"殻体における有限変形の理論" に対する補遺と訂正

吉村慶丸

Suppliments and Corrigenda for the "Theory of Thin Shells with Finite Deformation"

Yoshimaru YOSHIMURA

ABSTRACT: In this paper, while correcting the error about the derivation of the equilibrium equations of moment in the previous paper "Theory of Thin Shells with Finite Deformation" (Rept. Inst. Sci. and Tech., Tokyo Univ., Vol. 2 (1948), 167–173; Vol. 3 (1949), 19–25), the author supplements some examples of the general representations obtained in the paper, for the help of understanding the general results and the use in future.

(Received April 15, 1952)

前報告 "殻体における有限変形の理論" 理工研報告 2 (1948) 167 及び 3 (1949), 19) において，断面モーメントの記述が不完全であり，モーメントの平衡の条件に誤りがあつたので，こゝに補足訂正するとともに，本報告では前報告で得られた一般的表示を具体的な場合に適用して，それら一般表示の理解の助けとすると共に今後の使用の便に供したいと思う．記号はすべて前報告と同様である．

1. 訂　正

断面モーメント

薄い殻では $\sigma_{33}=0$ と考えられるから，変形後の状態において $\alpha=\text{const.}$, $\beta=\text{const.}$ の断面に作用する応力 $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ は夫々

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_1&=\sigma_{11}\boldsymbol{a}+\sigma_{12}\boldsymbol{b}+\sigma_{13}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\sigma}_2&=\sigma_{21}\boldsymbol{a}+\sigma_{22}\boldsymbol{b}+\sigma_{23}\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

によつて与えられる．断面力は

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}_1&=\int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{\sigma}_1dz, & \boldsymbol{T}_2&=\int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{\sigma}_2dz\\ T_{11}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{11}dz, & T_{12}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{12}dz\\ T_{21}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{21}dz, & T_{22}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{22}dz\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

によつて定義されるから

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}_1&=T_{11}\boldsymbol{a}+T_{12}\boldsymbol{b}+T_{13}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{T}_2&=T_{21}\boldsymbol{a}+T_{22}\boldsymbol{b}+T_{23}\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

となり，断面力の成分は変形後の曲面 V_2 に関する自然標構 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ についてとればよい．

これに対して断面モーメントは

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{G}_1&=\int_{-t/2}^{t/2}(z\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}_1)dz\\ \boldsymbol{G}_2&=\int_{-t/2}^{t/2}(z\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}_2)dz\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

によつて定義されるから，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ の相逆系

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^*=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n}]},\quad \boldsymbol{b}^*=\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n}]}\\ &\boldsymbol{n}^*=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n}]}=\boldsymbol{n}\\ &[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n}]=\frac{H}{\sqrt{EG}}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

を用えば

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{G}_1&=[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n}](H_1\boldsymbol{a}^*+G_1\boldsymbol{b}^*)\\ \boldsymbol{G}_2&=[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n}](G_2\boldsymbol{a}^*+H_2\boldsymbol{b}^*)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

とおくことが出来，こゝに

$$H_1=-\int_{-t/2}^{t/2}z\sigma_{12}\,dz.\qquad G_1=\int_{-t/}^{t/2}z\sigma_{.}\,dz\tag{7}$$

$$G_2=-\int_{-t/2}^{t/2}z\sigma_{22}dz, \qquad H_2=\int_{-t/2}^{t/2}z\sigma_{21}dz$$

である．従つて若し彈性法則として Hooke の法則を適用するならば

$$\left.\begin{aligned}G_1&=-B(\kappa_1+\nu\kappa_2)\\G_2&=+B(\kappa_2+\nu\kappa_1)\\H_1&=-H_2=B(1-\nu)\kappa_{12}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

が得られる．この結果は前報告と同じであるが，断面モーメントの場合にはその成分を V_2 の標構に対する相逆系に關して考えなければならないことを明かにしておく．

モーメントの平衡

前報告の (5.1) における $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ の代りに $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ を用い，且つこの他に $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ によるモーメントを考えなければならないから平衡条件式は

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\boldsymbol{G}_1\sqrt{G}\,d\beta)d\alpha+\frac{\partial}{\partial\beta}(\boldsymbol{G}_2\sqrt{E}\,d\alpha)d\beta+\boldsymbol{M}H_0d\alpha d\beta+[\boldsymbol{a}\sqrt{E}\,d\alpha\times\boldsymbol{T}_1\sqrt{G}\,d\beta]+[\boldsymbol{b}\sqrt{G}\,d\beta\times\boldsymbol{T}_2\sqrt{E}\,d\alpha]=0 \tag{9}$$

$\boldsymbol{M}$: 変形前の中性面の単位面積当りの外力のモーメント．

(3) 及び (5) により

$$[\boldsymbol{a}\sqrt{E}\,d\alpha\times\boldsymbol{T}_1\sqrt{G}\,d\beta]=[\boldsymbol{abn}](T_{12}\boldsymbol{n}^*-T_{13}\boldsymbol{b}^*)\sqrt{EG}\,d\alpha d\beta=H(T_{12}\boldsymbol{n}^*-T_{13}\boldsymbol{b}^*)d\alpha d\beta$$

$$[\boldsymbol{b}\sqrt{G}\,d\beta\times\boldsymbol{T}_2\sqrt{E}\,d\alpha]=[\boldsymbol{abn}](-T_{21}\boldsymbol{n}^*+T_{23}\boldsymbol{a}^*)\sqrt{EG}\,d\alpha d\beta=H(-T_{21}\boldsymbol{n}^*+T_{23}\boldsymbol{a}^*)d\alpha d\beta$$

又前報告 (3.7) に相当する式及び (3.20) より

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big([\boldsymbol{abn}]\boldsymbol{a}^*\Big)=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})=[\boldsymbol{abn}]\left[\left(m_2-\frac{G_\alpha}{2G}\right)\boldsymbol{a}^*-\frac{m_1\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\boldsymbol{b}^*-\frac{FM-GL}{H^2}\sqrt{E}\,\boldsymbol{n}^*\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big([\boldsymbol{abn}]\boldsymbol{b}^*\Big)=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})=[\boldsymbol{abn}]\left[-\frac{l_2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\boldsymbol{a}^*+\left(l_1-\frac{E_\alpha}{2E}\right)\boldsymbol{b}^*-\frac{FL-EM}{H^2}\sqrt{G}\,\boldsymbol{n}^*\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\Big([\boldsymbol{abn}]\boldsymbol{a}^*\Big)=\frac{\partial}{\partial\beta}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})=[\boldsymbol{abn}]\left[\left(n_2-\frac{G_\beta}{2G}\right)\boldsymbol{a}^*-\frac{n_1\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\boldsymbol{b}^*-\frac{FN-GM}{H^2}\sqrt{E}\,\boldsymbol{n}^*\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\Big([\boldsymbol{abn}]\boldsymbol{b}^*\Big)=\frac{\partial}{\partial\beta}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})=[\boldsymbol{abn}]\left[-\frac{m_2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\boldsymbol{a}^*+\left(m_1-\frac{E_\beta}{2E}\right)\boldsymbol{b}^*-\frac{FM-EN}{H^2}\sqrt{G}\,\boldsymbol{n}^*\right]$$

が導かれるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{G}_1\sqrt{G})}{\partial\alpha}&=\frac{\partial\boldsymbol{G}_1}{\partial\alpha}\sqrt{G}+\boldsymbol{G}_1\frac{G_\alpha}{2\sqrt{G}}\\&=[\boldsymbol{abn}]\Bigg\{\left[\sqrt{G}\left(\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}+H_1\left(m_2-\frac{G_\alpha}{2G}\right)-G_1\frac{l_2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)+H_1\frac{G_\alpha}{2\sqrt{G}}\right]\boldsymbol{a}^*+\left[\sqrt{G}\left(\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}-H_1\frac{m_1\sqrt{E}}{\sqrt{G}}+G_1\left(l_1-\frac{E_\alpha}{2E}\right)\right)+G_1\frac{G_\alpha}{2\sqrt{G}}\right]\boldsymbol{b}^*\\&\quad-\left[H_1\frac{FM-GL}{H^2}\sqrt{E}+G_1\frac{FL-EM}{H^2}\sqrt{G}\right]\boldsymbol{n}^*\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{G}_2\sqrt{E})}{\partial\beta}&=\frac{\partial\boldsymbol{G}_2}{\partial\beta}\sqrt{E}+\boldsymbol{G}_2\frac{E_\beta}{2\sqrt{E}}\\&=[\boldsymbol{abn}]\Bigg\{\left[\sqrt{E}\left(\frac{\partial G_2}{\partial\beta}+G_2\left(n_2-\frac{G_\beta}{2G}\right)-H_2\frac{m_2\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\right)+G_2\frac{E_\beta}{2\sqrt{E}}\right]\boldsymbol{a}^*+\left[\sqrt{E}\left(\frac{\partial H_2}{\partial\beta}-G_2\frac{n_1\sqrt{E}}{\sqrt{G}}+H_2\left(m_1-\frac{E_\beta}{2E}\right)\right)+H_2\frac{E_\beta}{2\sqrt{E}}\right]\boldsymbol{b}^*\\&\quad-\left[G_2\frac{FN-GM}{H^2}\sqrt{E}+H_2\frac{FM-EN}{H^2}\sqrt{G}\right]\boldsymbol{n}^*\Bigg\}\end{aligned}$$

が得られる．従つて

$$\boldsymbol{M}=M_1[\boldsymbol{abn}]\boldsymbol{a}^*+M_2[\boldsymbol{abn}]\boldsymbol{b}^*$$

とおけば，$\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{n}^*$ 方向のモーメントの平衡の条件は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\sqrt{G}+\frac{\partial G_2}{\partial\beta}\sqrt{E}+H_1\sqrt{G}\,m_2-G_1\frac{l_2G}{\sqrt{E}}+G_2\sqrt{E}\left(n_2-\frac{G_\beta}{2G}+\frac{E_\beta}{2E}\right)+H_2m_2\sqrt{G}+M_1H_0+T_{23}\sqrt{EG}=0\\&\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\sqrt{G}+\frac{\partial H_2}{\partial\beta}\sqrt{E}-H_1\sqrt{E}\,m_1+G_1\sqrt{G}\left(l_1-\frac{E_\alpha}{2E}+\frac{G_\alpha}{2G}\right)-G_2\frac{n_1E}{\sqrt{G}}+H_2\sqrt{E}\,m_1+M_2H_0-T_{13}\sqrt{EG}=0\\&H_1\frac{FM-GL}{H^2}\sqrt{E}+G_1\frac{FL-EM}{H^2}\sqrt{G}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$+G_2\frac{FN-GM}{H^2}\sqrt{E}+H_2\frac{FM-EN}{H^2}\sqrt{G}\Bigg)$$

$$-T_{12}+T_{21}=0$$

となる.

2. 補　遺

前報告における中性面の歪，曲率変化及び平衡方程式に対して，具体例として平板における直角座標並びに極座標及び円筒殻の表示を示して今後の使用の際の便及び理解の助けとしたい.

中性面の伸び及び曲率変化

(1)　平板（直角座標の場合）

α, β として直角座標 x, y をとれば

$$E_0=1\quad G_0=1,\quad F_0=0$$

$$L_0=0,\quad M_0=0,\quad N_0=0$$

であるから，前報告（1.16）より

$$\varphi_1=u_x,\quad \varphi_2=v_x,\quad \varphi_3=w_x$$

$$\psi_1=u_y,\quad \psi_2=v_y,\quad \psi_3=w_y$$

従つて（1.22），（1.24）により

$$e_{11}=g_{11}/2\fallingdotseq u_x+\frac{1}{2}w_x^2$$

$$e_{12}=g_{12}\fallingdotseq u_y+v_x+w_xw_y$$

$$e_{22}=g_{22}/2\fallingdotseq v_y+\frac{1}{2}w_y^2$$

曲率変化は（2.8），（2.9）より

$$\kappa_1=L=w_{xx}-u_{xx}w_x-v_{xx}w_y-\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)w_{xx}$$

$$\kappa_{12}=M=w_{xy}-u_{xy}w_x-v_{xy}w_y-\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)w_{xy}$$

$$\kappa_2=N=w_{yy}-u_{yy}w_x-v_{yy}w_y-\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)w_{yy}$$

(2)　平板（極座標の場合）

α, β として r, θ をとれば

$$E_0=1,\quad F_0\quad 0,\quad G_0=r^2$$

$$L_0,\quad M_0,\quad N_0=0$$

$$\varphi_1=u_r,\quad \varphi_2=v_r,\quad \varphi_3=w_r$$

$$\psi_1=u_\theta-v,\quad \psi_2=v_\theta+u,\quad \psi_3=w_\theta$$

従つて

$$e_{11}=e_{rr}\fallingdotseq u_r+\frac{1}{2}w_r^2$$

$$e_{12}=e_{r\theta}\fallingdotseq\frac{1}{r}(u_\theta-v)+v_r+\frac{1}{r}w_rw_\theta$$

$$e_{22}=e_{\theta\theta}\fallingdotseq\frac{1}{r}(v_\theta+u)+\frac{1}{2r^2}w_\theta^2$$

$$\kappa_1=\kappa_r=L=w_{rr}-u_{rr}w_r-\frac{1}{r}v_{rr}w_\theta$$

$$-\frac{1}{2}\left(w_r^2+\frac{1}{r^2}w_\theta^2\right)w_{rr}$$

$$\kappa_{12}=\kappa_{r\theta}=\frac{M}{r}=\frac{1}{r}w_{r\theta}-\frac{1}{r^2}w_\theta+\frac{1}{r^2}(u_\theta-v)w_r$$

$$-\frac{1}{2r^2}u_rw_\theta+\frac{1}{2r}v_rw_r+\frac{1}{r^3}(v_\theta+u)w_\theta$$

$$-\frac{1}{2r}(2u_{r\theta}-v_r)w_r-\frac{1}{2r^2}(2v_{r\theta}+u_r)w_\theta$$

$$-\frac{1}{2r}\left(w_r^2+\frac{1}{r^2}w_\theta^2\right)w_{r\theta}$$

$$\kappa_2=\kappa_\theta=\frac{N}{r^2}=\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}$$

$$-\frac{1}{r}u_rw_r-\frac{1}{r^3}(u_\theta-v)w_\theta-\frac{1}{r^2}v_rw_\theta$$

$$-\frac{1}{r^2}(u_{\theta\theta}-v_\theta)w_r-\frac{1}{r^3}(v_{\theta\theta}+u_\theta)w_\theta+\frac{1}{r^2}(v_\theta+u)w_r$$

$$-\frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{r^2}w_\theta^2+w_r^2\right)w_{\theta\theta}\quad\frac{1}{2r}w_r^3-\frac{1}{2r^3}w_rw_\theta^2$$

変形が極に対して対称である場合には，θ に関する導函数及び v が 0 であるから

$$e_{11}=e_{rr}=u_r+\frac{1}{2}w_r^2$$

$$e_{12}=e_{r\theta}=0$$

$$e_{22}=e_{\theta\theta}\quad\frac{u}{r}$$

$$\kappa_1=\kappa_r=L=w_{rr}-u_{rr}w_r-\frac{1}{2}w_r^2w_{rr}$$

$$\kappa_{12}=\kappa_{r\theta}=\frac{M}{r}=0$$

$$\kappa_2=\kappa_\theta=\frac{N}{r^2}=\frac{1}{r}w_r-\frac{1}{r}u_rw_r+\frac{1}{r^2}uw_r-\frac{1}{2r}w_r^3$$

(3)　円筒殻

中性面の半径を a とし，α, β として軸方向に x, 円周方向に動径のなす角 θ を取れば

$$x=x$$

$$y=a\cos\theta$$

$$z=a\sin\theta$$

（但し y, z は軸に直角な横断面内の直角座標）であるから

$$E_0=1,\quad F_0=0,\quad G_0=a^2$$

$$L_0=0,\quad M_0=0,\quad N_0=a$$

$$\varphi_1=u_x,\quad \varphi_2=v_x,\quad \varphi_3=w_x$$

$$\psi_1=u_\theta,\quad \psi_2=v_\theta-w,\quad \psi_3=w_\theta+v$$

$$y=a\theta$$

とおけば

$$e_{11}=e_{xx}\doteqdot u_x+\frac{1}{2}w_x^2$$

$$e_{12}=e_{xy}\doteqdot u_y+v_x+w_xw_y$$

$$e_{22}=e_{yy}\doteqdot v_y-\frac{w}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{a^2}+w_y^2\right)$$

$$\kappa_1=\kappa=w_{xx}-u_{xx}w_x-v_{xx}w_y-\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)w_{xx}$$

$$\kappa_{12}=\kappa_{xy}=w_{xy}+\frac{1}{2a}(v_x-u_y)+\frac{1}{2a}w_xw_y$$

$$-u_{xy}w_x-v_{xy}w_y+\frac{1}{2a^2}(vw_x+v_xw)$$

$$-\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)w_{xy}+\frac{1}{a^2}ww_xw_y$$

$$\kappa_2=\kappa_y=w_{yy}+\frac{w}{a^2}$$

$$+\frac{1}{a^2}ww_y-\frac{1}{2a}(w_x^2+w_y^2)-\frac{w^2}{a^3}$$

$$-u_{yy}w_x-v_{yy}w_y+\frac{1}{a^3}vw+\frac{1}{a^2}(vw_y+v_yw)$$

$$+\frac{3}{2a^2}ww_y^2+\frac{1}{2a^2}ww_x^2-\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)w_{yy}$$

これ等の曲率変化における高次の項は棒の場合と類似の形を有している.

平衡方程式

前報告 (5.12) 及び本報告 (10) は有限の歪に対する一般的結果を与えるものであつて, 薄板の場合には微小歪の下の有限変位及び歪も変位も有限な二つの場合が考えられる.

(a) 微小歪, 有限変位の場合

この場合は

$$E=E_0,\quad F=F_0,\quad G=G_0$$

と取ることが許されるが L, M, N は L_0, M_0, N_0 によつて代用することは出来ない. 従つて直角座標 (矩形板) の場合には

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}-T_{13}L-T_{23}M=0$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}-T_{13}M-T_{23}N=0$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x}+\frac{\partial T_{23}}{\partial y}+T_{11}L+2T_{12}M+T_{22}N=0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}+T_{23}=0$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial y}-T_{13}=0$$

となり, 従来の w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} の代りに L, M, N が用いられる. 円板についても同様であるから省略する.

円筒殻の場合には平板の場合の式において L, M, N の代りに L, M/a, N/a^2 とおけばよく, 円筒殻が平板と異る点は, 平板においては $N_0=0$ であるのに対して円筒殻では $N_0=a$ であることである.

(b) 有限歪, 従つて有限変位の場合

この場合は E, F, G が E_0, F_0, G_0 と異り, その影響を考える必要がある. 一例として円板がその中心に対して廻転対称の変形を行う場合 (例えば円板を円筒殻, 円錐殻, 半球殻等に変形する場合) を考える. そうすると T_{12}, H_1, H_2, T_{23} はすべて 0, θ に関する微分も 0 であるから, 変形後の r 方向及び面に垂直の方向の平衡方程式は, X, Z を変形後の殻体の単位面積に作用する力の切線及び法線成分とすれば,

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial r}\sqrt{G}+(T_{11}-T_{22})\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}-T_{13}\frac{\sqrt{G}L}{\sqrt{E}}$$
$$+\sqrt{EG}\,X=0$$

$$\frac{\partial(T_{13}\sqrt{G})}{\partial r}+T_{11}L\sqrt{\frac{G}{E}}+T_{22}N\sqrt{\frac{E}{G}}$$
$$+\sqrt{EG}\,Z=0$$

モーメントの釣合は

$$\frac{\partial(G_1\sqrt{G})}{\partial r}+G_2\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}-T_{13}\sqrt{EG}=0$$

変形後の曲面の主曲率

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E},\qquad \frac{1}{R_2}=\frac{N}{G}$$

を用えば, 法線方向の釣合の式は

$$\frac{\partial(T_{13}\sqrt{G})}{\partial r}+\sqrt{EG}\left(\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}\right)+\sqrt{EG}\,Z=0$$

と書くことも出来る. 尚この他に両立の条件として Gauss の特性方程式

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{1}{4G}\left(\frac{dG}{dr}\right)^2+\frac{1}{4E}\frac{dE}{dr}\frac{dG}{dr}=\frac{1}{R_1R_2}EG$$

及び Mainardi-Codazzi の関係

$$\frac{dN}{dr}=\frac{1}{2E}\frac{dG}{dr}L+\frac{1}{2G}\frac{dG}{dr}N$$

が成立つから, 歪-応力の関係, 即ち E, G と T_{11}, T_{22} との関係が与えられゝば, これらの式から, 与えられた外力 X, Z の下に応力 T_{11}, T_{22}, 歪 E, G 及び曲面の形 L, N(或いは R_1, R_2) を解くことが出来る. これらの式は有限の塑性変形を扱うのに便利な式である.

(1952 年 4 月 15 日受理)