

第 1 表

$E - \mu$	$\sigma_e(\text{cm}^2)$	$\sigma_m(\text{cm}^2)$	$\sigma'_m(\text{cm}^2)$	$\sigma(\pm)(\text{cm}^2)$
$10^6 \text{ ev}$	$10.8 \cdot 10^{-17}$	$4.9 \cdot 10^{-23}$	$0.74 \cdot 10^{-22}$	$1.3 \cdot 10^{-22}$
$10^7 \text{ ev}$	$7.7 \cdot 10^{-17}$	$4.3 \cdot 10^{-23}$	$1.2 \cdot 10^{-24}$	$3.6 \cdot 10^{-24}$
$10^8 \text{ ev}$	$7.8 \cdot 10^{-17}$	$4.2 \cdot 10^{-23}$	$1.3 \cdot 10^{-26}$	$4.1 \cdot 10^{-26}$

第 2 表  
( $E = \mu = 10^7 \text{ ev}$ )

$x$	$\Delta T$
0.5 cm	$2 \cdot 10^{-3}$
1.0 cm	$4 \cdot 10^{-3}$
1.5 cm	$1 \cdot 10^{-2}$
2.0 cm	$2 \cdot 10^{-2}$

に示してある。  
電子波の偏りの實測、即ち電子スピンの配向の相違による散亂斷面積の變化を検出し得るためには  $\sigma'_m$  ができるだけ大きいことが望ましい。第1表より明かなるようにそのためには電子のエネルギーが小さい場合が好都合である。併し電子のエネルギーが減少すると散亂體の Stopping Power が増大するために透過強度は減少し従つて僅少の透過強度の磁化の有無による變化を検出することは至難となる。また Stray magnetic field の攪亂も亦無視できなくなる。この種の實驗に

於ける最も大きな困難は電子スピンの散亂過程で反轉する確率が極めて大きいことである。磁化の有無が散亂に及ぼす影響を出来るだけ顯著ならしめるためには散亂過程に於て電子スピンの反轉が行はれぬことが望ましいわけであるから、この事實は電子波偏りの實驗に對しては殆んど致命的であると考えられる。

尙この小論に於て得た散亂過程の諸公式は宇宙線軟成分の磁氣分析の理論的考察に對しても利用できることを附言して置かねばならない。

文 獻

- (1) Halpern and Holstein: Phys. Rev. 59 (1941) 960.
- (2) Meyer and Cox: Phys. Rev. 34 (1929) 1069.
- (3) Weizsäcker: Ann. d. Phys. 19 (1933) 869.
- (4) Heitler: The Quantum Theory of Radiation, 1936.
- (5) Slater: Phys. Rev. 36 (1930) 57.

Differential Analyzer による Schrödinger 方程式の解について

渡 邊 勝・三井田 純 一

(1949 年 2 月 9 日受理)

1. ま え が き

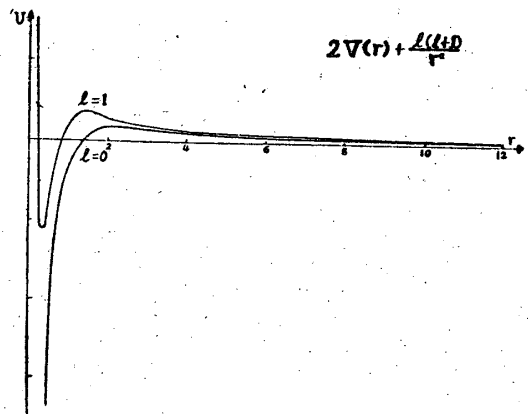
現状の精度のもとに於て、簡単な微分方程式を解いた場合の誤差の程度及びその推定は大體前報告<sup>(1)</sup>により明らかにされたが、尙獨立變數の變域が十分長くなり、何度も解をつなぐ必要のある場合、變數や係數其他方程式に含まれる函數が複雑な變化をする場合等を含む問題に對して、實際に D. A. を應用した場合にどの様な結果が得られるかを見るために、一つの試みとして Schrödinger 型の方程式を解いて見た。

偶々筆者等の一人が 0-イオン場に於ける自由電子の波動函數の計算を必要としたので、その Schrödinger 方程式の解を得るため、D. A. を應用して大體満足な結果が得られたので、その解法並びに數値計算との比較を行ふのが本報告の目的である。

問題とする微分方程式は、動徑を  $r$  とし Schrödinger 方程式の解の動徑部分の  $r$  倍を  $y$  とすれば、

$$d^2y/dr^2 + (k^2 - 2V(r) - l(l+1)/r^2)y = 0 \quad (1)$$

で表はされる。但  $k^2 = 2E$  で、 $E$  は自由電子のエネルギー、 $V(r)$  は 0-イオンの Hartree-field<sup>(2)</sup> で、 $l$  は自由電子の角運動量を表はす (以上單位は總て原子單位をとるものとする)。 $2V(r) + l(l+1)/r^2$  は第 1



第 1 圖  $r$ -scale に於ける  $2V(r) + l(l+1)/r^2 = U$

圖に示される様な函数である。解は  $l=0$  及び  $l=1$  についてそれぞれ  $l^2=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  について行つた。この際  $E$  は正であるから連続的固有値を取り得る。

2. 解 法

(1) 式に於て  $U=k^2-2V(r)-l(l+1)/r^2$  と置けば  $U$  は  $r=0$  に於て無限大となり、此の曲線を input table の上に書くことは不可能である。この  $U$  の原點に於ける無限大を避けるため、獨立變數を  $r$  から  $\rho$  に移し次の様な變換<sup>(3)</sup>

$$\rho = \log cr \quad (\text{但 } c \text{ は常數を表はす}) \quad (2)$$

を行へば (1) は

$$d^2y/d\rho^2 - dy/d\rho + \{r^2(k^2 - 2V(r)) - l(l+1)\}y = 0 \quad (3)$$

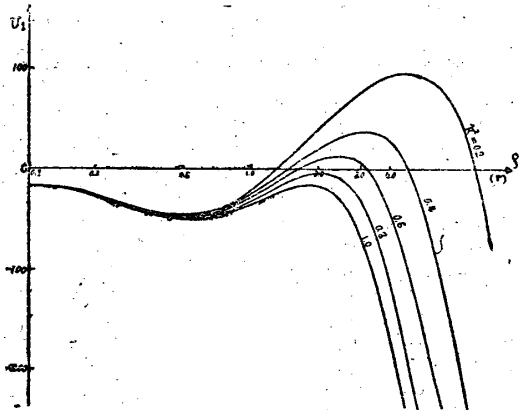
となり、 $r=0$  の十分近傍では  $\rho \rightarrow -\infty$  となり、何れにしても  $r=0$  を D. A. に入れることは不可能であるが、然し係數は原點に於て有限となり、更に有利なことは  $r=0$  の近傍が  $\rho$ -scale に於ては長く擴大されて曲線の傾斜は緩やかになり變換前より遙かに曲線を入れることが容易となる。(3) 式を更に簡単にするために次の變換

$$z = yr^{-1/2} \quad (4)$$

を行へば一階微分の項は消失して

$$d^2z/d\rho^2 + \{r^2(k^2 - 2V(r)) - (l+1/2)^2\}z = 0 \quad (5)$$

となり、標準形に直すことが出来る。(5) 式に於て  $U_1 = -\{r^2(k^2 - 2V(r)) - (l+1/2)^2\}$  と置けば  $U_1$  の曲線は第2圖の如くなり  $k^2$  をパラメーターとして書い



第2圖  $\rho$ -scale に於ける  $-\{r^2(k^2 - 2V(r)) - (l+1/2)^2\} = U_1$

て置けばよく  $l$  の變化に對しては原點をずらすだけで済むから便利である。 $r$  が增大すると  $U_1$  は大きな値を取り (5) 式の方法では D. A. により解くことは困

難となり、再び (1) 式の方法に歸つて  $(y, r)$ -scale に於て解いた。(1) 式の方法によれば  $U$  は  $l=0, l=1$  との2本の曲線を書いて置けば済み  $k^2$  の變化に對しては原點をずらすだけで済む。何れの場合の解も  $r=0$ 、より  $r=1$  迄は級數により解を求めた。0.1 より  $(z, \rho)$ -scale にて D. A. により解を求め、次に適當な所より  $(y, r)$ -scale に移り解を求めた。それ等の接續の様子及び倍率を第1表に示す。これによつて接

第 1 表

$k^2$	$r$	scale	$z_{\max}$ or $y_{\max}$	$m_y$
l=0	0.2	$z, \rho$	0.136	1500
		$y, r$	-4.96	150
	0.4	$z, \rho$	0.136	1500
		$y, r$	-0.282	750
	0.6	$z, \rho$	0.135	1500
		$y, r$	0.0556	1500
	0.8	$z, \rho$	0.135	1500
		$y, r$	0.096	1000
	1.0	$z, \rho$	0.135	1500
		$y, r$	0.112	1000
l=1	0.2	$z, \rho$	0.109	2000
		$z, \rho$	0.334	500
		$z, \rho$	2.56	50
		$z, \rho$	32.96	10
	0.4	$z, \rho$	0.106	2000
		$z, \rho$	0.202	2000
		$z, \rho$	1.54	200
		$z, \rho$	3.65	100
	0.6	$z, \rho$	0.127	2000
		$z, \rho$	0.871	400
		$z, \rho$	1.03	200
	0.8	$z, \rho$	0.149	2000
$y, r$		0.429	200	
1.0	$z, \rho$	0.120	2000	
	$y, r$	0.205	200	

續した位置及び  $z_{\max}$ 、或は  $y_{\max}$  と  $m_y$  の積は大體一定で、このことから倍率の選び方が了解されると思ふ。

3. D. A. の結線

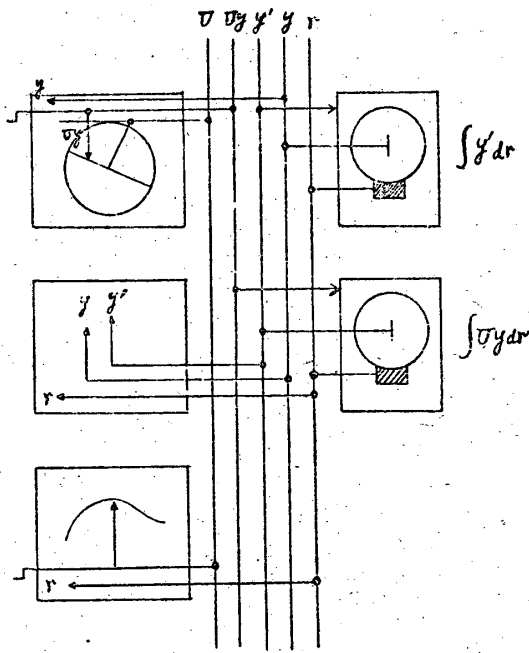
(1) 式及び (5) 式は何れも同一の形式であるから結線の方法は兩者全く同一である。尙倍率、ギヤ比其他の常數は前報告<sup>(1)</sup>の第3節に於て記したと同じ様な要領によつて行つたから、此處にはその詳細については省略する。(1) 式を形式的に積分すれば

$$y = -\iint U y dr dr \quad (6)$$

となる。依てこの結線圖は第3圖の如くなる。この方法が最も直接的であり最初はこの方法により解を求めた。唯前報告<sup>(1)</sup>の第3節 (5) 式に相當する式として機械の諸常數の間に成立すべき式は

$$a_1 b_1 a_2 b_2 e g m_{F_1} m_x^2 / 32 \cdot 180 d_1 \cdot f \cdot 4 \alpha^2 = 1 \quad (7)$$

となることだけ記して置く。第2表、第3表からわかる通り  $l=1$  の場合  $r$  が小さい間解は指數函数的に増大する形であり、 $l=0$  の場合は前者程増大しないと言ふ解の特性により、 $l=1$  の場合は相對誤差は小さ

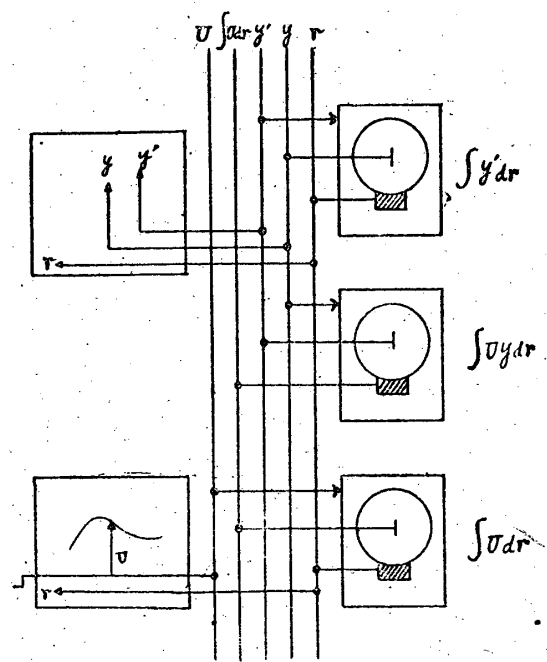


第3圖  $y = -\iint U y d r d r$  の結線圖

くなり十分な精度が得られた。然し  $l=0$  の場合は  $r$  の小さい所での誤差が微妙に利いて、十分な精度が得られなかつた。この爲に更に各部分の精度の Test を行い、結局掛算機による誤差が著しく利くことがわかり、更に精度を向上させるため、掛算機を用ひない方法をとつた。即ち (6) 式を變形して

$$y = -\int d r \int y d r \{U d r\} \quad (8)$$

として結線を行へば、第4圖の如くなる。これによつて操作を著しく簡單化することが出来、精度が著しく向上した。この場合前記の (7) 式に相當する式として



第4圖  $y = -\int d r \int y d r \{U d r\}$  の結線圖

$$a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 m_F m_x^2 / 32^3 \cdot 2 d_1 \cdot 4 \alpha^2 = 1 \quad (9)$$

となる。

#### 4. 結果

得られた解は第2表及び第3表に示される。こゝに  $y_{mech}$  は D. A. による解を示し、 $y_{calc}$  は Störmer-Levy 法による數値解を示す。%の項は  $y_{mech} - y_{calc}$  が  $y_{mech}$  の最大値に對する百分比を示す。之等の表に與へられる數値は勿論 D. A. による解の直接の讀取りでなく、實際にはこれらに或る倍率とか、變數變換された數値が解の曲線の座標として讀まれた。D. A.

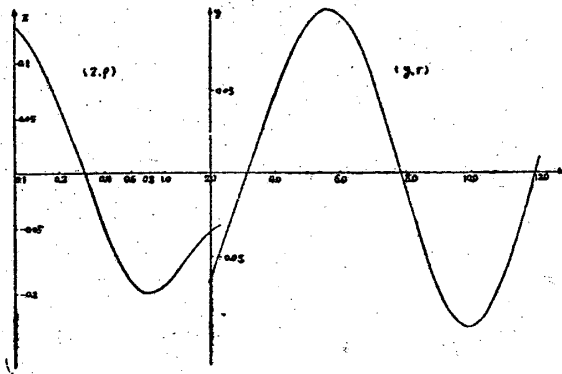
第2表  $l=0$  に對する解

r	0.2			0.4			0.6			0.8			1.0		
	$y_{mech}$	$y_{calc}$	%	$y_{mech}$	$y_{calc}$	%	$y_{mech}$	$y_{calc}$	%	$y_{mech}$	$y_{calc}$	%	$y_{mech}$	$y_{calc}$	%
0.1	0.0428	0.0428	0.	0.0428	0.0428	0.	0.0428	0.0428	0.	0.0428	0.0428	0.	0.0428	0.0428	0.
0.2	0.0287	0.0283	0.	0.0280	0.0282	0.	0.0285	0.0281	0.4	0.0283	0.0280	0.3	0.0277	0.0277	0.
0.4	-0.0323	-0.0323	0.	-0.0323	-0.0325	0.	-0.0330	-0.0327	0.3	-0.0329	-0.0329	0.	-0.0329	-0.0331	0.2
0.6	-0.0770	-0.0758	0.	-0.0770	-0.0767	-0.1	-0.0767	-0.0767	0.	-0.0767	-0.0780	1.3	-0.0767	-0.0766	0.1
0.8	-0.0977	-0.0996	0.	-0.0972	-0.0987	-0.2	-0.0974	-0.0978	-0.4	-0.0973	-0.0967	-0.4	-0.0968	-0.0960	-0.8
1.0	-0.1108	-0.1090	0.	-0.1070	-0.1066	-0.1	-0.1040	-0.1042	-0.2	-0.1020	-0.1018	-0.2	-0.1010	-0.0995	-1.5
1.2	-0.1148	-0.1121	-0.1	-0.1075	-0.1076	0.	-0.1025	-0.1030	0.5	-0.1000	-0.0984	-1.6	-0.0960	-0.0940	-2.0
1.4	-0.1166	-0.1132	-0.1	-0.1060	-0.1058	0.	-0.0977	-0.0982	0.5	-0.0933	-0.0909	-2.4	-0.0863	-0.0838	-2.8
1.6	-0.1181	-0.1145	-0.1	-0.1038	-0.1033	-0.2	-0.0917	-0.0921	0.4	-0.0847	-0.0814	-3.3	-0.0735	-0.0711	-2.4
1.8	-0.1221	-0.1172	-0.1	-0.1020	-0.1013	-0.2	-0.0850	-0.0856	0.6	-0.0726	-0.0709	-1.7	-0.0578	-0.0570	-2.8
2.0	-0.1270	-0.1221	-0.1	-0.1008	-0.1003	-0.2	-0.0985	-0.0993	0.8	-0.0625	-0.0600	-2.5	-0.0452	-0.0420	-3.2
3.0	-0.1930	-0.1857	-0.2	-0.1130	-0.1130	0.	-0.0495	-0.0516	2.0	-0.0050	-0.0024	-2.6	0.0304	0.0363	-5.7
4.0	-0.3393	-0.3277	-0.2	-0.1495	-0.1501	0.2	-0.0204	-0.0253	1.8	0.0507	0.0543	-3.6	0.0948	0.0977	-2.7
5.0	-0.5646	-0.5652	0.	-0.1982	-0.2008	0.5	0.0073	0.0050	2.2	0.0705	0.0939	-3.4	0.1120	0.1147	-2.9
6.0	-0.9480	-0.9140	-0.5	-0.2482	-0.2523	1.4	0.0348	0.0306	4.0	0.0760	0.0769	-0.9	0.0658	0.0633	2.5
7.0	-1.4320	-1.3835	-1.0	-0.2910	-0.2877	2.2	0.0530	0.0499	3.0	0.0580	0.0566	1.2	-0.0210	-0.0265	-5.5
8.0	-2.0130	-1.9701	-0.7	-0.2820	-0.2706	2.8	0.0556	0.0539	1.6	0.0085	0.0111	2.6	-0.0993	-0.0979	3.6
9.0	-2.7150	-2.6537	-1.2	-0.2420	-0.2508	2.9	0.0378	0.0376	-1.7	-0.0699	-0.0726	2.7	-0.1007	-0.1002	-0.5
10.0	-3.4640	-3.3948	-1.4	-0.1575	-0.1670	2.6	0.0073	0.0107	-3.5	-0.0930	-0.0940	1.0	-0.0347	-0.0277	-5.0
11.0	-4.2300	-4.1351	-1.9	-0.0477	-0.0514	1.2	-0.0260	-0.0219	-3.9	-0.0643	-0.0618	-2.5	0.0578	0.0620	-4.2
12.0	-4.9600	-4.7994	-3.2	0.0746	0.0752	-0.2	-0.0472	-0.0468	-3.3	0.0033	-0.0065	-3.2	0.1060	0.1062	-0.2

第3表  $l=1$  に対する解

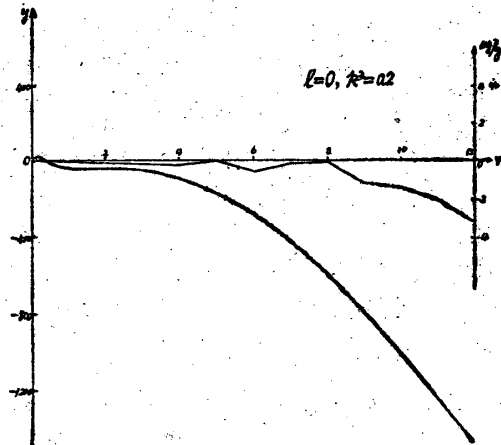
$r$	0.2			0.4			0.6			0.8			1.0		
	$y_{mesh}$	$y_{calc}$	%	$y_{mesh}$	$y_{calc}$	%	$y_{mesh}$	$y_{calc}$	%	$y_{mesh}$	$y_{calc}$	%	$y_{mesh}$	$y_{calc}$	%
0.1	0.0069	0.0069	0.	0.0069	0.0069	0.	0.0069	0.0069	0.	0.0069	0.0069	0.	0.0069	0.0069	0.
0.2	0.0199	0.0206	0.	0.0197	0.0200	0.	0.0196	0.0199	0.	0.0196	0.0199	-0.1	0.0198	0.0199	0.
0.4	0.0460	0.0458	0.	0.0456	0.0457	0.	0.0451	0.0455	0.	0.0452	0.0453	0.	0.0449	0.0451	0.
0.6	0.0655	0.0649	0.	0.0650	0.0643	0.	0.0637	0.0636	0.	0.0632	0.0629	0.	0.0623	0.0622	0.
0.8	0.0800	0.0794	0.	0.0790	0.0780	0.	0.0767	0.0763	0.	0.0757	0.0746	-0.3	0.0730	0.0730	0.
1.0	0.0936	0.0932	0.	0.0921	0.0902	0.1	0.0876	0.0870	0.1	0.0846	0.0838	0.2	0.0807	0.0807	0.
1.2	0.1085	0.1091	0.	0.1060	0.1037	0.1	0.0990	0.0983	0.1	0.0936	0.0929	0.2	0.0873	0.0877	-0.2
1.4	0.1285	0.1292	0.	0.1231	0.1204	0.1	0.1130	0.1117	0.1	0.1040	0.1032	0.2	0.0944	0.0952	-0.4
1.6	0.1537	0.1548	0.	0.1490	0.1413	0.1	0.1270	0.1282	-0.1	0.1164	0.1156	0.2	0.1020	0.1037	-0.8
1.8	0.1880	0.1872	0.	0.1720	0.1673	0.1	0.1492	0.1482	0.1	0.1315	0.1302	0.4	0.1110	0.1134	-1.1
2.0	0.2290	0.2275	0.	0.2020	0.1989	0.1	0.1740	0.1720	0.2	0.1490	0.1471	0.4	0.1203	0.1243	-1.9
3.0	0.5220	0.5154	0.	0.4830	0.4886	-0.2	0.3528	0.3505	0.2	0.2590	0.2596	-0.1	0.1765	0.1845	-3.7
4.0	1.3200	1.3196	0.	0.9060	0.9157	-0.3	0.6084	0.6080	0.	0.3790	0.3793	-0.1	0.2048	0.2150	-4.4
5.0	2.5600	2.6021	-0.1	1.5400	1.5640	-0.7	0.8709	0.8713	0.	0.4290	0.4299	-0.2	0.1605	0.1670	-3.0
6.0	4.4800	4.6049	-0.4	2.2500	2.3280	-2.1	1.0300	1.0285	0.2	0.3520	0.3477	1.0	0.0340	0.0377	-1.9
7.0	7.1800	7.4687	-0.5	2.9750	3.0604	-2.3	0.9722	0.9732	-0.1	0.1315	0.1296	1.0	-0.1170	-0.1116	-2.5
8.0	11.2000	11.2690	-0.2	3.5500	3.5678	-0.5	0.6532	0.6606	-0.7	-0.1475	-0.1452	-1.0	-0.1950	-0.1889	-2.8
9.0	15.4500	15.9740	-1.5	3.6500	3.6565	-0.2	0.1455	0.1462	-0.1	-0.3535	-0.3462	-2.0	-0.1400	-0.1384	-0.7
10.0	20.5800	21.4160	-2.5	3.2726	3.1956	0.2	-0.4142	-0.4154	-0.1	-0.3760	-0.3642	-3.0	0.0095	0.0099	-0.9
11.0	26.5000	27.276	-2.3	2.3216	2.1725	4.0				-0.1890	-0.1813	-2.0	0.1550	0.1500	2.3
12.0	32.9500	33.0800	0.4	0.9000	0.7235	4.7				0.1025	0.1047	-1.0	0.1900	0.1995	5.8

上で實際得られた解の様子及び接續の様子は第5圖によりわかる百分比は何れの解も大約5%以内に収まつて居る。然しこの百分比は實際の D. A. の精度を示すものではない。何んとなれば精度は實際の解の讀み

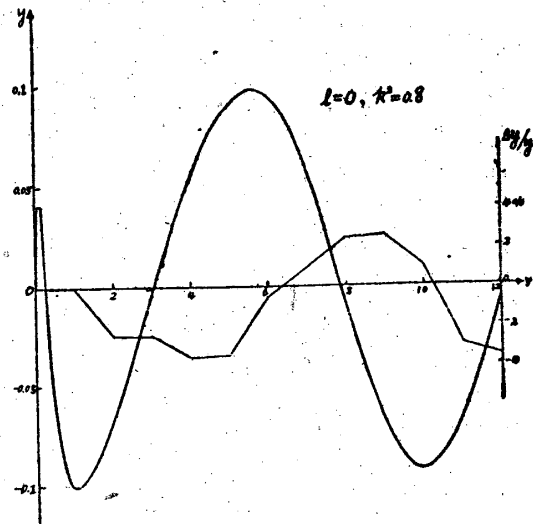


第 5 圖

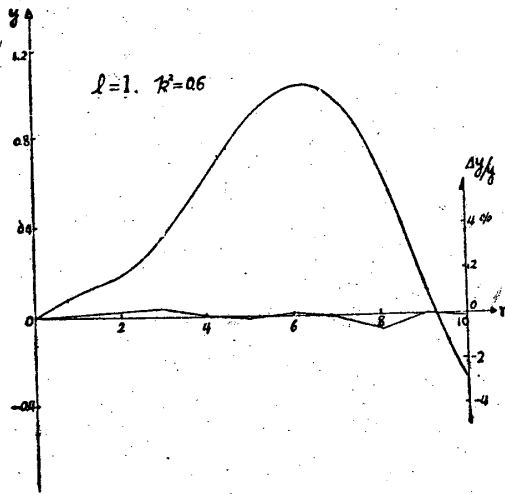
$Y$  に於ける百分比とすべきであり、第5圖の一例を見ればわかる通り  $(y, r)$ -scale の部分では  $y$  と  $Y$  とは比例するから問題はないが、 $(z, \rho)$ -scale の部分では  $y$  と  $Y$  とは比例せずこの scale を用ひた  $r=0\sim 1.0$  の範圍では  $y=Zr^{1/2}$  なる關係により  $y$  の絶對値は  $Z$  の絶對値より小さくなる。實際  $Z$  の最大値がこの範圍にあるため、 $y$  に變換すると著しく縮少され、従て百分比は増加する傾向にある。第6圖より第9圖までに一例として D. A. による解及び數値解との差を%で示した。



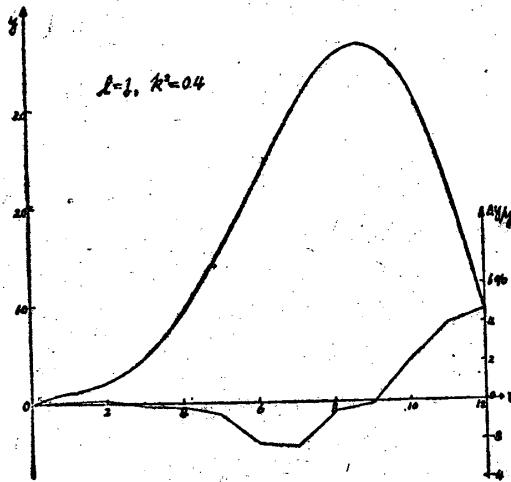
第 6 圖



第 7 圖



第 8 圖



第 9 圖

## 5. む す び

以上解法並びに數値解との比較を簡單に示した。D. A. の機構上の複雑さから誤差の原因をつきとめることは非常に面倒である。各々の解については check のために數回解を書かせた。數値計算も  $(y, r)$ -scale 及び  $(z, \rho)$ -scale で試みてその差は問題とならなかつた。D. A. と數値計算の差は at random と言ふよりは寧ろ systematic であると言ふことが數回書かせた解から知られた。然しこの差は前報告<sup>(1)</sup>の誤差の評価から大體許し得る範囲にあることがわかつた。以上行つた解は何れもガタの補正が行はれて居ない。これを行へば更に誤差は減少されるものと思はれる。

尙 D. A. により解を求める場合には、數値計算の場合と異つて各變數の大きさに限度が存在するといふことである。この爲に上述した様な適當な變換を行ふ scale の倍率を變へて適當な所で解をつなぐかするより外はない。

最後に種々御指示を頂いた山内教授に御禮申し上げます。

## 文 獻

- (1) 渡邊, 三井田: 理工研報告 3 (1949), 65
- (2) Hartee, Hartree and Swirlres: Phil. Trans. A, 238 (1939) 229,
- (3) D. R. Hartree: Phys. Rev. 47 (1934) 738.

## 軸調整不良の共軸球面光學系の収差 (第2報)

木内政藏・三宅和夫

(1949年2月28日受理)

### 1. 第2報序

前報告<sup>(1)</sup>に引續いて先づ歪み収差の検討を行ふ。次に前報告で與へた理論式に現はれる各係數の表現を變化し、簡単にその意味が知られる様な形にし、又個々の球面の偏心が獨立に及ぼす影響が直接に知られる様にする。最後に有效絞りの位置が任意の球面間にある場合のために變數  $\eta_1, \zeta_1$  を變換する。

前報告發表後荒, 久保田兩氏の同じ問題に関する研

究結果が發表された<sup>(2)</sup>。兩氏の得られた理論式は吾々の前報告のものと同様な二重和を含むものである。

本報告では式番號を新にし、前報告の式を引用する場合にはその式番號の前に I をつけることにする。

### 2. 歪 み

前報告通り入射瞳が有効絞りであるとし、その中心を通る光線 ( $\eta_1 = \zeta_1 = 0$ ) だけを考へて結像を論ずる。一般式 (I, 12) は