と表はされると假定すると (16) 及び (17) に依つて

$$u_1=A(3a^2)^{1/3}\cdot\xi^{1/3} \qquad (20)$$

と表はされる。從つて (20) なる條件のもとに二次元の層流境界層の方程式を解けばよい事になる。

此の解は旣に Falkner, Skan によつて取扱はれ[3], Hartree に依つてその數値が完成されてゐる[4]。即ち

$$\Psi=\sqrt{3/2\cdot u_1\nu\xi}\,F(\zeta),\quad \zeta=\sqrt{2u_1/(3\nu\xi)}\,\eta \qquad (21)$$

と置くと F の滿足する微分方程式は

$$F'''+FF''=1/2(F'^2-1) \qquad (22)$$

にして且つ $u=u_1F'$, $\zeta=\sqrt{2A/\nu}\,y$ である。

(22) の微分方程式は變數が常數倍であるといふ差を無視すれば Homann に依つて得られた岐點附近の境界層に對する微分方程式と全く同じものである。

即ち本論文に於いて示された變換は岐點に於いても有效である事が明にされた事になる。

4. 層流剝離點の計算

谷教授は二次元層流境界層の剝離點を求めるには

$$\sigma=\frac{0.44}{u_1^6}\frac{du_1}{dx}\int_0^x u_1^5dx \qquad (23)$$

が -0.084 に達する位置を見出せばよいといふ事を示されたが[5], これに前節の變換を施せば三次元軸對稱層流境界層の剝離點は

$$\sigma=\frac{0.44}{r_0^2u_1^6}\frac{du_1}{dx}\int_0^x u_1^5d_0^2dx \qquad (24)$$

が -0.084 に達する位置を見出せばよい事になる。壓縮性流體の場合には (24) の式を直ちに適用する事は出來ないが同樣の計算を行ふ事は可能である[6]。

5. 結　　語

以上により三次元軸對稱層流境界層も二次元の場合と全く同樣に取扱ひ得る事が明にされたが, 更にこの變換による具體的な應用については引續いて發表する豫定である。

文　　獻

(1) Goldstein: Modern Development in Fluid Dynamics Vol. 1 (1938), 128.
(2) Homann: Z. a. M. M. 16 (1936), 153.
(3) Falkner, Skan: R & M, 1314 (1930), 1.
(4) Hartree: Proc. Camb. Phil. Soc. 33 (1937), 223.
(5) 谷一郎: 航研彙報 199 (1941).
(6) 谷一郎: 航研報告 251 (1943), 322 (1944)

加壓された圓筒殼の振動

吉 村 慶 丸・植 村 益 次

(1949 年 4 月 13 日受理)

1. 緒　　言

一般に彈性體の振動が初期應力の影響を受け, 特に薄肉の物體に於いては其の大さによつては遂に挫屈を起すに至ることは周知の事柄である。このことは挫屈問題の解法に利用されるばかりでなく, 振動の問題としても初期應力の影響の影視出來ないことを示すものである。

本文ではこの樣な問題の一つの簡單な場合として, 兩端の閉ぢた圓筒殼が一樣な外壓又は內壓を受けた場合の振動を筆者の一人[1] が前に導いた有限變位の理論を用いて取扱つた。この樣な簡單な初期應力の場合に對する振動の基礎方程式は直觀的な方法によつて求めることが出來るにも拘らず基礎的な誘導を試みたのは, 初期應力問題の更に一般的な場合に對する考慮からである。尙初期應力のない殼の振動は Love[2], Rayleigh[3] 等によつて解かれているが, 初期應力の存在する場合は, 軸壓縮力を受ける圓筒殼の軸對稱振動に對する Federhofer[4] の論文が唯一のもの ゝ樣である。

2. 外壓(內壓)を受ける薄肉圓筒殼の振動方程式

圓筒殼上に原點をもち, 軸方向, 周方向, 中心に向う半徑方向に夫々 x, y, z 軸を有する直交座標系を考え, 變位の x, y, z 成分を夫々 u, v, w で表わす。そうすると圓筒殼の有限變形に對する振動方程式は次の樣になる。

$$\frac{\partial}{\partial x}[T_1(1+e_2)]+\frac{\partial}{\partial y}[T_{21}(1+e_1)]+T_{21}\frac{\partial e_1}{\partial y}$$
$$-T_2\left(\frac{\partial e_2}{\partial x}-\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\right)-T_{13}\cdot L-$$
$$-\frac{T_{23}}{a}(M-e_{12})-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (1\cdot a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[T_2(1+e_1)]+\frac{\partial}{\partial x}[T_{12}(1+e_2)]+T_{12}\frac{\partial e_2}{\partial x}$$
$$-T_1\left(\frac{\partial e_1}{\partial y}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\right)-T_{13}\cdot\frac{M}{a}$$
$$-T_{23}(1+e_1-e_2)\frac{N}{a^2}-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \qquad (1\cdot b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[T_{13}(1+e_2)]+\frac{\partial}{\partial y}[T_{23}(1+e_1)]$$
$$+T_1\cdot L+T_2(1+e_1-e_2)\frac{N}{a^2}$$
$$+(T_{12}+T_{21})\frac{M}{a^2}+p(1+e_1+e_2)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1\cdot c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[H_1(1+e_2)]+\frac{\partial}{\partial y}[G_2(1+e_1)]+G_1\frac{\partial e_1}{\partial y}$$
$$-H_2\left(\frac{\partial e_2}{\partial x}-\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\right)+T_{13}\cdot e_{12}$$
$$+T_{23}(1+e_1+e_2)=0 \qquad (1\cdot d)$$

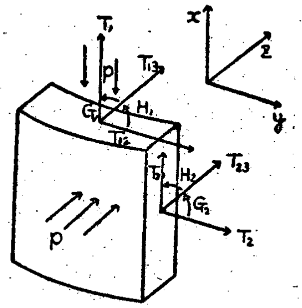
$$\frac{\partial}{\partial y}[H_2(1+e_1)]+\frac{\partial}{\partial x}[G_1(1+e_2)]+G_2\frac{\partial e_2}{\partial x}$$
$$-H_1\left(\frac{\partial e_1}{\partial y}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\right)-T_{13}(1+e_1+e_2)$$
$$-T_{23}e_{12}=0 \qquad (1\cdot e)$$

$$H_1\cdot L+H_2(1+e_1-e_2)\frac{N}{a^2}+(G_1+G_2)\frac{M}{a}$$
$$-(T_{12}-T_{21})(1+e_1+e_2)=0 \qquad (1\cdot f)$$

(1·a)～(1·c) は力の釣合，(1·d)～(1·f) はモーメントの釣合を表わす。こゝに

- a: 圓筒の半徑
- ρ: 初期狀態における單位面積當りの質量
- p: 考うる狀態における單位面積當りの壓力 (外壓を正とする)
- e_1, e_{12}, e_2: 中性面の歪
- $L, M/a, N/a^2$: 變形後の中性面の曲率

なほ $T_1, T_2, T_{12}, T_{21}, T_{13}, T_{23}$; G_1, G_2, H_1, H_2 は第1圖に示す樣に斷面力並びに斷面モーメントであるがこの場合は特に變形した狀態に關して考えている。即ちその大さは變形後における單位長さの斷面に關するものであり，それ等の成分の方向は殼の變形と一緒に變形する x, y, z 軸の方向である。



第 1 圖

初期狀態においては歪が 0 であり，初期應力 T_1^0,・・・・が存在すると考えれば，變形狀態における應力は $T_1=T_1^0+T_1'$,・・・・によつて表わすことが出來る。但し T_1',・・・は振動によつて生ずる附加應力である。實際の歪は T_1',・・・によつて生ずると考えられ，それを e_1', e_{12}', e_2',・・・・で表わし，(1) に於いて T_1',・・・・及びその微係數と e_1',・・・・及びその微係數との積を省略し，それ等の一次の項のみを取れば，T_1^0,・・・・は通常の線型の平衡方程式を滿足することを考慮して次の方程式を得る。

$$\frac{\partial T_1'}{\partial x}+\frac{\partial T_{21}'}{\partial y}+T_1^0\frac{\partial e_2'}{\partial x}-T_2^0\left(\frac{\partial e_2'}{\partial x}-\frac{\partial e_{12}'}{\partial y}\right)$$
$$-\rho\frac{\partial^2 u'}{\partial t_2}=0 \qquad (2\cdot a)$$

$$\frac{\partial T_2'}{\partial y}+\frac{\partial T_{12}'}{\partial x}+T_2^0\frac{\partial e_1'}{\partial y}-T_1^0\left(\frac{\partial e_1'}{\partial y}-\frac{\partial e_{12}'}{\partial x}\right)$$
$$-\frac{T_{23}'}{a}-\rho\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}=0 \qquad (2\ b)$$

$$\frac{\partial T_{13}'}{\partial x}+\frac{\partial T_{23}'}{\partial y}+T_1^0L'+\frac{T_2'}{a}$$
$$+\frac{T_2^0}{a^2}[N'+a(e_1'-e_2')]$$
$$+p(e_1'+e_2')-\rho\partial^2 w'/\partial t^2=0 \qquad (2\ c)$$

$$\frac{\partial H_1'}{\partial x}+\frac{\partial G_2'}{\partial y}+T_{23}'=0 \qquad (2\cdot d)$$

$$\frac{\partial G_1'}{\partial x}+\frac{\partial H_2'}{\partial y}-T_{13}'=0 \qquad (2\cdot e)$$

$$H_2'+a(T_{12}'-T_{21}')=0 \qquad (2\cdot f)$$

兩端の閉ぢた圓筒殼に外壓が作用する場合を考えれば初期應力は

$$T_1^0=-pa/2, \quad T_2^0=-pa \qquad (3)$$

によつて與えられる。(2) に於ける變數はすべて "1" の符號を有するから，以下においてはそれを取去り，T_1',・・・, G_1',・・・・, e_1',・・・・の代りに T_1, ・・・, G_1,・・, e_1,・・・・で表わすことにすると，Hooke の法則の假定の下に

$$T_1=[Et/(1-\nu^2)](e_1+\nu e_2)$$
$$T_2=[Et/(1-\nu^2)](e_2+\nu e_1)$$

$$\left.\begin{aligned} T_{12}&=[2Et/(1+\nu)]e_{12}+H_1/(2a)\\ T_{21}&=[2Et/(1+\nu)]e_{12}-H_1/(2a)\\ G_1&=-B(\kappa_1+\nu\kappa_2)\\ G_2&=+B(\kappa_2+\nu\kappa_1)\\ H_1&=-H_2=B(1-\nu)\kappa_{12}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

但し　$B=Et^3/[12(1-\nu^2)]$

$$\left.\begin{aligned} e_1&=u_x\\ e_{12}&=v_x+u_y\\ e_2&=v_y-w/a\\ \kappa_1&=w_{xx}\\ \kappa_{12}&=w_{xy}+(v_x-u_y)/(2a)\\ \kappa_2&=w_{yy}+w/a^2\\ L&=w_{xx}\\ M&=aw_{xy}+v_x\\ N&=a^2w_{yy}-w+2av_y\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

(5) における $\kappa_1,\cdots$ は通常用いられる式と異るが，それは曲率變化を求めるに當つて殼の中性面の伸縮の影響を考慮したからである。(2·f) は (4), (5) 兩式によつて滿足されて居り，(2·d), (2·e) 兩式から夫々 T_{23}, T_{13} が求められるので，結局次の u, v, w に關する三式が得られる。

$$(6B/t^2)[2\{u_{xx}+\nu(u_{xy}-w_x/a)\}+(1-\nu)\{u_{yy}+v_{xy}+(\alpha/2)(u_{yy}-v_{xy}-2aw_{xyy})\}]-(pa/2)(2u_{yy}+v_{xy}+w_x/a)-\rho\partial^2u/\partial t^2=0 \qquad (6\cdot a)$$

$$(6B/t^2)[2(\nu u_{xy}+v_{yy}-w_y/a)+(1-\nu)\{u_{xy}+v_{xx}-(3\alpha/2)(u_{xy}-v_{xx}-2aw_{xxy})\}+2\alpha(aw_{yyy}+w_y/a+a\nu w_{xxy})]-(pa/2)(2u_{xy}+v_{xx})-\rho\partial^2v/\partial t^2=0 \qquad (6\cdot b)$$

$$B[w_{xxxx}+2w_{xxyy}+w_{yyyy}+(1/a^2)(w_{yy}+\nu w_{xx})-((1-\nu)/a)(u_{xyy}-v_{xxy})-(1/(a^4\alpha))(a\nu u_x+av_y-w)]+(pa/2)(w_{xx}+2w_{yy}+2w/a^2)+\rho\partial^2w/\partial t^2=0 \qquad (6\cdot c)$$

但し　$\alpha=t^2/(12a^2)$

3. 振動に對する外壓(內壓)の影響

一般の振動は (6) によつて與えられるが，振動に對する外壓又は內壓の影響の大略の傾向を知るためには (6) を解くよりむしろ代表的な振動樣式について考えた方が簡單である。

(i) 變立 u, v, w が y に無關係の場合 ($\partial/\partial y=0$)。圓周方向には波形を生じないで，斷面が圓形を保ちつゝ振動する場合である。

$$(u,\ v,\ w)=(u_1,\ v_1,\ w_1)\cos(qt+\varepsilon) \qquad (7)$$

と置き (6) に代入すれば

$$\frac{12B}{t^2}\left(\frac{d^2u_1}{dx^2}-\frac{\nu}{a}\frac{dw_1}{dx}\right)-\frac{p}{2}\frac{dw_1}{dx}+\rho q^2u_1=0 \qquad (8\cdot a)$$

$$\frac{6(1-\nu)}{t^2}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\frac{d^2v_1}{dx^2}-\frac{pa}{2}\frac{d^2v_1}{dx^2}+\rho q^2v_1=0 \qquad (8\cdot b)$$

$$B\left\{\frac{d^4w_1}{dx^4}+\frac{\nu}{a^2}\frac{d^2w_1}{dx^2}-\frac{1}{a^4\alpha}\left(a\nu\frac{du_1}{dx}-w_1\right)\right\}+\frac{pa}{2}\left(\frac{d^2w_1}{dx^2}+2\frac{w_1}{a^2}\right)-\rho q^2w_1=0 \qquad (8\cdot c)$$

が得られる。境界條件としては，圓筒 (長さを $2l$ とする) の兩端 $x=\pm l$ に於いて $T_1=T_{12}=0$ 卽ち

$$\frac{du_1}{dx}-\nu\frac{w_1}{a}=0,\quad \frac{dv_1}{dx}=0 \qquad (9)$$

が成立つと考えてよい。(8) を見れば明かに振り振動と屈曲振動が分離されて居り，從つてその各々について考えればよい。

(a) 振り振動 ($u_1=w_1=0$)

v のみの振動となり，(8·b), (9) を滿足する解として

$$v_1=V\cos(m\pi/l)x \qquad (10)$$

を假定すれば

$$q^2=\frac{m^2\pi^2}{2\rho l^2}\cdot\frac{Et}{1+\nu}\left\{\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)-\frac{\phi}{1-\nu}\right\} \qquad (11)$$

但し　$\phi=pa(1-\nu^2)/(Et)$

壓力 p の影響は量的には E, a/t の値により，極めて薄肉の膜に近いと考えられる樣な場合にはその振動數に及ぼす影響は無視出來ないが，通常の壓力容器の場合等には無視し得るものである。

而して外壓なら振動數を減じ，內壓なら增加せしめる。振り振動に對してこの樣に外壓が影響をもつことは理解し難く思われるが，このことは軸力が棒の振り剛性に影響を及ぼすと Biot が指摘していることゝ類似して居り，振れ角が軸方向に變化することによつて圓周方向に壓力の成分を生ずるためである。

(11) における α の項は振りモーメントや剪斷力 T_{13}, T_{23} より生じたもので一般に薄肉圓筒の伸張變形を伴う振動に對しては當然省略し得るものである (振り振動の場合にもそうである)。尙 (11) において α, ϕ を 0 とおけば Love の結果と一致する。

(b) 軸方向屈曲振動 ($v_1=0$)

この場合には u, w の連成振動であり (8·a), (8·b) 及び (9) を滿足する解として

$$u_1 = U \cos \frac{m\pi}{2l}(x+l), \quad w_1 = W \cos \frac{m\pi}{2l}(x+l) \tag{12}$$

を假定すれば，振動數を決定する式は

$$q^4 - \frac{Et}{\rho a^2(1-\nu^2)}\left[(1+\beta^2)+\alpha\beta^2(\beta^2-\nu)-\phi\left(\frac{\beta^2}{2}-1\right)\right]q^2$$
$$+\frac{E^2t^2\beta^2}{\rho^2a^4(1-\nu^2)^2}\left[(1-\nu^2)+\alpha\beta^2(\beta^2-\nu)-\phi\left(\frac{\beta^2}{2}+\frac{\nu}{2}-1\right)\right]=0 \tag{13}$$

但し　$\beta = am\pi/(2l)$

この場合も α の項を無視し得ること，α, ϕ を0とおけば Love による初期應力のない場合の結果と一致することは (a) の場合と同樣である。*

*β が小さい場合（細長い圓筒の低次の振動の場合）には，(13) を近似的に解いて二つの振動數が得られる。即ち

$$q_1^2 \fallingdotseq \frac{Et}{\rho a^2(1-\nu^2)}\left[1+\beta^2\nu^2+\alpha\beta^2(\beta^2-\nu)-\phi\left(\frac{\beta^2}{2}-\frac{\nu}{2}\beta^2-1\right)\right] \tag{14·a}$$

$$q_2^2 \fallingdotseq \frac{Et\beta^2}{\rho a^2(1-\nu^2)}\left(1-\nu^2-\frac{\nu}{2}\phi\right) \tag{14·b}$$

前者は殆んど半徑方向の振動 ($u \fallingdotseq 0$) を示し，後者は殆んど軸方向の振動 ($w \fallingdotseq 0$ で棒の縱振動に相當) を與える。

興味あることは，q_1 に及ぼす壓力の影響が β の値によつて異ることである。即ち β が小さいとして求めた (14·a) では，外壓なら振動數を增し (a) の場合と反對である。これは外壓による軸方向の壓力は振動數を減少せしめようとするが，殼面の伸縮による外壓量の增減を考えるとそれが振動數を增加せしめる效果を持ち，結局に於いて後者の影響が大きいからである。

次に $q^2=0$，即ち無限大周期の考えから挫屈値を求めると，

$$p_{cr} = \frac{2Et}{a(\beta^2-2+\nu)}\left[1+\alpha\beta^2\frac{\beta^2-\nu}{1-\nu^2}\right] \tag{15}$$

となる。德川，鬼頭兩氏[(5)] 及び Timoshenko[(6)]の結果を現在の記號で表わせば

$$p_{cr} = \frac{2Et}{a(\beta^2-2+2\nu)}\left[1+\frac{\alpha\beta^4}{1-\nu^2}\right] \tag{16}$$

であり，この相異は後者の場合は平衡方程式が嚴密でないためと思われる。(15) より β が小なら p_{cr} は負となり內壓によつて挫屈することを意味する。これは軸方向の影響よりもむしろ圓周方向の影響が大きく效くためであろう。併しこの現象が實現されるか否かは實驗結果がないので斷言出來ない。

(ii) 變位 u, v, w が x に無關係の場合 ($\partial/\partial x=0$)點圓周方向に波形を生じ，筒形を保ちつゝ振動する場合である。(i) と同樣に (7) を假定すれば (6) は結局次の三式となる。

$$\frac{6(1-\nu)B}{t^2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{d^2u_1}{dy^2}-pa\frac{d^2u_1}{dy^2}+\rho q^2u_1=0 \tag{17·a}$$

$$\frac{12B}{t^2}\left[\frac{d^2v_1}{dy^2}-\frac{1}{a}\frac{dw_1}{dy}+\alpha\left(a\frac{d^3w_1}{dy^3}+\frac{1}{a}\frac{dw_1}{dy}\right)\right]+\rho q^2v_1=0 \tag{17·b}$$

$$B\left[\frac{d^4w_1}{dy^4}+\frac{1}{a^2}\frac{d^2w_1}{dy^2}-\frac{1}{a^4\alpha}\left(a\frac{dv_1}{dy}-w_1\right)\right]+pa\left(\frac{d^2w_1}{dy^2}+\frac{w_1}{a^2}\right)-\rho q^2w_1=0 \tag{17·c}$$

(a) 周方向屈曲振動 ($u_1=0$)

v, w の連成振動で (17·b, c) を考えればよい。故に

$$v_1 = V\cos(ny/a), \quad w = W\sin(ny/a) \tag{18}$$

を假定することが出來る。これは境界條件を滿足しないが，長い圓筒では兩端の影響が小さいから近似的に成立つと考えてよい。圓振動數は

$$q^4 - \frac{Etq^2}{a^2\rho(1-\nu^2)}[(n^2+1)+n^2(n^2-1)\alpha-(n^2-1)\phi]$$
$$+\frac{E^2t^2n^2(n^2-1)}{a^4\rho^2(1-\nu^2)^2}[(n^2-1)\alpha-\phi]=0 \tag{19}$$

によつて決定される。α, ϕ が 1 に比べて小さいとして近似的に解くと次の二つの q が得られる。

$$q_1^2 \fallingdotseq \frac{Etn^2(n^2-1)}{a^2\rho(n^2+1)(1-\nu^2)}[(n^2-1)\alpha-\phi] \tag{20·a}$$

$$q_2^2 \fallingdotseq \frac{Et(n^2+1)}{a^2\rho(1-\nu^2)} \tag{20·b}$$

q_1 は周方向に波形をもつ橫振動に相應し，q_2 は周方向の縱振動に相應するもので，q_2 は q_1 に比べて極めて大きい。尙 (20·a) に於いて $\nu=0$ とおくと，德

川鬼頭兩氏[5]による圓環の振動に關する結果に一致する。(20・a) に於いては前の場合と異り，α, ϕ の影響が支配的である。即ち一般に不伸張變形の振動に對しては壓力の影響を無視することが出來ないと云うことが出來るであろう。尙 (20・a) の振動においては外壓は振動數を減少せしめ，內壓は增加せしめる。

次に (19) 又は (20・a) に於いて，$q=0$ 又は $q_1=0$、とおけば，挫屈値

$$p_{cr}=\frac{E(n^2-1)}{12(1-\nu^2)}\frac{t^3}{a^3} \tag{21}$$

が得られる。これは一樣な橫方向の外壓力のみを受ける比較的長い圓筒殼の挫屈値と一致する。即ち長い圓筒では，軸方向壓縮力がこの樣な挫屈形に對して影響しないことを示している。又 (21) に於いて $\nu=0$ とおけば，圓環に對する式

$$p_{cr}=\frac{E(n^2-1)t^3}{12a^3} \tag{22}$$

が得られる。

(b) 軸方向剪斷振動 ($v_1=w_1=0$)

この場合は u のみの振動であり，兩端の條件を無視して

$$u_1=U\sin(ny/a) \tag{23}$$

を假定すれば (17・a) より

$$q^2=\frac{n^2Et}{2a^2\rho(1+\nu)}\left[\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{\phi}{2(1-\nu)}\right] \tag{24}$$

を得る。特に α, ϕ を 0 とおけば Rayleigh[3] の結果

$$q^2=n^2T/(a^2\rho') \tag{25}$$

$T=E/[2(1+\nu)]$: Tait の常數，$\rho'=\rho/t$

と一致する。

4. 結　言

外壓又は內壓の作用する兩端の閉ぢた圓筒殼の振動を初期應力の問題として取扱つた。即ち基礎方程式を殼の有限變位に對する平衡方程式から導き，二三の簡單な振動樣式に對して壓力の振動數に及ぼす影響を求めた。尙その結果を挫屈問題に適用し，從來の結果と比較檢討した。結果を要約すれば次の樣になる。

(1) 固有振動數に及ぼす壓力の影響は，定性的には外壓は振動數を減少せしめ，內壓は增加せしめる場合が多いが，この關係は必ずしも常に成立つものではなく，(i) (b) の場合の樣に振動樣式や圓筒寸度によつては內壓が振動數を減少せしめる場合も存在する。

(2) 捩り振動と內壓とは無關係でなく，內壓によつて振動數が增加する。

(3) 曲げ剛性は振動數を增加せしめる場合が多いが (i) (b) の場合の樣に振動樣式や圓筒寸度によつて異ることもある。

(4) 壓力，曲げ剛性が振動數に及ぼす定量的影響は振動樣式及び圓筒寸度によつて異る。即ち (ii) (a) の場合の樣な不伸張變形に對しては其等の影響は決定的であるが，一般の伸張變形に對しては二次的である。又薄肉である程曲げ剛性の影響は小さくなるが壓力の影響は益々大きくなる。厚肉の場合にはこの逆である。

(5) 挫屈値については從來挫屈問題として得られた結果に大體一致した。

文　獻

(1) 吉村慶丸：理工學研究所報告，**2** (1948) 167. **3** (1949), 19.

(2) A. E. H. Love: The Mathematical Theory of Elasticity, 又は Phil. Trans. Roy. Soc. London, 179 (1888), 491.

(3) Lord Rayleigh: Proc. Roy. Soc. London, 45 (1889), 105, 446.

(4) K. Federhofer: Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. in Wien, 145 (1936), 68.

(5) 德川武定，鬼頭史城：彈性的安定原論

(6) Timoshenko: Theory of Elastic Stability.