成分を表わせば次の様になる。但し位相のとり方は $\omega = \omega_0$ の時に a_{12} の位相を 0 にとり、 a_{11} の方は窓が閉ぢていて ($Q_1 = \infty$) 完全反射のとき $A_{11} = 1$ となるようにきめることにする。そこで

$$a_{12} = \frac{2Q}{\sqrt{Q_1 Q_2}} (X + jY) \quad (14)$$

$$a_{11} = 1 - \frac{2Q}{Q_1} (X + jY) \quad (15)$$

が得られる。 $X^2 + Y^2 = X$ であるから透過率及び反射率は次式で表わされる。

$$T = \frac{4Q^2}{Q_1 Q_2} X \quad (16)$$

$$R = 1 - \frac{4Q^2}{Q_1} \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1} \right) X \quad (17)$$

前と同じ特殊例として、 $Q_1=2Q$ の場合には上式は簡単に次のようになる。

$$T = \frac{Q_1}{Q_2} X, \quad R = 1 - X \quad (18)$$

又 $Q_1=Q_2$ のときには

$$T = \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)^2 X, \quad R = 1 - \left(1 - \frac{Q^2}{Q_0^2}\right) X \quad (19)$$

となる。

空洞共振器と Magic Tee (又は Hybrid Tee) を用いた糧波の AFC 回路⁽⁶⁾⁽⁷⁾では透過波や反射波の位相が問題になる。之は (14) 及び (15) 式で表わされているが、 T や R を使つて表わせば次のようになる。

$$a_{12} = \sqrt{T} e^{i\varphi}, \quad \tan \varphi = 2Q\delta \quad (20)$$

$$a_{11} = \sqrt{R} e^{i\theta}, \quad \tan \theta = \frac{-\delta/Q_1}{\delta^2 + \frac{1}{4Q^2} - \frac{1}{2QQ_1}} \quad (21)$$

$Q_1=2Q$ のときに (21) 式は $\cot \theta = -2Q\delta$ となり、周波数や Q が變つたときに反射波の位相變化の様子は透過波の位相變化と同じである。

4. 空洞共振器内のエネルギー等について

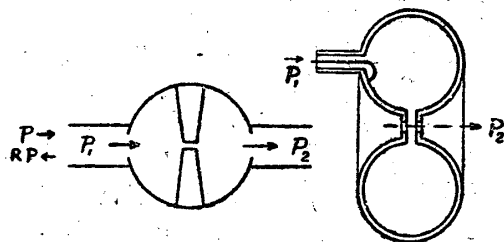
空洞共振器を糧波の回路に應用する場合に、空洞内にある比較的狭い間隙に強い電場を發生せしめて、それを利用することがある。例えば送受信切換放電管回路、速度變調管の同調回路等がそうである。

斯様な空洞共振器の間隙に現われた高周波電壓^{*}を V とすれば、空洞共振器の共振電力 P_0 は

$$P_0 = BV^2 = \omega W \quad (22)$$

となる。之は勿論無効電力 (reactive power) である。そして B は空洞の實效的サセプタンスである。

1) W は空洞内に蓄えられている電磁エネルギーである。第6圖に示す様に空洞共振器の入力電力及び出力電力を夫々 P_1, P_2 とし、入力側の導波管に與えられる電力 (line power 又は available power) を P とすれば、



第6圖 狭い間隙をもつた空洞

* 間隙の距離が波長に比べて十分に小さい時には、近似的に電壓を考慮することができる。

$$P_1 = (1-R)P \quad (23)$$

$$P_2 = P_0/Q_2 \quad (24)$$

である。一方 (4) (5) 及び (22) から入力電力は

$$P_1 = P_0/Q_0 + P_2$$

$$\text{又は } P_1 = P_0 \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1} \right) = BV^2 \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1} \right) \quad (25)$$

と表わされる。従つて (9) 式及び (23) 式を用いて

$$P_0 = \frac{(1-R)P}{\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1}\right)} = \frac{P}{Q_1 \left(\delta^2 + \frac{1}{4Q^2} \right)} \quad (26)$$

となる。 $\omega = \omega_0$ の場合には

$$P_0 = \frac{4Q^2}{Q_1} P \quad (27)$$

特に $Q_1=2Q$ の時には $R=0$ となつて入力電力は最大になり、

$$P_0 = 2QP \quad (28)$$

又は

$$V^2 = \frac{2Q}{B} P$$

と表わされる。即ち共振電力は空洞共振器の Q に比例して増すことがわかる。

切換放電管回路では、送信機が作動して強力な高周波の到來している時には、空洞内の放電間隙に放電が起る。この時には放電の特性として、かなり入力の大きさが變つても大部分の電力は放電に喰われて、空洞共振電力 P_0 は大體一定になつてゐる^{*}。之は丁度、放電管の直流特性で言うと、電流が變つても放電電圧は大體一定になることに相當する。そこで空洞共振器にこの様な電力を喰う負荷がある時のことを論じよう。

先づ空洞内の例えば放電のような重い負荷に喰われる電力 P_a について考えてみる

$$Q_a = \frac{\omega W}{P_a} = \frac{P_0}{P_a}$$

とおいて、放電點火時の Q 値を Q_a と書けば、

$$\frac{1}{Q_a} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_g} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_g} \quad (29)$$

となる。但し放電電力従つて又 Q_a は P や ω によつて變化することは注意しなければならない。(25) 式と (27) 式の Q を Q_a とおいて變形すれば

$$P_1 = 2 \left(1 - \frac{Q_a}{Q_1}\right) \left(\frac{P_0 P}{Q_1}\right)^{1/2} \quad (30)$$

と書くことができる。一方空洞壁でジュール熱として失われる電力は $P_l = P_0/Q_0$ であるから、放電に消費される電力は

* 筆者の戦時中の簡単な實驗によればこのことがいえる。

$$P_g = P_1 - P_2 - P$$

$$= 2 \left(1 - \frac{Q_d}{Q_1} \right) \left(\frac{P_0 P}{Q_1} \right)^{1/2} - P_0 \left(\frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_0} \right)$$
(31)

となる。

所で切換放電管の放電點火時の P_0 は 10 VA の程度であつて、送信機出力に比して極めて小さい。例えば $f=3 \times 10^{10}$, $V=100$ ボルト、放電間隙 1 mm, 間隙の面積 6 mm^2 とすれば、間隙以外の電場は無視し

$$P_0 = \omega W = \omega \int \epsilon E^2 dv = 10 \text{ VA}$$

である。但し式は MKS 系を用いて書いた。

之に對して P は大抵キロワット以上である。

$$P_0 \ll P, P_g \approx P_1 \quad \therefore Q_d \approx Q_g \ll Q$$

となるから、(31) 式は

$$P_g \approx P_1 = 2 \left(\frac{P_0 P}{Q_1} \right)^{1/2}$$
(33)

となる。即ち放電電力は送信出力の平方根に比例している。

P_g は送信出力に對して損失になるのであるが、(33) 式から知られる値は P に比して小さいので、通例全く問題にはならない。しかし切換放電管の放電が切れた後の恢復時間 (recovery time) は、 P ではなくて、 P_g によつてきまるのでこの量は大事である。

$Q_1 = 2Q$ のときには、第1表の關係式によつて

$$P_g \approx 2 \left[\frac{P_0 P}{Q_0(1-T)} \right]^{1/2}$$
(34)

と表わされる。放電消滅時の透過率 T が大きい程 P_g は大きくなり、 Q_0 が大きい程 P_g は小さくなる。恢復時間を短くしようとすると T を小さくせねばならず、適当な所で折合をつけることになる。

次に切換放電管の漏洩電力について考えて見よう。第1表にある Q_2 の式と (24) 式から切換放電管點火時に出力側の導波管 (切換回路で受信機につながれている方) に漏れてくる電力が求められる。

$$P_2 = \frac{P_0(1+\sigma)^2 T}{Q_0[4\sigma - (1+\sigma)^2 T]}$$
(35)

但しここに用いられている σ 及び T は放電が消えて

いる時の値である。特に $\sigma=1$ ($Q_1=2Q$) の場合は

$$P_2 = \frac{P_0 T}{Q_0(1-T)}$$
(36)

である。放電點火によつて P_0 が P によらない時は、漏洩電力は P に無關係で、 Q が高い程小さく、放電消滅時の透過率が大きい程大きくなることがわかる。 $Q_1=2Q$, 又は $Q_1=Q_2$ の時の P_2 と T の關係を第2圖及び第3圖に示す。切換放電管回路では、 T が大きく P_2 が小さいことが望まれるので、なるべく Q_0 を大きくする必要がある。

切換回路の實例として米國の文獻に見られた一例⁹⁾を挙げると、波長約 10 cm 用の切換放電管 721 A で次のデータとなつている。 $Q_0=2500$, $P_0=20 \text{ VA}$ 。従つて $T=0.79$ (-1 db) の時 $P_2=30 \text{ mW}$ で、送信機出力が 100 kW の時、 P_g は 63 W となる。なおついでながら、封入氣體は水蒸氣と水素の混合で、恢復時間は數 $\mu \text{ sec}$ 程度である。

終りにあたり、御懇切な御指導を賜つた熊谷寛夫所員、ならびに終始多くの助言と御協力をいただいた林嚴雄君に厚く感謝する次第である (1948年3月)。

文 獻

- (1) W. L. Barrow : I. R. E., 24(1936), 1298.
- (2) J. R. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff : B. S. T. J., 15 (1936), 310.
- (3) J. A. Stratton : "Electromagnetic Theory" Chap. V, p. 283
- (4) J. C. Slater : "Microwave Transmission" (1942) p. 95, 129.
- (5) 宮島龍興 : 科學, 17 (1947), 2.
- (6) V. C. Rideout : I. R. E., 35 (1947), 767.
- (7) R. V. Pound : Rev. Sci. Inst., 17(1946), 490.
- (8) A. L. Samuel, J. W. Clark and W. W. Mumford : B. S. T. J., 25 (1946), 48.
- (9) E. Maxwell : Journ. Appl. Phys., 18 (1947), 629.