

光の散亂に關する粉體の研究(第1報)

透明粉體層による散亂透過光の強度分布

早川宗八郎・林喜男

Studies on the Properties of Powder from its Light-Scattering I.

Intensity-distribution of scattered light transmitted
through the layer of transparent powder

Sohachiro HAYAKAWA and Yoshio HAYASHI*

ABSTRACT—In search of the relations between the optical properties and the other factors of powders such as the size and the shape, the intensity-distribution of the scattered light was measured by means of photographic photometry. A beam of a nearly monochromatic light was thrown through the slit of various width on the powder layer composed of the following substances: the spherically polymerized meta-acryl resin powders, glass powders and zinc oxides and carbonates, each having various sizes and shapes. The transmitted light was photographed on a process plate put in an intimate contact with the powder layer. An approximate formula was derived theoretically giving a relative intensity of scattered light at a point distant x from the center, namely the geometrical exit of the incident light beam. The relative intensity was expressed by

$$\frac{\{1 + (nl-1)\rho\}}{\{1 + (n\sqrt{l^2 + x^2} - 1)\rho\}} e^{-h^2 x^2}$$

in which n is the number of powder sub-layers per unit length, ρ the reflectivity due to a single sub-layer, l the thickness of the scattering layer, and h the coefficient of diffusion of light. The agreement of the formula with the experimental results was proved satisfactory, and the parameters ρ and h , determined in this way, expressed reasonably the characteristics of the powders. (Received May 18, 1951)

1. まえがき

顔料や螢光體などの粉末性物質に關する現象は殆どすべての場合、甚だ複雑で、その物質の生成條件や經歷によつて現象が大きく影響されることは、すでに吾々が見知つているところである。H. Freundlich が膠質化學について説述したと同様に、粉體化學の研究に於ても、先づその現象の

單純且つ大略の寫像を畫くことを試み、それから吾々の知見の増加するに伴つて、これを嚴密に且つ精細にすることに努むべきである。この様な立場から、吾々の研究室ではまづ粉體の現象論を確立すべく研究を進めてきた。而して、二三の現象に對して、それを支配する主要な因子の大體の關係を追求するのに成功した⁽¹⁾⁽²⁾。

この研究も粉體及び螢光體に對する廣汎な研究の一部である。スリットを通つて、粉體の層に入つた平行光がその中で散亂し、如何なる強度分布

* Present Address: Faculty of Engineering, Keio University, Tokyo.

を示すかという問題は、顔料の光の擴散性、電子顯微鏡やテレビジョンの像の鮮明度、或いはX線の増感紙に関する問題等に對して、一つの基礎的な鍵點となつている。こゝでは、模型實驗を中心として、光の散乱の様子を透明粉體層の透過強度分布によつて測定した。一方理論的な考察から、實驗結果と對照すべき近似的な理論式を誘導し、散亂の性質を定量的に示す係數を決定することが出來た。尙その係數の値と粉體の形、大きさ等の因子との關係が一應明らかにされたので、こゝに報告する。

2. 實驗方法

粉體層による擴散透過光の強度分布を測定する装置の主要部は Fig. 1. の如くである。光度を均一にした平行光が下より照射され、スリット S を通過した後、試料容器 M 中の粉體層に入る。こゝで散亂され透過した光の強度分布を、粉體の他の一面に密着した寫真乾板によつて、寫真測光法で測定した。

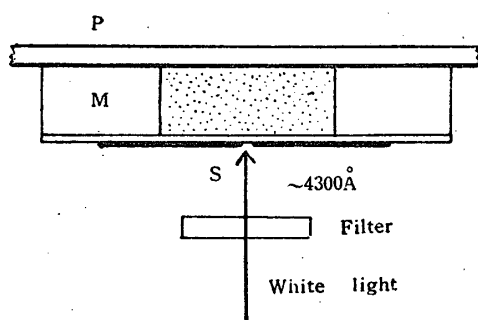


Fig. 1.

光線の波長：Wratten のフィルター No. 47 を用いて、大略 4300\AA 近傍の青色の光を使用した。

スリット：特製寫真フィルムに長い矩形(縦と幅の比が 10 : 1)の部分だけ残して、圍りを感光させたもの。これは東大理學部物理學教室の小穴教授にお願いして作つて頂いたもので、同研究室のマイクロフィルムの技術の賜物である。尙、幅は 0.3, 1.0, 3.0mm のものを揃えて實驗に供した。

試料容器：厚さ 5, 3, 2, 1mm のガラス板及び 0.5mm のアルミ板に各々直径 1, 2, 3mm の孔を抜いて、その裏からうすいガラス板をバラスムで張つた。

寫真乾板：使用した光が青色であり、實驗上の操作を便にする爲赤ランプを點ずることが出来る様に、オリエンタルプロセス乾板を使用した。光學的楔：乾板による測光の爲、實測の感光像のまわりにこれを用いて標準を入れた。 4300\AA に對して wedge constant $1.31(\text{mm}^{-1})$ である。撮影した乾板を理研マイクロフォトメーターにかけて、濃度曲線を畫き、標準と比較し換算して、強度分布を求めた。實驗の精度は感光の示性曲線が直線の範圍で $\pm 2\%$ 程度である。

3. 試料

實驗の試料としては、形・大きさ等が判明している大きな粒體によつて模型實驗を行う爲に、粒狀重合したメタクリル樹脂及びガラス粉末を用いた。又實驗の顔料の試料として、炭酸亞鉛及びそれを焼成した酸化亞鉛を用いた。その性質の要要は Table 1. に掲げた如くである。

Table 1. Samples and their properties

Mark	Matter	Separation by Sieving	Size	Shape	Apparent density (g/cc)
M II	Meta-acryl powder	30~48 mesh	Average 0.356mm	Spherical	0.719
M I	"	48~80	0.235	"	0.729
G III	Gloss powder	48~80	0.235	rough	1.285
G II	"	100~150	0.125	"	1.235
G I*	"	250~280	0.057	"	1.148
G I°	"	250~280	0.057	Spherical	1.422
Z III	ZnO (800°C)		100~200 μ	rod	0.595
Z II	ZnO (400°C)		10~40 "	"	0.333
Z I	ZnCO ₃		—	—	0.392

メタクリル樹脂：新光レイヨン株式會社の製作によるものを篩別した。その形は Fig. 2. の寫眞の様に完全に球形に近く、屈折率は 1.48~1.51 でガラスと略同じ値である。

ガラス粉末：フリントガラスをボールミルで粉碎しそれを篩別した。尙 250~280 mesh で分離した最も細かい試料の一部を Fig. 3 で示す様な装置で、焰の中を通して球狀にした。

以上の試料の大きさ、形等については Fig. 2 の寫眞を参照され度い。

炭酸亞鉛及び酸化亞鉛：これは本研究室で以前



Fig. 2. Microscopic photographs of samples (X 70)

- | | | | | | |
|---|---------------------------------|------|---|-----------------------|-----|
| 1 | Meta-acryl resin powder (large) | MII | 4 | Glass powder (middle) | GII |
| 2 | " (small) | MI | 5 | " (small, rough) | GI* |
| 3 | Glaser powders (large) | GIII | 6 | " (small, spherical) | GI° |

から用意し、他の物理化学的性質について種々測定されてきたものである。炭酸亜鉛の製法は炭酸ソーダ 0.1 規定溶液に硫酸亜鉛 0.1 規定溶液を滴下して沈澱させたもの（実際は鹽素性炭酸鉛）である。それを電気爐にて 400°C 及び 800°C にて 2 時間加熱した試料が夫々酸化亜鉛 400°C ZII 及び酸化亜鉛 800°C ZIII と記したものである。電子顕微鏡による観察によつて、Table 1. の値を提げた。炭酸亜鉛は形は偏平らしく、又大きさは ZIII と同じ程度であると観られるが、詳しいことは不明である。

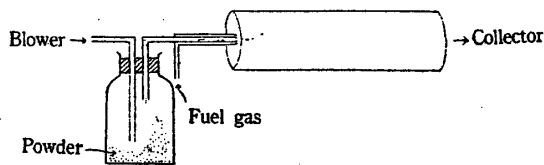


Fig. 3

4. 理論式

粉體中での光の散乱の様は散亂體の濃度が高く、相互關係が強い場合は、一般に所謂一様でない偶然累加現象 (heterogeneous stochastic process) である。粉體に關する一般的な性質に確率論の考えを入れて、膠質に對する Smoluchowsky-Chapmann の式に相當する積分方程式を立てることは可能である⁽³⁾。しかし、一つの散亂體による強度分布が一様であるときに限り、それは正確に

微分方程式に變換され、且吸収のないときは、定常状態の擴散方程式と一致する。尙この簡単な擴散方程式でも上の様な境界條件の下で二次元の問題を解くことは困難である。

一様でない問題は一次元の場合は光の散亂について若干計算されている。その主なものを挙げれば、opal glass に對しての Ryde の研究⁽⁴⁾、a pile of sheets の場合の Tuckerman の計算⁽⁵⁾。又これと同じ考えを粉體に適用した Coltman 等⁽⁶⁾ 及び Longini⁽⁷⁾ の研究がある。それらはすべて同型の結果を與えている。

我々は二次元の問題に對して、現象の性質を考慮して近似的な理論を求めた。Fig. 4 に於て、厚さ l の粉體層にスリット上の一點 P から光が入射した場合、P より入射光線方向に當る他方の面上の點を Q とし、Q から面に沿つて垂直に x だけ離れた點 X での光の強さを考えてみる。このとき、我々の考えは X での光の強さが PX 方向

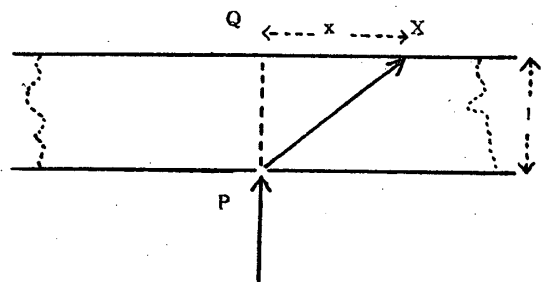


Fig. 4

の分布と QX 方向の分布との獨立な Superposi-

tion によると假定する。

(i) PX 方向

a pile of sheets 模型によれば、単位長さ當りの層の数が n として、PX 間にある層の数は $n\sqrt{l^2+x^2}$ である。ただし、 l は試料の厚さである。即ち、一層による反射の割合を ρ とすれば、X 方向に透過する光の割合は

$$\frac{1-\rho}{1+(n\sqrt{l^2+x^2}-1)\rho}$$

で與えられる。Longini の與えた形式によれば $1/1+S\sqrt{l^2+x^2}$ となる。S は常數で $n\rho/1-\rho$ に當る。

(ii) QX 方向

この方向の擴散は、一次元の相關性ある酔歩 (random walks) の問題と同型のもので、無限に擴つてゐるから、一應中央極限定理に従う問題と考へて、正規分布で表現する。

$$\exp(-h^2x^2)$$

ここに h は擴散を意味する係數で

$$\sigma=1/\sqrt{2}h$$

とかけば、 σ は所謂標準偏差で、擴散の度合を示すと考へられる。

(iii) X に於ける散亂透過光の相對強度

上の (i), (ii) を合成し、X 點に於ける光の割合の Q 點に於けるものに對する比を相對強度とよび、 $t_{rel}(x)$ とかけば、

$$t_{rel}(x)=\frac{1+(nl-1)\rho}{1+(n\sqrt{l^2+x^2}-1)\rho}e^{-h^2x^2} \quad (A)$$

なる形を得る。これが我々の求めた近似的な理論式である。この曲線を正規分布と比較してみると、變曲點附近で一階微分の變化が x の廣い範圍ですくない。即ち、後節に示す圖の様に、直線に近い部分が長く出てくる。 n が充分大であると、(A) と

$$t_{rel}(x)=\frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}e^{-h^2x^2} \quad (B)$$

と書かれ、 n と ρ が消去されてしまう。

擴散による光の強度分布がスリットの幅に比して充分擴がつてゐるときは、實測の結果に (A) 又は (B) を適用することが出来るが、スリットが廣いときには、(A) 又は (B) を重ね合せた曲線が實測されるわけである。今、スリットの幅を $2S$ とし、スリットの中央を原點にとれば、擴散

透過光の強度分布は (A) 及び (B) に對應して、夫々次の式で與えられる。

$$t_{rel}(x)=\int_{-S}^S \frac{e^{-h^2(x-\xi)^2}}{1+(n\sqrt{l^2+(x-\xi)^2}-1)\rho} d\xi / \int_{-S}^S \frac{e^{-h^2\xi^2}}{1+(n\sqrt{l^2+\xi^2}-1)\rho} d\xi \quad (A')$$

$$t_{rel}(x)=\int_{-S}^S \frac{e^{-h^2(x-\xi)^2}}{\sqrt{l^2+(x-\xi)^2}} d\xi / \int_{-S}^S \frac{e^{-h^2\xi^2}}{\sqrt{l^2+\xi^2}} d\xi \quad (B')$$

5. 理論と實驗の比較、係數の決定

理論式 (A) 及び (B) 又はその積分した形 (A') 及び (B') を第 2, 3 節でのべた實驗によつて得られた結果に適用する。實驗結果は連続的な曲線として得られるが、最小自乘法を用いる爲、一つの曲線につき數個の適當な値を選んだ。もつともスリットの幅が擴散に比して充分小のときだけ (A) 又は (B) にて、 ρ , h を定めることが出来るが、スリットの幅の大きいものは、同じ試料の ρ , h を用いて、(A') 又は (B') に従つて數値積分し實驗値と比較する。實驗値及び理論値は Table 2. 乃至 Table 5. に掲げ、尙決定された ρ 及び h の値は Table. 6. に一括してあげた。 n の値は粒子が最密充填するとして、平均粒徑から求めた。

(1) メタクリル樹脂粉末

これは粒子も大きく球形なので、最もよく透過し、散亂する。幅 1mm のスリットを用いて、厚さ 2, 3, 5mm の測定を行つた。一つの試料につき、これら三本の曲線の値に對して最小自乘法を用いて ρ 及び h を決定した。MII に對しては $\rho=0.10$, $h=0.24$, MI に對しては $\rho=0.10$, $h=0.29$ を得た。數値は Table 2. に示す。

Table 2.

Sample	Width of slit (mm)	thickness, l (mm)	x (mm)	t_{rel} (obs.)	t_{rel} (calc.)
			0	1.00	1.000
			1	0.89	0.901
		2	2	0.64	0.684
			3	0.43	0.416
			5	0.10	0.144
			7	0.028	0.028

M II	1.0	3	10	0.008	0.0012	
			0	1.00	1.000	
			1	0.91	0.928	
			2	0.72	0.720	
			3	0.55	0.494	
			5	0.170	0.164	
		7	0.038	0.034		
		10	0.009	0.0014		
		5	0	1.00	1.000	
			1	0.94	0.933	
			2	0.80	0.757	
			3	0.59	0.541	
	5		0.28	0.192		
	10		0.026	0.0016		
	M I	1.0	3	0	1.00	1.000
				1	0.81	0.860
				2	0.56	0.585
				3	0.29	0.330
5				0.049	0.064	
7				0.013	0.0066	
10			0.000	0.0037		
5			0	1.00	1.000	
			1	0.86	0.890	
			2	0.63	0.635	
			3	0.36	0.373	
			5	0.079	0.077	
		10	0.017	0.0083		
				0.000	0.0009	

(2) ガラス粉末Ⅲ及びⅡ

スリットの幅 1mm のものに対して、厚さ 1, 2, 3mm の測定を行つたが、GⅢ では3mm のものは透過微弱で測定出来ず、厚さ 1, 2mm の結果を用いて $\rho=0.20$, $h=0.53$ を得た。又 GⅡ では厚さ 1mm のものだけが測定され、 $\rho=0.16$, $h=0.79$ を得た。数値は第 3 表の如くである。

(3) ガラス粉末 I

粗形の粉末 GI* はスリットの幅 1mm, 厚さ 0.5mm の場合だけ測定出来た。この範囲では積

Table 3.

Sample	width of slit (mm)	thick-ness, l (mm)	x (mm)	t_{rel} (obs.)	t_{rel} (calc.)	
G III	1.0	1	0	1.00	1.000	
			0.5	0.88	0.877	
			1	0.60	0.656	
			2	0.21	0.174	
			3	0.056	0.036	
				5	0.004	0.0004
	1.0	2	0	1.00	1.000	
			0.5	0.91	0.911	
			1	0.64	0.737	
			2	0.24	0.250	
3			0.06	0.063		
			5	0.00	0.0004	
G II	1.0	1	0	1.00	1.000	
			0.5	0.73	0.780	
			1	0.46	0.439	
			1.5	0.23	0.172	
			2	0.092	0.050	
			3	0.023	0.018	

分形 (A') を用いなければならないが、やむを得ず近似的に (A) を用いて、 $\rho=0.11$, $h=1.11$ を得た。球形の粉末 GI° は GI* に比して透過もよく、擴散も大きい。幅 1mm のスリットでは厚さ 0.5, 1, 2mm まで測定出来、又幅 0.3 及び 3mm のスリットを用いて厚さ 1mm のものを測定した。 ρ 及び h の値は 0.5mm のスリットの場合の値に対して求め、 $\rho=0.085$, $h=0.61$ を得、これを厚さの異なる場合、スリットの幅の広い場合に用いて積分して理論値を出し、實測値と對應させた。

Table 4.

Sample	Width of slit (mm)	thick-ness, l (mm)	x (mm)	t_{rel} (obs.)	t_{rel} (calc.)
GI*	1.0	0.5	0	1.00	1.000
			0.5	0.57	0.596
			1.0	0.14	0.172
			1.5	0.068	0.027
			2.0	0.030	0.003
	0.3	1.0	0	1.00	1.000
			0.5	0.81	0.849
			1.0	0.52	0.544
			1.5	0.29	0.287

GI°	1.0	0.5	0	1.00	1.000
			0.5	0.73	0.742
			1.0	0.36	0.446
			1.5	0.081	0.230
			2.0	0.024	0.098
			2.5	0.014	0.030
	1.0	1.0	0	1.00	1.000
			0.5	0.82	0.854
			1.0	0.54	0.559
			1.5	0.28	0.206
	2.0	2.0	0	1.00	1.000
			0.5	0.83	0.874
			1.0	0.60	0.636
			1.5	0.30	0.387
	3.0	1.0	0	1.00	1.000
0.5			0.95	0.947	
1.0			0.73	0.799	
1.5			0.43	0.570	
2.0			0.17	0.335	
2.5			0.081	0.147	
3.0			0.038	0.050	

(4) 炭酸亜鉛及び酸化亜鉛

粒子が細かいので透過は一般に悪いが、中では $ZnCO_3$ が最も透過がよい。従つて、幅 0.3 mm のスリットで測定されたのは $ZnCO_3$ だけである。その爲 (B) を用いて h を決定することが出来たのはこれだけで、 $h=0.80$ を得た。(B) を積分した(B')の形でスリット 1 mm 及び 3 mm の場合の理論値を求めて第 5 表に示した。ZnO では理論値は得られず実測値だけをあげておいたが、同じ条件での $ZnCO_3$ の値と比較してみると、400°C 焼成の ZII は炭酸亜鉛より散乱は小さく ($h > 0.80$), 800°C 焼成の ZIII は炭酸亜鉛より散乱は大きい ($h < 0.80$)。

Table 5.

Sample	width of slit (mm)	thickness, z (mm)	x (mm)	t_{rel} (obs.)	t_{rel} (calc.)
	0.3	1.0	0	1.00	1.000
			0.5	0.74	0.762
			1.0	0.38	0.372
			1.5	0.16	0.145
			0	1.00	1.000
			0.5	0.77	0.733
			1.0	0.27	0.320
			1.5	0.12	0.112

Z I	1.0	1.0	2.0	0.08	0.034
			0	1.00	1.000
			0.5	0.83	0.794
			1.0	0.52	0.512
			1.5	0.20	0.175
			2.0	0.07	0.056
	2.0	2.0	0	1.00	1.000
			0.5	0.85	0.842
			1.0	0.52	0.483
			1.5	0.22	0.223
	3.0	3.0	2.0	0.13	0.082
			0	1.00	1.000
			0.5	0.94	0.938
			1.0	0.78	0.800
	Z II	1.0	1.0	1.5	0.50
2.0				0.29	0.267
2.5				0.18	0.108
3.0				0.11	0.038
0				1.00	1.000
Z III	1.0	0.5	0.5	0.80	0.80
			1.0	0.21	0.21
			1.5	0.09	0.09
			0	1.00	1.00
Z II	1.0	1.0	0.5	0.80	0.80
			1.0	0.34	0.34
			1.5	0.12	0.12
			0	1.00	1.00

6. 考 察

以上述べた様に我々の誘導した理論式は実測値を比較的よく表現している。各試料について決定された ρ 及び h の値をまとめてみると、Table

Table 6.

Determined values of parameters, ρ and h

Sample	Size	n	ρ	h	σ
Meta-acryl resin MII	Average 0.356 mm	3	0.10	0.24	2.95
" MI	0.235	5	0.10	0.29	2.44
Glass powder (rough) GIII	0.235	5	0.20	0.53	1.34
" GII	0.125	8	0.16	0.79	0.89
" GI*	0.057	20	0.11	1.11	0.67
(spherical) GI°	0.057	20	0.085	0.61	1.16
ZnO(800°C)ZIII	100~200 m μ			<0.80	>0.88
ZnO(400°C)ZII	10~40 m μ			<0.80	<0.88
ZnCO ₃ Z I				0.80	0.88

6. の様になる. 尙 h より $\sigma [=1/(\sqrt{2}h)]$ の方が
 擴散の性質をみるには判り易いので, この値を示
 した. この表をもとにして, 粉體の光學的性質に
 關する二三の考察を述べてみよう.

(1) 反射に關する係數 ρ について

實測値と比較して係數をきめる場合, h の方は
 ± 0.02 程度の精度で決定されるが, ρ の方は h
 よりずつと精度が落ちる. これは n が大きいとき
 には ρ が消去されてしまう關係からも判るとこ
 ろであらう.

ρ は元來粉體の一層による反射率でこれが粉體
 の形・大きさに依存することは當然であらう⁽¹⁾.
 メタクリル樹脂では何れも 0.10 となつたのは,
 完全な球形である爲と考えられる. ガラスでは
 粗形である爲, ρ は大きく, 且粒徑の小になるに
 従つて小になる. 尙メタクリルとガラスでは屈折
 率はあまり違わないから, 同じ大きさでも夫々
 0.10 及び 0.20 の様に大きな差を示したのは, 全
 く形の違によるものである. 尙 GI^* と GI° と
 の ρ の値の差も同じである, 又 GI° では 0.085
 の値を示し, メタクリルの 0.10 の値に近いが,
 すこし差を示しているのは, 屈折率によるのか,
 粒徑によるのか, 或いは充填その他の理由による
 のか, 現在の精度では判断出来ない.

(2) 擴散に關する係數 σ について

相對強度の變化に對して主導的な役割を果すの
 は係數 σ である. まづ粉體の大きさとの關係は,
 粒徑が小になるに従つて小になる. (Fig 5) この
 關係はメタアクリルの様に大きく形の整つたもの
 から, 酸化亞鉛の様に小さく形の不齋のものまで
 一貫して成立する. 厚さによる變化は一應ないと
 考えたが, 特別な例として MI の $l=2, 3, 5\text{mm}$
 に對する曲線は Fig 6. に示す様に, やや系統的
 なずれを示している. これは理論式の誘導で考え
 た方向の分離の假定の不完全さから出て來たの
 ではないかと推察される.

粉體の形による σ の値の變化は顯著である. 即
 ち Fig 5 及び Fig 7 を見てもわかる様に, 同じ
 大きさでも, MI と GIII 或いは GI° と GI^* と
 の差は, σ の値にしてみても大きな差を示す, こ
 れは形のととのつた反射のすくない粉體の方が擴
 散には大きく効くことを意味している. σ の傾向
 と ρ の傾向が形の差に對して逆になつてい

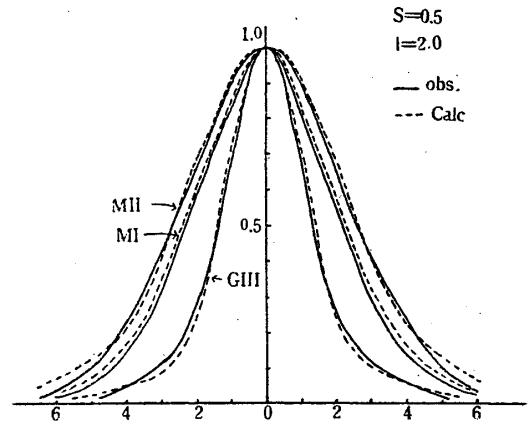


Fig. 5.

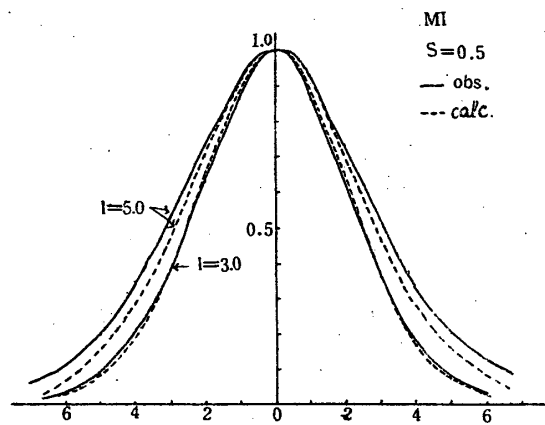


Fig. 6.

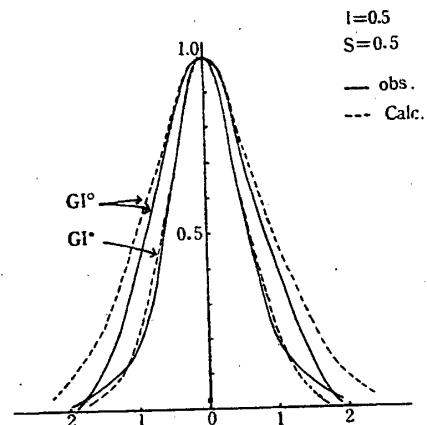


Fig. 7.

とも納得される.

この σ の値は光の散亂性をよく表現し, 且粉
 體の光學的性質に影響する大きさや形に對して鋭
 敏に變化するので, 粉體の性質を示すに適切な
 parameter の一つであると考えられる.

(3) スリットの幅による變化について

スリットの幅は散亂に比して小さいところ
 では, 多小變化しても強度分布には影響がすくない.

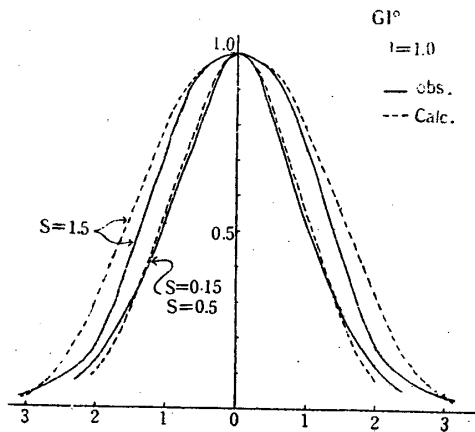


Fig. 8.

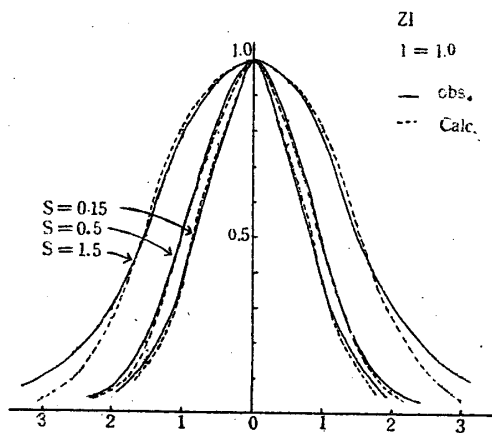


Fig. 9.

しかし、スリットの幅が大きくなると、強度分布のひろがりも大きくなる。所が、これらは二つの係数 ρ 及び σ 一対の値に對して、積分形式 (A'), 又は (B') を用いることで完全に表現されてしまう。

7. まとめ

(1) 透明粉體層による散亂透過光について理論的な考察によつて、その相對強度分布に對する近似的な公式を誘導した。その式は粉體の反射に關する係数 ρ と擴散に關する係数 σ とを含んでいる。

(2) 種々の大きさ・形の試料について、スリット

を通つた平行光の粉體層による透過光を寫眞測光法で測定した。その結果に理論式を適用して、夫々の試料に對する ρ と σ の値を推定した。(Table 6)

(3) 反射の程度を示す ρ の値は粒徑が小になるに従い減小する。又形が粗になると大きな値を示す。

(4) 擴散の程度を示す σ の値は粒徑が小になるに従つて減小する。しかし、形が粗になると ρ とは逆に小さくなる。尙、 σ は粉體の大きさや形によつて著しく變化し、且精度よく決定されるので、粉體の性質を示す Parameter として適切である。

本研究を通じて終始御懇篤なる御指導を頂いた牧島教授、並びに有益な御注意御討論を頂いた大島助教授、久野助教授及び永野氏に厚く謝意を捧げる。

又、スリットの製作及び寫眞測光法について有益な御指導と御便宜を與えられた小穴教授始め同研究室桑原氏その他の方々、及び硝子器具について御厚志を頂いた坪田氏に深謝の意を表す。

尙、研究者の中の一人林は現在慶大工學部特別研究生である。

文 献

- (1) 久野・早川・鈴木・松室：照明學會雜誌，33 (昭24)，189.
- (2) 早川：理工研報告，4 (昭25)，87.
- (3) 未發表
- (4) J. W. Ryde : *Proc. Roy. Soc. London*, A 131, (1931) 451.
- (5) B. Tuckermann : *J. Opt. Soc. Am.*, 37 (1947), 818.
- (6) Coltman, Ebbighausen and Alter : *J. App. Phys.*, 18 (1947), 530.
- (7) R. L. Longini : *J. Opt. Soc. Am.*, 39 (1949), 551.
- (8) 伏見康治：確率論及び統計論 (河出書店) 第 V 章

(1951年5月18日受理)