

# 土壌水の毛管上昇に関する考察

高 木 俊 介

## Theoretical Considerations on the Capillary Rise of Soil Moisture

Shunsuke TAKAGI

**ABSTRACT:** Many investigators have endeavoured to verify experimentally the formula of Mitscherlich, the formula(1), which expresses the height of capillary rise of soil moisture (ref. (2), (3), (4), (7)). But it was impossible after all to establish through experimental research works perfect verification of the formula. The author has succeeded in verifying theoretically this formula, through the employment of Gauss' theory of capillarity organized by Neumann (ref. (6)), which may be called the law of integral form of capillary phenomena. The author has considered the thermodynamics of soil moisture in ref. (10), in which the mechanism of the capillary rise of soil moisture is explained by considering all the forces which attract water, such as the capillary force, the adsorptive force of soil particles and the hydratoin of adsorbed ions which exist on particles. In this paper he has attempted to explain clearly the nature of the capillarity of soil particles, and some points which remained unexplained in (10) are now explained with what he believes to be theoretical soundness. The non-abbreviated English report will appear later as a serial of ref. (10). (Received January 10, 1952)

### 1. 序 説

土壌水の毛管上昇高を決定するためには、従來のものは程度の差はあるが何れも圓形均一断面の毛管内に於ける毛管現象に頼つてゐる。A. N. Puri (1) の如きはその最も著しいものであつて、彼は Schlichter が地下水の運動を Poiseuille の法則に歸着させるときに用ひた相當毛管半径と粒徑との關係式から、

$$h \doteq \frac{1}{D}$$

但し  $h$  は毛管上昇高、 $D$  は均一と見なされた粒徑

なる近似式を導き、この式の正當性を實證する爲に膨大な實驗をしてゐる。その結果にはかなりのちらばりはあるが、土壌實驗としてはさう無理のない程度のものである。Terzaghi (6) も之と似たやうな考の下に似たやうな式を導いてゐる。

一方矢張り毛管現象との類推から出發はしてゐ

るが、理論的にもう少し程度のよいものは既に 1901 年に Mitscherlich (4) によつて與へられてゐた。彼は

$$h = \frac{O}{Q} \frac{\sigma \cos i}{\rho g} \quad (1)$$

但し  $O$  は容器壁の濡れた部分の面積、 $Q$  は毛管上昇した水の容積、 $h$  は毛管上昇高、 $i$  は容器と水との接觸角、 $\sigma$  は表面張力、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力の加速度

なる式が、圓形均一断面の毛管に於ける毛管上昇をも、二平行平面間におけるそれをもよく表してゐる<sup>(1)</sup>點に着目して、土壌水の毛管上昇もこれによつて表しうるとなした<sup>(2)</sup>。Kozeny (5) は  $u$  を管壁上の濡れた部分と濡れない部分との境界線の

(1) この式は正確には均一断面の毛管にしかあてはまらない。(10) 式参照

(2) この式によれば  $2Q/O$  が土壌の相當毛管半径になる。これは正しい。(後述)

長さ、 $F$  を管の斷面積として(1)の  $O/Q$  を  $u/F$  に變へた式を毛管現象の場合には當然成り立つ式として認め<sup>(1)</sup>、それから(1)を導いてゐる<sup>(3)</sup>。Smith, Foote, Busang も同様の考察を施してゐる(14)。

Mitscherlich の式の實驗的驗證は Mitscherlich 自身によつても行はれたが<sup>(4)</sup>、その他 Zunker(3) 田町(7)等によつても行はれた。然しその結果は土壤粒子を球と假定して表面積を算出する等の不備がある<sup>(5)</sup>爲 Puri(1)の結果と大差ない程度のものしか得られてゐない。Carman(2)は此の目的の爲に特に調整したガラス製小球を用ひ、又球形でないものに對しては specific surface (脚註<sup>(5)</sup>参照)の算定の爲に Kozeny によつて求められた滲透係數式を用ひる等の考慮によつて可成り精細な實驗を行つて完全に満足してよい程の結果を得た。然し Carman 自身も云つてゐるやうに<sup>(6)</sup>此の結果は見掛け程満足なものではない。それは結局サンプル内のどこに自由水面が上昇してゐるのかを決定することの困難の爲に、よい結果が得られるやうな位置を選んで了つたからである。この困難は實際此の種實驗に本質的なものであつて、普通に土壤内毛管上昇に於て假想されてゐるやうに、水ばかりの領域と空氣だけの領域がびたつと分れる事は、硝子管の中を水が上昇する場合には有り得ても土の中では有り得ない。此の原因については非圓形斷面の毛管の縁邊では、狭い所程高く上るので濡れ縁が圓形斷面のものと異つて平面上に揃はなくなる事實が引き合ひに出される事が多い<sup>(7)</sup>。勿論此の見解は誤つてはゐないが、飽くまでも毛管上昇に固着して説明しようとしてゐる點に飽き足りないものがある。實際熱力學を援用すれば、毛管現象をも含む廣い見地から、非常に包括的な見解を與へる事が出るのであ

(3) Kozeny(5)では毛管上昇の微分方程式から(1)を導いてゐるやうに見えるが、(1)は平衡状態に関するものである以上、毛管上昇高を問題とする限り微分方程式は何の意味も持つてゐない。此の點 Zunker(3) S. 99)は誤つてゐる。

(4) Carman(2) p. 6 に引用されてゐる。

(5) 實際均一粒徑の土の specific surface (土の單位體積當りの表面積)は  $6.5/d \sim 8/d$  ( $d$  は粒徑)である事が Carman(2)によつて示されてゐる。これは球形としたときの値  $6/d$  とはかなり違ふ。

(6) (2) p. 11

(7) (2) p. 3

る<sup>(8)</sup>。

此のやうな實驗的困難の爲に(1)が正しい關係式であるか否かについては遂に實驗の方からは決を與へる事が出来なかつた。然し乍ら著者は Neumann(8)によつて整へられた Gauss の表面張力の理論<sup>(9)</sup>を讀むに及んで、(1)式は十分な正當性を持つてゐる事を知る事が出た。然し(1)を導く爲には毛管上昇高より上には水がなく、下には空氣がない事を前提とせねばならぬ。これを更に實際に即するやうに修正して含水量が高さと共に變化するとすれば如何になるかも、矢張り Gauss の理論によつて十分に知る事が出来<sup>(10)</sup>、又それと同時に所謂毛管上昇高が何を意味してゐるかもほぼ満足できる程度に知る事ができた。

## 2. 毛管現象の積分型の法則

毛管現象は周知の如く

$$\rho g z + c = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

但し  $z$  は適當に定められた基準面からメニスカスの任意の點迄の高さ  $c$  は狀況に應じて定めらるべき定數、 $R_1 R_2$  はメニスカスの主曲率半徑なる式を容器との接觸角一定なる條件の下で積分する事によつてよく表はされる。(2)は微分型の法則であるが、これと全然同等な積分型の法則は既に Gauss により 1867 年に見出されてゐる(6)。これによれば

$$A = \rho g \int z dv + \sigma F - G \sigma \cos i \quad (3)$$

但し  $F$  は液體が空氣となす界面積、 $G$  は液體が容器となす界面積、 $i$  は容器と水との接觸角  $z$  は液體の微分體積要素  $dv$  の適當に定められた基準面からの高さ、積分範圍は液體の全體に亘る

なる  $A$  を場合に應じて定められた付加條件の下で停留せしめる事が(2)と全然同一な事が示される。實際(3)から(2)を導く事が出来るのであ

(8) (9)に略述(10)に詳述してあるが本論文でも後に述べる。

(9) これは毛管現象を定める積分型の法則を扱つてゐる。

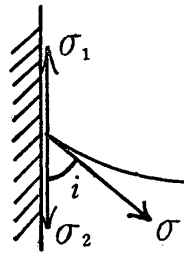
(10) 此のやうな理論は土壤水の自由エネルギー降下を土の内在的性質に歸着させるために非常に重要である。此のやうな理論については(10)を参照。

る<sup>(11)</sup>。

(3) の物理的意味は明瞭に知られる。即ち

$$\sigma \cos i = \sigma_1 - \sigma_2$$

但し  $\sigma_2$  は容器壁 | 液體なる界面の表面張力,  $\sigma_1$  は容器壁 | 氣體なる界面の表面張力,  $i$  は容器壁 | 液體の接觸角



第1圖 一點に會合する三相の界面張力の關係

なる式によつて (3) を書きかへ, 容器壁 | 氣體なる界面の面積を  $G'$  とすると  $G + G' = \text{const.}$  としてよいので,

$$A + \text{const.} = \rho g \int z dv + \sigma F + \sigma_2 G + \sigma_1 G'$$

となり, 右邊は位置のエネルギーと界面エネルギーの和である。但し Gauss の誘導から明かなやうに(3)の中には容器壁に吸着されてゐる水は考慮に入つてゐない<sup>(12)</sup>。

### 3. 非圓形非均等断面の毛管上昇

管の断面が圓形でもなく, 均等な断面でもないとして毛管上昇高を求めてみる。此の時のメニスカスの形, 位置はすべて式(2)を接觸角一定なる條件でとく事によつて與へられる。従つて例へば橢圓形の均一断面の毛細管では, 長軸側は短軸側より狭くなつてゐるため長軸を直角に截る鉛直断面内の主曲率半径は短軸側の相當するものより小さくなつており, 従つて長軸に沿つて載つた鉛直断面内の主曲率半径は短軸側の相當するものより大きく, その結果長軸側が緩い曲率で高い所迄到達する事になる。四角形断面では此の點は更に著しく, 四角形の頂點に沿つて到達する高さは, 四角形の中心に於けるものよりも遙かに高くなる。此のやうなメニスカスの形を一般に解く事はかなり困難であるが, メニスカスの平均高さならば割合に簡単に求められる。即ち(2)式をメニスカスの水平投影上で平均して

$$\rho g \zeta + c = \frac{\sigma}{S} \int dS \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4)$$

ここに  $S, dS$  をメニスカスの水平投影の面積及

(11) Neumann(6)は非常に一般的な假定の下にこの證明をしてゐる。簡単な證明なら(15)にもある。

(12) この點は後に重要になる。(本文<sup>(28)</sup>の箇所参照)

び微小面積としてメニスカスの平均高さを

$$\zeta = \frac{1}{S} \int z dS$$

で與へてある。もしメニスカス上到的所で

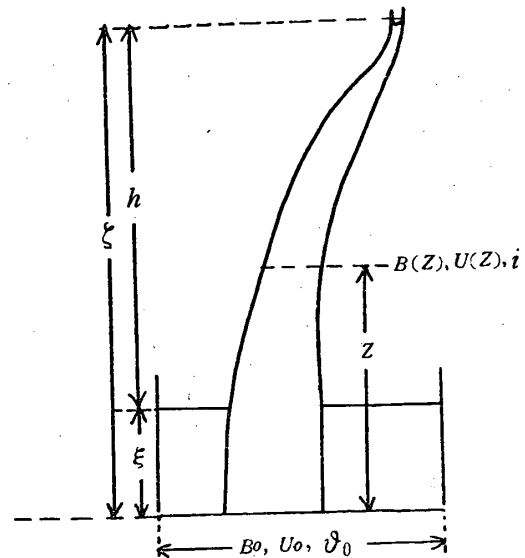
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const}$$

と見てよいならば

$$\rho g \zeta + C = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4')$$

としてよい。この近似はメニスカスの最高點と最低點との差が  $\zeta$  に比して無視しうるならば成立する。従つて縁邊匍匐のはなはだしいものに對してはよい近似を與へない。

今非圓形, 非均等の毛細管を底面積  $B_0$ , 周邊長  $U_0$ , 接觸角  $\vartheta_0$  なる均等断面の容器に入れて水中



第2圖 非圓形・非均等断面の毛管上昇

に立てた所, 容器の水深  $\xi$ , 容器底から測つたメニスカスの平均高さ  $\zeta$ , 容器の水面から測つたメニスカスの平均高さ  $h$  になつたとする。更に容器底からの高さ  $z$  における毛細管の断面積  $B(z)$ . この毛管の外周の周邊長を  $U(z)$ , 接觸角を  $i$ , 毛管の中にある全水量 (水中に在るものも含む) を  $Q$  とすると (3) の中の各項は次の如く書かれる。重力のポテンシャルによる項は

$$\rho g \int_Q z dv + \rho g \int_0^\xi (\omega_0 - B(z)) z dz \quad (5)$$

自由表面による項は

$$\sigma F(\xi) + \sigma (B_0 - B(\xi)) \quad (6)$$

壁の濡れ表面による項は

$$-\sigma \cos \vartheta_0 [\xi U_0 + B_0] - \sigma \cos i \cdot G(\xi)$$

$$-\sigma \cos i \int_0^{\xi} U(z) dz \quad (7)$$

$$\text{全水量は } Q + \int_0^{\xi} (B_0 - B(z)) dz \quad (8)$$

この中で  $F(\xi)$  はメニスカスが平均高さ  $\xi$  にあるときの面積,  $G(\xi)$  はメニスカスが平均高さ  $\xi$  にあるときの毛管の内周の全濡れ面積 (水中にあるものも含む) であり, (7) の第三項は毛管の水中に在る部分の外周の全濡れ面積である。

(3) に相當する式は (8) に Lagrange の乗数  $\lambda$  を乗じて

$$A = (5) + (6) + (7) + (8) \times \lambda$$

で與へられる。ここで毛管の中の水量を  $\delta Q$  だけ増しメニスカスの平均高さを  $\delta \xi$  だけ高くするとき, 容器の水面は  $\delta \xi$  だけ低くなり水量は  $\delta Q$  だけ減るとする。この變分に對して生ずる  $A$  の變分  $\delta A$  は

$$\begin{aligned} \delta A = & \rho g \xi \cdot \delta Q - \rho g (B_0 - B(\xi)) \xi \delta \xi + \sigma \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} \delta \xi \\ & + \sigma \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} \delta \xi + \sigma \cos \vartheta_0 \cdot U_0 \delta \xi - \sigma \cos i \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} \delta \xi \\ & + \sigma \cos i \cdot U(\xi) \delta \xi + \lambda [\delta Q - (B_0 - B(\xi)) \delta \xi] \end{aligned}$$

これから次の二條件を生ずる。

$$\begin{aligned} \rho g \xi \cdot \delta Q + \sigma \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} \delta \xi - \sigma \cos i \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} \delta \xi + \lambda \delta Q = 0 \\ -\rho g (B_0 - B(\xi)) \xi \delta \xi + \sigma \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} \delta \xi + \sigma \cos \vartheta_0 \cdot U_0 \delta \xi \\ + \sigma \cos i \cdot U(\xi) \delta \xi - \lambda (B_0 - B(\xi)) \delta \xi = 0 \end{aligned}$$

これから入を消して

$$\begin{aligned} \rho g h = \sigma \cos i \cdot \frac{\partial G}{\partial Q} - \sigma \frac{\partial F}{\partial Q} \\ - \frac{\sigma}{B_0 - B(\xi)} \left[ \frac{\partial B}{\partial \xi} + U_0 \sigma \cos \vartheta_0 + U(\xi) \sigma \cos i \right] \end{aligned} \quad (9)$$

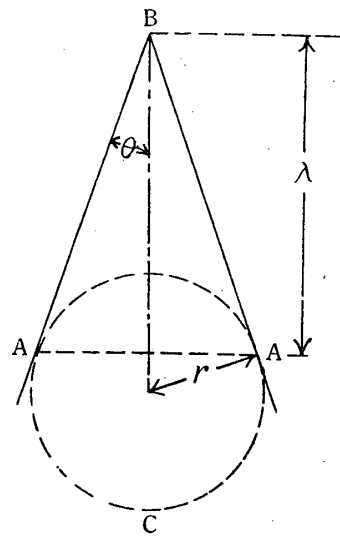
此の式の第三項は容器水面における毛管現象より生ずる補正で通常省略してよいので

$$\rho g h = \sigma \cos i \frac{\partial G}{\partial Q} - \sigma \frac{\partial F}{\partial Q} \quad (10)$$

なる關係式を生ずる。この式は導出の経緯から見て明瞭なやうに (4) 式<sup>(13)</sup> と全然同一である。これを實例について説明しよう<sup>(14)</sup>。

(13) (4') 式とではない!

(14) 一般に證明することも出来るであらうが當面の目的には益する所が多いとは思はれぬので試みない。



第3圖 圓錐における毛管現象

第3圖のやうな圓錐の AA 斷面が持ちうる毛管上昇高を接觸角を  $\theta$  として求めて見よう。此の場合には(4')による近似が十分使へて

$$\rho g h_0 = \frac{2\sigma}{r} \quad (11)$$

としてよい事はよく知られてゐる。ここに  $h_0$ ,  $r$  はメニスカスの平均高さ及び曲率半径である。一方 (10) によれば

$$\bigcirc \text{ACA の表面積} = \lambda^2 \cdot 2\pi \sec^2 \theta \tan^2 \theta (1 + \sin \theta)$$

$$\triangle \text{BACA の體積} = \frac{\pi}{3} \lambda^3 \tan^2 \theta / (1 - \sin \theta)^2$$

$$\triangle \text{BAA の表面積} = \pi \lambda^2 \tan \theta \sec \theta$$

より  $-d\lambda$  なる上昇により

$$dQ = \pi \lambda^2 d\lambda \tan^2 \theta / (1 - \sin \theta)^2$$

$$dF = -\lambda d\lambda \cdot 4\pi \sec^2 \theta \tan^2 \theta (1 + \sin \theta)$$

$$dG = \lambda d\lambda \cdot 2\pi \tan \theta \sec \theta$$

となる。ここに  $\lambda$  は圓錐の頂點 B から AA 斷面

迄の距離,  $\theta$  は圓錐の頂角の  $\frac{1}{2}$  である。

$$\rho g h = \sigma \frac{2 \sec \theta (1 - \sin \theta)^2}{\lambda \tan \theta}$$

$$+ \frac{4 \sigma \sec^2 \theta (1 + \sin \theta) (1 - \sin \theta)}{\lambda}$$

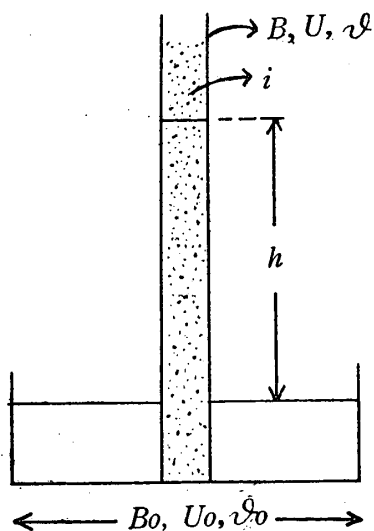
$$= \frac{2\sigma}{r} \quad (12)$$

となつて (12) は (11) と一致する。

此の實例によつて見られるやうに (10) 式を正しく使ふ爲には (2) によつて先づ, メニスカスの形を決定しておく事が必要であるので嚴密に論理的な使用に對しては十分な價値を付することができない。

4. 満水の假定による土壤水の毛管上昇高の決定

第4圖のやうに底面積  $B_0$ , 周邊長  $U_0$ , 接觸角  $\vartheta_0$  の容器に斷面積  $B$ , 周邊長  $U$ , 接觸角  $\vartheta$  の圓筒を立てる。この中に接觸角  $i$  の粉體をつ



第4圖 満水の假定による土壤水の毛管上昇高の決定のために

める。これに對しては(10)式がそのなり使へる。然しメニスカスの形を決定する事は出来ないので前例の如き論法で(10)式を使ふことはできない。そこで次の二つの點によつて簡單化を行ふ。先づ第一に土は一様に堆積されてあるものとし、堆積物の單位體積中の土の容積を  $\chi_s^{(15)}$  とし、その表面積を  $\eta_s^{(16)}$  とする。次にメニスカスの水面よりの平均上昇高さ  $h$  迄の堆積物中の空隙は満水してあるものとし、これより高い所には水はないものとする。さうするとメニスカスは  $h$  の高さに揃つて在ることになり縁邊匍匐は認めない事になる。更に一様の假定から  $h$  が上下してもメニスカスの總面積  $F$  は變化しない事になる。このやうな假定の下に(9)によつて毛管上昇高を求めて見よう。

$dh$  の上昇による土の濡れ面積の増加は  $\eta_s B \cdot dh$   
 管の濡れ面積の増加は  $U dh$   
 水量の増加は

$$dQ = B dh (1 - \chi_s) = \chi_{w_0} B dh$$

であるので

$$\rho g h = \frac{\eta_s}{\chi_{w_0}} \sigma \cos i + \frac{U}{B} \sigma \cos \vartheta - \frac{\sigma}{B_0 - B} [U_0 \sigma \cos \vartheta_0 + U \sigma \cos \vartheta] \quad (13)$$

(15)  $\chi_s$  は dimensionless

(16)  $\eta_s$  の dimension は  $1/cm$

この式の右邊第二、三項は夫々圓筒内及び容器内の毛管上昇に對する補正であつて、普通省略する事ができるので、その結果第一項が残り Mitscherlich の式を生ずる。但しここで  $\chi_{w_0} = 1 - \chi_s$  は土の飽和含水量<sup>(17)</sup>である。なほ土の單位容積當りの表面積 (Specific surface) を  $S_0$  とすると、

$$\eta_s = S_0 \chi_s = S_0 (1 - \chi_{w_0}) \quad (14)$$

となるので Mitscherlich の式は

$$h = \frac{\sigma \cos i}{\rho g} \cdot S_0 \cdot \frac{1 - \chi_{w_0}}{\chi_{w_0}} \quad (15)$$

とも書ける。

5. 土壤水の毛管上昇に関する熱力學的考察

1 土壤水の平衡條件式について

土壤水の中に含まれてある成分としての水の化學ポテンシャルを  $\bar{G}^w$  で表し、この(成分としての)水の單位質量に働いてある外力のポテンシャルを  $\varphi^w$  とすると、熱力學的平衡状態においては

$$\bar{G}^w + \varphi^w = \text{const.} \quad (16)$$

なる條件が満足されねばならぬ<sup>(18)</sup>。土壤粒子の周圍の吸着力のポテンシャルを  $\varphi_s^w$  とする。 $\varphi^w$  の中から  $\varphi_s^w$  のみを取り出し、

$$\Psi = \bar{G}^w + \varphi_s^w \quad (17)$$

とおいたものを water potential<sup>(18)</sup> と名付ける。さうすると土壤粒子の及ぼす吸着力以外には力の働いてゐない場合の平衡條件は

$$\Psi = \text{const.} \quad (18)$$

で與へられる。(18)式は與へられた條件の満足されてゐる限り 土壤水の在る所どこでも——土壤粒子の内部においても——成立してゐる。

2. 重力場における平衡

重力場における平衡條件は(16)により

$$\Psi + gh = \text{const.} \quad (19)$$

で與へられる。ここに  $gh$  は重力のポテンシャルで、 $g$  は重力の加速度、 $h$  はある基準面からの高さである。基準面での water potential を  $\Psi_0$  とすると(19)は

$$\Psi + gh = \Psi_0 \quad (20)$$

と書ける。ここで水頭  $H$   $H_0$  を次の式で定義す

(17) 空隙率に等しい。

(18) 詳しくは(10)を参照

$$\Psi = G_0 - gH \quad (21)$$

$$\Psi_0 = G_0 - gH_0 \quad (22)$$

この式で  $G_0$  は今考へてゐる温度に於て飽和水蒸気と平衡してゐる水の単位質量當りの Gibbs の自由エネルギーである。さうすると(20)は

$$H = h + H_0 \quad (23)$$

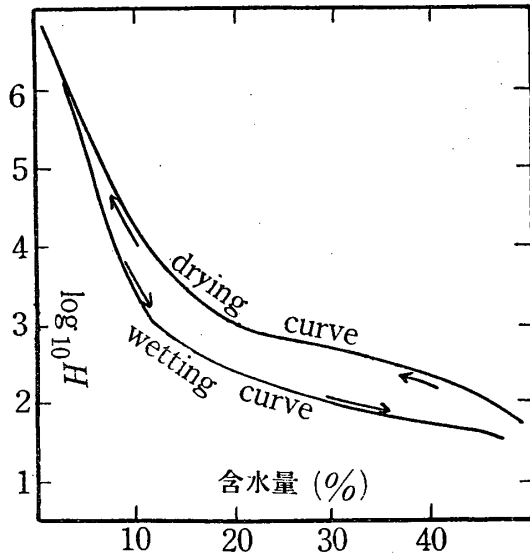
と書ける。此の式で判るやうに water potential の代用物として用いた水頭 (Water head) は高さと同義のものであつて、水頭  $H$  を有する土壌水は(23)で定められる高さ  $H$  迄實際に上り得るものである事が判る。 $H_0$  を(21), (22)の基準面に取ると(23)は

$$H = h \quad (24)$$

となる。(24)式の基準面は地下水面から僅か(通常 negligible order)下にある<sup>(18)</sup>。

### 3. 水頭—含水量曲線

上に述べた水頭  $H$  は昔から多くの農學者によつて實測されてきた<sup>(20)</sup>。Schofield (13)の用いた  $\rho F$  は  $H$  の常用對數を取つたものである。彼が(13)で與へてゐる水頭—含水量曲線を第5圖に



第5圖 水頭—含水量曲線の一例

與へておく。Schofield は  $H$  の最大値として  $10^7$  cm = 100km を與へてゐる。理論的には  $H$  は無限に大きくなりうるのであるから、Schofield の與へた値は實測可能の最大限度と解してよいものと思はれる。従つて(24)式によつて考へると、土

<sup>(19)</sup> (9) (10) (11) 特に (10) 参照

<sup>(20)</sup> 然しその方法は多くは不完全で、いきなり信用してよいかどうかには多くの問題が残つてゐる。(10) 参照

壤水の毛管上昇が眞の平衡状態に到達したときには、高さと含水量との關係は第5圖の wetting curve に示されてゐるやうにならなければならない。もし第5圖のやうになつてゐないならば、未だ眞の平衡状態には到達してゐないのである。然しここで注意すべきことは、この議論は平衡状態に到達する迄に必要とされる時間については全然考慮に入れてゐないことである。これは純粹に熱力學のみを使ふ以上止むを得ないことである。

ここに述べた事に對する簡単な實證は秋葉氏 (16)及び山崎氏 (17)によつて與へられてゐる。即ち土壌中に毛管上昇してゐる水の壓力を測定してみると、これは高さと同義關係に在る。この關係は靜水壓の場合と同様であつて、たゞ靜水壓の場合と違つて上向きに測つてあるだけの事である。此の事實と以前の論文 (9), (10), (11) に述べてある<sup>(21)</sup> water pressure と水頭との關係

$$P = p_0 - \rho gH \quad (25)$$

を結びつけば、この實驗的事實は(24)式のよき實證を、毛管水の範圍内ではあるが、與へてゐる事が明瞭である。

### 4. 水頭の臨界現象

然らば、土壌水の毛管上昇高とは如何なる意味を持つてゐるものであらうか。此の間に答へるために現實に毛管上昇高と呼ばれてゐるものが如何なる物理的意味を持つものであるかを明かにする事を試みよう<sup>(22)</sup>。但しこの見解の十分なる實驗的驗證と發展は將來に残された問題である。そのために先づ水頭の臨界現象について述べる。

(25)式の  $p_0$  は1氣壓、即ち水柱高にして10m と見る事ができる。従つて  $H$  が10m より大きくなると(25)式で表はされる water pressure  $P$  は負になる。水壓が負になると水には現實に張力が働くやうになり、液體が水として一體として動く事は不可能になつて、氣體としてバラバラに運動するのでなければ動けなくなる<sup>(23)</sup>。所が水蒸

<sup>(21)</sup> ref. (10), (11) では  $P = p_0 - \rho gH - \rho \phi_s^w (\phi_s^w)$  は吸着ポテンシャル)なる式が用ひてあるが、秋葉・山崎氏の實驗に乗る壓力は吸着ポテンシャルの働いてゐない所のものであるので(25)式が妥當する。

<sup>(22)</sup> この結論は本論文の最後に見出される

<sup>(23)</sup> 此の見解の十分な物理的意味は未だ明かではない。然し土の場合にはすぐ次に述べてあるやうに十分な實驗的根據がある。

氣の比容は水に比べて莫大に大きい爲流量を質量で測る限り、水蒸氣としての移動速度は水としての移動速度に比し無視しうる程小さい。従つて水頭が 10m に到達すると移動速度が極度に小さくなる。

此の見解は農學の方で良く知られてゐるやうに、野外の水分含量 (field capacity) が土による一定の値として定まる事をよく説明する。即ち雨が降ると水は土中に浸みこむがある深さ迄しみこむと、地表からその點迄大體一様の含水量のなりで一月でも二月でも持続する。この状態は(24)式の見地から見て決して平衡状態ではない。然し此の際の含水量を調べて見ると、水頭が大略の値ではあるが 10m なる値を與へるやうな含水量になつてゐる事が從來知られてゐるのである<sup>(24)</sup>

#### 5. 土壤水の毛管上昇の機構について

毛管上昇では water front の移動速度を觀測するのが普通である。water front の移動速度は最初は可成り速いが次第に遅くなり、遂には殆んど移動しないやうになる。このときの高さをもつて毛管上昇高と稱してゐるが、この状態は(24)式の見地から見ても明瞭なやうに決して平衡状態ではない。實際、所謂毛管上昇高に到達した後に、それまではつきりしてゐた water front の境界線は次第にぼやけてくる<sup>(25)</sup>。このことは緩慢ではあるが毛管上昇高に到達した後も水が上昇運動をつづけてゐる事を意味してゐる。

實際 water front とは、決して硝子毛細管の中を水が上昇するときの氣液界面のやうに明確な境界線ではなく、含水量が急變する帯であると見なすのが正しいやうに思はれる。此のやうな含水量の急變帯の形成は前述した水頭の臨界現象によつて十分に説明される。この見解にとつて非常に面白いのは Wadsworth の實驗(12)で、彼によれば毛管上昇の尖端の含水量は大體 10m の水頭に相當するものに等しい。

此の見地に立つと毛管上昇の機構は次のやうに説明される。乾いた土と水とが急に接觸すると含水量の急激な勾配が出来、それに従つて水頭にも急な勾配ができる。水は臨界水頭に達した所から

先には液體としての移動は出来ないで、含水量の急激な勾配はそのまゝに維持される。かくして water front が形成される。然し乍ら water front より下の部分には未だ強く水を引張る力が働いてゐる。この力のために、水は吸ひ上げられ water front は必然的に押し上げられる。water front が上昇するにつれてこの押し上げ作用は次第に弱くなり、遂にはその大きさが認められない程度になる高さに迄到達する。この高さに迄到達すると water front 本來の速度が顯はになる。この高さが所謂毛管上昇高である。此處迄到達すると、water front がそのまゝに持ち上つて行く事は行はれなくなり、その代りに急激な勾配が次第に緩やかなものになる變化が行はれる<sup>(26)</sup>。その作用は非常に緩慢に行はれる。然し乍ら、この變化によつて、非常に長い時間の後には、遂に完全に(24)式が行はれるやうな熱力學的平衡状態に迄到達する。

此のやうな見解をもつ事は恐らく許されるであらう。然しここで問題になる事は、先程述べた押し上げ作用をするものは何であるか、といふ點であらう<sup>(27)</sup>。この點は、土壤内の毛管力の計算が前述の如く明確な理論的根據をもつてくると大分明瞭になつてくる。土壤内毛管現象で水を引張り上げる力を發揮する本來の場所は土粒子と水と空氣の接觸する箇所、この力が次第に周圍の水に傳はつて水が引張り上げられるのである。water front のすぐ下の所には空氣を相當多量に含んでゐてこのやうな箇所が豊富に作られてゐる。この力の大きさが満水の假定をおくと(1)もしくは(14)の Mitscherlich の式の形に求められるのである。

毛管上昇を論ずるときに、水を引張り上げる力としては表面張力のみが考慮にとられるのが普通である。本來から云へばこの他にも土が水を引張る力は存在するのであるが、表面張力のみとする取扱いが正しい事は此處に述べた所論から明かであらう。即ち water front の押し上げ作用をしてゐるものは表面張力であつて、表面張力の作用が無

(24) 從來の測定結果は理論的根據が明瞭でない爲に殆どすべてがかなり荒いものである。従つてここに擧げた實例も新しく熱力學的見地から検討してみないと明確なものにならない。

(25) これが從來縁邊匍匐の影響とされてきた。

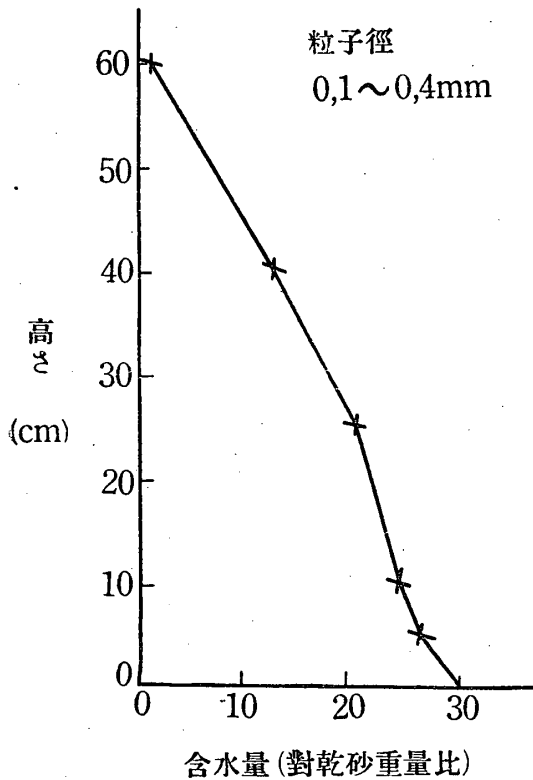
(26) 此の見解に従へば各高さの含水量の時間的變化を調べる事によつて毛管上昇高の位置を定める事が可能となる。

(27) この點は(10)では未解決の疑問であつた。

視し得る程になつて、初めて他の力の作用が顯著になるからである。もつとも此のやうな實驗の行はれてゐるのは従來は主として砂土に限られてゐる。従つてもし他種の土で表面張力以外のものの影響が表面張力のものよりも大きな値を示すやうな土があれば、此の點は修正を要し従來の取扱ひは成立しなくなる。此の際表面張力以外のものがどの程度の影響を及ぼしてゐるかを知らるためには、毛管上昇高を Mitscherlich の式によつて調べて見ればよい。もつと理想的には含水量と高さとの關係が(33)式(後述)を満足するかどうかが見られればよいわけであるが、これは現在では殆ど不可能であらう。

6. 含水量と高さの關係

Mitscherlich の式は満水の假定をおく事によつて求められた。然しこの假定は決して正しいものではない。第 6 圖に高さと含水量の關係の測定結果の一例を示しておく。然らば 4 節でなした

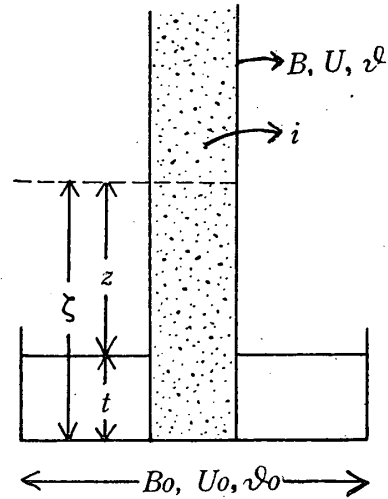


第 6 圖 高さと含水量の測定結果の一例  
Ref. (18) p. 13 第 18 圖からとつた。

やうに Gauss の積分型の法則を用ひる事によつて含水量と高さの關係を求めることが出来ないであ

らうか、との要求が當然起つてくる。これは實際可能であるが次の事情が考慮されねばならぬ。即ち Gauss の法則は器の中に水が入つてゐるやうな場合を對象として求められたのであつて、上に見られるやうに、吸着力や滲透壓やイオンの加水性のやうな複雑な力が水を引張る事は考慮されてゐない<sup>(28)</sup>。従つてからして求められた結果は表面張力が水の上昇に對して支配的な影響を及ぼしてゐる範圍——所謂“毛管上昇”高より低い所——に限ればかなりよい近似を與へてくれるであらうことが期待される。

第 7 圖に於て、底面積  $B_0$ 、周邊長  $U_0$ 、接觸角



第 7 圖 含水量と高さとの關係を求めるために

$\phi_0$  の容器の中に水を入れ、その中に底面積  $B$ 、周邊長  $U$ 、接觸角  $\phi$  の均一斷面の管を立てる。この管の中には高さ  $+\infty$  に至る迄接觸角  $i$  の土がつめこんである。但しその堆積状態はすべて一樣だとする。水が上昇して平衡状態になつたとする。そのときの容器の水深を  $t$  とし、容器底から  $z$  の高さにある管内の土の含水量を  $\chi_w$  とする。

先づ(3)式の各項を次の如く計算しておく。

重力のポテンシャルによる項は

$$\rho g \int_t^\infty \chi_w \zeta B d\zeta + \rho g B \chi_w \frac{t^2}{2} + \rho g (B_0 - B) \frac{t^2}{2} \tag{26}$$

土の濡れ面積は含水量に比例して定まるとして

<sup>(28)</sup> 脚註<sup>(12)</sup> 参照



$$\eta_s B \int_t^\infty \frac{\chi_w}{\chi_{w_0}} d\zeta + \eta_s B t \quad (27)$$

ここで  $\eta_s$  は堆積物の単位容積中にある土の表面積  $\chi_{w_0}$  は飽和含水量で堆積物の単位容積中にある空隙の割合である。

管の濡れ面積も土の含水量に比例して定まるとして

$$U \int_t^\infty \chi_w d\zeta + U \chi_{w_0} t + U t \quad (28)$$

$$\text{容器の濡れ面積は } U_0 t + B_0 \quad (29)$$

又土壌水の自由表面の面積を堆積物の単位容積當りにして  $F$  とすると、この  $F$  は高さ  $z$  の函数であつて、自由表面の面積の總計は

$$\int_t^\infty F B d\zeta \quad (30)$$

で與へられる。又全水量は

$$B \int_t^\infty \chi_w dz + B t \chi_{w_0} + (B_0 - B) t \quad (31)$$

である。此の場合全水量が一定に保たれるとの附加条件が存在することを考慮に入れて、(3) 式の  $A$  は次の如く求められる。

$$A = (25) + \sigma \times (29) - (26) \times \sigma \cos i - (27) \times \sigma \cos \vartheta - (28) \times \sigma \cos \vartheta + \lambda \times (30)$$

$$= \rho g \left[ B \int_t^\infty \chi_w \zeta d\zeta + B \chi_{w_0} \frac{t^2}{2} + (B_0 - B) \frac{t^2}{2} \right]$$

$$+ \sigma B \int_t^\infty F d\zeta - \eta_s B \sigma \cos i \left[ \frac{1}{\chi_{w_0}} \int_t^\infty \chi_w ds + t \right]$$

$$- U \sigma \cos \vartheta \left[ \int_t^\infty \chi_w d\zeta + \chi_{w_0} t + t \right] - \sigma \cos \vartheta_0 [U_0 t$$

$$+ B_0] + \lambda \left[ B \int_t^\infty \chi_w d\zeta + B t \chi_{w_0} + (B_0 - B) t \right]$$

ここで  $\lambda$  は Lagrange の乗数である。 $\chi_w$  に變分を與へると  $t$  にも變化を生じ  $\delta A$  は次の如く計算される。

$$\delta A = \rho g \left[ B \int_t^\infty \delta \chi_w \zeta d\zeta - B (\chi_w \zeta)_{\zeta=t} \delta t + B \chi_{w_0} t \delta t + (B_0 - B) t \delta t \right] + \sigma B \left[ \int_t^\infty \delta F d\zeta - (F)_{z=\zeta} \delta t \right] - \eta_s B \sigma \cos i \left[ \frac{1}{\chi_{w_0}} \int_t^\infty \delta \chi_w d\zeta - \frac{1}{\chi_{w_0}} (\chi_w)_{\zeta=t} \delta t + \delta t \right]$$

$$- U \sigma \cos \vartheta \left[ \int_t^\infty \delta \chi_w dZ - (\chi_w)_{\zeta=t} \delta t + \chi_{w_0} \delta t + \delta t \right] - \sigma \cos \vartheta_0 [U_0 \delta t] + \lambda \left[ B \int_t^\infty \delta \chi_w dZ - B (\chi_w)_{\zeta=t} \delta t + B \chi_{w_0} \delta t + (B_0 - B) \delta t \right]$$

$$= \int_t^\infty \delta \chi_w d\zeta \left[ B \rho g \zeta - \frac{1}{\chi_{w_0}} \eta_s B \sigma \cos i - U \sigma \cos \vartheta + \sigma B \frac{\partial F}{\partial \chi_w} + \lambda B \right] + \delta t \left[ \rho g (B_0 - B) t - U_0 \sigma \cos \vartheta_0 + \lambda (B_0 - B) \right]$$

ここに  $(\chi_w)_{\zeta=t} = \chi_{w_0}$ ,  $F_{\zeta=t} = 0$  なる事及び  $F$  は  $\chi_w$  の函数として一意に定まると見てよい事が考慮されてゐる。 $\delta \chi_w$ ,  $\delta t$  の變分は獨立とみてよいので

$$\begin{cases} B \rho g \zeta - \frac{1}{\chi_{w_0}} \eta_s B \sigma \cos i - U \sigma \cos \vartheta + \sigma B \frac{\partial F}{\partial \chi_w} + \lambda B = 0 \\ \rho g (B_0 - B) t - U_0 \sigma \cos \vartheta_0 + \lambda (B_0 - B) = 0 \end{cases}$$

この兩式から  $\lambda$  を消して

$$\rho g z = \frac{\eta_s}{\chi_{w_0}} \sigma \cos i - \sigma \frac{\partial F}{\partial \chi_w} + \frac{U}{B} \sigma \cos \vartheta - \frac{U_0}{B_0 - B} \sigma \cos \vartheta_0 \quad (32)$$

右邊の第三項と第四項は管及び容器より生ずる補正項で通常無視しうる。従つて次の式を生ずる。

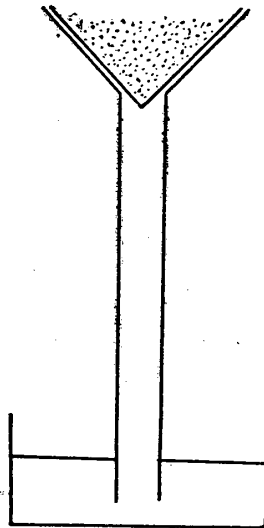
$$\rho g z = \frac{\eta_s}{\chi_{w_0}} \sigma \cos i - \sigma \frac{\partial F}{\partial \chi_w} \quad (33)$$

此の式の右邊第一項は Mitscherlich の項である。ここに新しく現れた右邊第二項は(10)の右邊第二項と形式的には同じであるが、 $F$  が含水量の(従つて又高さの)函数となつてゐる點が異なつてゐる。この項が存在するために(33)式は含水量の高さによる變化を與へる式になつてゐる。高さが増すと共に  $\chi_w$  は減少し、 $F$  は増加するので  $\partial F / \partial \chi_w$  は負であるが、或る程度迄  $\chi_w$  が減少するとそれから先は  $\chi_w$  の變化は極く僅かしかなく、それに伴つて  $F$  も變化しなくなる。ここまで來ると右邊の高さによる變化は殆んどなくなり、左邊との相等關係が失はれてくる。含水量がある程度迄へると、表面張力以外に吸着力や吸着イオンの膨潤性の影響が表れてくる。空氣と水との界面

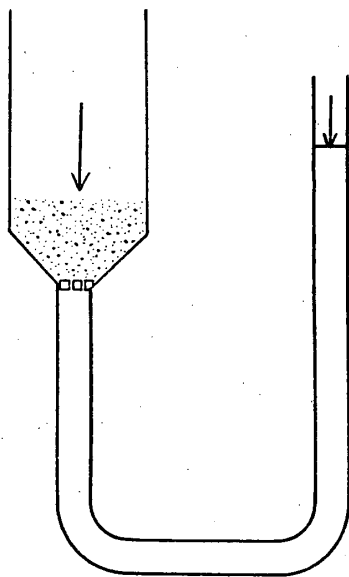
も吸着力の有効な園内に入つて了ふと Gauss の式に織りこまれてゐる自由表面とは意味の違つたものになつてくる。(33)式はこのやうな事の起つて來ない範圍でしか使へない<sup>(29)</sup>。

ここで注意しておくべき事は Puri の實驗では第8圖のやうな装置で土の持ちうる水柱高を實測し、Carman の實驗では第9圖のやうな装置で土の持ちうる壓力差を實測してゐることで、このやうな實驗方法を取れば(33)式のやうに含水量が漸變するとなす前提はあてはまらず、寧ろ(13)式もしくは(14)式を導き出すときに用いた空隙が満水してゐるとの前提の方に近くなつてゐる。従つて此の場合には Mitscherlich の常數がそのままのよい近似を與へてくれるであらう

が、實際に含水量漸變の状態で實測したものには(33)式の右邊第二項の自由表面による項が有効にきいてくるため Mitscherlich の式に幾らか補正が起りさうに思へる。然し乍ら所謂“毛管上昇高”では自由表面による項は恐らく零になるのであらうと思はれる<sup>(30)</sup>。もし此の點が認めら



第8圖 Puri の實驗のプリンシプル



第9圖 Carman の實驗のプリンシプル

<sup>(29)</sup> 砂土以外のものについては5節5の末尾参照  
<sup>(30)</sup> その理由は(33)式のすぐ次に説明してある。  
<sup>(31)</sup> 此の見解に従へば(10)に述べた方法によつて(33)式から Capillary Potential 或ひは Capillary head を定義する事が可能である。

れるならば所謂“毛管上昇高”の意味は明らかである。さうして此の場合には Mitscherlich の常數をもつて毛管上昇高として定義する事が可能であらう<sup>(31)</sup>。然し砂土以外の土で表面張力以外の水を引張る力が大きくきいてくるやうなものにあつては、かうして定義されたものは觀測される毛管上昇高と一致しないかも知れない。此の場合には後者の中には毛管力以外の力が共に働いてゐる爲で、此のやうな土に對しては“毛管”上昇高なる言葉がふさわしくない。

最後に常に御好意にあづかつてゐる最上所員及び重要なヒントを與へて下さつた一橋大學杉田元宣教授に謝意を表する。

#### 文 献

- (1) A. N. Puri: *Soil Sci.*, 48 (1939), 505~520.
- (2) P. C. Carman: *Soil Sci.*, 52 (1941), 1~13.
- (3) F. Zunker; *Handbuch der Bodenlehre*. VI (1930), 98~100.
- (4) E. A. Mitscherlich: *Landw. Jb.* 30 (1901), 415
- (5) J. Kozeny: *Sitzgsber. Akad. Wiss.*, Wien I 36 (1927), 281.
- (6) K. v. Terzaghi: *Erdbaumechanik*, Leipzig u. Wien (1925), 134.
- (7) 田町正譽: 農業及園藝 17 卷 11~12 號(1942), 27~32
- (8) F. Neumann: *Vorlesngen über die Theorie der Kapillarität*, Leipzig (1894)
- (9) 高木俊介: 應用物理 17 卷 (1948), 241~251
- (10) S. Takagi: *Theoretical considerations on thermodynamical and kinematic properties of soil moisture*, Scientific Report of Tokyo Univ. of Agr. and Technology (1952年2月現在未刊)
- (11) 高木俊介; 細滴とメニスカスの熱力学及び濕潤熱稀釋熱についての考察, 理工研報告5巻6號
- (12) H. A. Wadsworth: *Soil Sci.*, 32(1931), 417~433.
- (13) R. K. Schofield: *3rd International Congress of Soil Sci.*, 2 (1935), 37~48.
- (14) W. O. Smith, P. F. Foote and P. D. Busang: *Physics*. 1 (1931), 18~26.
- (15) W. H. Besant and A. S. Ramsay: *A Treatise on Hydromechanics Part I Hydrostatics* (1934), chap. VII
- (16) 秋葉滿壽次: 農業土木研究 10 卷 2 號 (1938)
- (17) 山崎不二夫: 農業土木研究 15 卷 2 號 (1943)
- (18) 秋葉滿壽次: 誘導毛管水の研究, 東京帝國大學農學部農業土木教室研究第一輯 (1942)