

コイルばねを傳わる弾性波について

吉村慶丸, 村田與四郎

On the Elastic Waves Propagated along Coil Springs

Yoshimaru YOSHIMURA and Yoshiro MURATA.

ABSTRACT: In treating the problem of surging and shock absorbing action of a coil spring, the velocities of waves propagated along the spring are usually assumed to have constant values $\sqrt{K/M}$, independent of their wave lengths, where K denotes spring constant for extension or torsion, M the mass per unit length of the spring axis. This assumption, which is equivalent to replacing the spring by a straight rod with the same elasticity and density as the spring, is considered to be correct approximately for very long waves, but the behavior of the spring for such short waves or impulses as the above examples is not known to us. This paper clarifies these points by analysing the dispersive characters of the coil spring. According to the results, there are three waves, which coexist and couple with each other; their velocities along the wire are v_1 , v_2 and v_3 respectively. v_1 - and v_2 -waves correspond to the longitudinal waves along the axis of the spring, and v_3 -wave the rotational wave. v_1 and v_3 have constant values $\sqrt{K/M}$ for long wave length, and very small minimums at the wave length equal to the coil circumference. For very short wave length, the curvature of the wire may be neglected reasonably. (Received January 9, 1952)

コイルばねのサージングや衝撃に對する緩衝作用を取扱つたものを見ると、ばねを傳わる弾性波の速度はその周期或いは波長に無關係に一定であり、その値は、 K をばね常數、 M をばねの軸方向の単位長さ當りの質量とするとき、 $\sqrt{K/M}$ によつて與えられるといふ假定が常に行われている。これはばねをその靜的常數 K と同じヤング弾性率をもち、 M と同じ線密度をもつ眞直ぐな棒でおきかえたことに相當する。極めて長い波長の波に對してこの假定が正しいことは疑う餘地がないが、上記の例の様に早い周期の波又は衝撃に對してどうなるかは、實際に計算を行つて見なければ分らないことである。この問題に關しては A. E. H. Love の研究 (1900) [1] があるのみであるが、その計算では、ばねを形成する針金のその軸の周りの廻轉慣性、即ち針金の捩りの波に對する慣性項が省略されている（これは重大な誤

りである）のみならず、數値計算も行われていないので、波の具體的な性質も不明である。こゝではこれらの點について計算を行い、實驗結果と比較する。

尙この計算は本來ばねを目的として行つたものであるが、その結果は、曲率をもつ構造物或いは高分子物質、多結晶質等の様に構造要素の接續の有様が直線的でない様な物質の中の波動の傳播の機構に對する一つの類型を與えるものと考えられぬこともないであろう。

1. 基礎方程式

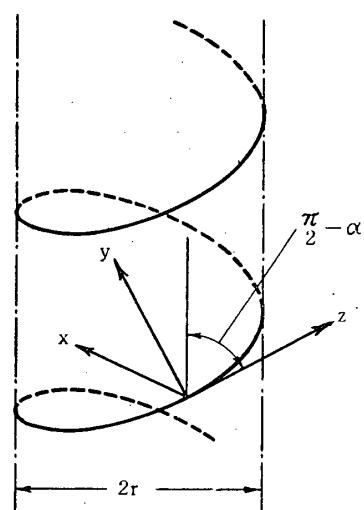
コイルばねを形成する針金の斷面は圓形とし、螺旋 (helix) 上の任意の點における主法線、陪法線及び切線を夫々 x , y , z 軸にとり、 x , y , z 軸に關する變位成分を u , v , w 、斷面力の成分を N_1 , N_2 , T 、斷面モーメントの成分を G_1 , G_2 , H とすれば、運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s} - N_2 \tau_0 + T \kappa_0 &= \rho a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s} + N_1 \tau_0 &= \rho a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial s} - N_1 \kappa_0 &= \rho a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial G_1}{\partial s} - G_2 \tau_0 + H \kappa_0 - N_2 &= 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial s} + G_1 \tau_0 + N_1 &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial s} - G_1 \kappa_0 &= 2\rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

によつて與えられる。こゝに ρ は針金の線密度、 a は針金の断面積、 κ_0 は螺線の曲率ベクトルの y 成分 (x 成分は 0)、 τ_0 は針金の捩れ率、 β は変形前の $x z$ 面と変形後のそれに對應する面とのなす角、 I は針金の断面のその一つの直徑の周りの慣性能率である。従つて第 1 圖の如く α をとれば

$$\kappa_0 = \frac{\cos^2 \alpha}{r}, \quad \tau_0 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \quad (1.3)$$



第 1 圖

となる。針金はコイルの直徑に比べて極めて細いものを考えるから、(1.2) の第 1、第 2 式における廻轉慣性の項は省略してある。第 3 式の慣性項 $2\rho I \partial^2 \beta / \partial t^2$ は捩れの波に相當し、コイルばねの波動に對しては本質的なものであり、Love がその計算で省略したことは重大な誤りである。

次に變位と曲率、曲率と斷面モーメントとの關

係は、變形後の針金の軸の曲率ベクトルの x 、 y 成分を κ_1 、 κ_2 、捩れ率を τ とすると

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= EI \kappa_1 \\ G_2 &= EI(\kappa_2 - \kappa_0) \\ H &= 2\mu I(\tau - \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_0 \beta - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \tau_0 u \right) \\ &\quad - \tau_0 \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \tau_0 v + \kappa_0 w \right) \\ \kappa_2 &= \kappa_0 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \tau_0 v + \kappa_0 w \right) \\ &\quad - \tau_0 \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \tau_0 u \right) \\ \tau &= \tau_0 + \frac{\partial \beta}{\partial s} + \kappa_0 \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \tau_0 u \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

によつて與えられる。こゝに μ は材料の剪断剛性率である。

2. 進行波に對する解

針金の變形は不伸脹として差支えないから

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \kappa_0 u \quad (2.1)$$

とおくことが出来る。これを満足する波動の解として

$$\left. \begin{aligned} u &= -(m/\kappa_0) W \sin(ms - pt) \\ v &= V \cos(ms - pt) \\ w &= W \cos(ms - pt) \\ \beta &= B \cos(ms - pt) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

を假定すれば、(1.4) 及び (1.5) により

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= EI g_1 \cos(ms - pt) \\ G_2 &= EI g_2 \cos(ms - pt) \\ H &= 2\mu I h \sin(ms - pt) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \kappa_0 B + (m^2 + \tau_0^2)V + (2m^2 \tau_0/\kappa_0) \\ &\quad - \tau_0 \kappa_0)W \\ g_2 &= 2\tau_0 m V + (m^3/\kappa_0 - \kappa_0 m + \tau_0^2 m/\kappa_0)W \\ h &= -mB - \kappa_0 m V - \tau_0 m W \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

を得る。(2.3) を (1.2) に入れゝば

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -EI(mg_2 + \tau_0 g_1) \cos(ms - pt) \\ N_2 &= [-EI(mg_1 + \tau_0 g_2) \\ &\quad + 2\mu I \kappa_0 h] \sin(ms - pt) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となる。従つて (2.3)、(2.4) 及び (2.5) を (1.2) の第 3 式、(1.1) の第 2 式及び (1.1) の第 1、第 3 式より T を消去した結果

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial s^2} + \kappa_0^2 N_1 - \tau_0 \frac{\partial N_2}{\partial s} = \rho a \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} - \kappa_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (2.6)$$

に代入することによつて、 B , V , W に關する連立一次方程式

$$\begin{cases} P_1 B + Q_1 V + R_1 W = 0 \\ P_2 B + Q_2 V + R_2 W = 0 \\ P_3 B + Q_3 V + R_3 W = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} P_1 = EI\kappa_0^2 + 2\mu Im^2 - 2\rho I p^2 \\ Q_1 = EI\kappa_0(m^2 + \tau_0^2) + 2\mu Im^2 \kappa_0 \\ R_1 = EI\tau_0(2m^2 - \kappa_0^2) + 2\mu Im^2 \tau_0 \\ P_2 = EI\kappa_0(m^2 + \tau_0^2) + 2\mu Im^2 \kappa_0 \\ Q_2 = EI[(m^2 + \tau_0^2)^2 + 4m^2 \tau_0^2] + 2\mu Im^2 \kappa_0^2 \\ \quad - \rho ap^2 \\ R_2 = EI[(\tau_0/\kappa_0)(m^2 + \tau_0^2)(2m^2 - \kappa_0^2) \\ \quad + 2(m^2 \tau_0/\kappa_0)(m^2 - \kappa_0^2 + \tau_0^2)] \\ \quad + 2\mu Im^2 \kappa_0 \tau_0 \\ P_3 = EI\tau_0 \kappa_0(2m^2 - \kappa_0^2) + 2\mu Im^2 \kappa_0 \tau_0 \\ Q_3 = EI[\tau_0(2m^2 - \kappa_0^2)(m^2 + \tau_0^2) \\ \quad + 2m^2 \tau_0(m^2 - \kappa_0^2 + \tau_0^2)] + 2\mu Im^2 \kappa_0^2 \tau_0 \\ R_3 = EI[(\tau_0^2/\kappa_0)(2m^2 - \kappa_0^2)^2 \\ \quad + (m^2/\kappa_0)(m^2 - \kappa_0^2 + \tau_0^2)^2] \\ \quad + 2\mu Im^2 \kappa_0 \tau_0^2 - \rho ap^2(1/\kappa_0)(m^2 + \kappa_0^2) \end{cases} \quad (2.8)$$

が得られる。従つて特性方程式は

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

によつて與えられ、これを解くことによつて、與えられた m 即ち波長に對して振動數 p 、従つて速度が求められる。この得られた p の値を (2.7) に入れることによつて、各變位成分の振幅 B , V , W の比が計算されるから、これによつて (2.2) の様な波に關する諸量が決定されたことになる。

3. ピッヂが極めて小さいばね

コイルのピッヂがその半徑及びそれを傳わる波の波長に比べて極めて小さい場合、即ち

$$\tau_0 \ll m, \kappa_0 \quad (3.1)$$

なる場合には、行列式 (2.9) の計算において τ_0^2 以上を省略出来るものと考えれば、

$$\left. \begin{aligned} R_1, R_2, P_3, Q_3 &= 0 \\ P_1 &= EI\kappa_0^2 + 2\mu Im^2 - 2\rho I p^2 \\ Q_1 &= P_2 = EI\kappa_0 m^2 + 2\mu I \kappa_0 m^2 \\ Q_2 &= EI m^4 + 2\mu I m^2 \kappa_0^2 - \rho ap^2 \\ R_3 &= EI(m^2/\kappa_0)(m^2 - \kappa_0^2)^2 \\ &\quad - \rho ap^2(m^2/\kappa_0 + \kappa_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

とおくことが出来るから、 $v-\beta$ 波と w 波(或いは $u-w$ 波) とが分離され、お互に獨立に存在することが出来る。而して $v-\beta$ 波はばねをその軸の方向に伸縮する波(これはばねに對しては縦波、針金に對しては曲げ振り波)を表わし、 w 波はばねをその軸の周りに捩る波(ばねに對しては横波、針金に對しては曲げ波)を表わすから、ばねのピッヂが極めて小さい場合には、ばねを軸方向に伸縮する波と、軸の周りに捩る波とは獨立であるといふことが出来る(一般には兩者が聯成する)。

今コイルの半徑を r 、針金の半徑を c 、波の波長を λ と記し、

$$n = \frac{r}{c}, \quad x = \frac{\lambda}{2\pi r} = \frac{\kappa_0}{m} \quad (3.3)$$

とおけば

$$I = \pi c^4 / 4$$

$$\begin{aligned} \text{であるから、(2.9) 及び (3.2) より } v-\beta \text{ 波に} \\ \text{對する } p/m \text{ 即ち波の速度 } v \text{ を與える式として} \\ v_1^2 = p_1^2 / m^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{1+\nu}{2} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{1+\nu} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2n^2 x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right\} \\ \mp \sqrt{\left[\left(x^2 + \frac{1}{1+\nu} \right) + \frac{1}{2n^2 x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right]^2 - \frac{2(1-x^2)^2}{n^2 x^2 (1+\nu)}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

w 波に對する速度を與える式として

$$v_3^2 = p_3^2 / m^2 = \frac{E}{\rho} \frac{(1-x^2)^2}{4n^2 x^2 (1+x^2)} \quad (3.5)$$

を得る。こゝに、(3.4) の複號は v_1 に對しては $-$ 、 v_2 に對しては $+$ を取る。これから $v-\beta$ 波は二種類、 w 波は一種類存在することが分る。尙

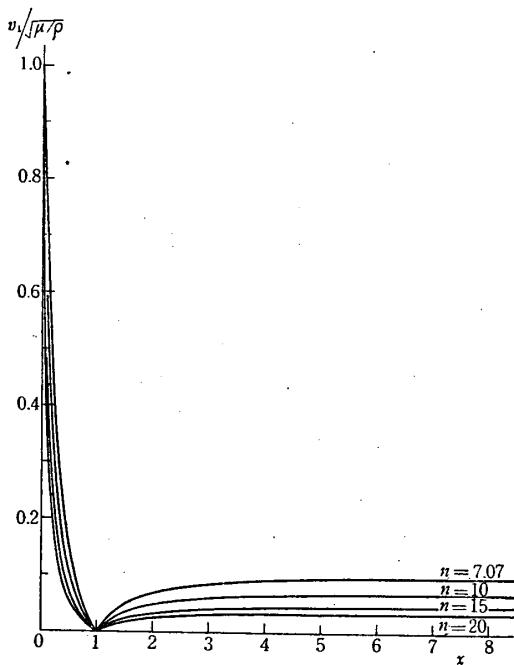
$$\frac{1}{n^2 x^2} = c^2 m^2 = \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 \ll 1 \quad (3.6)$$

が成立つ様な波長の範圍に對しては (3.4) は

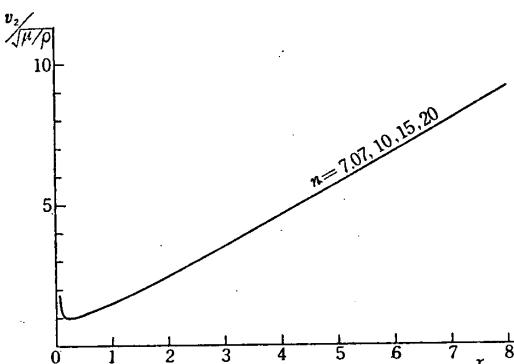
$$v_1^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\frac{1}{2n^2 x^2} (1-x^2)^2}{\left(x^2 + \frac{1}{1+\nu} \right) + \frac{1}{2n^2 x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right)} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} v_2^2 = & \frac{\mu}{\rho}(1+\nu) \left[\left(x^2 + \frac{1}{1+\nu} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2n^2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

の如く簡略化される。 $v-\beta$ 波に對しては、波長が針金の半径 c に比べて大きい範囲では (3.7), (3.8) により、大きくなない場合には (3.4) により、又 w 波に對しては (3.5) により速度が計算される。波長に對する速度變化を、 n を parameter として計算した結果を夫々第 2, 3, 4 圖に示す。

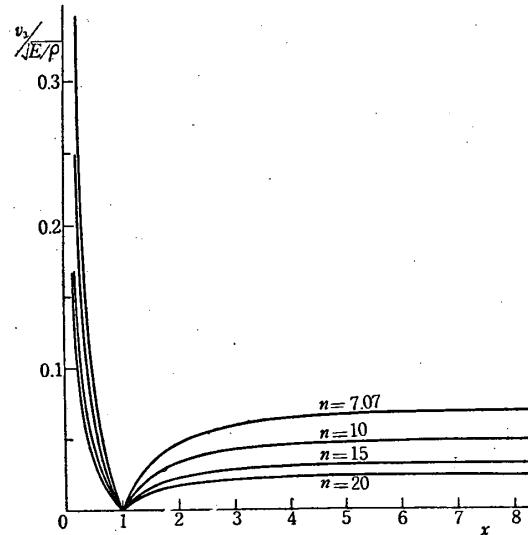


第 2 圖



第 3 圖

これによれば、 v_1 波、 v_3 波（速度 v_1 の波及び v_3



第 4 圖

の波を以下夫々 v_1 波、 v_3 波とよぶ）は大體相似の特性を示し、何れも $x=1$ 即ち $\lambda=2\pi r$ に於いて速度が 0、 λ が $2\pi r$ よりも増加すると共に速度が増加し、 λ が $2\pi r$ の 3 乃至 4 倍以上になると略々一定の値を持つ。これに對して $v-\beta$ 波の他の一つ v_2 波（速度 v_2 の波を以下 v_2 波と呼ぶ）は全く異なる性質を示し、上記の二種類の波に比べて速度がはるかに大きい。今特定の波長に對する速度を示すと第 1 表の如くであり、 v_1 波は針金に對して横波に相當し、 v_3 は曲げの波であることが推察される。

第 1 表

	$\lambda \rightarrow 0$	$\lambda = 2\pi r$	$\lambda \rightarrow \infty$
v_1	$\sqrt{\mu/\rho}$	0	$\sqrt{(\mu/\rho)[1/(2n^2)]}$
v_2	∞	$\sqrt{\frac{E}{2\rho} \frac{2+\nu}{1+\nu} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)}$	∞
v_3	∞	0	$\sqrt{\frac{E}{4\rho n^2}}$

次に $v-\beta$ 波の二種類 v_1 波及び v_2 波に對する振幅の成分の比は (2.7) 及び (3.2) より

$$\frac{V_i}{B_i} = -\frac{EI\kappa_0^2 + 2\mu Im_i^2 - 2\rho I\rho_i^2}{EI\kappa_0 m^2 + 2\mu I\kappa_0 m^2}, i=1, 2 \quad (3.9)$$

によつて與えられるから、(3.4) により

$$\begin{aligned} \frac{V_1/B_1}{V_2/B_2} = & -\frac{r(1+\nu)}{2+\nu} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4n^2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left[\left(x^2 + \frac{1}{1+\nu} \right) + \frac{1}{2n^2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right]^2 - \frac{2}{(1+\nu)n^2x^2} (1-x^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。従つて

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V_1}{B_1} &= \frac{r}{2+\nu} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V_2}{B_2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(1+\nu)}{2(2+\nu)} \frac{1}{n^2 x^2} = \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

となり、波長の極めて小さい所では v_1 波においては v , β が有限の振幅を有するが、 v_2 波においては β の振幅が 0 で v 成分のみが存在することが分る。即ち振幅の點でも v_1 波は横波である（少くとも極めて短い波長に對しては）が、 v_2 波は速度を考え合せると曲げの波であると思われる。

第 2, 3, 4 圖に於いて求められた速度と波長の關係から、周期を T' とするとき

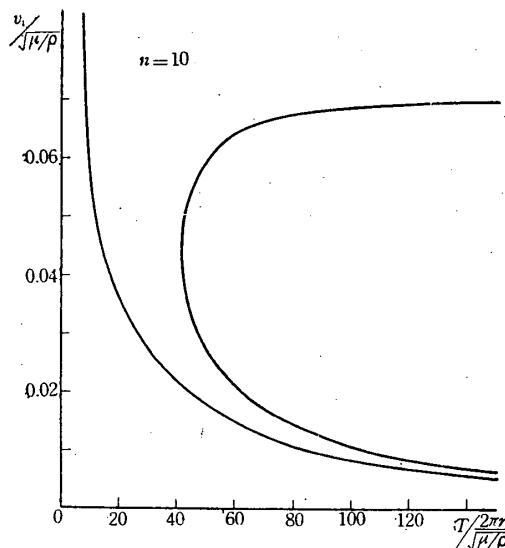
$$T' = \lambda/v$$

或いは

$$\frac{T'}{\frac{2\pi r}{\sqrt{\mu/\rho}}} = \frac{x}{\frac{v}{\sqrt{\mu/\rho}}} \quad (3.12)$$

により T' を求めることが出来る。従つて速度と周期、周期と波長の關係を v_1 波に對して示すと夫々第 5, 6 圖が得られる。この様子は v_3 波に對しても同様であるから省略する。これらの圖から $x \geq 1$ なる範圍の波に對しては、一定の速度及び波長において周期が極小になり、それ以上の周期に對しては三つの速度及び波長が存在することが分る。

v_1, v_2, v_3 は何れも針金に沿う速度であるから、ばねの軸に沿う波の傳播速度は夫々



第 5 圖

$$U_1 = v_1 \sin \alpha, U_2 = v_2 \sin \alpha, U_3 = v_3 \sin \alpha$$

(3.13)

によつて與えられる。従つて針金の全長を l 、ばねの長さを L 、ピッヂを p 、巻數を N とすれば

$$\left. \begin{aligned} l &= 2\pi r \cdot N, \quad p = L/N \\ \sin \alpha &= p/2\pi r = L/l \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

であるから

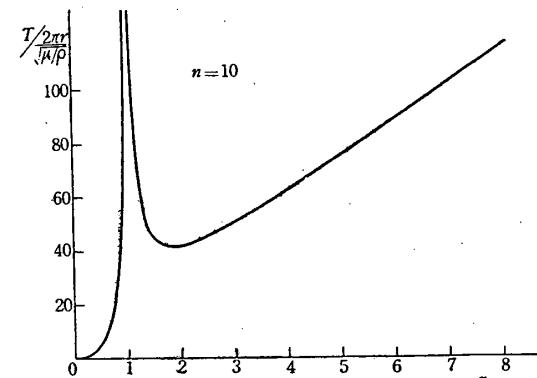
$$U_1 = v_1 \frac{p}{2\pi r}$$

従つて極めて長い波長の波に對しては

$$(U_1)_{x \rightarrow \infty} = (v_1)_{x \rightarrow \infty} \cdot \frac{p}{2\pi r} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{2} n}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{c}{\sqrt{2} r} \cdot \frac{p}{2\pi r} \quad (3.15)$$

である。



第 6 圖

(3.15) によつて與えられる無限大の波長に對する速度が、ばねを直線状の彈性棒でおきかえた場合の速度と一致することは次の如くして證明される。即ちコイルばねを靜的に P なる軸力で引張った場合の伸び ΔL は

$$\Delta L = P l r^2 \frac{\cos^2 \alpha}{2\mu I}$$

である [2] から、ばねの軸方向の歪を ε とすれば

$$P = \frac{\mu \pi c^4}{2r^2 l} L \varepsilon$$

となる。従つてばねを直線棒でおきかえた場合のヤング率に相當するばね常数 K は

$$K = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{\mu \pi c^4 L}{2r^2 l}$$

によつて與えられる。又ばねの軸方向の単位長さ當りの質量を M とすれば

$$M = \frac{l\pi c^2 \rho}{L}$$

であるから、軸に沿う速度は

$$\sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{c}{\sqrt{2} r} \frac{L}{l} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{c}{\sqrt{2} r} \frac{\rho}{2\pi r} \quad (3.16)$$

によつて與えられ、 $(U_1)_{x=\infty}$ と一致することが分る。

以上によつて、コイルばねは、極めて長い波長の波に對してのみ、ばね常數に相當するヤング率又は剛性率を有する直線棒と見做すことが出来るが、有限の波長、殊に $2\pi r$ に近い波長に對しては、この様な考えは全く成立たないことが分る。

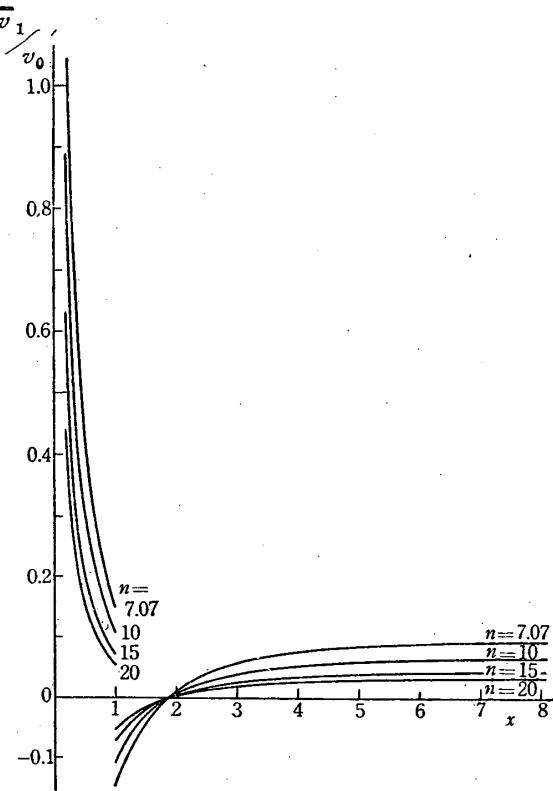
コイルばねでは上に述べた如く位相速度が波長によるから、波動のエネルギーは群速度によつて運ばれる。位相波の速度を v 、振動數を ν 、波長を λ 、群速度を \bar{v} で表わせば

$$\bar{v} = \frac{v}{1 - \frac{\nu}{v} \frac{dv}{d\nu}} \quad (3.17)$$

或いは

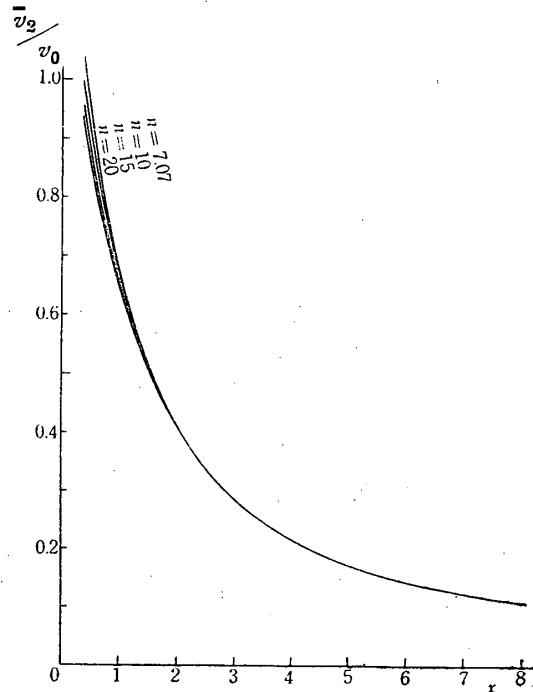
$$\bar{v} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (3.18)$$

で與えられるから、第2、第3、第4圖から v_1 v_2 、 v_3 波に對する群速度 \bar{v}_1 、 \bar{v}_2 、 \bar{v}_3 が計算される。それを第7、8、9圖に示す。その結果によ

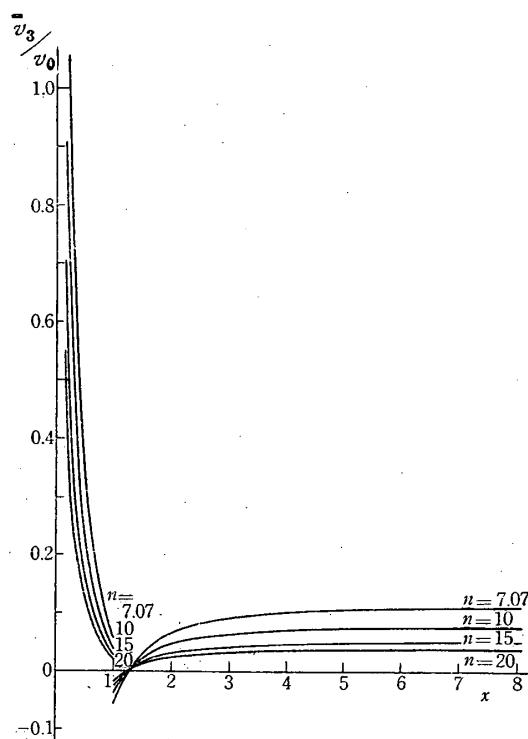


第 7 圖

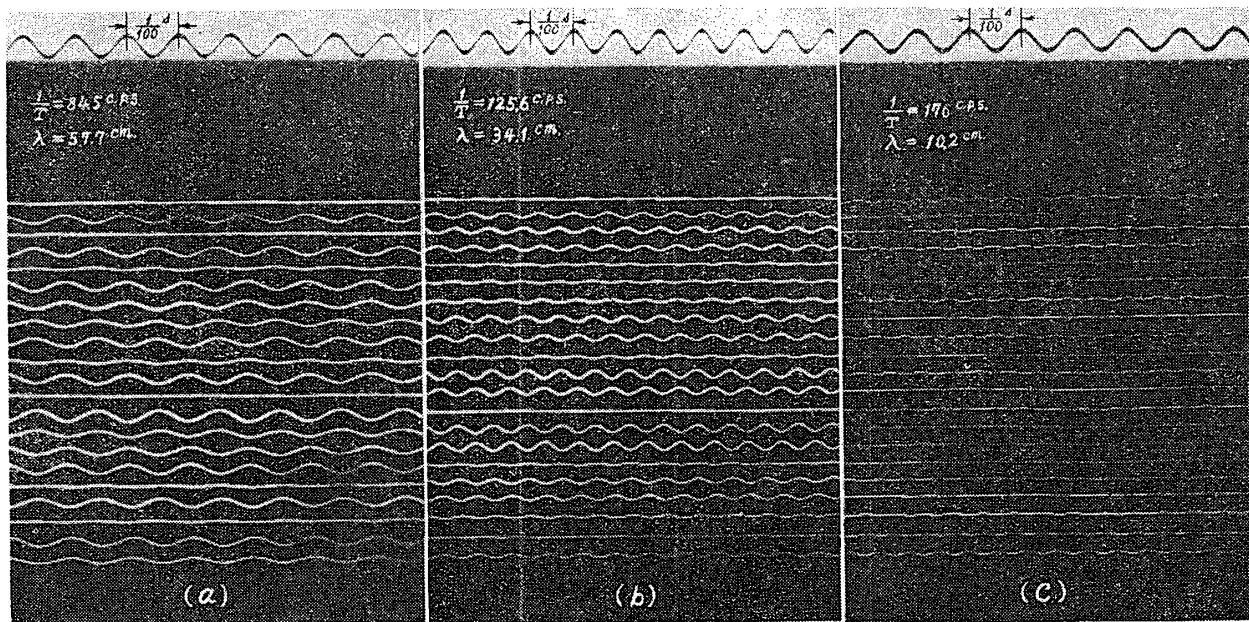
れば、波長の極めて長い所では、 v_1 波、 v_3 波に關しては群速度は位相速度に一致して一定であるが、短い波長に對しては變化し、且つ v_1 波に對しては $\lambda = 1.8 (2\pi r)$ 附近、 v_3 波に對しては $\lambda = 1.2 (2\pi r)$ 附近に群速度 0 のところが存在



第 8 圖

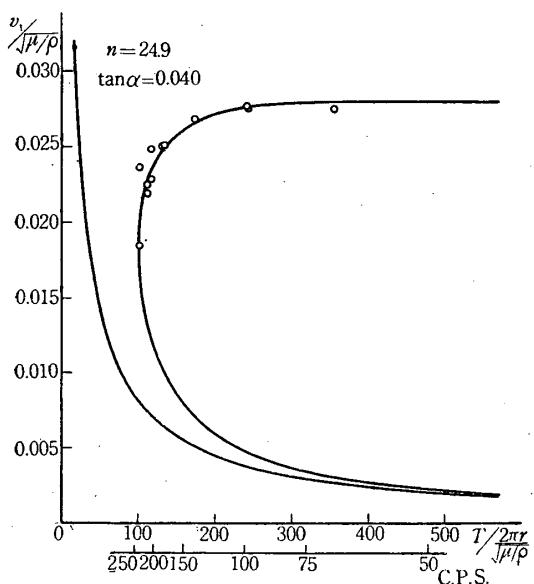


第 9 圖

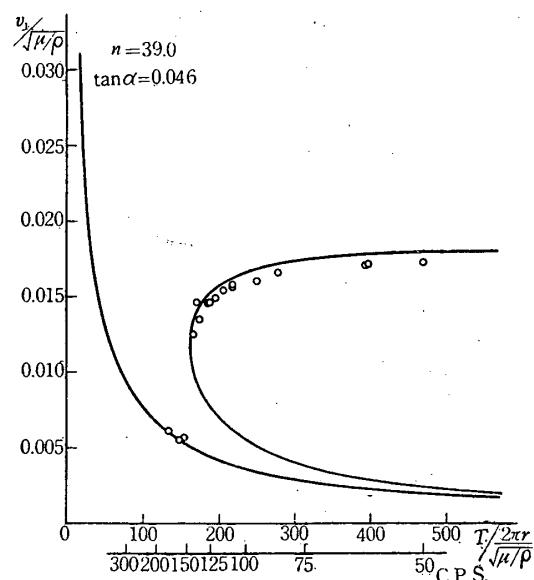


第 12 圖

點を残して煤を塗り、その光點の運動を optical lever の方法で、廻轉するドラム上のフィルムに撮影した。又起振装置としては、上端を固定したコイルばねの下端に線輪を固着し、その線輪に永久磁石による磁場の中で交流を通すことによつて、ばねの軸方向の振動を與えた。而して振動周期は交流のサイクルを變えることによつて變化した。實驗では無限に長いばねを用うことが不可能であるから、交流の周期を調節してばねが全體として共鳴する點を、一次から順次高次の調和振動まで撮影して調べ、共鳴の際の周期及び node の



第 13 圖



第 14 圖

位置から、波長從つて進行波の速度を求めた（第 12 圖に撮影したフィルムの數例を示す）。その結果を $n = 24.9, \tan \alpha = 0.040$, 及び $n = 39.0, \tan \alpha = 0.046$ の二つのばねについて、夫々第 13 圖及び第 14 圖に示す。實線は何れも前節の τ_0 の補正を施した速度を周期に對して表わしたものであり、兩者共實驗と計算とが可なりよく一致している。尙第 13 圖では、 $\lambda \geq 2\pi r$ の波に對する最小周期は約 230 サイクルであり、それ以下の周期の波は、交流發電機の可能範圍を超えるので

し、それより小さな波長に對しては、負の群速度を示す範囲がある。

4. 位相速度のピッチによる補正

捩れ率半径の極めて大きい、従つてピッチの小さいばねに對する計算が、 $\tau_0=0$ とおくことによつて、前節の如く簡単化されることは好都合であるが、 v_1 波及び v_3 波の速度が $\lambda=2\pi r$ において 0 となることを考へると、少くともその附近では τ_0 を考慮した正確な計算を必要とすることが感ぜられる。

今捩れ率半径を σ 即ち

$$\tau_0 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} = \frac{1}{\sigma} \quad (4.1)$$

で表わし、且つ

$$y^2 = \frac{\tau_0^2}{m^2} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\sigma} \right)^2 \quad (4.2)$$

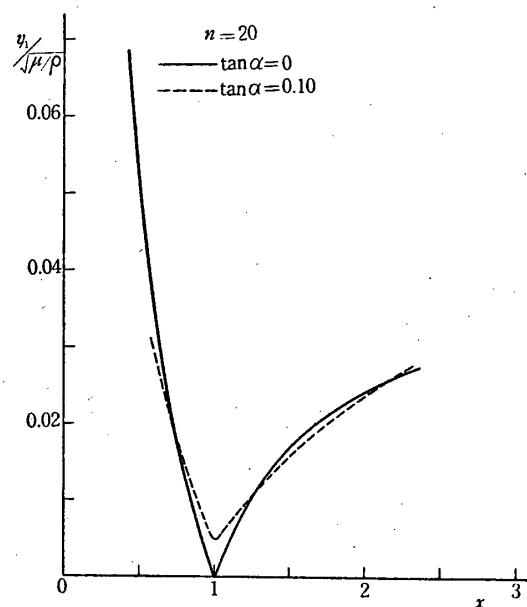
とおき、行列式 (2.9) を y^2 まで計算すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{p^4/m^4}{(E/\rho)^2} - \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{4n^2x^2} ((1+y^2)^2 + 4y^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{x^2}{1+\nu} \right] \right] \frac{p^2/m^2}{E/\rho} + \frac{1}{4n^2x^2} [2x^2y^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2(1+\nu)} ((1-x^2)^2 + y^2(6-2x^2+y^2)) \right] \right\} \\ & \times \left[\frac{p^2/m^2}{E/\rho} - \frac{1}{4n^2x^2} \frac{y^2(2-x^2)^2 + (1-x^2+y^2)^2 + \frac{x^2y^2}{1+\nu}}{1+x^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8n^2x^2} \left[2 + \frac{1}{1+\nu} - x^2 \right]^2 \cdot \left[\frac{p^2/m^2}{E/\rho} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4n^2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right] - \frac{1}{16n^4x^4} \frac{y^2}{1+x^2} \left[4 \right. \\ & \left. \left. - \left(3 - \frac{1}{1+\nu} \right) x^2 \right]^2 \cdot \left[\frac{p^2/m^2}{E/\rho} - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{1+\nu} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{16n^4x^2} \frac{y^2}{1+x^2} \frac{2+\nu}{1+\nu} \left[2 + \frac{1}{1+\nu} - x^2 \right] \cdot \left[4 \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(3 - \frac{1}{1+\nu} \right) x^2 \right] = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

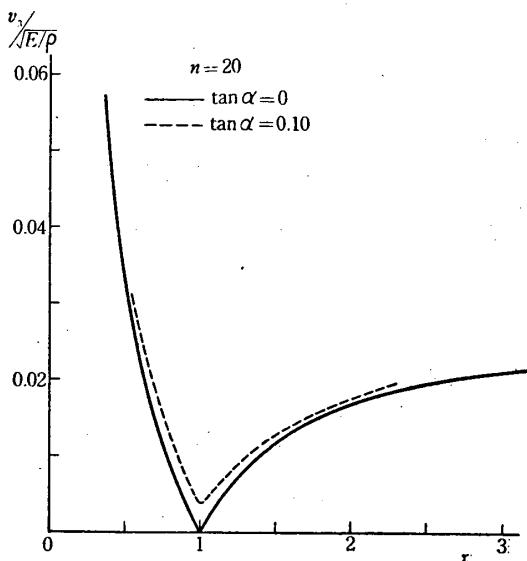
が得られる。これは p^2/m^2 に關する三次方程式であるから、三つの速度が得られる。一例として $\alpha = 5^\circ 50'$ 即ち

$$\tan \alpha = \frac{\tau_0}{\kappa_0} = \frac{y}{x} = 0.1$$

なるばねを考えると、 v_1 に對する補正是第 10 圖の點線、 v_3 に對する補正是第 11 圖の點線によつて示される。而してこの補正量の % は、 λ が



第 10 圖



第 11 圖

$2\pi r$ より極めて小さいか大きいところでは無視し得る程度のものである。又 v_2 に對する補正量は、 λ の全範囲にわたつて極めて小さいので問題にならない。この結果によれば、 v_1 波及び v_3 波は $\lambda=2\pi r$ 附近においては極めて小さいが、0 でない有限の速度をもつことが分る。

5. 實驗との比較

前の二節で得られたコイルばねにおける波動の分散性、特に $\lambda=2\pi r$ における特異性を實驗的に調べることは興味あることである。

その目的のために、ニッケル線で作つたばねの外面において、各コイルに軸に平行な直線上の一

得られなかつたが、第 14 圖では軟いばねを用いたために、150 サイクルを境として入が $2\pi r$ より大きな波から小さな波に移る場合に、速度が計算通り不連續的に落ちることが認められたのは面白い。 $\lambda \geq 2\pi r$ なる波の最小周期以上では、一つの周期に對して三つの速度が存在する筈であるが、速度の小さな二つの波は、ばねを一方向からのみ測觀するのでは、その存在を確めることは不可能である。

結 言

コイルばねに於いては、一般に速度の異なる三種類の波が存在し、それらの速度は波長による。特に通常使用される様な、ピッチがコイルの半径に比べて極めて小さいばねに於ては、近似的に云つて、ばねの軸方向の運動による二種類の波(v_1 波及び v_2 波)と、軸の周りの廻轉による一つの波(v_3 波)が存在すると考えてよい。而して長い波長の波に對しては、ばねに於ける v_1 波は、その伸び剛性及び軸方向の単位長さ當りの質量に等しい彈性率と線密度を有する直線状の棒における疎密波(longitudinal wave)によつておきかえられ、ばねにおける v_3 波は、その捩り剛性率、軸方向の単位長さ當りの質量及び断面の慣性半径に等しい剛性率、線密度及び慣性半径を有する直線状の棒における等積波(rotational wave, equivoluminal

wave)によつて置き換えることが出来る。即ち長い波長の波に對しては、ばねを一つの彈性棒によつておきかえる巨視的な立場が許される。併し波長がコイルの圓周の 3~4 倍以下の範圍では、これらの波の速度は一定ではなく、波長の函数である。而してコイルの圓周と等しい長さの附近の波長に對しては極めて小さな速度を示す。これに對して v_2 波は、總ての波長にわたつて v_1 , v_3 波に比べてはるかに大きな速度を示し、實際問題としては重要な波ではない様である。又極めて短い波長に對しては、上記の三種類の波は、何れもコイルを形成する針金を直線と考えたのと同じ結果となる。尙速度の分散性を示す波長の範圍内では群速度を考えなければならず、その結果も興えておいた。

これらの計算結果は實驗とも可なりよく一致することが示された。

實際問題として、砲身の緩衝ばね、其他衝撃をうけるばねにおいては、すべてこの様な點を考える必要があるであろう。

文 献

- [1] A. E. H. Love: *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 18, (1900), 364.
- [2] A. E. H. Love: *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th. ed. p. 416.

(1952 年 1 月 9 日受理)