

完全塑性体の降伏と応力分布

(軟鋼有孔板の引張による降伏)

吉村 慶丸・植村 益次

Yield Condition of Perfectly Plastic Solids and Stress Distribution

(On the Yielding of a Perforated Mild Steel Plate under Tension)

Yoshimaru YOSHIMURA and Masuji UEMURA

ABSTRACT: It has been suggested by Cook, Robertson and Prof. Nakanishi that the yield stress in mild steel is considerably higher when the stress distribution is not uniform as in bending. To explain this phenomenon, Prof. Nakanishi's mean stress theory seems to be more reasonable than Cook's view point of upper yield stress. But, as the yield phenomenon will be considered to be dependent on the type of the stress distribution, the yield condition of a perforated mild steel plate is investigated experimentally in this paper. The results obtained are as follows. In the case of a infinitely small hole, yielding occurs simultaneously over the whole section when the mean stress of the section reaches the lower yield stress, the stress on the periphery of the hole being 3 times of the yield stress; and in the case of an extremely large hole, yielding begins at the periphery of the hole when the local stress reaches 1.5 times of the yield stress. For the intermediate dimension of the hole, the neutral yield condition between the above limiting cases is realized, which seems to be governed both by the stress concentration and the mean stress.

(Received April 19, 1952)

1. 緒言

完全塑性体の降伏はその局所の状態のみによつて定まり、近傍又は大局の状態に無関係であるかどうか、又もし近傍又は大局の状態に関係するものであるならば、その一般法則を見出すことは極めて重要なことである。中西教授¹⁾の軟鋼の降伏の理論は、単純な試験片についての捩り・曲げ等に見られる一様な応力勾配の下における大局の影響を論じたものとして興味深いものである。然し降伏現象は試験片の形状でみでなく、応力の分布状態にもよる複雑なもののように考えられるので、種々の応力分布の状態における降伏条件を研

究する必要がある。そのためには弾性応力が解析的に求められている必要があり、茲ではその一つの簡単な場合として、軟鋼有孔板の引張による降伏を実験的に取扱つた。実験に際しては、試験片の板厚、板巾及び孔径を各種系列的に変化し、降伏開始条件の応力分布による相違を主として論じ、併せて降伏の発達状態等について考察する。

2. 実験方法

1) 試験片

第1図に示すような日本標準規格第1号試験片を用い、その長さは一定で、すべて200mmとした。板巾 b 、孔径比 $\lambda = d/b$ 及び板厚 t は夫

々次の通りである。

板幅

A 型; $b=25\text{mm}$
($w=30\text{mm}$)

B 型; $b=18\text{mm}$
($w=21.6\text{mm}$)

C 型; $b=10\text{mm}$
($w=12\text{mm}$)

孔径比

i 型; $\lambda=0$

ii 型; $\lambda \approx 0.04$

iii 型; $\lambda \approx 0.13$

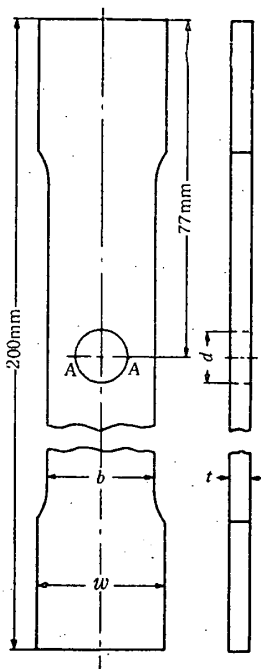
iv 型; $\lambda \approx 0.29$

v 型; $\lambda \approx 0.48$

板厚 ① $t=1\text{mm}$

② $t=5\text{mm}$

(板巾符号の添字として示す)



第 1 図

以上各種類のものを用い、合計 30 種類について同種類 3 本宛実験を行つた。一例として試験片番号 A₅-ii-2 は、 $b=25\text{mm}$ 、 $t=5\text{mm}$ 、 $d=1\text{mm}$ ($\lambda=0.04$) であつて、同種類の内第 2 番目の試験片を意味するものとする。

尚穿孔位置は試験機えの取付及び歪計の取付を考慮し、中央部より少し上部即ち上端から 77mm の点とし、試験機はアムスラー型万能試験機を用いた。

材料は市販の軟鋼板を用いたが、その Fe 以外の成分を第 1 表に示す。

第 1 表 試験片成分

成分 種類	C	Si	Mn	P	S	Cu
① 1mm板	0.14	0.03	0.27	0.010	0.020	0.12
② 5mm板	0.06	0.10	0.29	0.019	0.039	0.18

$t=1, 5\text{mm}$ の試験片は夫々別箇の圧延板から、圧延方向と引張方向とを一致させて取材したもので、有孔試験片整形後 870°C で約 1 時間焼鈍を行い、除冷して加工による影響を除去した。

2) 測定方法

降伏発生初期の発見は極めて困難なので、次の種々の方法を試みた。

(a) エナメル液塗布法

試験片の表面をエメリー紙 02 程度迄研磨し、其の上に次の組成分のエナメル液を薄く塗布する。

コロホニウム (松 脂)……50 g
アセトン (溶 剤)……50 g
メチル・アルコール (溶 剤)……10 g
トリクレシル・フォスフェート(加塑剤)……2 g

塗布後約数日間充分自然乾燥させてから引張り、降伏後の大きな歪を受けるとエナメル膜表面の反射状況が異つて歪模様を示す。然し初期の局部的な降伏では、エナメル膜自身の延性もあつて、降伏の発生を十分正確に捕捉できない。

(b) Fry 試液による腐蝕法

降伏後の試験片を約 200°C で 30 分間の熱処理を施し、表面をエメリー紙 04 程度迄研磨した後次の Fry 試液に浸す。

化学用塩酸 60 cc
 H_2O 30 cc
 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ 30 cc
 CuCl_2 20 cc

降伏部は少し黒味がかつた歪模様を現わすが、余り鮮明でもなく、降伏を発見する方法としては不適當である。

(c) 歪計による応力—歪線図作成法

穿孔部にまたがつて両面に取り付けた歪計の読みを荷重に対して試験中逐一記録し、同線図の直線から曲線えの逸脱を以て降伏を発見する方法である。 t/d の比較的大きい場合には可成り顯著に現われるが、 t/d の小さい場合には直線からの逸脱は微細であつて、発見を見逃し勝ちなので余り此の方法に頼る事は危険である。故に降伏後の曲線を extrapolate して降伏点を判定することも必要である。

(d) 鏡面研磨法

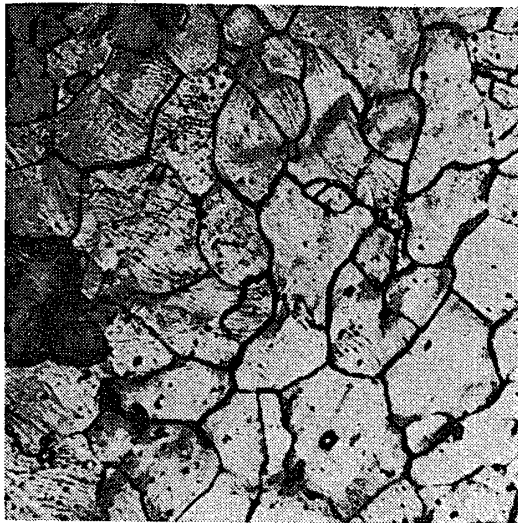
試験片の円孔周辺をエメリー紙 06 程度迄良く研磨し、尚其の上酸化クロームでバフ研磨をし全くの鏡面状態とする。降伏すると表面の反射状況が変化し、肉眼でも微かに認められるので可成り適確に発見できる。

(e) 結晶粒組織観察による方法

(d) の操作を施して後、次の試液で表面を腐蝕する。

{ 硝 酸……5cc
{ アルコール…100cc 又は { ピクリン酸……4g
{ アルコール…100cc

之を顕微鏡で200倍程度に拡大し、試験中除荷して観察する。充分降伏した後の結晶粒内のひき線（第2図）を示す。然しひき線は降伏初期では



第2図 結晶粒内のひき線

殆んど見られないで、可成り発達してから漸く認められる程度なので初期の発見には無意味のようである。

以上5種類の方法を試みた結果、(c)、(d)の二方法が最も適切な方法であるので、この両方法を併用し、夫々の方法で確認した降伏荷重の低い方を採用することにした。

3. 降伏の開始

先ず試験片材料の上・下降伏点応力を決定するため、i型即ち無孔板の引張試験を行った。

下降伏点応力 σ_{yl} として

$$\sigma_{yl} = 20.0 \text{ kg/mm}^2 \quad (t=1\text{mm})$$

$$\sigma_{yl} = 22.6 \text{ kg/mm}^2 \quad (t=5\text{mm})$$

上降伏点応力 σ_{yu} として

$$\sigma_{yu} = 24.2 \text{ kg/mm}^2 \quad (t=1\text{mm})$$

$$\sigma_{yu} = 28.6 \text{ kg/mm}^2 \quad (t=5\text{mm})$$

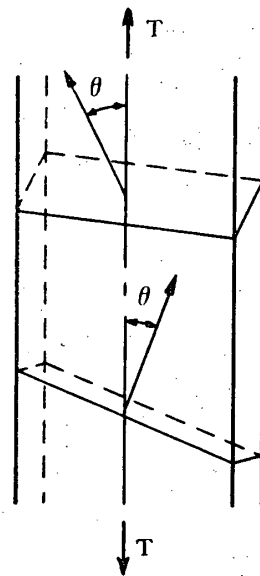
の値を得た。従つて上・下降伏点応力の比は

$$\sigma_{yu}/\sigma_{yl} = 1.21 \quad (t=1\text{mm})$$

$$\sigma_{yu}/\sigma_{yl} = 1.26 \quad (t=5\text{mm})$$

となり、両者は大体等しい。ひき面に対する法線方向と引張方向とのなす角 θ （第3図参照）は約 37° である。

降伏は、応力集中によつて先づ引張方向と直角方向の円孔周辺部 A 点（第1図参照）において開始するが、その時の荷重即ち前記二方法で確認した低い方の荷重を、降伏開始荷重 P_{yb} とする。



第3図 ひき面の方向

無孔部断面積を A とし降伏開始応力 σ_{yb0} を、

$$\sigma_{yb0} = P_{yb}/A \quad (1)$$

と定義する。Howland²⁾ が有限板中の有孔板の引張について計算した円孔周辺部 A 点における応力集中係数 α によつて、降伏開始の局所応力 σ_{yb} は

$$\sigma_{yb} = \alpha \times \sigma_{yb0} \quad (2)$$

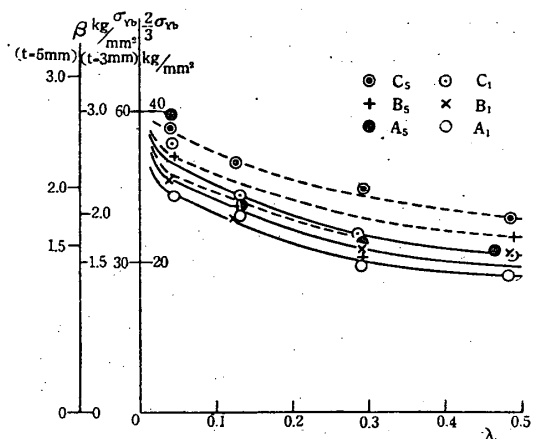
によつて与えられる。 α の値を λ に対して第5図に示す。

先ず σ_{yb} について考えよう。 σ_{yb} を λ に対して第4図に示す。 σ_{yb} は下降伏点応力は勿論、上降伏点応力よりも大きく、 λ の増加と共に減少する。

今 σ_{yb} の代りに

$$\beta = \sigma_{yb}/\sigma_{yl} \quad (3)$$

と定義した β を考えれば、 β は局所最大応力が



第4図 σ_{yb} , β と λ との関係

下降伏点応力の何倍になれば降伏が開始するかを意味する(第4図の縦軸). β は λ が大きくなれば漸近的に 1.5 となり, λ の小さい範囲では遙かに 1.5 を超過し, $\lambda \rightarrow 0$ の極限においては, 後に述べるように $\beta=3$ に落着くものと思われる.

従つて最大応力説が不適當であることは勿論であるが, 下降伏点応の 1.5 倍以上の応力には耐えられないという中西教授の結果が成り立たないことは注目すべきことであらう.

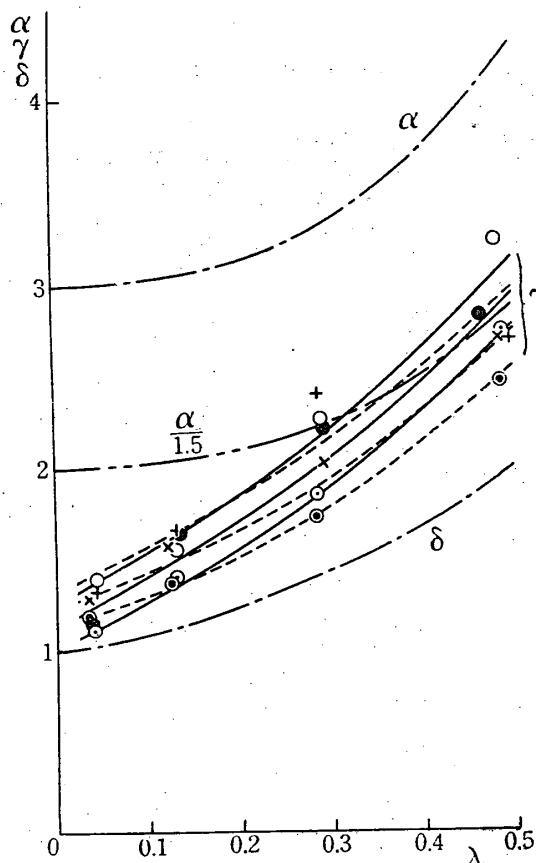
次に

$$\gamma = \sigma_{r1} / \sigma_{r0} \quad (4)$$

と定義した γ を考えると, γ は 局所最大応力が下降伏点応力に達して降伏したと考へた場合, α に代る応力集中係数のようなものを意味する. 又無孔部断面積と有孔部最小断面積との比

$$\delta = A/A_0 = 1/(1-\lambda) \quad (5)$$

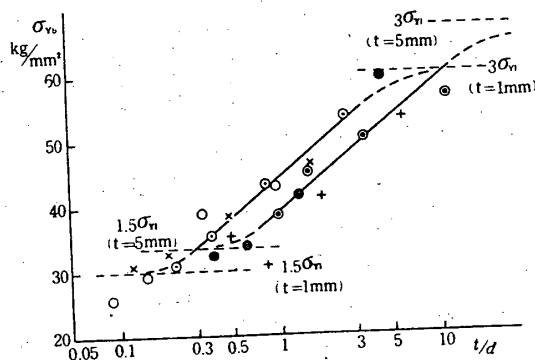
を考えると, δ は有孔部最小断面における平均引張応力の倍数を意味する. これら γ, δ の値, α 及び $\alpha/1.5$ と共に第5図に示す. $\lambda=0$ の極限では γ は δ と一致し, λ が増加すると γ は δ より大きくなり, λ が更に大きくなると $\alpha/1.5$



第5図 α, γ, δ と λ との関係

の曲線に漸近的に近づくと考えられる. 即ち降伏は, 孔が板巾に較べて可成り大きい場合には, 局所最大応力が $1.5\sigma_{r1}$ に達した時に開始するが, これは応力分布が曲げの場合のように直線分布となり, 応力勾配が一樣であつて中西教授の降伏理論に対応するものと思はれる. 然し孔が極めて小さい場合には, 穿孔による応力集中現象は円孔周辺部の A 点のみに全く局限されて殆んど影響なく, 平均引張応力が σ_{r1} に達した時に降伏が開始するものと考えられる. 実験を行つたように, 孔が両者の中間の大きさの場合には, 降伏は局所最大応力のみによつて決定されるものでもなければ, 断面の平均引張応力のみによつて決定されるものでもなく, 二つの極限の間の遷移状態が実現される. これは歪模様が, 降伏開始後荷重の増加と共に徐々に円孔周辺部から発達するという貫通状況からもわかる.

以上は二次元的な考察に基づくものであるが, 第4図において λ を一定にして考えると, 板巾 b が小さい程, 又板厚 t が大きい程 σ_{r0} は大きい. これは t/d が大きい程 σ_{r0} は大きいことを示すものであつて, 従來の二次元的な考え方のように, 孔径比 λ のみで決定されるものでないことがわかる. 従つて σ_{r0} を t/d に対して示すと第6図の様になり, t/d の極めて小さい範囲及び大きい範囲を除くと, σ_{r0} は $\log(t/d)$ に略々比例することがわかる. σ_{r0} の傾向を第6図について云えば, 有限の板厚 t に対しては, $t/d \rightarrow 0$ では $\sigma_{r0} \rightarrow 1.5\sigma_{r1}$, $t/d \rightarrow \infty$ では $\sigma_{r0} \rightarrow 3\sigma_{r1}$ となると云える.



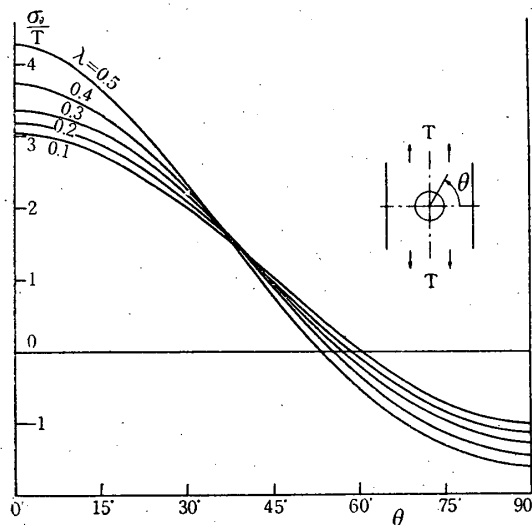
第6図 σ_{r0} と t/d との関係

中間の大きさの孔をもつ有孔板の降伏開始応力が何によつて規定されるかは明らかではないが, λ の他に t/d の函数であることは明らかである.

従つて三次元的解析が必要と思はれるが、極めて困難なので、参考のため次のような簡単な補正を一応試みた。

1) 板厚方向平均応力の考察による補正

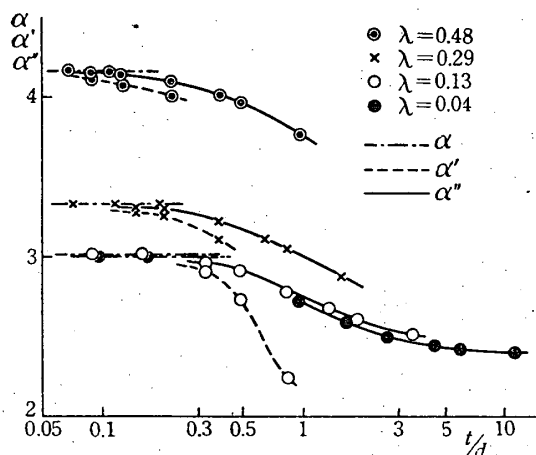
軟鋼の降伏は剪断によるに基づくもので、 t/d の極めて大きい場合を除き、板厚方向と大体 45° の方向のにり面で起つている。従つて局所応力の板厚方向平均値を検討する必要がある。



第 7 図 円孔周辺部の切線応力分布

円孔周辺の切線方向応力 σ_θ の分布を第 7 図に示す。円孔周辺部では半径方向応力 σ_r は 0 であり、板厚方向応力 σ_z も t/d の比較的小さい場合には近似的に 0 と考えると、 σ_θ のみによつて剪断応力が生じ、板厚に等しい θ の範囲、即ち $0 \leq \theta \leq t/d$ の間の σ_θ/T の平均値を修正応力集中係数 α' として定義できる。

今 $t/d < 1$ 程度の $t=1\text{mm}$ の試験片に就いて α' を計算し、第 8 図に示す。 β' を次のように定義



第 8 図 $\alpha, \alpha', \alpha''$ と t/d との関係

して第 2 表に示す。

$$\beta' = (\alpha' \times \sigma_{r0}) / \sigma_{r1} \quad (6)$$

第 2 表から t/d の大きい程 β' は β に較べて可成り低下し、1.5 の値の近付くことがわかる。

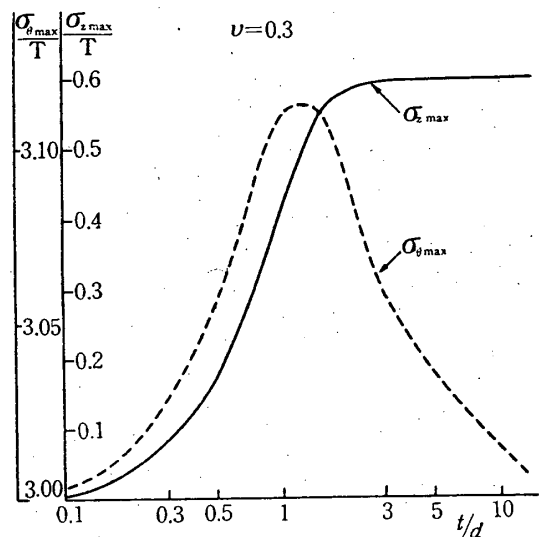
第 2 表 各種試験片の β, β', β'' と t/d との関係

板幅	孔径	板厚 $t=1\text{mm}$				板厚 $=5\text{mm}$		
		t/d	β	β'	β''	t/d	β	β''
A	ii	0.969	2.15	—	1.94	4.52	2.63	2.15
	iii	0.327	1.96	1.86	1.90	1.35	1.84	1.61
	iv	0.147	1.47	1.46	1.47	0.639	1.50	1.41
	v	0.088	1.29	1.28	1.29	0.386	1.43	1.42
B	ii	1.64	2.32	—	1.99	6.01	2.26	1.83
	iii	0.484	1.94	1.74	1.85	1.88	1.82	1.56
	iv	0.201	1.64	1.60	1.62	0.838	1.37	1.27
	v	0.122	1.55	1.51	1.53	0.495	1.57	1.47
C	ii	2.65	2.68	—	2.23	11.6	2.50	2.00
	iii	0.828	2.17	1.59	1.97	3.46	2.20	1.83
	iv	0.378	1.79	1.68	1.74	1.56	1.99	1.68
	v	0.221	1.55	1.47	1.50	0.958	1.70	1.54

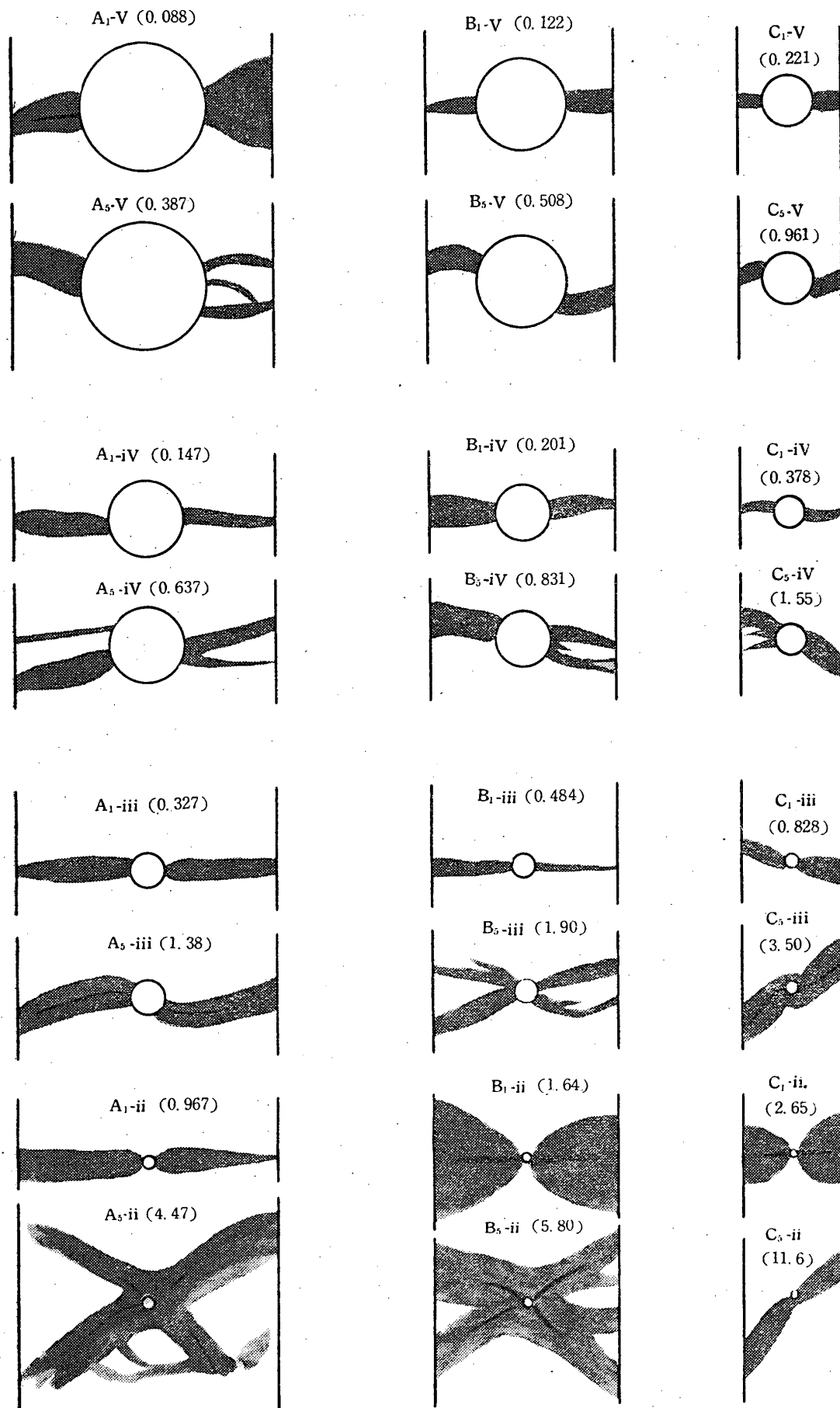
2) 三次元的考察による補正

最近有孔無限平板の引張による応力集中を近似的ではあるが、E. Sternberg & M. A. Sadowsky³⁾ が三次元的に解析しているので、此の結果を用いて以上の実験結果に補正的考察を行う。

引張応力 T が作用した場合の円孔周辺部の最大応力を、 $\sigma_{\theta \max}/T$, $\sigma_{z \max}/T$ ($\nu=0.3$) として第 9 図に示す。降伏は剪断応力に基づくものであるから、有限板巾であることの近似的修正を施し



第 9 図 $\sigma_{\theta \max}/T, \sigma_{z \max}/T$ ($\nu=0.3$) と t/d との関係



第 10 図 降伏貫通後の歪模様

て、次のように修正応力集中係数を α'' 定義し、第 8 図に示す。

$$\alpha'' = \frac{(\sigma_{\theta \max} - \sigma_{z \max})}{T} \times \frac{\alpha}{3} \quad (7)$$

又 β'' を次のように定義し、第 2 表に示す。

$$\beta'' = (\alpha'' \times \sigma_{r0}) / \sigma_{rl} \quad (8)$$

第 2 表から、 t/d の大きい程 β'' は β に較べて可成り低下することがわかる。

以上二つの補正によつて、 t/d の大きい程 β' , β'' は β に較べて小さくなり、1.5 に近付くという結果が得られた。勿論このような近似的補正では降伏条件に対する何等の法則も見出せないが、それには有限板巾の有孔板の三次元的な応力解析も必要とされるであろう。

尙設計技術者のために蛇足を加えるならば、この問題の降伏条件は可成り複雑であり、従来のように、単に二次元的考察での Howland 等の応力集中係数を基とした概念とか、有孔板に対する設計方針が不当であることは明らかである。

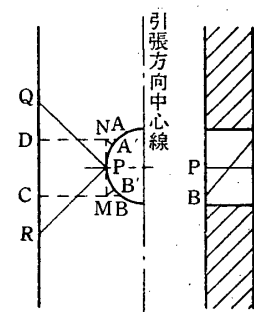
4. 降伏の貫通

円孔周辺部に発生した降伏の歪模様の発達状況も、これを詳細に観察すれば、其の開始と同様に板巾、板厚、孔径等の種類によつて夫々独特の発達様式があるようである。⁴⁾⁵⁾ 然し大体の傾向は t/d の値によつて大別される。貫通後の歪模様を各種試験片に就いて第 10 図に示す。

1) 降伏貫通様式

(a) t/d が小さい場合 ($t/d \lesssim 1.6$)

降伏の発生は明瞭に認められ、これが荷重の増大と共に横方向に細い巾で順次伸張し、遂に降伏が側方に達して貫通する。従つて迂り面は板厚方向と約 45° の角度の最大剪断応力面である。即ち第 11 図に於いて面 BCDA である。然し t/d が比較的大きい時とか、降伏が引張方向にも発達すると、更に迂り易い面として面 B'MCDNA' がある。これは t/d が 1.6 近くになると第 10 図からわかる。



第 11 図 迂り面の説明図

(b) t/d が大きい場合 ($t/d \gtrsim 3.0$)

降伏の発生は極めて局所的に限られているので、其の発見も困難である。荷重が増大しても容易に発達しないで、突然に約 45° の方向に伸張して貫通する。従つて迂り面は板厚方向に直角の最大剪断応力面で、第 11 図に於いて面 PQ, PR に沿うものである。

(c) t/d が中程度の場合 ($1.6 \lesssim t/d \lesssim 3.0$)

前二者の中間で、(a)(b) 両型が共存するか或は両者の中間的な角度で降伏が貫通する。従つて貫通様式もはつきりと二大別出来る性質のものではないことがわかる。(a)(b) 両型が共存する場合もその貫通は殆んど同時であるが、矢張り t/d の大小によつて時間的相異があるようである。

以上の代表的な二型式に対しては次のような推察を行うことが出来る。即ち、

t/d の大きい場合には、円孔近辺の切線応力は引張方向に或は板巾方向に距るにつれて急に減少する。従つて板厚に亘つての平均剪断応力は円孔から板巾方向に隔ると可成り減少する。之に反して板面内の最大剪断応力は 45° の方向に最も値が大きい。故に後者により第 11 図で面 PQ, PR に沿つて降伏する。

t/d の小さい場合には、所謂応力集中によつて板巾方向の切線応力が可成りの範囲に亘つて大きく、従つて板厚方向と 45° の角度をなす剪断応力面に沿つて降伏が発達し、順次応力集中が其の方向に波及するものと思われる。

勿論降伏の発達・貫通を完全に説明するには、弾-塑性的解析が必要であらう。

2) 降伏貫通応力 σ_{re}

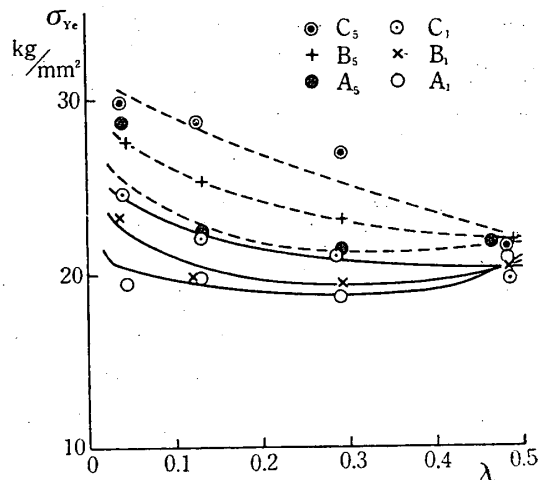
降伏が有孔部の断面を貫通した時の荷重を P_{re} とし、有孔部の最小断面積 A_0 で割つた応力を σ_{re} とする。

$$\sigma_{re} = P_{re} / A_0 \quad (9)$$

以下 σ_{re} に対して検討を加える。

σ_{re} を λ に対して第 12 図に示す。 σ_{re} は λ の増加と共に減少して大体一定値 σ_{rl} となり、 λ の減少と共に大体 σ_{ru} に近付く。曲線の傾向は σ_{r0} と同じ傾向であるが、然し板巾 b が大きい場合には逆に増大する。これはチャック或は取付の関係で確実に中心線上に作用しないで、モーメントが生ずるためと思われる。貫通も孔の左右で同時ではなく、第 10 図 A₁-v の歪模様からもわか

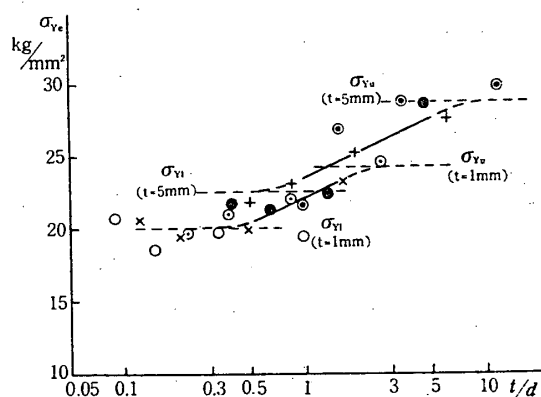
る。



第12図 σ_{ye} と λ との関係

第12図から λ を一定にして考えると、板巾 b が小さい程、又板厚が大きい程 σ_{ye} は大きく σ_{yb} と同じく t/d に関係するものと思われる。

従つて σ_{ye} を t/d に対して第13図に示す。 σ_{ye} は $\log(t/d)$ と大体比例関係がある。 t/d の小さい場合には大体 σ_{yi} に等しいが、 t/d の大きい場合には σ_{yu} に等しい。これは降伏の貫通が、後者では急であつて上降伏点応力に対応することにも因つてと思われ、貫通後は σ_{yi} に低下するのである。



第13図 σ_{ye} と t/d との関係

以上の降伏の貫通状況は、有孔板引張についての武藤氏⁴⁾ 及び美馬氏⁵⁾ の実験結果等と大体同じである。

5. 結語

軟鋼有孔板の引張による降伏開始の条件は、板巾、板厚及び孔径による可成り複雑な現象である。

以上の実験結果から確定的な結論を与えることは危険であるが、一応の結果として、孔が極めて小さい場合には、断面の平均応力が下降伏点応力に達した時に全断面に降伏して応力集中には無関係であり、孔が極めて大きい場合には、円孔周辺部の最大局所応力が下降伏点応力の約1.5倍に達した時に降伏するものと考えられる。孔が兩者の中間の大きさの場合には、兩極限の中間の状態即ち恐らく応力集中と平均応力の兩者によつて支配される遷移状態が実現されるのであつて、その一般法則は今後の研究に俟たねばならない。

此の種の問題には三次元的解析或は弾-塑性的解析を必要とするであろう。尙降伏開始の発見方法に就いては更に研究し、慎重を期したい。

本研究に対して中西教授からは貴重な御意見を賜わり、又試験片材料は福井教授及び東日本重工横浜造船所の赤木・桜井兩技師に御便宜を賜つたものであつて、厚く感謝の意を表する次第である。

尙実験に努力された阿部慎藏及び田近陽子兩君に感謝する。

文 献

- (1) 中西不二夫：東大航研報告 72 (1931)；機械学会誌，53 (1950)，62.
- (2) R. C. J. Howland & A. C. Stevenson: *Phil. Trans.*, A, 232 (1933).
- (3) E. Sternberg & M. A. Sadowsky: *J. Appl. Mech.*, 16 (1949), 27.
- (4) 武藤清：建築学会大会論文集，(1936)，54.
- (5) 美馬源次郎：機械学会論文集，12 (1946)，101.

(1952年4月19日受理)