

渡邊 勝・三井田 純一

(1949年2月9日受理)

1. ま え が き

Differential Analyzer (以下 D. A. と略記する) は 1927 年 Bush⁽¹⁾ により, その原理及び試作が發表されて以來世界數ヶ所で改良, 設計されて, 廣範圍の變化に富んだ微分方程式を解く有力な機械として用ひられるに至つた。例へば工學方面では電氣回路⁽²⁾, その過渡現象⁽³⁾, 非線型振動⁽⁴⁾, 及び流體力學⁽⁵⁾, 又物理學方面では波動函數⁽⁶⁾, 電子軌道⁽⁷⁾, 眞空管⁽⁸⁾等の計算等, 或は間接的に偏微分方程式⁽⁹⁾の問題を解くために應用されて居り, 特に微分方程式の係數が實驗値の如く數值的に與へられた場合, 不連続的に變化する場合, 及び波動函數を self-consistent に求める場合等に有力であることが示された。我國ではあまり用ひられた例はない。本研究所の D. A. は佐々木達治郎氏により製作されたものであるが, その性能や應用に關しては未知の状態であつたので, 此の性能を調べ, 二三の機構的な改良を行い, 十分満足なものとは言へないが, 一應結論を得たので此處に報告する。

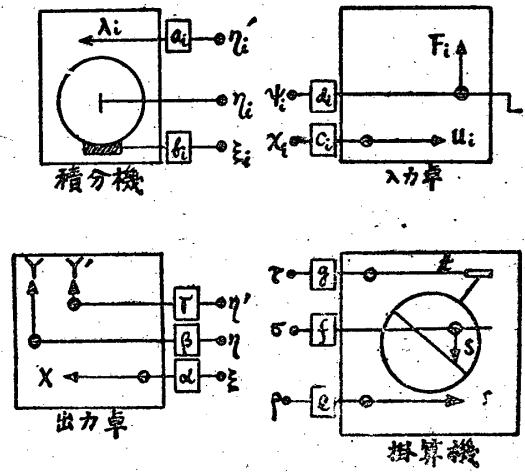
2. 記號及びそれ等の間の關係式

D. A. の機構に就いては佐々木氏による詳細な報告⁽¹⁰⁾ 及び Bush の報告⁽¹¹⁾ が出されて居るから省略し, 圖の記號の詳細も文献に譲ることとし, 以下各變數を代表する記號を統一する必要から定めた記號及びそれ等の間に成立する關係式を示す。

- x : 獨立變數, y : 從屬變數, y' : 一階微係數,
- X (mm): 出力曲線の横座標,
- Y (mm): 出力 y 曲線の縦座標,
- Y' (mm): 出力 y' 曲線の縦座標,
- F_i (mm): 係數曲線の縦座標,
- U_i (mm): 係數曲線の横座標,
- m_x (mm/unit x): X/x ,
- m_y (mm/unit y): Y/y ,
- $m_{y'}$ (mm/unit y'): Y'/y' ,
- m_{F_i} (mm/unit): 入力曲線の縦座標の倍率,
- m_{U_i} (mm/unit): 入力曲線の横座標の倍率,
- η_i (rev.): 積分機出力軸 (積分軸) 回轉數,

- η'_i (rev.): 積分機入力軸 (被積分軸) 回轉數,
- ξ_i (rev.): 積分機の獨立變數軸の回轉數,
- λ_i (mm): 積分機臺の移動距離,
- s (mm): 掛算機の出力軸,
- r, t (mm): 掛算機の入力軸,

尙 $a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha, \beta, \gamma$ を以て第 1 圖に示される部分のギヤの齒數比で, 中心縦傳導軸に近いギヤの齒數が分子となる様定義する。



第 1 圖

以上諸量の間に成立する關係式は次の様になる。
 $X = m_x \cdot x, Y = m_y \cdot y, Y' = m_{y'} \cdot y', \xi = X/2\alpha,$
 $\eta = Y/2\beta, \eta' = Y'/2\gamma$
 $\left. \begin{aligned} \eta_i &= a_i b_i / 32 \cdot \int \eta'_i d\xi_i, \text{ 或は } d\eta_i / d\xi_i \\ &= a_i b_i / 32 \cdot \eta'_i, \lambda_i = b_i \eta'_i \end{aligned} \right\} \dots \text{積分機}$
 $\chi_i = U_i / 2c_i, \psi_i = F_i / 2d_i \dots \dots \dots \text{入力卓}$
 $\tau = t/2g, \sigma = s/2f, \rho = r/2e, s = tr/180,$
 $\sigma = eg/90 f \cdot \tau \rho \dots \dots \dots \text{掛算機}$
 尙 $\alpha, \beta, \gamma, a_i, b_i, c_i, d_i$ は 4, 2, 1, 1/2, 1/4 だけの値を取り得る。

3. 應 用 例

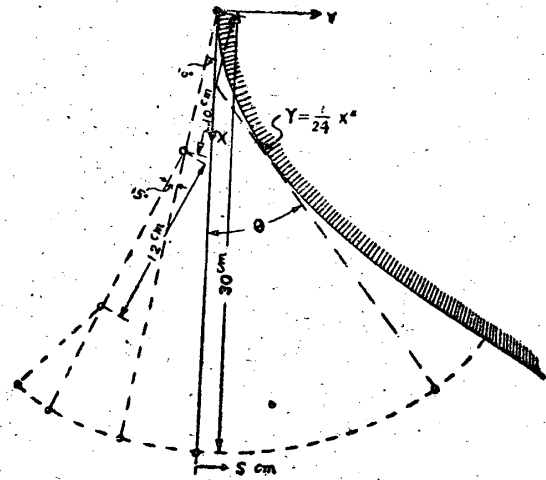
實際に方程式を解く場合に上述の諸量を實際に決定せねばならないが, この決定如何によつて解の精度を左右する重要な要素となる。

實際には大體の見當をつけて決めて rough な解を求め次にこれを參考として最良の諸量を定めるより外

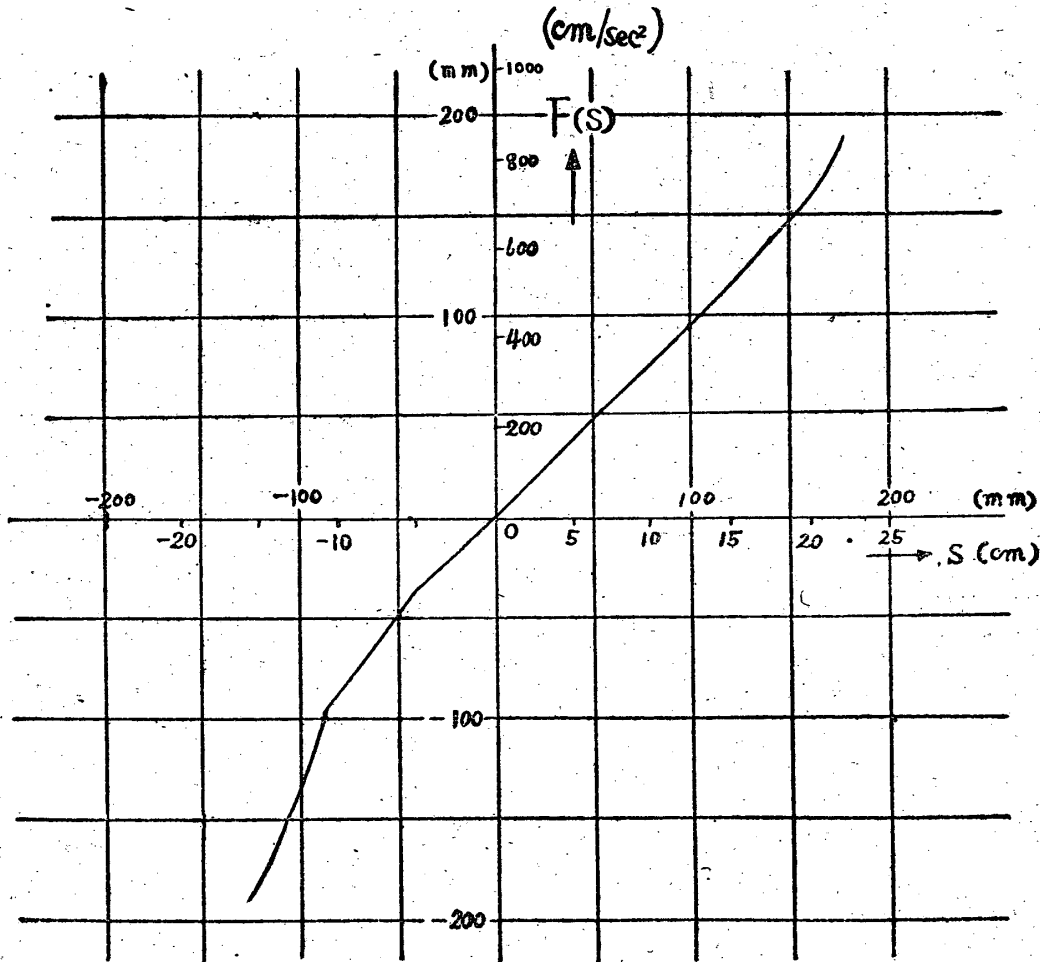
はない。實際に解を得た簡単な問題によつて應用例を示す。第2圖に示す様な振子の運動を考へる、運動方程式は $d^2s/dt^2 = -g \sin \theta$ となる。これを解くために $F(s) = g \sin \theta$ として $F(s)$ を定義すれば、次の様になる。

$$d^2s/dt^2 = -F(s) \quad (1)$$

s の正の部分では s は $Y = 1/24 X^2$ の伸開線の長さとして θ の函数として解析的に計算出来るから、 $g \sin \theta$ は s の函数として容易に數值的に求められる。實際に用ひた曲線は第3圖の様になつた。(1) 式を D. A. 上で解く場合の結線圖は第4圖に示される。ギャ比を考慮した圖を示せば第5圖の如くなる。前節の關係を用ひて (1) の關係



第 2 圖



第3圖 (1) 式の入力曲線 $F(s)$

を導くために諸量間の關係を定める積分機に對する關係は $\eta_1 = a_1 b_1 / 32 \cdot \int \eta_1' / d \xi$, $\eta_2 = a_2 b_2 / 32 \cdot \int \eta_2' / d \xi$, 及び第5圖の關係から $\eta_1' = \eta_2$, $\eta_2' = -\phi_1$ となるから

$$d^2 \eta_1 / d \xi^2 = -a_1 b_1 a_2 b_2 / 32^2 \cdot \phi_1 \quad (2)$$

となる。X, Y, F_1 の關係に移れば

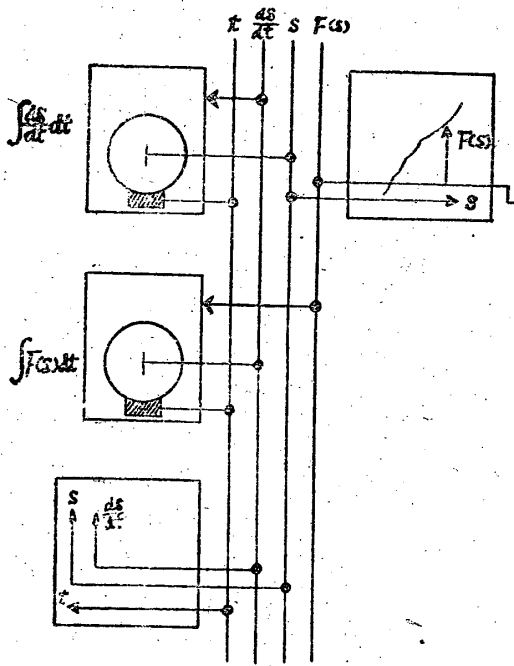
$$d^2 Y / d X^2 = -(a_1 b_1 a_2 b_2 \beta / 32^2 \cdot 4 \cdot \alpha^2 \cdot d_1) F_1 \quad (3)$$

となる。更に $Y = m_y \cdot s$, $X = m_x \cdot t$, $F_1 = m_{F_1} \cdot F(s)$ とすれば

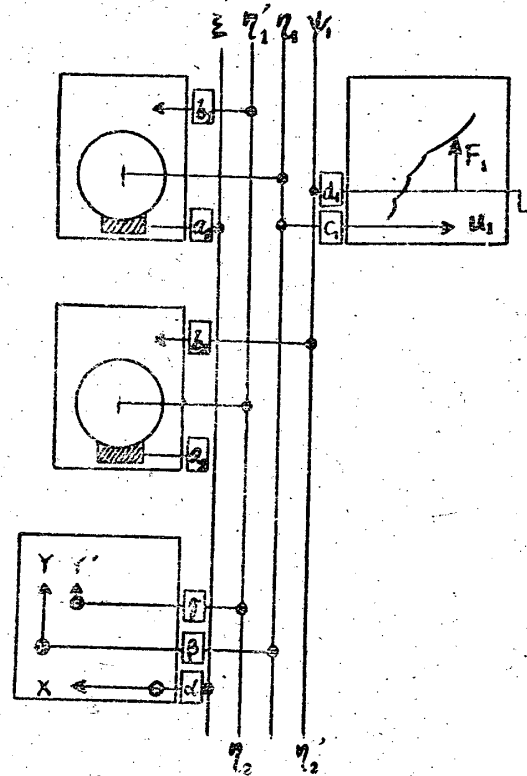
$$d^2 s / dt^2 = -(a_1 b_1 a_2 b_2 \beta m_x^2 m_{F_1} / 32^2 \cdot 4 \alpha^2 d_1 m_y) F(s) \quad (4)$$

となる。(4) を (1) と比較して

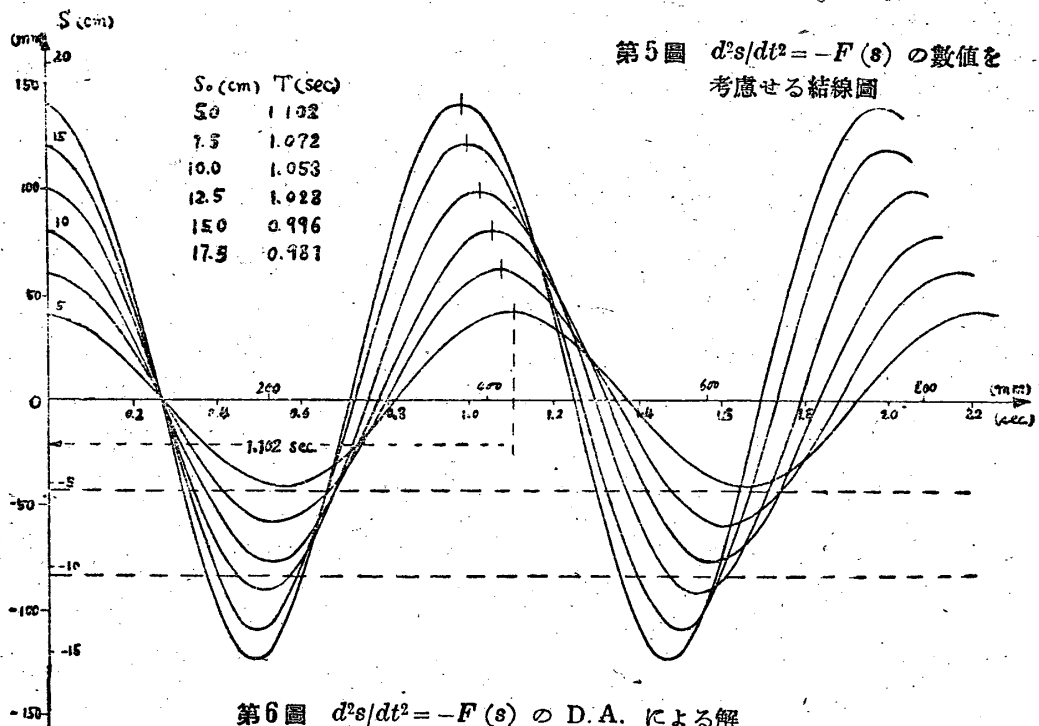
$$a_1 b_1 a_2 b_2 \beta m_x^2 m_{F_1} / 32^2 \cdot 4 \alpha^2 d_1 m_y = 1 \quad (5)$$



第4圖 $d^2s/dt^2 = -F(s)$ の結線圖



第5圖 $d^2s/dt^2 = -F(s)$ の數値を考慮せる結線圖



第6圖 $d^2s/dt^2 = -F(s)$ の D.A. による解

なる関係が必要である。各變數と變域との關係は次の様である。

X: 0~700 mm, F_1 : -235~+235 mm

Y: -235~+235, λ_i : -120~+120

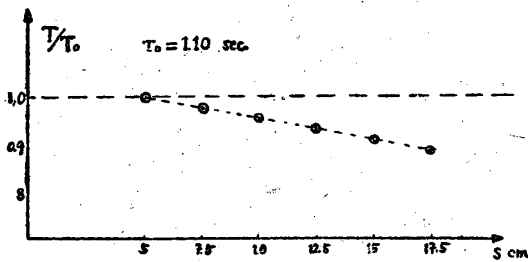
Y': -235~+235, u_i : 0~700

上の變域内に各變數がおさまる様に諸量を定める先づ周期は微小振幅周期 T_0 として $T_0 = 2\pi\sqrt{30/g} = 1.100$ sec をとり、これに近いとして假りに2周期にわたり

解を書かせたいとすれば、 $m_x \times 2 \times 1.100 \approx 700$ となる様に m_x を選ばばよい。そこで $m_x = 384 = 12 \times 32$ mm/sec とし $a_1, b_1, a_2, b_2, \alpha, \beta, \gamma, c_1, d_1$ をそれぞれ1に選べば(5)の關係から $m_y/m_{F_1} = \epsilon 6$ となる。 $m_y \cdot s_{max} \approx 235$, $m_{F_1} \cdot F(s)_{max} \approx 235$ となる様に m_y, m_{F_1} は $m_y = 8$ mm/cm, $m_{F_1} = 0.222$ mm/cm·sec⁻² の程度に取ることが適當である。又 $m_{a_1} = 8$ mm/cm として第3圖が得られた。

尙初期條件は次の関係により入れればよい。前の關係から容易に導かれて $\lambda_1 = b_1 \gamma' = 32 \alpha m_y / \alpha_1 \beta m_x \cdot ds/dt$
 $\lambda_{11} = b_2 \gamma_2' = -b_2 \psi_1 = b_2 m_{F_1} / 2d_1 \cdot F(s), Y = m_y \cdot s,$
 $Y' = 2 \gamma \eta_1' = 32 \alpha \cdot 2 \gamma m_y / \alpha_1 \beta m_x \cdot ds/dt$ となる。

得られた解の結果を第6圖に示す。ここに書かれて居る解は $t=0$ で $ds/dt=0$ で種々の振幅を持つものである。振幅の増加と共に周期 T の變化の模様を第7圖に示す。 T は Y' 曲線が0となる點から高精度で求められた。



第 7 圖

4. 積分機の精度

積分機から取出される積分の誤差の原因となるものに二通り考へられる。その一つは固有的誤差と稱すべきもので、他は増幅機其他による誤差である。

前者に含まれる誤差は x に比例するものと y に比例するものとある。次の様な積分に就いて考へる。

$y = \int y' dx = g/\rho \cdot \int \lambda dx$ 此處に ρ は積分機ローラーの半徑であり、 g は前述の關係から $y' = g/\rho \cdot \lambda$ と置いて得られる常數である。 y の精度は λ 及び ρ の精度により決まる。これらの文字の前に δ を附してその誤差を表はすとすれば、誤差の間に成立すべき關係は近似的に

$$\delta y \doteq -g \delta \rho / \rho^2 \cdot \int \lambda dx + g/\rho \cdot \int \delta \lambda \cdot dx = \delta y_\rho + \delta y_\lambda$$

但 $\delta y_\rho = -g \delta \rho / \rho^2 \cdot \int \lambda dx$ (6)

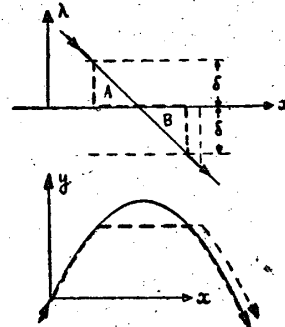
$$\delta y_\lambda = g/\rho \int \delta \lambda dx$$
 (7)

と書くことが出来る。(6) は $\delta y_\rho / y = -\delta \rho / \rho$ と書くことが出来て、 δy_ρ は y に比例し現在の精度では $\rho = 32 \text{ mm}, |\delta \rho| \leq 0.01 \text{ mm}$ であるから $|\delta y_\rho / y| \leq 0.01/32 \doteq 0.0003$ となり δy_ρ は y に對して 0.03% 以下となる。次に (7) に於て $\delta \lambda$ を常數と見做して $\delta y_\lambda / x = g/\rho \cdot \delta \lambda$ となり δy_λ は x に比例すべきもので現在の精度では $|\delta \lambda| = 0.02 \text{ mm}$ の程度であるから $|\delta y_\lambda / x| \leq 0.02/32 \cdot g \doteq 0.0006 g$ となり、これは x に對して 0.06 g% となる。單なる積分の場合は前の關係を用ひて $g = \alpha \beta m_x / \alpha m_y$ で與へられるから、 g は出来るだけ小なることが望ましい。然し前記の關係 $y' = g/\rho \cdot \lambda$ のために g を小にすることは λ が大きくなり、 y'_{max}

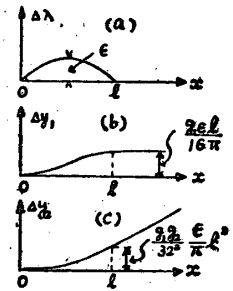
が與へられれば $\lambda \leq 120$ なる條件を満足せしめるには g の最小値は限定される。

次に第二の原因に依るものは、増幅機の本質的なもの、負荷、速度其他運動學的に複雑な要素に依つて支配されるべきもので、これらに就いての詳細は又別の機會にゆづる。何れにしても第一の場合に於ける誤差の程度は大體満足なものである。實驗の結果によれば δy は x に對しても y に對しても 0.2% の程度であり未だ固有的誤差の到達限度に迄達して居ない。これは第二の場合の誤差が含まれるためと考へられる。

尙この外の誤差の原因としては λ が0に近くなると入力トルクが減少するためと、出力軸の回轉速度が低下するため傳導軸其他の摩擦力が増加して回轉が止ることである。これは擴大して考へれば第8圖に於て λ の變化が直線的であると假定すれば、 $\lambda=0$ の附近ではその積分 y は拋物線の頂點を通過すべきであるが、



第 8 圖



第 9 圖

實際には λ が絶対値 0.3 mm 以下になると y は停止するから、 λ のたどる経路は點線の部分を通じたと同等と考へられるから y は點線の如き経路をたどり、A 及び B の面積が等しいとすれば後の結果に著しい影響はないと考へられるが、實際にはその際の負荷が靜止摩擦のため増加して B の面積が大きくなり y に或る量の遅れを生ずる。これが逆轉の場合のガタと共に後の解に著しい結果を及ぼす。

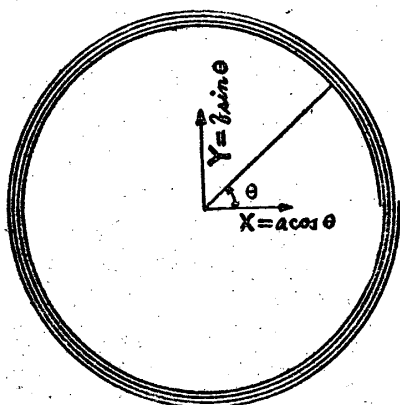
5. 誤差の傳播

積分機以外で生ずる誤差の原因として考へられるものに次の二通りある。(1) 曲線の追跡による誤差、(2) 傳導軸に於て逆轉の場合に生ずるガタである。實際に微分方程式を解く場合に或る場所で發生した誤差が如何に傳播して行くかを一般的に求めることは殆んど不可能に近い。然し微分方程式としてでなく單なる積分過程での誤差の傳播の状態を知ることにより大體の見透しがつけられる。

例へば第9圖(a)に示される様な誤差 $\delta \lambda = \epsilon \sin \pi / l \cdot x$

が発生したとすれば第1回の積分 $y_1 = g_1/32 \cdot \int \lambda dx$ の結果、誤差は $\delta y_1 = g_1 \epsilon / 32 \pi \cdot [1 - \cos \pi/l \cdot x]$ で與へられて (b) の如くなる。次に第2回の積分 $y_2 = g_2/32 \cdot \int y_1 dx$ の結果、誤差は $\delta y_2 = g_1 g_2 \epsilon / 32^2 \pi \cdot [x - l/\pi \sin \pi/l \cdot x]$ で與へられ、距離 l を通過してからは線形に増加する。その様子は (c) の如くなる。(1) の場合の誤差は上式に於て大體 $\epsilon = 0.1 \text{ mm}$ 以下におさめられ、 ϵ が正及び負の値を繰返すことにより、誤差は非常に減少することがわかつた。

次に逆轉にて生ずるガタは次の様にして評價した。即ち $y'' = -y$ なる方程式の解を $y=0, y'=1$ なる初期条件で出發せしめ、 y 及び y' をそれぞれ縦軸及び横軸として解を書かせると、正しい解は閉じた正しい圓を書くべきであるが、ガタの影響により 1 cycle 毎に約 0.5% 半径が増加した。第10圖の如き spiral の形の解が得られた。但しこれは正しい縮圖ではなく



第 10 圖

誤差の部分を擴大して書いたもので、實際は 200 mm の半径の圓を畫かせると 1 cycle 毎に半径が約 1 mm 増大した。この半径の増大することは逆轉の際生ずるガタを考慮することにより説明される。即 $x = n \cdot \pi/2$ (n は正整数) に於て逆轉するから、此處で與へられたガタ δ を考慮して微分方程式の解を逐次求めると、1 cycle の後には解は δ の高次の項を省略すれば、計算の結果

$$y = (1 + 3\delta) \sin x - \frac{8}{3} \sqrt{2} \delta^2 \cos x$$

$$y' = (1 + 3\delta) \cos x + \frac{8}{3} \sqrt{2} \delta^2 \sin x$$

となる。一般に $x = n \cdot \pi/2$ に於ては解は近似的に

$$y = \{1 + (n-1)\delta\} \sin x - \frac{3n-4}{3} \sqrt{2} \delta^2 \cos x$$

$$y' = \{1 + (n-1)\delta\} \cos x + \frac{3n-4}{3} \sqrt{2} \delta^2 \sin x$$

(但 $n \geq 2$)

なることが知れる。依て第10圖の spiral の半径は $n\pi/2$ の角度の所で近似的に $1 + (n-1)\delta$ となり半径増加の割合は $(n-1)\delta$ となる。故に第10圖の半径増加の割合から δ を逆算することが出來た。その結果 $\delta = 0.0017$ が得られた。これを實際の回轉角に換算すると約 53° となる。これは増幅機其他に於けるガタ (約 20°) の限度を越えて居る。これは前節の終りに述べた逆轉の際の遅れと考へられる。

6. む す び

本報告の目的とする D. A の精度及び誤差の原因及びその大きさに對する大體の見透しが以上の基礎的な Test により得られた。尙殘された問題は増幅機構に於て發生する誤差の状態を調べ、又逆轉の遅れを減少するため回轉の際の負荷、特に摩擦力を除去することである。尙現在解 Y, Y' の讀取りの精度は 0.1 mm 程度であるから $0.1/235 \approx 0.0004$ となり 0.04% となる。 x では $0.1/700 \approx 0.0001$ で約 0.01% の精度である。これらが解の精度の到達限度である。

御指導、御配慮を頂いた山内教授、機構上の問題に關し種々御指示を與へられた渡邊茂助教授、及び機械の改造に對して熱心な御協力を頂いた日立製作所技術部、精器部の方々に御禮申し上げる。

文 獻

- (1) V. Bush, H. L. Hazen: J. F. I., 204 (1927) 575.
- (2) D. R. Hartree: J. I. E. E., 83 (1938) 648.
J. L. Miller: J. I. E. E., 74 (1934) 473.
J. W. Buttler, C. Concordia: E. E., 56 (1937) 975.
W. L. Barrow, D. B. Smith, F. W. Baumann: J. F. I., 221 (1936) 402.
- (3) D. R. Hartree: J. I. E. E., 85 (1939) 56.
D. R. Hartree: J. I. E. E., 83 (1933) 648.
C. Concordia: A. I. E. E., (1942) 230.
- (4) J. G. Brainerd: Proc. I. R. E., 24 (1936).
- (5) D. R. Hartree: Proc. Cambr. Phil. Soc. 33 (1937) 223.
J. G. Brainerd: Jour. Appl. Mech., 9 (1942) A 1-6.
- (6) D. R. Hartree: Phys. Rev., 49 (1936) 843.
M. F. Manning, J. Millmann: Phys. Rev., 49 (1936) 843.
- (7) F. W. Sears: J. F. I., 209 (1930) 459.
- (8) D. M. Meyers, D. R. Hartree: Proc. Roy. Soc. A., 153 (1937) 23.
- (9) D. R. Hartree: Proc. Roy. Soc. L., 161 (1937) 355.
- (10) 佐々木, 志賀: 航研彙報 1945年4月.
佐々木, 志賀: 計算機械 (應用數學第10卷, 河出書房)
- (11) V. Bush: J. F. I., 212 (1931) 447.