層流境界層方程式の解法について

玉木 章夫

On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations.

Humio TAMAKI

ABSTRACT—An approximate method for solving the equations for steady, two dimensional boundary layer by using Mises transformation is presented.

Chapter 1 deals with incompressible fluid. As is shown by Mises and Kármán-Millikan, equation of motion for the boundary layer is written :

$$\partial z/\partial\varphi=\nu\sqrt{1-z/z_0}\,\partial^2 z/\partial\psi^2$$

where ν is kinematic viscosity, $z=(u_1^2-u^2)/2$ (u_1 : outside velocity), $z_0=z(\psi=0)=u_1^2/2$, $\varphi=\int_0^x u_1 dx$ and ψ is stream function defined by $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$. Now, $1-z/z_0$ in the right side can be expanded in power series of ψ if we take as z Kármán-Millikan's outer solution. The essential point of the present method lies in taking only the first term as an approximation. Then using instead of φ a new variable which is a function of φ, we can obtain z in an integral form containing the distribution of the outside velocity in the integrand. Several numerical examples show that the accuracy of the method is satisfactory.

In Chapter 2, compressible fluid with Prandtl number 1 is considered, for the case without surface heat transfer. By proper modifications in the definitions of φ, ψ and z, the method of the first chapter is also available for this case. Similarity between compressible and incompressible case is discussed. (Received May 2, 1951)

縮まない流體の二次元層流境界層の方程式はMises の導入した變數變換によつて熱傳導の方程式と似た形に變形される．本文ではこれを解くための比較的簡單でしかも精度のよい近似解法を示す．この方法によれば，ふつうに行われるように物體表面のある位置における境界層の速度分布の形がその點の層外速度勾配を含むパラメーター $\delta^2/\nu\cdot du_1/dx$（$\delta$：層の厚さ，$\nu$：動粘性係數，$du_1/dx$：流れの方向の層外速度勾配）のみによつて定まるというような假定を用いる必要はなく，任意の位置における層内の速度分布はその點より上流の層外速度の分布を含む積分によつて求まる．さらにこの方法は僅かな變更によつて縮む流體の場合に容易に擴張される．從つてまず第1章では縮まない流體を考え，ついで第2章で縮む流體の場合への擴張を示すことにする．

第1章　縮まない流體

§1. 基礎方程式

縮まない流體の二次元，定常的層流境界層の方程式はよく知られているように次の形に書かれる．

$$u\,\partial u/\partial x+v\,\partial u/\partial y=u_1 du_1/dx+\nu\,\partial^2 u/\partial y^2 \quad (1)$$

こゝに x は前縁岐點から物體表面に沿うての距離，y は表面に直角方向の距離，u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分，u_1 は層外速度，ν は動粘性係數である．

連續の式

$$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y=0 \quad (2)$$

は次の關係を滿たす流れ函數 ψ を導入することによつて滿足される．

$$u=\partial\psi/\partial y, \qquad v=-\partial\psi/\partial x. \tag{3}$$

さて Mises[1] に從つて x, y の代りに x, ψ を獨立變數にとり，未知函數として

$$z=(u_1{}^2-u^2)/2 \tag{4}$$

をとる．

$$(\partial/\partial x)_y=(\partial/\partial x)_\psi+(\partial/\partial\psi)_x(\partial\psi/\partial x)_y$$
$$=(\partial/\partial x)_\psi-v(\partial/\partial\psi)_x,$$
$$(\partial/\partial y)_x=(\partial/\partial\psi)_x(\partial\psi/\partial y)_x=u(\partial/\partial\psi)_x \tag{5}$$

であることから方程式(1)は次のように書表わされる．

$$\partial z/\partial x= \nu u\partial^2 z/\partial\psi^2. \tag{6}$$

さらに Kármán-Millikan[2] に從つて

$$\varphi=\int_0^x u_1\,dx \tag{7}$$

を導入すると，(6) は

$$\partial z/\partial\varphi=\nu(u/u_1)\partial^2 z/\partial\psi^2 \tag{8}$$

と變形される．

さて後の計算に便利なようにすべての量を次元のない形で表わすことにする．U, L をそれぞれ代表的な速度，長さとして，

$$u^*=u/U,\ u_1{}^*=u_1/U,\ z^*=z/U^2,$$
$$\varphi^*=\varphi/(UL),\ \psi^*=\psi\sqrt{R}/(2UL),$$
$$R=UL/\nu \tag{9}$$

によつて * のついた量を定義する．そして以後簡單のため * を省略して書くことにする．こうすれば(8)は

$$\partial z/\partial\varphi=1/4\cdot(u/u_1)\partial^2 z/\partial\psi^2 \tag{10}$$

と書かれる．あるいは $\psi=0$ (表面) における z を z_0 で表わすと，$z_0=u_1{}^2/2$ であることから

$$u/u_1=\sqrt{1-2z/u_1{}^2}=\sqrt{1-z/z_0} \tag{11}$$

從つて(10)は次のように書かれる．

$$\partial z/\partial\varphi=1/4\cdot\sqrt{1-z/z_0}\,\partial^2 z/\partial\psi^2 \tag{12}$$

この方程式を $\psi=0$ で $z=z_0=u_1{}^2/2$; $\psi\to\infty$ で $z\to 0$, $\varphi=0$ で $z=0$ という條件の下に解くことができればよいのである．

§ 2. 近似解法

方程式(12)を嚴密に解く方法は現在のところ見當らない．近似的な解法としては Kármán-Millikan の方法があるがこれは計算が面倒である上に精度も十分とは言えないように思われる．本文ではこれと幾分異なつた取扱い方を示すことにする．

(12) において $\sqrt{1-z/z_0}$ が一定であるとすればこの方程式は z を溫度，φ を時間，ψ を位置座標と考えれば固體內の一次元熱傳導の方程式と同じであり，われわれの問題は半無限の棒の一端の溫度が時間と共に變つて行くときに各點の溫度を求める問題と一致する．

Kármán-Millikan は $\sqrt{1-z/z_0}$ すなわち u/u_1 を 1 に等しいとおきこれに對する解を "outer solution" と稱している．これは層の外の方ではよい近似であるが表面の近くでは近似が惡くなるので別に適當な "inner solution" を求め，この兩者をつなぎ合わせるという方法を採つている．

これから述べる方法においては次のような近似を行う．(12) の右邊の $1-z/z_0$ すなわち $(u/u_1)^2$ に outer solution を入れればこれは ψ の冪級數として表わすことができる．そこでその ψ の 1 次の項のみをとることにする．いゝかえると眞の $(u/u_1)^2$ の代りに outer solution の $(u/u_1)^2$- ψ 曲線の表面における切線を用いることにする．勿論この直線としては outer solution の切線以外のものを用いてもよいのであるが，筆者の別の論文* に示したように上のおき方は簡單でしかも壓力降下のあるときも上昇のあるときも眞の $(u/u_1)^2$ をかなりよく近似するものである．

さてこのように假定すると，

$$u/u_1=\sqrt{1-z/z_0}=C(\varphi)\psi^{1/2} \tag{13}$$

とおくことができる．こゝに $C(\varphi)$ は φ の函數であり，outer solution にもとづく $C(\varphi)$ の實際の表現は次節に示すことにする．上の關係を用いると (12) は

$$\partial z/\partial\varphi=1/4\cdot C(\varphi)\psi^{1/2}\partial^2 z/\partial\psi^2$$

となる．そこで φ の代りに

$$t=\int_0^\varphi C(\varphi)/4\cdot d\varphi \tag{14}$$

によつて定義される t を用いると，この方程式は

$$\partial z/\partial t=\psi^{1/2}\partial^2 z/\partial\psi^2$$

あるいは

$$\partial^2 z/\partial\psi^2-\psi^{-1/2}\partial z/\partial t=0 \tag{15}$$

とかゝれる．この式は Huber[3] が取扱つた方程

* 生產技術研究所報告 1, No. 8. (1951). この論文では同じような近似法で境界層の熱エネルギーの方程式を解くことを試みている．

式の特別の場合に相當する.* そして境界條件:

$$\begin{aligned} &\psi=0 \quad \text{で} \quad z=z_0=u_1{}^2/2=f(t)/2, \\ &\psi\to\infty \quad \text{で} \quad z\to 0, \\ &t=0 \quad \text{で} \quad z=0 \end{aligned} \tag{16}$$

を滿足する解は次のように書表わされる.

$$z(\psi,t)=\frac{1}{2}\frac{\psi}{(3/2)^{4/3}\Gamma(2/3)}\int_0^t \frac{e^{-\frac{4\psi^{3/2}}{9(t-\xi)}}}{(t-\xi)^{5/3}}f(\xi)d\xi. \tag{17}$$

從つて, $u_1{}^2$ が t の函數 $f(t)$ として與えられれば上式から直ちに解が計算されるわけである. 次にこの式をさらに實用的な形に變形しよう.

$$(4/9)^{2/3}\psi/(t-\xi)^{2/3}=\gamma$$

とおいて積分變數を γ にかえる. そして

$$(4/9)^{2/3}\psi/t^{2/3}=w$$

とおくと,

$$z=\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\int_w^\infty e^{-\gamma^{3/2}}f\left(t-\frac{4}{9}\frac{\psi^{3/2}}{\gamma^{3/2}}\right)d\gamma$$

となる. いま $f(t)$ が t の多項式

$$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots\cdots+c_nt^n = \sum_{i=0}^n c_it^i \tag{18}$$

で表わされるとする. このときには

$$f\left(t-\frac{4}{9}\frac{\psi^{3/2}}{\gamma^{3/2}}\right)=\sum_{i=0}^n c_i\left(t-\frac{4}{9}\frac{\psi^{3/2}}{\gamma^{3/2}}\right)^i = \sum_{i=0}^n c_it^i\left(1-\frac{w^{3/2}}{\gamma^{3/2}}\right)^i$$

となるから, 結局

$$z=\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\sum_{i=0}^n c_it^i\sum_{r=0}^i\frac{(-1)^ri!}{(i-r)!r!}w^{3r/2}\int_w^\infty\frac{e^{-\gamma^{3/2}}}{\gamma^{3r/2}}d\gamma$$

が得られる. 簡單のため

$$(-1)^rw^{3r/2}\int_w^\infty e^{-\gamma^{3/2}}/\gamma^{3r/2}\cdot d\gamma=H_r(w)$$

とおくと,

$$z=\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\sum_{i=0}^n c_it^i\sum_{r=0}^i\frac{i!}{(i-r)!r!}H_r(w) \tag{19}$$

となる. $H_r(w)$ $(r\geqq 1)$ に對する漸化式は次の通りである.

$$H_r(w)=(-1)^r\frac{2}{3r-2}we^{-w^{3/2}}+\frac{3}{3r-2}w^{3/2}H_{r-1}(w).$$

$r=3$ までを書下すと,

$$\begin{aligned} H_0&=\int_w^\infty e^{-\gamma^{3/2}}d\gamma, \\ H_1&=-2we^{-w^{3/2}}+3w^{3/2}H_0, \\ H_2&=\frac{1}{2}we^{-w^{3/2}}-\frac{3}{2}w^{5/2}e^{-w^{3/2}}+\frac{9}{4}w^3H_0, \\ H_3&=-\frac{2}{7}we^{-w^{3/2}}+\frac{3}{14}w^{5/2}e^{-w^{3/2}}-\frac{9}{14}w^4e^{-w^{3/2}} \\ &\quad+\frac{27}{28}w^{9/2}H_0. \end{aligned} \tag{20}$$

第 1 圖にこれらの函數を圖示する.

さて實際の場合には $u_1{}^2$ を t の唯1個の多項式で表わそうとすると多くの項を必要とするので, 全體の領域をある t_1 において 2 分して, $u_1{}^2$ を二つの多項式

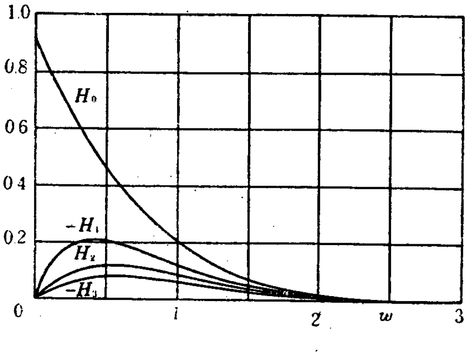
$$u_1{}^2=\begin{cases} f_1(t)=\sum_{i=0}^n c_it^i, & t\leqq t_1 \\ f_2(t)=\sum_{i=0}^m d_it^i, & t\geqq t_1 \end{cases}$$

と表わした方がよい.

$t\leqq t_1$ に對する解は (19) で與えられる.

$t\geqq t_1$ に對する解は次のように書かれる.

$$\begin{aligned} z=\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\Bigg[&\sum_{i=0}^n c_it^i\sum_{r=0}^i\frac{i!}{(i-r)!r!}H_r(w) \\ &-\sum_{i=0}^n c_i\sum_{r=0}^i\frac{i!}{(i-r)!r!}t^{i-r}(t-t_1)^rH_r(w') \\ &+\sum_{i=0}^m d_i\sum_{r=0}^i\frac{i!}{(i-r)!r!}t^{i-r}(t-t_1)^rH_r(w')\Bigg] \end{aligned} \tag{21}$$



第1圖　H_0, H_1, H_2, H_3.

* Huber は一般に $\partial^2u/\partial x^2-x^\alpha\partial u/\partial t=0$, $(\alpha>-1)$ の解を求めている. 上の場合は $\alpha=-1/2$ に相當する. なお解(17)は $f(0)=0$ であつても $f(0)\neq 0$ であつても成立つ.

たゞし $w=(4/9)^{2/3}\psi/t^{2/3}$; $w'=(4/9)^{2/3}\psi/(t-t_1)^{2/3}$.

§ 3. C(φ)の表現

さて上に用いている t は (14) によつて φ から計算されるものであるが，この計算を行うためには與えられた層外速度分布に對して$C(\varphi)$の形を知る必要がある．この節ではこれを outer solution から求めることとする．

問題とする領域全體の u_1^2 の分布を φ_1 を接續點として，

$$u_1^2(\varphi)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n} b_i\varphi^i, & \varphi\leqq\varphi_1\\ \sum_{i=0}^{m}\beta_i\varphi^i & \varphi\geqq\varphi_1\end{cases}$$

と表わすとき，$\varphi=0$ で $z=0$, $\psi=0$ で $z=z_0=u_1^2(\varphi)/2$, $\psi\to\infty$ で $z\to 0$ なる條件を滿足する解は Kármán-Millikan が示したように次の形で與えられる．$\varphi\leqq\varphi_1$ では

$$z=\sum_{i=0}^{n} b_i\,\varphi^i\sum_{r=0}^{i}\frac{i!}{(i-r)!r!}\,g_r(\psi/\sqrt{\varphi}),$$

$\varphi\geqq\varphi_1$ では

$$\begin{aligned}z=&\sum_{i=0}^{n}b_i\varphi^i\sum_{r=0}^{i}\frac{i!}{(i-r)!\,r!}\,g_r(\psi/\sqrt{\varphi})\\&-\sum_{i=0}^{n}b_i\sum_{r=0}^{i}\frac{i!}{(i-r)!\,r!}\varphi^{i-r}(\varphi\\&-\varphi_1)^r g_r(\psi/\sqrt{\varphi-\varphi_1})\\&+\sum_{i=0}^{m}\beta_i\sum_{r=0}^{i}\frac{i!}{(i-r)!\,r!}\varphi^{i-r}(\varphi\\&-\varphi_1)^r g_r(\psi/\sqrt{\varphi-\varphi_1}).\end{aligned}\tag{22}$$

こゝに g_rは，アーギュメントを x で代表させると

$$\begin{aligned}g_0(x)&=\frac{1}{2}(1-erf x),\quad g_1(x)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}\\&\quad+x^2(1-erf x),\\g_2(x)&=\frac{1}{3\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3e^{-x^2}\\&\quad+\frac{2}{3}x^4(1-erf x),\\g_3(x)&=-\frac{1}{5\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}+\frac{2}{15\sqrt{\pi}}x^3e^{-x^2}\\&\quad-\frac{4}{15\sqrt{\pi}}x^5e^{-x^2}+\frac{4}{15}x^6(1-erf x),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{23}$$

$$erf\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha$$

と表わされる．

これから明かなように，xの十分小さいところで

$$g_0(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}x,\ g_1(x)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}x,$$

$$g_2(x)=\frac{1}{3\sqrt{\pi}}x,\quad g_3(x)=-\frac{1}{5\sqrt{\pi}}x,\ \cdots$$

であることに注意すれば，(22)式より$C(\varphi)$は次のように書表わされる．たゞし u_1^2 を φ の三次式で表わすとする．

$\varphi\leqq\varphi_1$ に對しては

$$C(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\frac{1}{\varphi^{1/4}}\frac{\sqrt{b_0+2b_1\varphi+\frac{8}{3}b_2\varphi^2+\frac{16}{5}b_3\varphi^3}}{\sqrt{b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2+b_3\varphi^3}},$$

$\varphi\geqq\varphi_1$ に對しては

$$\begin{aligned}C(\varphi)=&\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\frac{1}{\varphi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\beta_0+\beta_1\varphi+\beta_2\varphi^2+\beta_3\varphi^3}}\\&\Big[\Big\{b_0+2b_1\varphi+\frac{8}{3}b_2\varphi^2+\frac{16}{5}b_3\varphi^3\Big\}\\&+\frac{1}{\sqrt{1-\varphi_1/\varphi}}\Big\{(\beta_0-b_0)+(\beta_1-b_1)\varphi\Big(1+(1\\&-\varphi_1/\varphi)\Big)+(\beta_2-b_2)\varphi^2\Big(1+2(1-\varphi_1/\varphi)\\&-\frac{1}{3}(1-\varphi_1/\varphi)^2\Big)+(\beta_3-b_3)\varphi^3\Big(1+3(1\\&-\varphi_1/\varphi)-(1-\varphi_1/\varphi)^2+\frac{1}{5}(1-\varphi_1/\varphi)^3\Big)\Big\}\Big]^{1/2}.\end{aligned}\tag{24}$$

§ 4. 剝離點，表面摩擦抵抗係數の計算

剝離點においては $(\partial u/\partial y)_{y=0}=0$, 從つて $(\partial z/\partial\psi)_{\psi=0}=0$ である．從つて z を ψ について展開したとき ψ の一次の項の係數が 0 となるような t が剝離點を與える．(20) 式から w の十分小さいところで

$H_0(w)=2/3\cdot\Gamma(2/3)-w$, $H_1(w)=-2w$,

$H_2(w)=w/2$, $H_3(w)=-2/7\cdot w$

であることに注意すれば，(21) から剝離點に對する t は $u_1^2(t)$として t の三次式の組合わせを用いるとき，次の式で與えられる．

$$\begin{aligned}&(c_0+3c_1t+\frac{9}{2}c_2t^2+\frac{81}{14}c_3t^3)+\frac{1}{(1-t_1/t)^{2/3}}\\&\Big[(d_0-c_0)+(d_1-c_1)t\{1+2(1-\frac{t_1}{t})\}\\&+(d_2-c_2)t^2\{1+4(1-\frac{t_1}{t})-\frac{1}{2}(1-\frac{t_1}{t})^2\}\end{aligned}$$

$$+(d_3-c_3)t^3\{1+6(1-\frac{t_1}{t})-\frac{3}{2}(1-\frac{t_1}{t})^2+\frac{2}{7}(1-\frac{t_1}{t})^3\}\Big]=0. \qquad (25)$$

また，これまで用いて來た量が(9)によつて定義された次元のない量であることに注意すると，任意の t における局部的摩擦抵抗係數 $\tau_0/(\frac{1}{2}\rho u_1^2)$ (τ_0：表面摩擦應力）は，

$t\leqq t_1$ に對しては

$$\frac{2\tau_0}{\rho u_1^2}=\sqrt{\frac{\nu}{UL}}\frac{1}{c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/3}\frac{1}{t^{2/3}}(c_0+3c_1t+\frac{9}{2}c_2t^2+\frac{81}{14}c_3t^3)^*,$$

$t\geqq t_1$ に對しては

$$\frac{2\tau_0}{\rho u_1^2}=\sqrt{\frac{\nu}{UL}}\frac{1}{d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/3}\frac{1}{t^{2/3}}\Big[\left\{c_0+3c_1t+\frac{9}{2}c_2t^2+\frac{81}{14}c_3t^3\right\}$$
$$+\frac{1}{(1-t_1/t)^{2/3}}\left\{(d_0-c_0)+(d_1-c_1)t\left(1+2(1-\frac{t_1}{t})\right)+(d_2-c_2)t^2\left(1+4(1-\frac{t_1}{t})-\frac{1}{2}(1-\frac{t_1}{t})^2\right)+(d_3-c_3)t^3\left(1+6(1-\frac{t_1}{t})-\frac{3}{2}(1-\frac{t_1}{t})^2+\frac{2}{7}(1-\frac{t_1}{t})^3\right)\right\}\Big] \qquad (26)$$

で與えられる.

§ 5.　層内の速度分布を x, y の函數として表わすこと.

上に示した方法では z が ψ と t の函數として與えられるが，實用上は速度 u を x, y の函數で表わすことが必要である．實際の長さ x, y の代りに

$$x^*=x/L,\quad y^*=y/L\quad (L\text{は代表長})$$

を定義する．そして他の量に對すると同じく * を省略して單に x, y と書くことにする．そうすれば

$$y=\frac{2}{\sqrt{R}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{u}=\frac{2}{u_1\sqrt{R}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1-z/z_0}} \qquad (27)$$

また x と t との關係は(7)と(14)とから求まる.

つぎに本文の近似解をいくつかの例について嚴密解あるいは實驗結果と比較しよう.

§ 6.　平板に沿う流れ

この場合には $u_1=$const. である．そこで $u_1=U$（代表速度）とする．解(19)において $c_0=1$, c_1, c_2, $\cdots c_n=0$ であるから,

$$z=\frac{3}{4\Gamma(2/3)}H_0(x)=\frac{3}{4\Gamma(2/3)}\left\{\frac{2}{3}\Gamma(2/3)-\int_0^w e^{-\gamma^{3/2}}d\gamma\right\}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4\Gamma(2/3)}\int_0^w e^{-\gamma^{3/2}}d\gamma. \qquad (28)$$

こゝに $w=(4/9)^{2/3}\psi/t^{2/3}$．そして t は(24)の第1式で $b_0=1$, b_1, b_2, $\cdots b_n=0$ であるから,

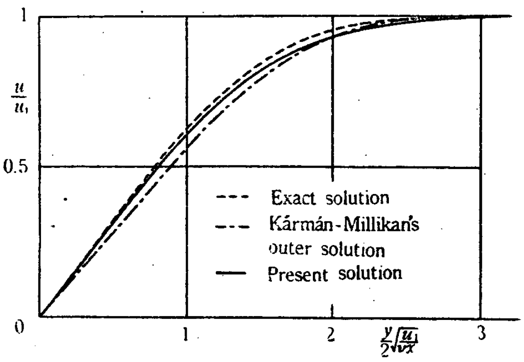
$$t=\frac{\sqrt{2}}{3\pi^{1/4}}\varphi^{3/4}=\frac{\sqrt{2}}{3\pi^{1/4}}\left(\frac{u_1x}{UL}\right)^{3/4}=\frac{\sqrt{2}}{3\pi^{1/4}}\left(\frac{x}{L}\right)^{3/4}$$

である.

これから(27)を用いて境界層の速度分布が計算される．ふつうに行われているように u/u_1 を $y\sqrt{u_1/\nu x}/2$ に對して描いたものを第２圖に示す。圖に示すように Blasius の解とかなりよく一致する．比較のため同じ圖に outer solution をも記入した.

また局部的摩擦抵抗係數 c_f は

$$c_f=\mu(\partial u/\partial y)_0/\tfrac{1}{2}\rho u_1^2=\frac{3}{4\Gamma(2/3)}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/3}\left(\frac{3\pi^{1/4}}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}\sqrt{\nu/u_1x}.$$



第２圖　平板の境界層の速度分布

* u_1^2 を t の n 次式 $\sum_{i=0}^n c_it^i$ で表わすときは,

$$\frac{2\tau_0}{\rho u_1^2}=\sqrt{\frac{\nu}{UL}}\frac{1}{\Sigma c_it^i}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/3}\frac{1}{t^{2/3}}(c_0+3c_1t+\frac{9}{2}c_2t^2+\frac{81}{14}c_3t^3+\cdots+n!\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{3}{3n-2}c_nt^n).$$

$\Gamma(2/3)=1.354$ を代入すれば

$$c_f=0.6445\sqrt{\nu/u_1x} \qquad (29)$$

を得る．この式の数因子は厳密な値 0.664 より 2.9 パーセント小さい．

§7. Howarth の解との比較

次に Howarth(4) の解いた $u_1=u_0-\beta x$ の場合を考えよう，速度および距離をそれぞれ代表速度 u_0, 代表長 L を用いて無次元化し，x/L, $\beta L/u_0$ を改めて x, β とかくと，

$$u_1=1-\beta x. \qquad (30)$$

そこで　$\beta x=\xi$

とおけば

$$\varphi=x(1-\beta x/2)=x(1-\xi/2),$$
$$u_1^2=1-2\beta x+\beta^2x^2=1-2\beta\varphi.$$

$2\beta\varphi=\zeta$ とかけば

$$u_1^2=1-\zeta,\quad \zeta=2\xi(1-\xi/2). \qquad (31)$$

§3 の記法によれば，$b_0=1$, $b_1=-2\beta$ である，

$$t=\int_0^{\varphi}\frac{C(\varphi)}{4}d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\int_0^{\varphi}\frac{\sqrt{1+2b_1\varphi}}{4\varphi^{1/4}\sqrt{1+b_1\varphi}}d\varphi$$

において，積分變數を $\zeta=-b_1\varphi$ に變じ，ζ が 1 に比べて小さいことを考慮して被積分函數を二項定理で展開して積分し，$(3\pi^{1/4}/\sqrt{2})(-b_1)^{3/4}t=s$ とおけば，

$$s=\zeta^{3/4}\left(1-\frac{3}{14}\zeta-\frac{15}{88}\zeta^2-\frac{39}{240}\zeta^3-\cdots\right). \qquad (32)$$

また上の式から ζ を s で表わすと，近似的に

$$\zeta=s^{4/3}\left(1+\frac{4}{14}s^{4/3}+\frac{205}{539}s^{8/3}\right) \qquad (33)$$

を得る．これと(32)式（こゝに示した項までとつたもの）は $\zeta=0.3$ の邊まで十分によく一致する（第3圖參照）．さて，u_1^2 は ζ については直線的に減少するが，t あるいは s についてはそうではない．そこで

$$u_1^2=1+c_1t+c_2t^2=1+a_1s+a_2s^2 \qquad (34)$$

とおく．そして s のある値 s_1 と $s_1/2$ の二點において速度が(31)で與又られる値と一致するようにする．s_1 に對應する ζ を ζ_1 と書き，(32)と(33)によつて $s_1/2$ に對應する ζ を ζ_1 で表わすと，結局 a_1s_1, $a_2s_1^2$ が ζ_1 を用いて，

$$a_1s_1=-0.5874\zeta_1+0.2736\zeta_1^2+0.3009\zeta_1^3,$$
$$a_2s_2^2=-0.4126\zeta_1-0.2736\zeta_1^2-0.3009\zeta_1^3 \qquad (35)$$

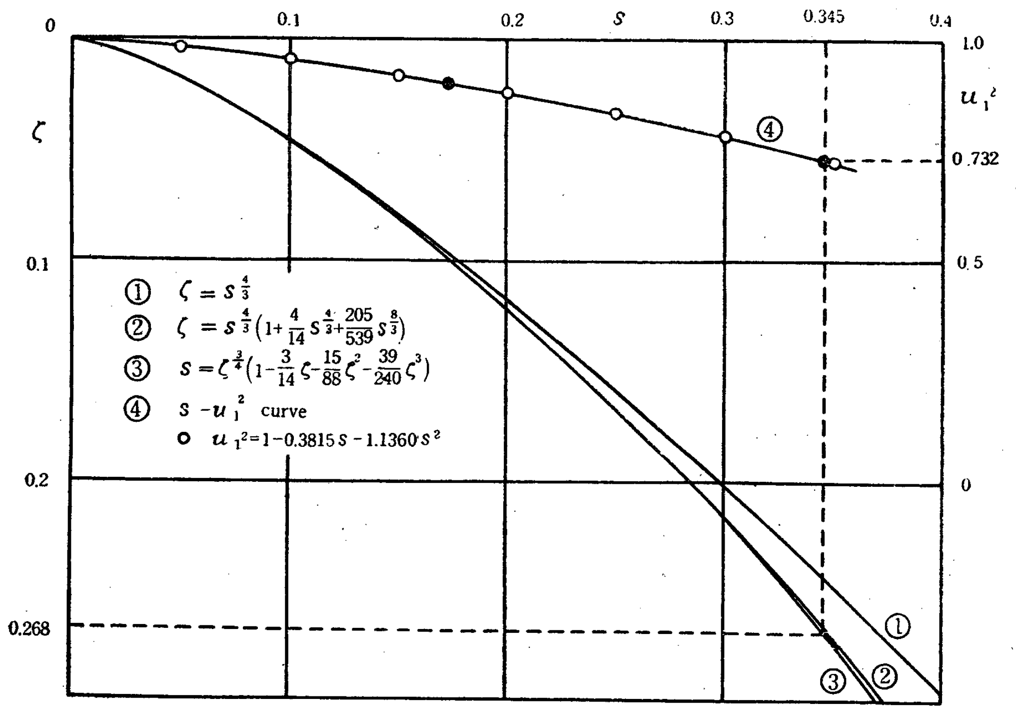
と表わされる．これを剝離の條件式

$$1+3a_1s_1+9/2\cdot a_2s_1^2=0$$

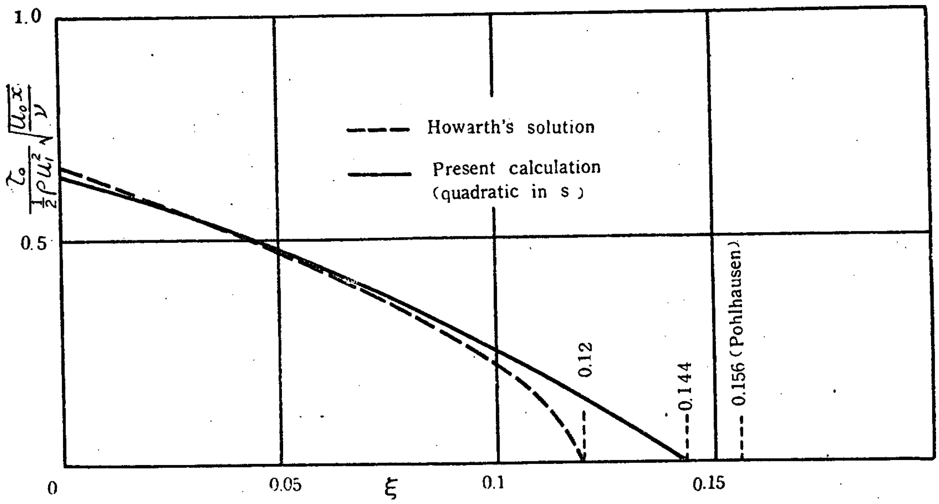
に代入すれば剝離を與える $\zeta_1(=\zeta_s)$ およびこれに對應する $\xi(=\xi_s)$ が次の値となる．

$$\zeta_s=0.268,\quad \xi_s=0.144. \qquad (36)$$

なお(35)式の ζ_1 の二乘以上の項を省略することは(32),(33)の代りに $s=\zeta^{3/4}$ とすることで，これは，φ から t を求める際に $u_1^2=\text{const.}$ に對する outer solution を用いることに相當する．



第3圖　直線的速度降下の場合の諸曲線



第4圖 直線的速度降下の場合の摩擦應力の分布

この省略によれば

$$\zeta_s=0.276,\quad \xi_s=0.149 \tag{37}$$

となり幾らか剝離が後れる．しかしその差はあまり大きいものではなく，このことから (12) 式の z-ψ の直線關係のとり方はあまり嚴密さを要しないことが分る．また u_1^2 を s の三次式で表わし，$s=s_1$, $2/3\cdot s_1$, $1/3\cdot s_1$ において正しい値に合わすようにすると，$\xi_s=0.148$ を得る．またこの場合 (37) の近似に相當するものは $\xi_s=0.155$ となる．

Howarthによれば $\xi_s=0.12$, Kármán-Millikan, Pohlhausen の方法によれば ξ_s はそれぞれ 0.102, 0.156 である．かくして本文の方法による ξ_s は Howarth と Pohlhausen の中間に位することが分る．

いま $\zeta_s=0.268$ ($s=0.345$) までを，$s=0.345$, 0.1725 において正しい u_1^2 を一致する二次式で表した場合に，ξ に對して $\tau_0/\frac{1}{2}\rho u_1^2\cdot\sqrt{u_0x/\nu}$ ((26) 式によつて計算される) を求めると第4圖のようになる．上にも示したように剝離はいくらか後れるが，Howarth の解との一致はかなり良好であるといえよう．

§ 8. $u_1=cx$ (c：常數) の場合

速度，距離を適當な代表量を用いて無次元化してから改めて上の形におく．この場合には $u_1^2=2c\varphi$ となるから，t と φ との關係は直ちに積分できて，

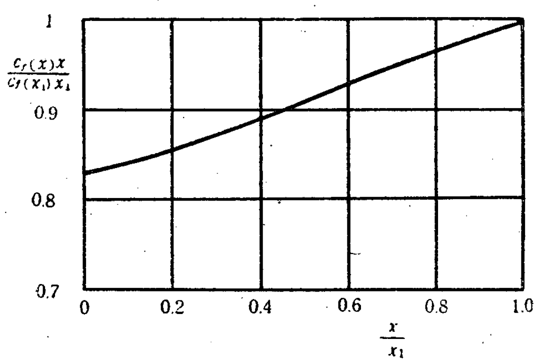
$$t=(2/3\pi^{1/4})\varphi^{3/4}$$

を得る．從つて u_1^2 は $t^{4/3}$ に比例する．前節と同樣に u_1^2 を t の二次式で表わすとして，φ のある値 φ_1 に對應する t を t_1 とおき，$t=t_1, t_1/2$ において速度が正しい値をとるようにする．このようにして最後にもとの x, u_1 に戻すと，$t=t_1$ に對應する $x=x_1$ における局部的摩擦抵抗係數 $c_f(x_1)$ として次の式を得る．

$$c_f(x_1)=\tau_0/\tfrac{1}{2}\rho u_1^2=2.618\ \sqrt{\nu/u_1x_1}.$$

また u_1^2 を $t=t_1$, $2/3\cdot t_1$, $1/3\cdot t_1$ において正しい値をとる三次式で表わすことにすれば $c_f(x_1)\sqrt{u_1x_1/\nu}=2.532$ を得る．嚴密解によればこの數値は 2.465 である．從つて二次式，三次式を用いたときの誤差はそれぞれ 6.2, 2.7 パーセントである．

こゝで注意したいのはこの値は $x=x_1$ までの速度分布を t の多項式で表わしたときの x_1 における値であるということである．そこでいま u_1^2 を t の二次式で表わした場合について $0\leqq x\leqq x_1$ における c_f の分布を調べてみる．計算は省略して結果だけを述べることにする．嚴密解によれば $[c_f(x)\cdot x]/[c_f(x_1)\cdot x_1]$ は 1 に等しいが，上の場合にはこれが x/x_1 (あるいは t/t_1) によつて多少變化する．しかしその値は $x/x_1=0$ においてさえも 0.8289 であつて 1 との差はあまり大きなものではない．(第 5 圖參照) なおこのことに關しては §10 の終を參照されたい．



第5圖　$u_1=cx$ の場合．$0\leqq x\leqq x_1$ における $c_f(x)x/c_f(x_1)x_1$

§ 9.　Schubauer の實驗との比較

Schubauer [(5)] は長，短軸の比が 2.96：1 の楕圓柱の長軸の方向に流れが當る場合についていろいろの位置で境界層の速度分布を測定し，さらに煙の流れの觀察から剝離が $x=1.99\pm0.02$ で起ることを見出している．こゝに x は前緣岐點から表面に沿うての距離を短軸の長さで表わしたものである．u_1^2 を t の多項式で表わすためには φ と t との關係を求める必要がある．このためにはまず u_1^2 を φ の多項式で表わさねばならぬ．Millikan [(6)] はこれについて，

$0\leqq\varphi\leqq1$ では $u_1^2=5.53\varphi-6.44\varphi^2+2.56\varphi^3$

$1\leqq\varphi\leqq2.5$ では $u_1^2=1\cdot159+0.8253\varphi$
$-0.3871\varphi^2+0.0455\varphi^3$,

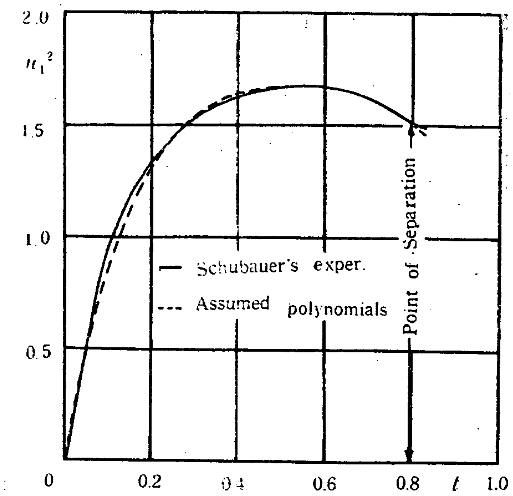
という式を與えている．この式は $\varphi=1$ において前半と後半の式の u_1^2 に僅かの差があつて (24) の計算に都合が悪いので前半の式の φ^3 の係數 2.56 の代りに 2.5527 としたものを用いることとした．

第 6 圖には u_1^2 と t との關係を示す．これを $\varphi=1$ に對應する $t=0.449$ を繼ぎ目として，

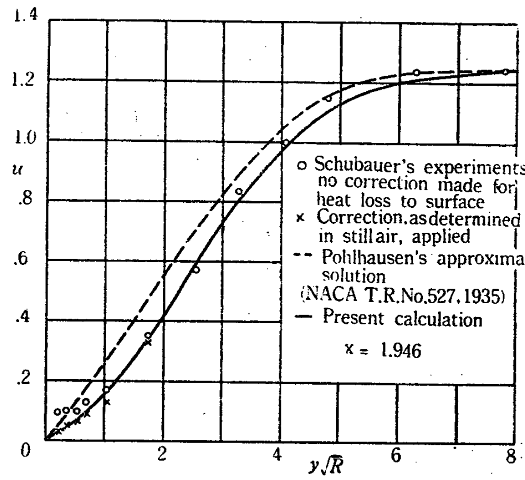
$0\leqq t\leqq0.449$ では $u_1^2=10.250t-21.789t^2$
$+15.944t^3$,

$0.449\leqq t\leqq0.8$ では $u_1^2=1.8444-2.149t$
$+5.993t^2-4.805t^3$.

と表わす．(第 6 圖) すると (25) 式から剝離は $t=0.794$ で起ることとなる．これは $\varphi=2.45$, $x=2.07$ に相當する．この數値は Schubauer の値より稍ゝ大きい．しかし $x=1.946$ $(t=0.766)$ における速度分布を (21) および (27) によつて求めてこれを Schubauer の實測値と比べてみると第 7 圖のように極めてよく一致する．



第6圖　Schubauer の實驗における u_1^2 の分布

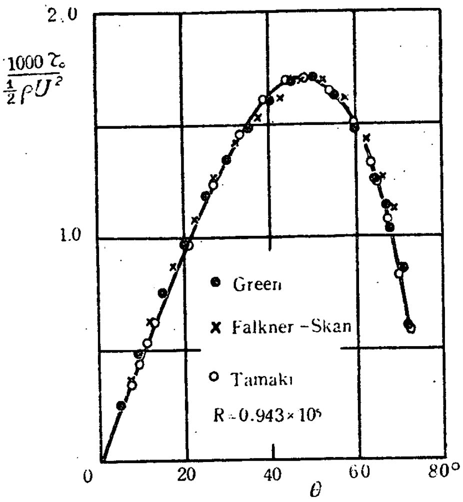


第7圖　Schubauer の實驗との比較．$x=1.946$ における境界層の速度分布

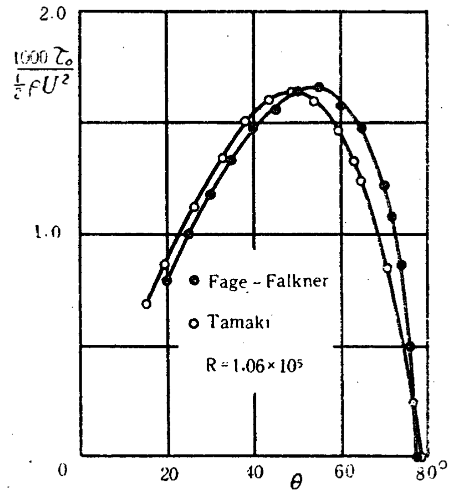
§ 10.　圓柱表面の摩擦の分布

$Ud/\nu=0.943\times10^5$(U：主流速度，d：直徑) における壓力分布の實測値を用いて Green [(7)], Falkner-Skan [(8)] は圓柱表面の摩擦の分布を計算している．本法による計算をこれと比較すると第 8 圖のようにかなりよく一致している．また $Ud/\nu=1.06\times10^5$ において Fage-Falkner [(9)] は表面管によつて摩擦の分布を測定している．このときの壓力分布の實測値を用いて計算した $\tau_0/\frac{1}{2}\rho U^2$ の分布を第 9 圖に示す*．計算によると摩擦の最大値が實驗値より少し上流側に出る．なおこゝで注

* 第 8 圖の計算では $u_1^2(\varphi)$, $u_1^2(t)$ 共に三次式の組合せを，また第 9 圖の計算では $u_1^2(\varphi)$ には二次式の組合せ，$u_1^2(t)$ には三次式の組合せを用いた．



第8圖 圓柱表面の摩擦應力の分布. 計算値の比較



第9圖 圓柱表面の摩擦應力の分布. 實驗値との比較

意すべきことは本文の方法では速度分布を廣い範圍にわたつて t の簡單な多項式で表わすので前縁附近の分布を正しく表わすことができないことである. §8 に示したように u_1 が x に比例するときは u_1^2 は $t^{1/3}$ に比例するが, 多項式表示では t の小さいところでその一次の項だけが殘るからである. しかしこのことは局部的摩擦抵抗係數に對してはあまり大きな誤差を引起さない. (§8 參照) 從つてこの部分の $\tau_0/\frac{1}{2}\rho U^2$ を求めるにはまず (26) によつて $\tau_9/\frac{1}{2}\rho u_1^2$ を求めこれに多項式によるのでなしに正しい u_1^2/U^2 を掛けてやれば大體正しい値が求まるのである. 圖の中心角 15° 以下の點はこのようにして求めた.

§ 11. φ と t との關係の簡易化

以上述べたようにこの方法はいろいろな場合にかなりよい精度をもつているようである. たゞその缺點は u_1 の積分から φ を求め, u_1^2 を φ の多項式で表わし, その係數を用いて積分により t を求め, u_1^2 を再び t の多項式で表わすというように, u_1^2 の多項式表示を二重に行うという手間があることである. しかし §7 の例からも窺われるように減速領域では $C(\varphi)$ として $u_1=\text{const.}$ の場合の値を用いてもさして大きな差異を生じない. 從つて φ から t を計算する際には u_1 の最大値より少し上流の適當な位置までを $u_1=cx(u_1^2=2c\varphi)$ に, それより下流は $u_1=\text{const.}$ でおきかえることにすれば φ と t との關係は一定に定まるからこれを用いれば多項式表示を二度行う必要はなくなり計算は著しく簡單になる.

いま $\varphi=\varphi_1$ を繼ぎ目として

$0\leqq\varphi\leqq\varphi_1$ では $u_1^2=b_1\varphi$; $\varphi\geqq\varphi_1$ では $u_1^2=\beta_0$

第 1 表

s	$F_1(s)$	s	$F_2(s)$	s	$F_2(s)$	s	$F_2(s)$	s	$F_2(s)$
0	0	1.0	0.501	3.0	1.004	5.0	1.394	7.0	1.742
0.1	0.089	1.2	0.566	3.2	1.046	5.2	1.430	7.2	1.775
0.2	0.150	1.4	0.624	3.4	1.087	5.4	1.466	7.4	1.808
0.3	0.203	1.6	0.678	3.6	1.127	5.6	1.502	7.6	1.841
0.4	0.252	1.8	0.729	3.8	1.167	5.8	1.537	7.8	1.873
0.5	0.298	2.0	0.779	4.0	1.206	6.0	1.572	8.0	1.905
0.6	0.341	2.2	0.826	4.2	1.245	6.2	1.607	8.2	1.937
0.7	0.383	2.4	0.872	4.4	1.283	6.4	1.641	8.4	1.969
0.8	0.424	2.6	0.917	4.6	1.320	6.6	1.675	8.6	2.001
0.9	0.463	2.8	0.961	4.8	1.357	6.8	1.709	8.8	2.032

(たゞし $\beta_0=b_1\varphi_1$) として(14)と(24)に從つて t を計算すると, $\varphi/\varphi_1=s$ とおくとき,

$0\leqq\varphi\leqq\varphi_1$ では $t=\frac{2}{3\pi^{1/4}}\varphi_1^{3/4}s^{3/4}$,

$\varphi\geqq\varphi_1$ では $t=\frac{2}{3\pi^{1/4}}\varphi_1^{3/4}[1+\frac{3}{4}\int_1^s(\sqrt{s}-\sqrt{s-1})^{1/2}ds]$

となる. それぞれの領域で $\varphi_1^{3/4}$ に乘ずべき係數,

$$F_1(s)=\frac{2}{3\pi^{1/4}}s^{3/4},\quad F_2(s)=\frac{2}{3\pi^{1/4}}[1+\frac{3}{4}\int_1^s(\sqrt{s}-\sqrt{s-1})^{1/2}ds]$$

を第 1 表に示す. これを用いれば φ_1 を定めさえすればすぐに t が計算できる. 實際, 多くの場合この方法で充分なようである.

第 2 章 縮む流體

§ 1. 基礎方程式

この場合の境界層の運動方程式は

$$\rho u\partial u/\partial x+\rho v\partial u/\partial y=\rho_1u_1\,du_1/dx+\partial/\partial y\cdot(\mu\partial u/\partial y) \qquad (1)$$

と書かれる. 文字の意味は前と同じである. 密度 ρ, 粘性係數 μ は場所によつて異なる. 添字 1 は層の外側を表わす.

いま添字 s を以て層外流を斷熱的に靜止させた狀態を表わすことにする.

連續の式は

$$u=(\rho_s/\rho)\partial\psi/\partial y,\quad v=-(\rho_s/\rho)\partial\psi/\partial x \qquad (2)$$

を滿足する流れ函數 ψ を導入することによつて滿たされる.

さて氣體の比熱は一定, かつ Prandtl 數が 1 であると假定し, 物體表面で熱傳達がないとすれば, 層內の速度 u と絕對溫度 T との間に

$$u^2+2c_pT=\text{const.}\quad (c_p：定壓比熱)$$

なる關係が成立つ. 層の外側の斷熱流に對しては

$$u_1^2+2c_pT_1=2c_pT_s=\text{const.}$$

が成立つから, 結局

$$u+2c_pT=u_1^2+2c_pT_1=2c_pT_s \qquad (3)$$

が成立つ. そこで Dorodnizin[10] に倣つて

$$u_1^2/(2c_pT_s)=\sigma_1,\quad u^2/(2c_pT_s)=\sigma \qquad (4)$$

なる量を導入する. σ_1 と層外氣流の Mach 數 $M(=u_1/a_1$, たゞし a_1 は局所音速) との關係は

$$\sigma_1=\frac{k-1}{2}M^2/(1+\frac{k-1}{2}M^2) \qquad (5)$$

で與えられる. こゝに k は比熱の比 (c_p/c_v) で空氣の場合は 1.4 である. σ を用いると

$$T_1/T_s=1-\sigma_1,\quad T/T_s=1-\sigma$$

となる.

次に粘性係數 μ は絕對溫度 T の n 乘に比例すると假定する. n は空氣の場合 0.76 とするのが普通である. この假定より

$$\mu/\mu_s=(T/T_s)^n=(1-\sigma)^n. \qquad (6)$$

密度 ρ については層外流が斷熱的であることと, 層內では y 方向に壓力が變らないことから次の關係が成立つ.

$$\rho/\rho_s=(1-\sigma_1)^{k/k-1}/(1-\sigma). \qquad (7)$$

さて第 1 章と同樣に獨立變數を x,y から x,ψ に變ずると,

$$(\partial/\partial x)_y=(\partial/\partial x)_\psi+(\partial/\partial\psi)_x(\partial\psi/\partial x)_y$$
$$=(\partial/\partial x)_\psi-(\rho/\rho_s)v(\partial/\partial\psi)_x,$$
$$(\partial/\partial y)_x=(\partial/\partial\psi)_x(\partial\psi/\partial y)_x=(\rho/\rho_s)u(\partial/\partial\psi)_x$$

を用いて, (1)は

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1-\sigma}{1-\sigma_1}u_1\frac{du_1}{dx}+\nu_s(1-\sigma_1)^{k/k-1}u\frac{\partial}{\partial\psi}[(1-\sigma)^{n-1}u\frac{\partial u}{\partial\psi}]$$

と變形される. こゝに ν_s は μ_s/ρ_s を表わす.

さてこの式の右邊第二項の [ ] 內にある $(1-\sigma)^{n-1}$ を考える. 空氣の場合には $M=1$ において $\sigma_1=0.1667$ であることを考慮すれば σ は表面附近では非常に小さく, その上冪指數 $n-1$ が小さいことから, この項は 1 に近い.

そこでこゝでは $(1-\sigma)^{n-1}=1$ とおく. そして $k/k-1$ を λ と書くことにすれば,

$$(1-\sigma_1)u\frac{\partial u}{\partial x}-(1-\sigma)u_1\frac{du_1}{dx}=\nu_s(1-\sigma_1)^{\lambda+1}u\frac{\partial}{\partial\psi}(u\frac{\partial u}{\partial\psi})$$

となる. そこで

$$z=\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{u_1^2-u^2}{2} \qquad (8)$$

を導入する. そして(4)に注意すれば上の方程式は

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\nu_s(1-\sigma_1)^\lambda u\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}$$

となり, さらに x の代りに

$$\varphi=\int_0^x u_1(1-\sigma_1)^\lambda dx \qquad (9)$$

を導入すると，結局

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\nu_s\frac{u}{u_1}\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}$$

が得られる．z_0 を以て $\psi=0$ における z を表わすとすれば $u/u_1=\sqrt{1-z/z_0}$ であるから上の式は

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\nu_s\sqrt{1-\frac{z}{z_0}}\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}$$

と書かれる．境界條件は $\varphi=0$ で $z=0$, $\psi=0$ で $z=z_0(\varphi)=(1/1-\sigma_1)\cdot u_1^2/2$, $\psi\to\infty$ で $z\to 0$ である．

§ 2. 無次元化

前章と同じように代表長 L, 代表速度 U を用いて無次元量

$$U^*=u/U,\ u_1^*=u_1/U,\ z^*=z/U^2,$$
$$\varphi^*=\varphi/(UL),\ \psi^*=\psi\sqrt{R_s}/(2UL),$$
$$R_s=UL/\nu_s \qquad (11)$$

を定義する．こゝに R_s の定義には ν_s を用いている．前と同様に簡單のため * を省略して書くと (10) は

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{z}{z_0}}\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} \qquad (12)$$

境界條件： $\varphi=0$ で $z=0$,

$\psi=0$ で $z=z_0(\varphi)=\dfrac{1}{1-\sigma_1}\dfrac{u_1^2}{2}$,

$\psi\to\infty$ で $z\to 0$

となる．これを第1章の縮まない流體の場合と比べると兩者の差は，z の定義に $1/(1-\sigma_1)$が掛つていること，從つて $\psi=0$ における境界條件が違うことと，ν の代りに ν_s が入つていることだけであつて，方程式の形は全然同じである．そして $\psi=0$ における條件 $z_0=(1/1-\sigma_1)\cdot u_1^2/2$ は層外の流れを與えれば簡單に計算されるから，上の方程式の解法は前章に示したものと全く同じである．實際の計算では $u_1^2/(1-\sigma_1)$ を φ あるいは t の多項式で表わすことを考えればよい．

以上で縮む流體の境界層の計算が縮まない流體の場合と殆ど同じ位の手數で行われることを示したが，次にこの兩者の間の相似關係をいますこし詳しく述べておこう．

§ 3. 縮む流體と縮まない流體の境界層における相似關係

(12) の解 z に對應する y の値は流れ函數の定義の式 (2) から求まる．すなわち

$$y=\int_0^\psi \frac{\rho_s}{\rho}\frac{d\psi}{u}.$$

いま y の代りに

$$\eta=\int_0^y\frac{\rho}{\rho_s}dy$$

を導入すれば，

$$\eta=\int_0^\psi\frac{d\psi}{u}$$

となる．そこで $y^*=y/L$, $\eta^*=\eta/L$ を他の量と同様に * を省略して書くと，η は次の式で與えられることになる．

$$\eta=\frac{2}{\sqrt{R_s}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{u}=\frac{2}{\sqrt{R_s}}\frac{1}{\sqrt{2(1-\sigma_1)z_0}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1-z/z_0}}$$

一方縮まない流體の場合には y が次の式で與えられる．

$$y=\frac{2}{\sqrt{R}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{u}=\frac{2}{\sqrt{R}}\frac{1}{\sqrt{2z_0}}\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1-z/z_0}}.$$

そこでいま $z_0(\varphi)=1/(1-\sigma_1)\cdot u_1^2/2$ が縮まない流體における $z_0(\varphi)=u_1^2/2$ と等しいような縮む流體の流れを考える．このときには兩者の解 $z(\varphi,\ \psi)$ は數値的に等しい．以下に數値的に互に等しくなる量を列記する．

縮む流體	縮まない流體
$z_0(\varphi)=\dfrac{1}{1-\sigma_1}\dfrac{u_1^2}{2}$,	$z_0(\varphi)=\dfrac{u_1^2}{2}$.
$z(\varphi,\ \psi)$,	$z(\varphi,\ \psi)$.
$\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{1-\sigma_1}\dfrac{u_1^2}{2}\right)=\dfrac{1}{(1-\sigma_1)^2}\dfrac{du_1}{d\xi}$,	$\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{u_1^2}{2}\right)=\dfrac{du_1}{dx}$.
$(1-\sigma_1)\dfrac{\Delta^{*2}}{\nu_s}$, $(1-\sigma_1)\dfrac{\Theta^2}{\nu_s}$,	$\dfrac{\delta^{*2}}{\nu}$, $\dfrac{\theta^2}{\nu}$.
$\dfrac{\Theta^2}{\nu_s}\dfrac{1}{1-\sigma_1}\dfrac{du_1}{d\xi}$,	$\dfrac{\theta^2}{\nu}\dfrac{du_1}{dx}$.
$\dfrac{\mu_s(\partial u/\partial\eta)_0}{\rho_s u_1^2}\cdot\dfrac{u_1\Theta}{\nu_s}$,	$\dfrac{\mu(\partial u/\partial y)_0}{\rho u_1^2}\cdot\dfrac{u_1\theta}{\nu}$.
Δ^*/Θ,	δ^*/θ.

こゝに，$\xi=\int_0^x(1-\sigma_1)^\lambda dx$,

$$\int_0^{h'}\frac{u}{u_1}\left(1-\frac{u}{u_1}\right)d\eta=\Theta,\ \int_0^h\frac{u}{u_1}\left(1-\frac{u}{u_1}\right)dy=\theta,$$

$$\int_0^{h'}\left(1-\frac{u}{u}\right)d\eta=\Delta^*,\quad \int_0^h\left(1-\frac{u}{u_1}\right)dy=\delta^*, \qquad (13)$$

である. h は u/u_1 が充分 1 に近くなる y を，h' はこれに對應する η を表わす.

こゝで導入された ξ および η は Dorodnizin がはじめて用いた變數である. 本文の方法によると相似關係が彼の方法より明確かつ一般的にに示され，またこの變數變換が必然的に現れて來るのが特徴である. ξ についていえば φ の定義式より

$$\varphi=\int_0^x u_1(1-\sigma_1)^\lambda dx=\int_0^\xi u_1 d\xi$$

となる.

さて上の對照から次のような近似法が生れる.

縮まない流體の場合に，ある點の境界層の速度分布の形がその點における層外速度勾配と層の厚さ（便宜上，上に定義した運動量厚 θ を用いることとする）で作つたパラメーター $\theta^2/\nu\cdot du_1/dx$ だけで定まると考えるのは普通に採られている方法であるが，縮む流體の場合これに對應するものは $\Theta^2/\nu_s\cdot 1/(1-\sigma_1)\cdot du_1/d\xi$ となる.

縮まない流體の場合にはよく知られているように $\mu(\partial u/\partial y)_0/\rho u_1^2\cdot u_1\theta/\nu$ および δ^*/θ と上記のパラメーター $\theta^2/\nu\cdot du_1/dx$ との關係を適當に近似化すると運動量積分の方程式を積分することにより x と θ 從つて x と $\theta^2/\nu\cdot du_1/dx$ との關係を求めることができ，このパラメーターがある負値に達する點として剝離點を求めることができる. このパラメーターと $\mu(\partial u/\partial y)_0/\rho u_1^2\cdot u_1\theta/\nu$ および δ^*/θ との關係は運動方程式が解けるような特別な u_1 の分布に對する解を用いて定める. 谷教授*(11) により，u_1^2 が φ について直線的に變化する場合の解（Howarth の解）にもとづいての近似計算法が示されているが，その場合の上記の諸量の數値は縮む流體において $u_1^2/(1-\sigma_1)$ が φ について直線的に變化する場合，いゝかえると $1/(1-\sigma_1)^2\cdot du_1/d\xi=\mathrm{const.}$ の場合のそれぞれ對應する量の數値に適用される.

§3. 運動量積分の積分

縮まない流體の場合境界層の運動方程式を y 方向に積分することにより次の運動量積分の方程式が得られることは周知の事柄である.

$$\frac{\tau_0}{\rho u_1^2}=\frac{d\theta}{dx}+\left(\frac{\delta^*}{\theta}+2\right)\frac{\theta}{u_1}\frac{du_1}{dx} \quad (14)$$

こゝに $\tau_0=\mu(\partial u/\partial y)_0$, δ^* および θ は (13) で定義された排除厚，運動量厚である.

パラメーター $\theta^2/\nu\cdot du_1/dx$ を H と書くことにする. $\tau_0/\rho u_1^2\cdot u_1\theta\nu$ および δ^*/θ は H の函數で谷教授**によれば

$$2\tau_0/\rho u_1^2\cdot u_1\theta/\nu-(3+2\delta^*/\theta)H=\Psi$$

なる量は物體の前縁岐點から剝離點に至るまでの間，H に對して殆ど直線的に變化する. そこで

$$\Psi=c-\kappa H \quad (c,\ \kappa \text{ は常數})$$

とおくと (14) は容易に積分できて

$$\frac{\theta^2}{\nu}=c\,\frac{1}{u_1^{\kappa+1}}\int_0^x u_1^\kappa dx$$

が得られ，從つて H は次の如く書かれる.

$$H=\frac{\theta^2}{\nu}\frac{du_1}{dx}=c\frac{du_1}{dx}\frac{1}{u_1^{\kappa+1}}\int_0^x u_1^\kappa dx. \quad (15)$$

c, κ の數値としては Howarth の取扱つた直線的速度勾配の場合の解にもとづけば $c=0.441$, $\kappa=4.7(\sim5)$ とすればよいことが示されている. そして剝離點は $H=-0.084$ で與えられる.

さて縮む流體の場合，ξ, η を用い運動方程式を y 方向に積分することにより (13) に定義された $\varDelta^*$, Θ および $S_0=\mu_s(\partial u/\partial\eta)_0$ を用いて，***

$$\frac{S_0}{\rho_s u_1^2}=\frac{d\Theta}{d\xi}+\left(\frac{\varDelta^*}{\Theta}+2-\sigma_1\right)\frac{\Theta}{u_1}\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{du_1}{d\xi} \quad (16)$$

が得られる. こゝで

$$2\frac{S_0}{\rho_s u_1^2}\frac{u_1\Theta}{\nu}-\left(3+2\frac{\varDelta^*}{\Theta}\right)\frac{\Theta^2}{\nu_s}\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{du_1}{d\xi}$$

という量は $u_1^2/(1-\sigma_1)$ が φ について直線的に變る流れに對しては縮まない流體の場合の Howarth の解にもとづく前記の Ψ と同一の値をとる. 從つて上と同じ考にもとづき (16) から

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\Theta^2}{\nu^s}\right)+\frac{\Theta^2}{\nu_s}\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{d\xi}\left(\frac{\kappa+1-2\sigma_1}{1-\sigma_1}\right)=\frac{c}{u_1}$$

を得る.

$$\frac{d\sigma_1}{d\xi}=\frac{2\sigma_1}{u_1}\frac{du_1}{d\xi}$$

なることに注意すれば上の式から

* この論文では一般に $u_1=a+bx^n$ の場合の解が取扱われている.

** 同論文では $\theta^2/\nu\cdot du_1/dx$ を σ, δ^*/θ を H と書いてある. 本文では σ を別の意味に用いているのでこれと異なる記號を用いる.

*** (6) 式から，μ_s は物體表面における μ と等しいことを注意しておく.

$$\frac{\Theta^2}{\nu_s}=c\frac{(1-\sigma_1)^{\frac{\kappa-1}{2}}}{u_1^{\kappa+1}}\int_0^\xi \frac{u_1^\kappa}{(1-\sigma_1)^{\frac{\kappa-1}{2}}}d\xi$$

が得られる. $c=0.441$, $\kappa=5$ とすれば

$$\frac{\Theta^2}{\nu_s}=0.441\frac{(1-\sigma_1)^2}{u_1^6}\int_0^\xi \frac{u_1^5}{(1-\sigma_1)^2}d\xi,$$

$$H=\frac{\Theta^2}{\nu_s}\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{du_1}{d\xi}=0.441\frac{du_1}{d\xi}\frac{1-\sigma_1}{u_1^6}$$

$$\int_0^\xi \frac{u_1^5}{(1-\sigma_1^2}d\xi$$

を得る. さらに $c_p/c_v=1.4$ とすれば $\lambda=3.5$, $d\xi=(1-\sigma_1)^{3.5}dx$, $du_1/d\xi=du_1/dx\cdot(1-\sigma_1)^{-3.5}$ となるから結局

$$H=0.441\frac{du_1}{dx}\frac{1}{u_1^6(1-\sigma_1)^{2.5}}$$

$$\int_0^x u_1^5(1-\sigma_1)^{1.5}dx \tag{17}$$

が得られる. 剝離點は $H=-0.084$ で與えられる.

この式は物體表面上の u_1 の分布が與えられたとき剝離點の位置を決定するのに役立つ. 實際には積分中の $(1-\sigma_1)^{1.5}$ は σ_1 が小さいためあまり變化しないから σ_1 として例えば無限上流の値 σ_∞ を代用することとして積分の外へ出し分母の $1-\sigma_1$ にも $1-\sigma_\infty$ を用いるとすれば

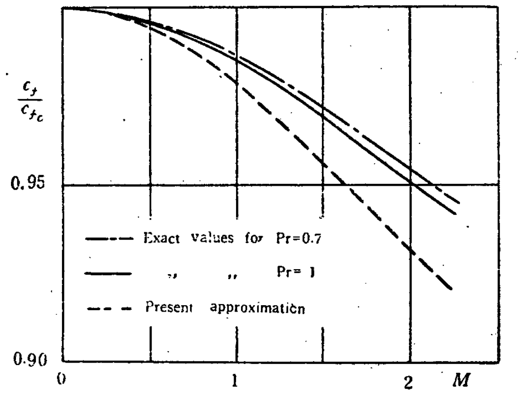
$$H=0.441\frac{du_1}{dx}\frac{1}{u_1^6(1-\sigma_\infty)}\int_0^x u_1^5dx.$$

を得る. これによつて壓縮性による剝離促進の程度を簡單に推定することができる.

§ 4. $(1-\sigma)^{n-1}=1$ とおいたことの影響

最後に本文の取扱いで運動方程式の粘性項にある $(1-\sigma)^{n-1}$ を1とおいたことの影響について一言する.

一般的にこの影響を論ずることは困難であるから, 平板 ($u_1=\text{const.}$) の場合についての考察から, 一般の場合を推すことにする. §1 の考察から, 方程式(12)の解から求められる平板の摩擦抵抗係數 $c_f=\tau_0/\frac{1}{2}\rho_1u_1^2$ と, 同じ層外狀態に對する縮まない流體の場合の抵抗係數 c_{f0} との比は $(1-\sigma_1)^{\frac{1-n}{2}}$ に等しいことが容易に結論される. 第10圖にこの關係 ($n=0.76$ とする.) を Mach 數に對して描いたものを示す. 同じ圖に Prandtl 數 Pr が 1 および 0.7 で表面熱傳達のない場合に筆者が數値解法によつて求めた嚴密な値 (50頁脚法の論文) を示してある. (Pr=1 の場合については既に Kármán と Tsien[12] が同様な計算を行つている.) これから, 本文の近似は壓縮性の影響をいくらか過大に評價していることが分る. 恐らく一般に壓力勾配のある場合にもこのことが言えるであろう. 然しながらこの圖からも分るように元來境界層に及ぼす壓縮性の影響は大きなものではない(圖の縦軸のスケールは非常に擴大してある)



第10圖 熱傳達のない平板の摩擦抵抗係數の Mach 數による變化

ことから, 本文の近似で實用上充分である.

§2. および §3 では §1 において導き出した方程式を直接解かないで運動量積分の利用によつて剝離に及ぼす壓縮性の影響を簡單に求める方法を示した. 然し一般に言つて縮まない流體の場合でもこの種の計算の精度についてはかなりの疑問があるようである. この點から言えば, むしろ方程式 (12) を第1章と同じ方法で解く方が無難である. 第1章の方法ではある點の境界層の速度分布形がその點における $\theta^2/\nu\cdot du_1/dx$ なるパラメーターで一義的に定まるというような假定を用いないので, いわゆる境界層の發達の履歴がほゞ正確に取入れられるからである.

以上第1章において縮まない流體に對する境界層方程式を解く新しい方法を示した. 實例計算の結果から見てこの方法はかなりよい精度をもつている.

第2章では縮む流體の場合への擴張を行つた. また縮む流體と縮まない流體の境界層に關する相似關係を示し, これにもとづいて剝離に及ぼす壓縮性の影響を簡單に求める方法をも示した.

文献

(1) Mises : *ZAMM*, 7 (1927), 425.

(2) Kármán-Millikan : *NACA T. R.* No. 504 (1934).

(3) Huber : *ZAMM*, 7 (1927), 469,

(4) Howarth : *Proc, Roy, Soc.*, **A**, 164 (1938), 547.

(5) Schubauer : *NACA T. R.* No. 527 (1935).

(6) Millikan : *J. Aero. Sci.*, 3 (1936), 91.

(7) Green : *ARC R&M*, No. 1313 (1930)

(8) Falkner-Skan : *ARC R&M*, No. 1314 (1930).

(9) Fage-Falkner : *ARC R&M*, No. 1369 (1931).

(10) Dorodnizin : *Appl. Math. & Mech.* U.S.S.R., 6 (1942), 450.

(11) Tani : *J. Phys. Soc. Japan*, 4 (1949), 149.

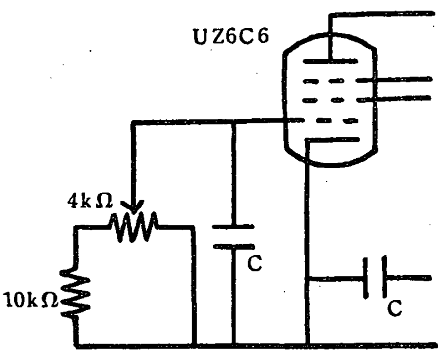
(12) Kármán-Tsien : *J. Aero. Sci.*, 5 (1938), 227.

(1951 年 5 月 2 日 受 理)

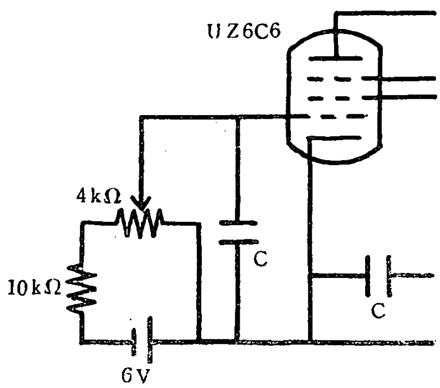
正　　誤

巻	號	頁	左	右	行*	誤	正
4	9〜10	243	○		12	（本表 a 圖）第 1 圖左下部	本表 b圖
4	9〜10	243	○		7′	(1) 式右邊第 2 項 $\frac{\varepsilon_0+1}{\varepsilon_0+2}\cdot(v+\beta)$	$\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0+2}\cdot(v_0+\beta)$
5	1〜2	58	○		12	緒む	縮む
5	5	175		○	第 9 圖	0005 Mg	0. 05 Mg
5	5	175		○	第 9 圖	10 Mg	1. 0 Mg
5	5	177		○	28	効果	効果
5	5	185	○		5′	$\cos\mu y$	$\cos 2\mu y$
5	5	187	○		7	Q	Q′
5	6	218	○		31	分解液	分解
5	6	230		○	第 1 表	Gu 20. 22	Cu 20. 22

*　行數に ′ を附したものは下より數えたもの。



誤
（a　圖）



正
（b　圖）