

# 薄い梁の減衰振動 (I. 空気抵抗の影響)

植村 益次, 竹鼻 三雄

(1953年5月6日受理)

## Damped Vibrations of Thin Beams

### (I. The Effect of Air Resistance)

MASUJI UEMURA and MITSUO TAKEHANA

(Received May 6, 1953)

**ABSTRACT:** In the measurement of damping capacities or Young's moduli of materials the method of lateral vibration of thin beams is often used. With respect to the damping capacities, the influence of external air resistance upon the logarithmic decrement seems to be not negligible, but comparable with that of internal friction. Therefore, this neglect of air resistance which was indistinct or untouched so far, would lead to an inaccurate measurement of internal friction.

In the present work, this vibrational damping of thin cantilever beams due to the air resistance was first treated phenomenologically from the standpoint of mechanical vibration, not of aerodynamics. The following nonlinear partial differential equation was formulated, introducing two kinds of air resistance, that is, "viscous" and "hydrodynamic" air resistances.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi I \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} + p_a b \eta_1 \frac{\partial w}{\partial t} \pm p_a b \eta_2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

where  $\rho$  is the density of material,  $p_a$  the pressure of air,  $E$  Young's modulus,  $\xi$  the coefficient of solid viscosity,  $\eta_1, \eta_2$  the coefficients of air resistances,  $b$  the breadth,  $I$ ,  $A$  the moment of inertia, the area of a cross section of the beam respectively.

Our approximate analysis using Galerkin's method and the perturbation method gave a satisfactory agreement with our experimental results on logarithmic decrements which were obtained from a series of specimens under various air pressures. That is to say, apart from the constancy of logarithmic decrement due to old theories, its dependencies on almost all factors such as  $t$  (time),  $y$  (amplitude),  $h$  (thickness),  $p_a$  and  $\rho$  etc. were individually verified. Such a phenomenological procedure would be expected to be also effective in making clear the nature of internal friction.

In Appendix, details of the measuring apparatus using wire resistance strain gages are described. The apparatus was specially made for the above experiment, the specimen being placed in a vacuum chamber.

## 1. 緒言

薄い板状梁の横振動は、金属内部摩擦の研究や材料のヤング係数や減衰能の測定等に屢々用いら

れる振動型式である。其の際空気による外部抵抗は屢々等閑視されているが、減衰性に及ぼす影響は内部摩擦と同程度であつて決して無視できるものではない。然るに空気抵抗の振動学的本質も明

確にされていない憾があり、そのため本来の内部摩擦の研究が益々混沌として收拾がつかない原因の一つと思われる。本文では振動薄板近辺の空気力学的考察は論外として、振動学の立場から実験を行つて空気抵抗の本質を現象論的に取扱つてみたいと思う。従来内部摩擦の研究に關聯して、妹沢<sup>(1)</sup>、樋口<sup>(2)</sup>、大森<sup>(3)</sup>氏等の実験結果があるが、十分に説明されない儘に放置されている。筆者は空気抵抗として、振動速度の一乗に比例する粘性の抵抗と、振動速度の二乗に比例する動力学的抵抗とを合せ考慮し、非線型振動方程式を近似的に解析した結果、実験結果を良く説明することができた。尙上記実験に際して、抵抗線歪計による振動測定装置を試作して良好な結果を得たので、附録としてその要点を報告する。

## 2. 減衰振動方程式

簡単のため一様断面の均質梁を考え、空気中での減衰振動方程式を次のように置く。

$$\rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^4} + p_a b \eta_1 \frac{\partial w}{\partial t} \pm p_a b \eta_2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

茲で

$\rho$ : 材料の密度	$\eta_1, \eta_2$ : 空気抵抗係数
$E$ : ヤング係数	$p_a$ : 空気圧
$\xi$ : 固体粘性係数	$x$ : 梁の軸方向坐標
$b$ : 梁の幅	$w$ : 梁の撓み
$h$ : 梁の厚さ	$t$ : 時間
$I$ : 断面の慣性能率	

$\pm$  は  $\partial w / \partial t$  の符号と一致する。

即ち空気抵抗として第 3, 第 4 項の両者を考慮する。振幅の小さい領域では、空気の影響は粘性によるもののみと考えられ、流速の小さい場合の渦流のない流体内での所謂 Newton の粘性抵抗に相当する。振動速度に比例する空気抵抗は、定性的には既に Muto<sup>(4)</sup>、妹沢<sup>(1)</sup>氏等により導入されている。然し薄い板状梁では、振幅が大きくなると渦流を伴い、空気の擾乱は著しく、動力学的な空気抵抗が生ずるものと思われる。これは大森<sup>(3)</sup>氏が既にシュリーレン写真によつて指摘されている。

第 2 項の固体粘性も亦 Voigt 型の内部粘性と考

える程決して簡単なものではないが、薄い梁のように歪が比較的小さく、又振動数の小さい場合には近似的に妥当であろう。その詳細は追つて発表する積りであるので、茲では深く触れない。

薄い梁の振動は、微小変位理論では不適當であろうと推測されるが、既に有限変位理論によつて検討した結果<sup>(5)</sup>から、補正項は  $(a/l)^2$  ( $a$ : 梁の先端最大撓み,  $l$ : 梁の長さ) の order であることがわかつていたので、微小変位としての振動方程式で充分であろう。

## 3. 振動方程式の解

実験の便宜上片持梁の場合を解析する。

振動方程式に於ける非線型項の附加によつて振動そのものが決定的な定性的変化を受けないで、附加的修正を及ぼす程度と思われる時には、偏微分方程式の変数を分離して Galerkin 法を適用することが便利である。即ち近似的に  $w(x, t)$  を

$$w(x, t) = X(x) \cdot f(t) \quad (2)$$

$$\begin{cases} X(x): \text{変位函数} \\ f(t): \text{時間函数} \end{cases}$$

とおく。  $X(x)$  は非線型項のない場合を近似的に採用し、片持梁の境界条件を満足するように

$$X(x) = a \frac{x^2}{11l^5} (20l^3 - 10l^2x + x^3) \quad (3)$$

とする。以上の  $w$  を用いて Galerkin 法を適用する。即ち

$$\int_0^l \left[ \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi I \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^4} + p_a b \eta_1 \frac{\partial w}{\partial t} \pm p_a b \eta_2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] w dx = 0 \quad (4)$$

の積分計算を行うと、次のような時間函数  $f$  についての非線型常微分方程式が得られる。

$$\ddot{f} + 2\epsilon \dot{f} \pm \gamma f^2 + \beta^2 f = 0 \quad (5)$$

茲で

$$\left. \begin{aligned} 2\epsilon &= 12.36 \frac{\xi I}{\rho b h l^4} + \frac{p_a \eta_1}{\rho h} = \frac{\xi}{E} \beta^2 + \frac{p_a \eta_1}{\rho h} \\ \beta^2 &= 12.36 \frac{EI}{\rho b h l^4} = 1.03 \frac{Eh^2}{\rho l^4} \\ \gamma' &= 0.739 \frac{p_a \eta_2}{\rho h}, \quad \gamma = a \gamma' \end{aligned} \right\} (6)$$

$\pm$  の符号は  $\dot{f}$  の符号と一致し、以下上符号は  $f > 0$ 、下符号は  $f < 0$  に相当する

(3) の冪級数による近似式を用いているが,  $p^2$ ,  $2\varepsilon$  は非線型項のない線型微分方程式の厳密解と一致している. 非線型項  $\gamma f^2$  によつて, 振動は修正的な変化しか受けないと思われるので, 線型微分方程式の時間函数  $f_0$ , 円振動数  $p$  及び減衰係数  $\varepsilon$  は夫々  $f, q, \delta$  の値をとるとし, 攝動法によつてパラメーター  $\gamma$  ( $\gamma < 1$ ) で次のように展開する.

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + f_1\gamma + f_2\gamma^2 + \dots \\ q^2 &= p^2 + c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \dots \\ \delta &= \varepsilon + d_1\gamma + d_2\gamma^2 + \dots \end{aligned} \right\} (7)$$

(7) を (5) に代入し,  $\gamma^i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) の係数を 0 と等置して次の微分方程式群が得られる.

$$\ddot{f}_0 + 2\delta\dot{f}_0 + q^2 f_0 = 0 \quad (8.a)$$

$$\ddot{f}_1 + 2\delta\dot{f}_1 + q^2 f_1 = 2d_1\dot{f}_0 \mp f_0^2 + c_1 f_0 \quad (8.b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{f}_2 + 2\delta\dot{f}_2 + q^2 f_2 &= 2(d_1\dot{f}_1 + d_2\dot{f}_0) \\ &\mp 2f_0\dot{f}_1 + (c_1 f_1 + c_2 f_0) \end{aligned} \right\} (8.c)$$

これ等を次の初期条件の下に解く.

$$\left. \begin{aligned} f_0(0) &= 1, & \dot{f}_0(0) &= 0 \\ f_r(0) &= 0, & \dot{f}_r(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (r=1, 2, \dots) \quad (9)$$

先ず (8.a) より  $f_0$  は簡単に求められる. 即ち

$$f_0 = \frac{1}{\sigma} e^{-\delta t} (\sigma \cos \sigma t + \delta \sin \sigma t) \quad (10)$$

但し  $\sigma^2 = q^2 - \delta^2$

次に  $f_1$  を求める. 先ず (10) を用いて (8.b) の右辺を計算すると

$$\begin{aligned} (8.b) \text{ の右辺} &= \frac{1}{\sigma} e^{-\delta t} \left[ c_1 (\sigma \cos \sigma t + \delta \sin \sigma t) \right. \\ &\quad \left. - 2d_1 q^2 \sin \sigma t \mp \frac{q^4}{2\sigma} e^{-\delta t} (1 - \cos 2\sigma t) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

従つてこれは見掛け上の強制振動であるので, これを避けるために  $\sin \sigma t, \cos \sigma t$  の係数を 0 として

$$c_1 = d_1 = 0 \quad (12)$$

が得られ, (8.b) は結局次のようになる.

$$\ddot{f}_1 + 2\delta\dot{f}_1 + q^2 f_1 = \mp \frac{q^4}{2\sigma^2} e^{-2\delta t} (1 - \cos 2\sigma t) \quad (13)$$

これを (9) の初期条件の下に解くと

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \mp \frac{2q^2}{9\sigma^2 + \delta^2} e^{-\delta t} \left( \frac{\delta}{\sigma} \sin \sigma t - 3 \cos \sigma t \right) \\ &\quad \mp f_{1p} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し} \\ f_{1p} &= \frac{1}{2\sigma^2} \frac{q^2}{9\sigma^2 + \delta^2} e^{-2\delta t} \{ (9\sigma^2 + \delta^2) \\ &\quad + (3\sigma^2 - \delta^2) \cos 2\sigma t + 4\sigma\delta \sin 2\sigma t \} \end{aligned} \right\} (14)$$

が得られる.

次に以上と同じようにして  $f_2$  を求める. 先ず  $c_2, d_2$  を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= -\frac{3q^6}{\sigma^2(9\sigma^2 + \delta^2)} e^{-2\delta t} \\ d_2 &= \frac{8q^2\delta}{9\sigma^2 + \delta^2} e^{-2\delta t} \end{aligned} \right\} (15)$$

であつて,  $df/dt$  の符号とは無関係に成立するのである.  $f_2$  を (9) の初期条件の下に解くと

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= \frac{q^2 e^{-\delta t}}{4\sigma^3(4q^2 - 3\delta^2)(9\sigma^2 + \delta^2)} [2\sigma(61q^4 \\ &\quad - 106q^2\delta^2 + 48\delta^4) \times \cos \sigma t + \delta(43q^4 \\ &\quad - 100q^2\delta^2 + 48\delta^4) \sin \sigma t] + f_{2p} \\ \text{但し} \\ f_{2p} &= -\frac{2q^2}{\sigma^2(9\sigma^2 + \delta^2)} e^{-2\delta t} \{ q^2 \cos 2\sigma t + (3\sigma^2 \\ &\quad - \delta^2) \} + \frac{q^4 e^{-3\delta t}}{4\sigma^3(4q^2 - 3\delta^2)(9\sigma^2 + \delta^2)} \\ &\quad \times \{ 6\sigma(q^2 - 2\delta^2) \cos 3\sigma t + \delta(11q^2 \\ &\quad - 12\delta^2) \sin 3\sigma t \} \end{aligned} \right\} (16)$$

となる.

以上の結果を (7) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= q^2 \left[ 1 + \frac{3q^4\gamma^2}{(q^2 - \delta^2)(9q^2 - 8\delta^2)} e^{-2\delta t} \right] \\ \varepsilon &= \delta \left[ 1 - \frac{8q^2\gamma^2}{9q^2 - 8\delta^2} e^{-2\delta t} \right] \end{aligned} \right\} (17)$$

であるが, 普通  $q \gg \delta$  であるから, 空気抵抗がある場合の円振動数, 減衰係数は結局次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} q &= p \left[ 1 - \frac{1}{6} \gamma^2 e^{-2\delta t} \right] \\ \delta &= \varepsilon \left[ 1 + \frac{8}{9} \gamma^2 e^{-2\delta t} \right] \end{aligned} \right\} (18)$$

又時間函数  $f$  は

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{q} \left[ (q \cos qt + \delta \sin qt) e^{-\delta t} \mp \frac{\gamma}{18} \right. \\ &\quad \left. \{ 4(3q \cos qt - \delta \sin qt) e^{-\delta t} - q(9 \right. \\ &\quad \left. + 3 \cos 2qt) e^{-2\delta t} \} + \frac{\gamma^2}{144} \{ (122q \cos qt \right. \\ &\quad \left. + 43\delta \sin qt) e^{-\delta t} - 32q(3 + \cos 2qt) \right. \\ &\quad \left. \times e^{-2\delta t} + (6q \cos 3qt + 11\delta \sin 3qt) e^{-3\delta t} \} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

となる。

自由振動を開始して半周期後即ち  $(df/dt) = 0$  となつた時の変位は、次のように求められる。

$$f_{(t=\pi/q)} = \alpha = - \left[ e^{-u} - \frac{2}{3} \gamma (e^{-u} + e^{-2u}) + \frac{\gamma^2}{72} (61e^{-u} + 64e^{-2u} + 3e^{-3u}) \right] \quad (20)$$

但し  $u = \pi\delta/q$

次の半周期は (19) に於いて下符号をとり、初期条件  $f = \alpha$ ,  $f' = 0$  とすればよいので、半周期毎に接続して行くと減衰振動曲線が得られる。

対数減衰率  $\lambda$  は

$$\lambda = \delta T = \frac{2\pi\epsilon [1 + (8/9)a^2\gamma^2 e^{-2\epsilon t}]}{p [1 - (1/6)a^2\gamma^2 e^{-2\epsilon t}]} = 2\pi(\epsilon/p) [1 + (19/18)a^2\gamma^2 e^{-2\epsilon t}] \quad (21)$$

であるので、振動中の先端での各最大振幅を  $y$  とすれば、 $y$  は近似的に

$$y \approx ae^{-\epsilon t} \quad (22)$$

で表わされるので、結局

$$\lambda = \lambda_0 [1 + (19/18)y^2\gamma^2] \quad (23)$$

となる。但し  $\lambda_0$  は  $y \rightarrow 0$  での  $\lambda$  を意味する。

#### 4. 実験要領

##### 1) 試験片

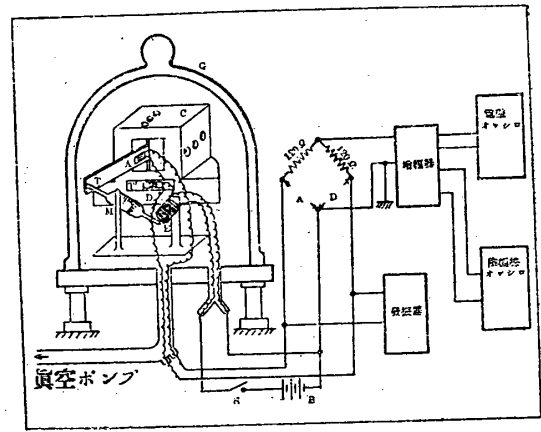
試験片の材料は四六真鍮板を用いた。素材を  $600^\circ\text{C}$  で1時間焼鈍し、徐冷後常温で圧延度を一定にして次の諸寸度の試験片を製作した。即ち

$$\begin{cases} h = 1.5, 1.0, 0.5 \text{ mm の3種類} \\ b = 30, 20, 10 \text{ mm の3種類} \\ L = 250 \text{ mm} \end{cases}$$

本実験では振動部の長さを  $l = 180 \text{ mm}$  と一定にした。試験片を  $l-b-h$ , 例えば  $180-30-0.5$  の記号で示す。

##### 2) 測定装置

空気抵抗の影響を見るための真空槽内での振動測定には、従来光学的方法が用いられてきた。然し筆者は最近発達してきた抵抗線歪計による電氣的計測が、①拡大率の大きいこと、②遠隔測定の可能性なこと、③真空槽による光線屈曲の影響のないこと等の理由で光学的方法に優ると思われるので、附録に示したような抵抗線歪計による振動測定装置を試作して実験を行つた。測定装置の概要を第1図に示す。



第1図 測定装置の概要

##### 3) 測定方法

真空槽内の重い金属固定体 (C) に、薄い試験片 (T) の一端を固定して水平方向に横振動を行わせる。固定端近くに抵抗線歪計 (A) を貼付し、アクティブゲージとする。真空ポンプを作動した時の温度変化を補償するため、ダミーゲージ (D) も真空槽内に入れておくが、熱膨脹による見掛け上の応力の相異を防ぐために、試験片と同一材質同様寸法のもの (T') に貼付し、試験片の近くに固定しておく。そして所定の真空度にした後は暫く放置し、安定状態になるのを待つ必要がある。

試験片の先端はマイクロメーター (M) を改造した支え金具の先端で所定の初期撓みが与えられ、硝子鐘 (G) を被せ、真空ポンプで所要の空気圧にした後外部の押ボタン (S) を押し、支え金具の他端に近く設けた電磁石 (E) を電流を通し、試験片の先端を解放し、自由振動を行わせる。電磁石に電流が通るのは一瞬であるので、試験片の減衰には影響は及ぼさない。

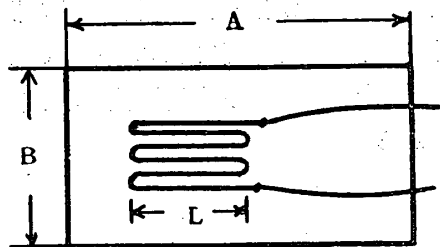
アクティブ及びダミーの両ゲージ及びそれと同等の固定抵抗2個とでブリッジを組み、その一对の角に低周波発振器による  $1,000 \text{ cs}$  (或は  $700 \text{ cs}$ ) の正弦波の入力電源を加える。振動に伴うアクティブゲージの伸縮により平衡が破れて生じた出力を他の一对の角から取り出し増巾器に加える。

増巾器の出力である振動波形を電磁オシロにより記録する。別に波形観測のために陰極線オシロを使用する。

使用した抵抗線歪計は“共和無線”製で、銅・ニッケル合金の  $0.025 \text{ mm}$  径の抵抗線である。その主要項目を第1表に、構造を第2図に示す。

第1表 抵抗線歪計の主要項目

	標点距離 L(mm)	抵抗 ( $\Omega$ )	感度係数 ( $\eta$ )	A × B (mm <sup>2</sup> )
K-9	4.0	120	1.7	19 × 9
K-22	9.5	120	2.0	32 × 13



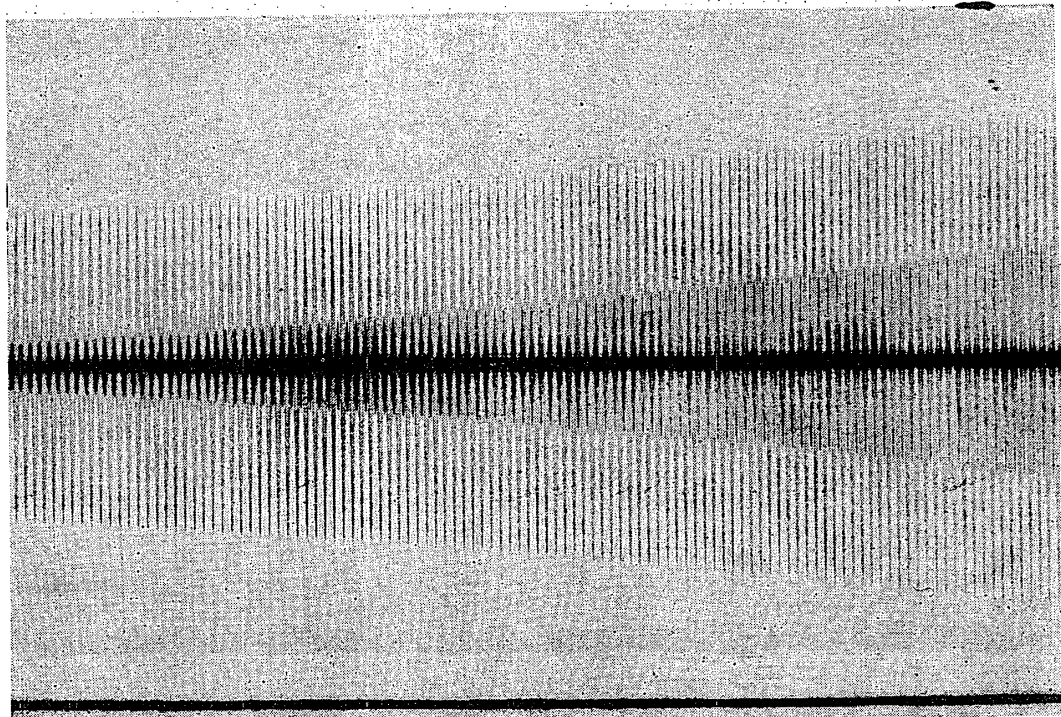
第2図 抵抗線歪計

K-22は Flat Grid 型, K-9は Wrap Round 型である。使用時にはフェルト・カバーを取り去り、ベースを出来るだけ切りつめて減衰に及ぼす影響を軽減するように努めた。

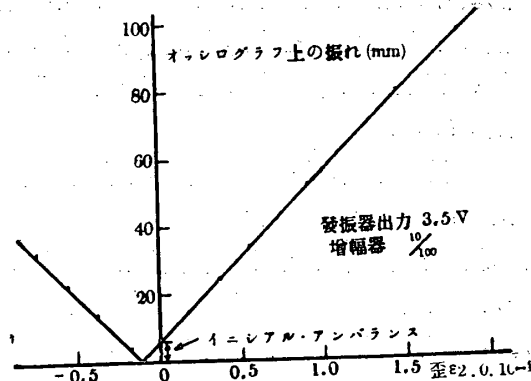
以上のようにして記録した減衰振動波形の一例を第3図に示す。又静的に負荷した時のオシログラフ上の振れと歪との関係を第4図に示すが、殆んど完全な直線的静的特性が得られている。

5. 実験結果とその検討

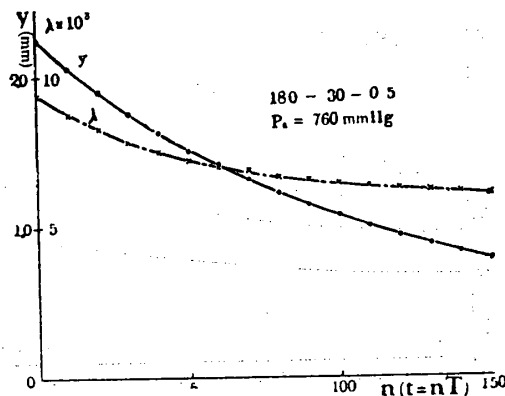
記録した減衰振動波形から対数減衰率  $\lambda$  を求め、解析結果 (21) と対比しつつ実験結果を検討



第3図 記録振動波形の一例



第4図 抵抗線歪計の静的特性



第5図  $\lambda \sim t$  関係図

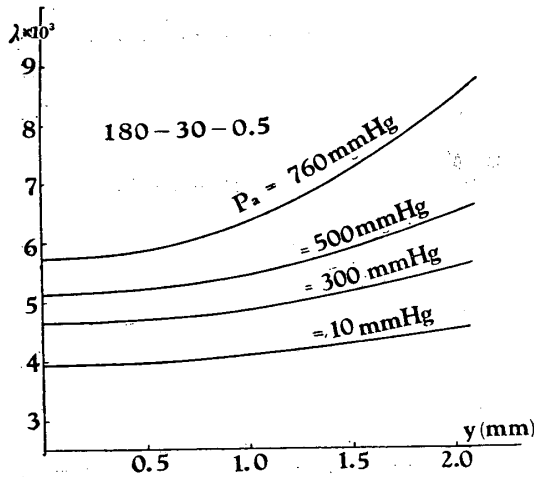
する。

(i) 対数減衰率  $\lambda \sim$  時間  $t$  (第5図)  
一例として  $p_a = 760 \text{ mmHg}$  の場合の 180-30-

0.5 試験片の結果を第5図に示す。振動中の各最大振幅  $y$  は明らかに指数函数的に減少しているが、 $\lambda$  も亦明らかに (21) の示すように指数函数的に減少している。

(ii) 対数減衰率  $\lambda \sim$  最大振幅  $y$  (第6, 7図)

一例として各種空気圧に対する 180-30-0.5 試験片の結果を第6図に示す。各曲線は (23) の示すように  $y$  に関する二次曲線であることを示しており、その増加率は  $y'$  に関係している。



第6図  $\lambda \sim y$  関係図

$p_a = 10 \text{ mmHg}$  の場合は殆んど真空中に近いので、 $\gamma' = 0$  より  $\lambda$  は  $y$  に無関係に一定の筈であるが、 $y$  と共に僅かに増加している。これは速度比例型の固体粘性以外の内部摩擦や固定端の影響等に因

るものと思われる。固定ブロックの大きさの影響については、30 mm 以上の厚さなら  $\lambda$  に無関係であることが示されている(2)。又固定圧については、2.0 kg/mm<sup>2</sup> 以上ではエネルギー散逸は殆んど無視できるか或は一定であることが示されている(3)。此等諸量が  $\lambda_0$  (真空中での  $\lambda$  を意味する) に如何に関係するかは更に検討を要する問題であるが、本文では詳細に触れないで、 $\lambda_0$  の  $y$  に対する増加量を除外して以下空気抵抗のみを論ずる。

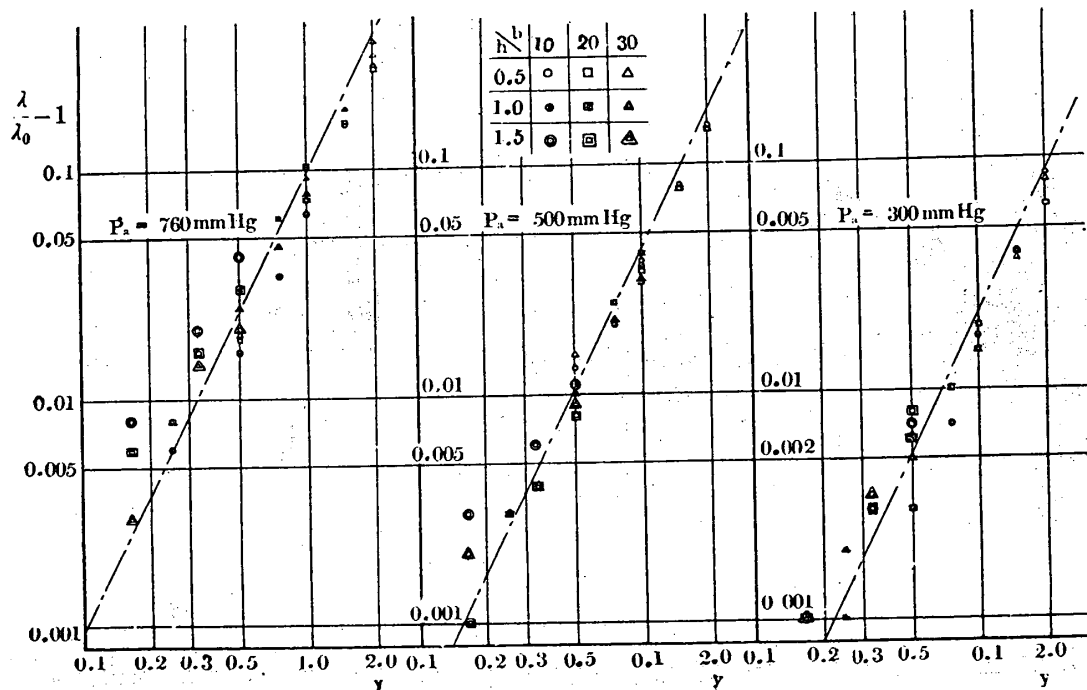
(22) から

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = K_0 y^2 \quad (24)$$

$$\text{但し } K_0 = \frac{19}{18} \left( 0.739 \frac{\rho_a \eta^2}{\rho h} \right)^2$$

であるので、各種試験片についての  $\log(\lambda/\lambda_0 - 1) \sim \log y$  を第7図に示す。各空気圧については、2乗線に略平行な直線関係が得られ、(24) が立証されている。

従来の諸実験結果は普通第6図のような  $\lambda \sim y$  線図で示されている。妹沢氏(1)は  $\lambda_0$  を起点として、各空気圧について直線で示され、又大森(3)氏は  $y$  の小さい領域は水平線で、それ以後は  $y$  の増加と共に直線で示している。然し両者の実験結果を詳細に観測すると矢張り二次曲線で図示するのが妥当のようである。又樋口氏(2)の実験結果は第6図と類似しているにも拘らず、対数減衰率  $\lambda$



第7図  $(\lambda/\lambda_0 - 1) \sim y$  関係図

を

$$\lambda = ay + b \quad (25)$$

但し  $a = cp_a + d$

$$c = f^2/k$$

( $f$ : 振動数,  $b, d, k$ : 常数)

と近似的に置き, 逆にこのような  $\lambda$  を与える振動方程式を推定しようとしておられるが, (1) のような簡単な弾性振動方程式で充分のようである.

(iii) 対数減衰率  $\lambda \sim$  空気密度  $p_a$  (第8・9図)

$\lambda$  は勿論のこと,  $\lambda_0$  も亦  $p_a$  によつて異なる.

即ち (6) より

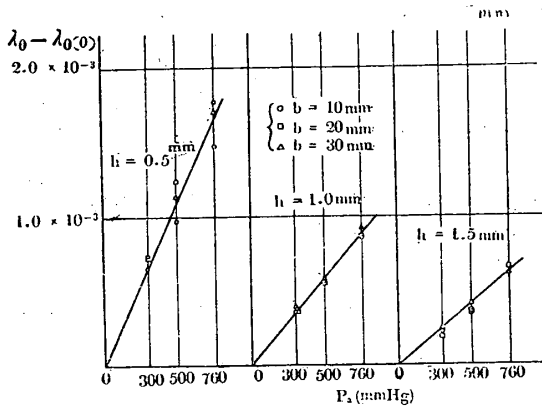
$$\lambda_0 = 2\pi \frac{\varepsilon}{p} = 2\pi \left( \frac{\xi}{E} p + p_a \frac{\eta_1}{\rho h p} \right) \quad (26)$$

であり, 従つて

$$\lambda_0 - \lambda_{0(0)} = K_1 p_a \quad (27)$$

但し  $K_1 = 2\pi \frac{\eta_1}{\rho h p} = f(p_a)$

である.  $\lambda_{0(0)}$  は空気抵抗が全然関与しない項である. ( $\lambda_0 - \lambda_{0(0)} \sim p_a$  を各板厚別に第8図に示すと, 直線関係が成立していることがわかる. 妹沢氏<sup>(1)</sup> は  $\lambda_0$  は  $p_a$  に無関係に一定値  $\lambda_{0(0)}$  をとるとしておられるが,  $y$  の小さな領域での実験がないからであり, (1) の振動方程式において粘性空気抵抗係数  $p_a$  と  $\eta_1$  の代りに, 常数  $k$  とおいたためである.



第8図 ( $\lambda_0 - \lambda_{0(0)}$ )  $\sim p_a$  関係図

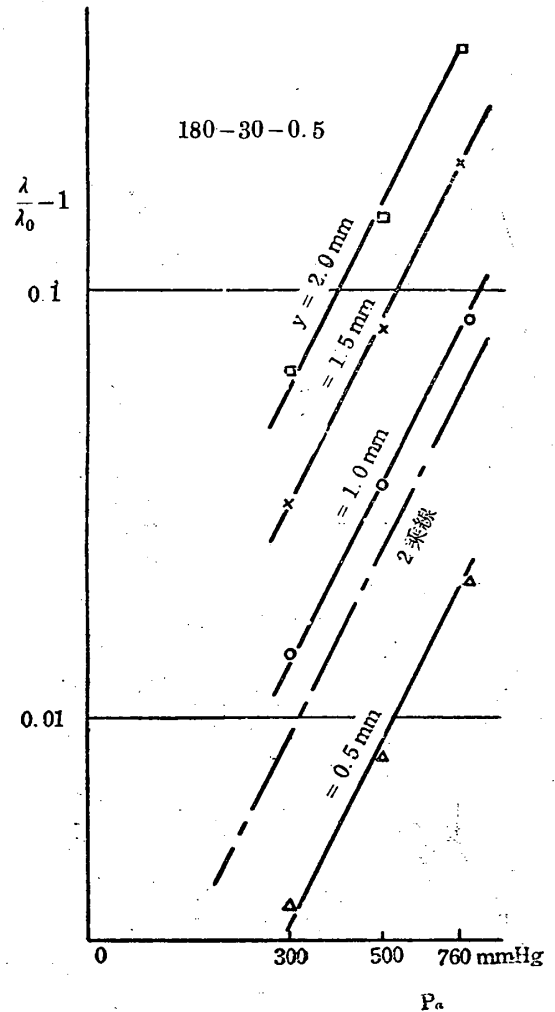
次に  $\lambda$  について考えると, (6) を参照して (24) より

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = K_2 p_a^2 \quad (28)$$

但し  $K_2 = \frac{19}{18} y^2 \left( 0.739 \frac{\eta_2}{\rho h} \right)^2 = f(p_a)$

であり, 一例として 180-30-0.5 試験片の結果を第9図に示す. 即ち各  $y$  について略2乗線に平行

な直線が得られ, (28) が立証されている.



第9図 ( $\lambda/\lambda_0 - 1$ )  $\sim p_a$  関係図

(iv) 対数減衰率  $\lambda \sim$  板幅  $b$  (第7・8図)

(6) からわかるように板幅  $b$  は,  $\eta_1, \eta_2$  を論外とすれば  $\varepsilon, p$  及び  $\gamma$  に無関係である. 空気抵抗係数  $\eta_1, \eta_2$  は一応空気力学的には形状係数であるので, 詳細に検討しなければならないが, 第7・8図から  $b$  は  $(\lambda/\lambda_0 - 1)$  及び  $(\lambda_0 - \lambda_{0(0)})$  には略無関係である. 従つて本実験範囲では  $\eta_1, \eta_2$  が  $b$  に無関係とすると,  $b$  は  $\lambda$  には無関係であるという解析結果が立証された訳である.

(v) 対数減衰率  $\lambda \sim$  板厚  $h$  (第7・10図)

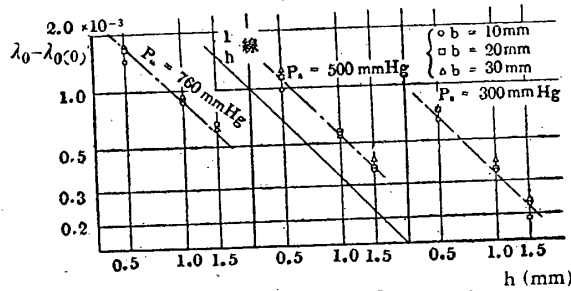
板厚  $h$  について考えると, (6) を参照して (26) より

$$\lambda_0 - \lambda_{0(0)} = K_3 \eta_1 / h^2 \quad (29)$$

但し  $K_3 = \frac{2\pi p_a l^2}{\sqrt{1.03 E \rho}} = f(h)$

である. ( $\lambda_0 - \lambda_{0(0)}$ ) を各空気圧別に  $h$  に対して第10図に示すと, 大体  $1/h$  に比例している. 従

つて空気抵抗係数  $\eta_1$  が  $h$  に比例すると考えると良く説明できる。



第 10 図  $(\lambda_0 - \lambda_{0(0)}) \sim h$  関係図

又 (24) から

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = K_4 \left( \frac{\eta_2}{h} \right)^2 \quad (30)$$

$$\text{但し } K_4 = \frac{19}{18} \nu^2 \left( 0.739 \frac{p_a}{\rho} \right)^2 \neq f(h)$$

であるが、第 7 図から  $(\lambda/\lambda_0 - 1)$  は殆んど  $h$  には無関係であることがわかる。従つて空気抵抗係数  $\eta_2$  も  $h$  に比例すると考えると良く説明できるようである。

(vi) 対数減衰率  $\lambda \sim$  材料密度  $\rho$  (第 11 図)

材料密度  $\rho$  について考えると、(6) を参照して (26) より、 $E$  も  $\rho$  の函数と考えると

$$\lambda_0 - \lambda_{0(0)} = K_5 \eta_1 / \sqrt{E\rho} \quad (31)$$

$$\text{但し } K_5 = \frac{2\pi p_a l^2}{\sqrt{1.03} h^2} \neq f(\rho)$$

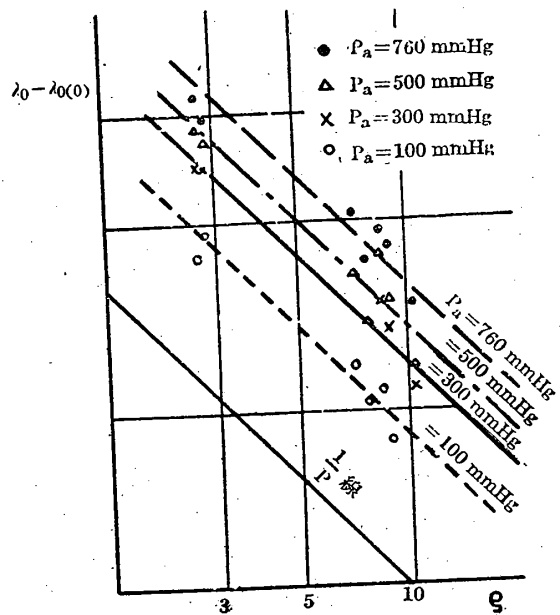
である。

扱て本実験では、材料としては四六真鍮についてのみ実験を行つたので、材料密度  $\rho$  による影響を見るため、一定寸度の各種材料についての樋口氏の試験結果<sup>(2)</sup>を借用させて頂くことにする。

$(\lambda_0 - \lambda_{0(0)})$  を各空気圧について  $\rho$  に対して第 11 図に示すと、大体  $1/\rho$  に比例している。この際  $\eta_1$  が  $\sqrt{E/\rho}$  に比例すると考えると、即ち  $\eta_1$  が  $h$  に比例することと関連し、円板動数  $p$  に比例すると考えると良く説明できる。

(vii) 空気抵抗係数  $\eta_1, \eta_2$

本実験で行つたような細長い薄い梁の片持梁振動の場合の空気抵抗は極めて複雑なもので、 $\eta_1, \eta_2$  を明白にするには空気力学的考察を必要とするであろう。本実験のような範囲内では、 $\eta_1$  は振動数  $p$  に比例し、 $\eta_2$  は  $h$  に比例すると考えると実験結果を良く説明できるようである。強いて説明すれば、振動数が大きい場合には、試験片近辺



第 11 図  $(\lambda_0 - \lambda_{0(0)}) \sim \rho$  関係図

の大気場の擾乱が甚だしく、空気抵抗係数  $\eta_1$  などが大きくなるのではないかと想像される。

以上各項目に亘つて実験結果を検討した結果、薄い梁の空気中での減衰振動方程式として (1) を考えると、現象論的に略正しいものと思われる。更に梁の長さ  $l$  も変えて実験を行えばもつと明白になるだろう。

## 6. 結論

本文は薄い梁の振動に及ぼす空気抵抗の影響を現象論的に研究したもので、(1) のような振動方程式を求めることができた。空気力学的な微視的考察が不可能に近いと思われるような場合には、本文のような研究も方法論的には必要であろう。次には同じような実験方法で内部摩擦の影響を考究して見たいと思う。即ち単に振動数とか応力とか振幅等のみをパラメーターとするのではなく、それらの因つて来たところの試験片の諸寸法を系統的に変えることによつて、統一的に研究し、その本質を表わす振動方程式を求めようとするものである。

終りに臨み、有益な実験結果の一部を引用させて頂いた東北大学の樋口教授及び終始御指導・御鞭撻を賜つた吉村助教授に深く謝意を表します。又実験の手伝をして下さつた阿部慎藏・助川政之及び田近陽子の諸君にもお礼申し上げます。



文 献

- (1) 妹沢・久保: 航研報告, 7 (1932).
- (2) 樋口: Journ. of Franklin Inst. 231, (1941).
- (3) 大森: 航空学会誌, 11 (1944), 33.
- (4) K. Muto: Z.A.M.M., 10 (1930), 346.
- (5) 吉村・植村: 理工研報告, 2 (1948), 57.

## 附録 抵抗線歪計による振動測定装置

### 1. はしがき

近時抵抗線歪計による歪測定が電気工学の発達と共に、広く一般に用いられるようになった。既に抵抗線歪計による種々の回路例も発表されているが、筆者は前記実験と関連して減衰率の極めて小さい振動の精密測定のために、抵抗線歪計による、電氣的測定回路を試作した所、良好な結果を得た。最近この問題に対する関心も深いので、装置について、些か詳細に述べてみたいと思う。

### 2. 計器に要求される特性

減衰振動に於ける微小な対数減衰率の測定に際し、次の様な要求項目を満たすように設計し、試作した。

- a. 振動数測定範囲 0~100 c.p.s.
- b. A型振動子使用の電磁オシログラフにて充分記録できること。
- c. 減衰振動曲線で振幅1%の誤差は、対数減衰率で10~20%程度の誤差を生ずるもので、振動曲線は極めて鮮明且つ滑らかであること。
- d. 対数減衰率の算定には、相対的な振幅変化が判れば充分なので、個々の抵抗線歪計の感度係数の不同は、余り厳密である必要はないが、測定を行つている時間中(最大30秒)、温度変化による歪計の抵抗変化、又は発振器の周波数、出力の変動及び増巾器の増幅度の変動があつてはならない。

上記の要求を考慮して、搬送波変調方式を採用した。

### 3. 抵抗線歪計

抵抗線歪計を接着するのに接着剤としてブチラールを用いた。その際貼付箇所をアルコールで拭いた後接着し、スポンジを介して重みをかけて一晝夜放置し、更に一晝夜おいてから使用する。抵抗線歪計の許容電流は25 mA、短時間電流40~50 mAと規定されている。従つてブリッジに加える交流電圧は余り大きく出来ないので、測定が短時間か長時間かによつて感度と安定度を考慮し

て定める必要がある。本装置は短時間測定の一部に入るのであるが、安定度を重視し3~5 Vに押えた。

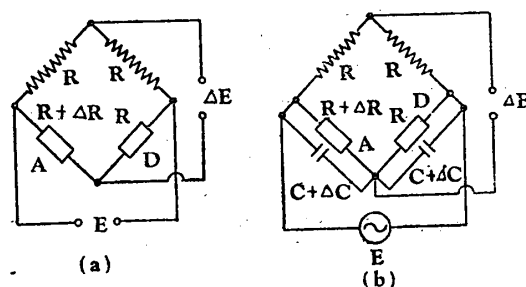
### 4. ブリッジ回路と増幅度

第1-a図に示すブリッジに於いて、最初抵抗容量を調整して平衡状態にした後、アクティブゲージが歪 $e$ を受けた場合、抵抗変化を $\Delta R$ 、歪計の感度係数を $\eta$ とすると、出力電圧 $\Delta E$ は

$$\Delta E = \frac{E}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R} = \eta e \quad (1)$$

で示される。今歪 $10^{-6}$ が、A型振動子により1 mmの振れを生ずるような増幅率を求めてみる。増幅回路の出力インピーダンス整合比を84 (7K $\Omega$ :1 $\Omega$ )、整合能率を0.9とすると電力増幅段のプレートには $1.9 \times 10^{-1}$  Vとなる必要がある。一方 $E=3$  V、 $\eta=2.0$ とすると $\Delta E=1.5 \times 10^{-6}$  Vであるから、電圧増幅度は $1.25 \times 10^5 = 102$  dbを要する。入力電力 $\Delta E$ が低い点から考えて雑音比を高くすることが難しく、増幅度も高いので低周波増幅器では限界に近いものと思われる。

尙実際にはブリッジの平衡を容易にするために、第2図に示すように500 $\Omega$ の可変抵抗2個により、抵抗分の粗及び精密調整を行うことにする。



第1図 ブリッジ回路説明図

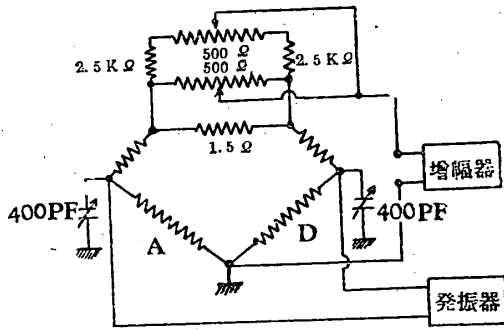
次に第1-b図に於いて並列容量及びその変化分を考慮して(1)を修正すると

$$\Delta E = \frac{E}{4} \left[ \frac{\Delta R}{R} - j(R\Delta X + X\Delta R) \right] \quad (2)$$

但し  $X = 2\pi fC$

となる。即ち容量不平衡 $\Delta X$ 及び並列容量の絶対値 $X$ により影響される項が測定誤差となつて

入り込んでくる。従つて容量不平衡は少くとも数  $\mu F$  以下におさえると共に、並列容量の絶対値を小さくすることに努めねばならない。これは発振器の出力回路とブリッジへの導線と増幅器への導線を含んだブリッジ回路相互及び対地容量を減少させることであつて、導線はなるべく短くしなければならない。特に発振器の出力トランスの二次巻線の不平衡容量に注意する必要がある。本装置では第2図に示すように  $400 \mu F$  のトリマー2個によつて対地容量の非対称を平衡させ、位相調整を行つている。



第2図 実際のブリッジ回路

### 5. 発振部

発振器は周波数及び出力電圧の安定、出力波形の優秀なこと、信号対雑音比の高いこと等が必要

である。発振器として次の二種を製作し、何れも実用上満足な結果が得られた。

#### (i) CR 発振器 (第3図)

抵抗、容量4段の移相型式とした。発振周波数は近似的に

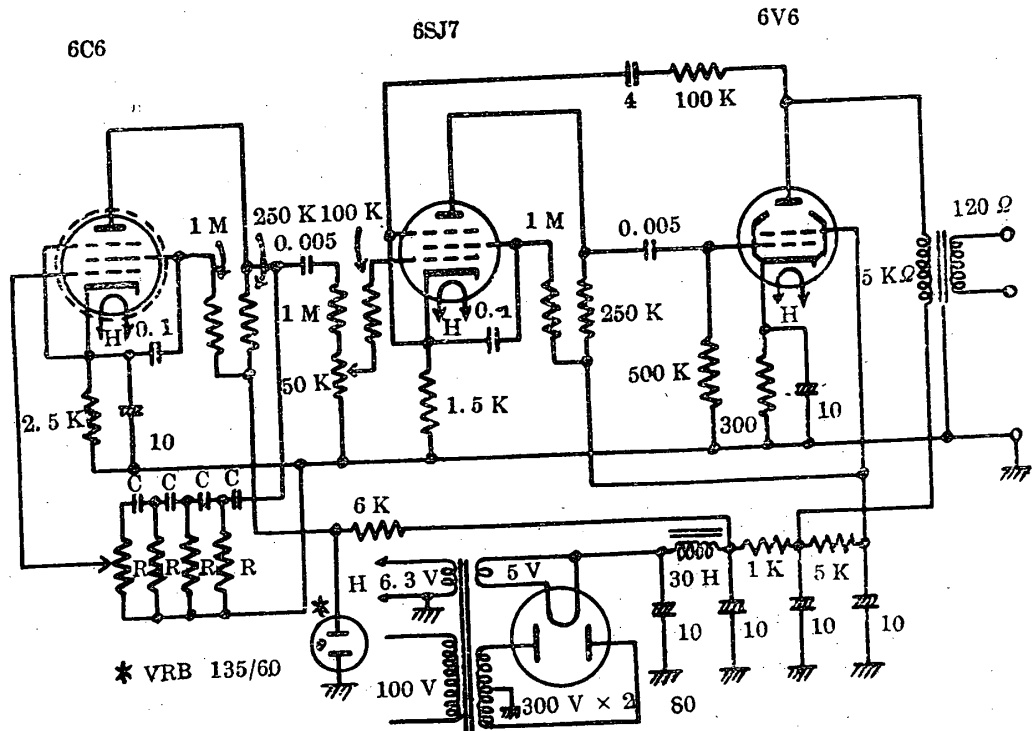
$$2\pi f = \sqrt{\frac{7}{10}} \frac{1}{CR} \quad (3)$$

で表わせるが、厳密には増幅回路の定数も影響がある。

測定する最大振動数は 100 c.p.s. であり、一般に搬送周波数はその 10 倍を要すると云われている。電磁オシロのA型振動子の周波数特性を併せ考えて 1000 c.p.s. を発振周波数とした。これは商用電源周波数とも離れているし、増幅が最も容易な周波数である。

発振出力の安定を期するため、B電源は定電圧放電管によつて、電圧の変動による周波数の変動を防いだ。又移相回路の最終段には可変抵抗器をおいて饋還電圧を適度に調整し、純正弦波の出るようにし、又電力増幅管の歪を軽減するためにバッファを兼ねて中間に 6S J7 をおき、6 V 6 のプレートより 6S J7 のカソードに約 20 db の負饋還を施した。

出力トランスは特に設計して、二次側をブリッ



第3図 CR 発振器回路図

ジ回路のインピーダンスに整合させて歪の発生を防いだ。又一次二次間の影響を少なくするために静電遮蔽を施し、二次側を平衡分割巻とし、両巻線間の対地容量の差を極力防いだ。

周波数変化に直接関係のある抵抗及び容量等の部品は、特に温度係数が少く、且つ長時間の変化の少ないものを選定する必要がある。

出力電圧は 120Ω 負荷で、最大 15 V である。

電源を入れてから暫くは出力が安定しないから 30 分間位は測定を差し控える方が安全である。

(ii) 音叉発振器 (第4図)

発振周波数及び出力の安定の点と、出力波形の歪の少ない点で音叉発振器が優れている。周波数の決定には (i) と同様のことを考慮して、700 c.p.s. の音叉を用い、これを安定な電源と励振装

置と組合わせて発振器とした。

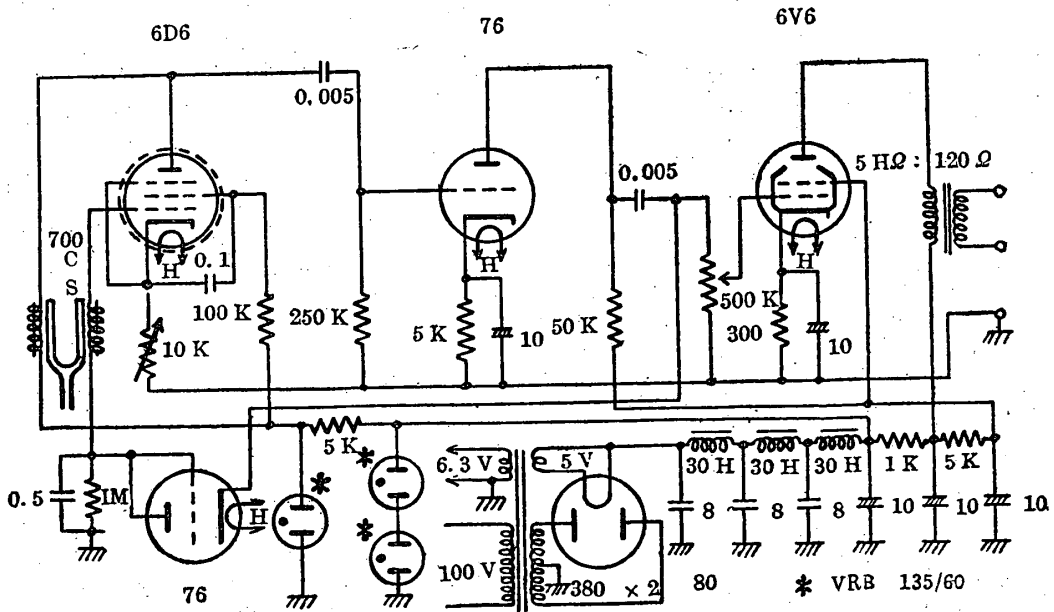
発振出力の安定を期する為 AV C (自動出力調整) 回路を設け、76 を二極管に使用し、発振が常に最適動作状態にあるように動作させている。

発振波形が純正弦波で安定であるように 6C6 のバイアス抵抗 10KΩ を可変抵抗にし、ブラウン管で波形を確認すると共に、電磁オシロで上下の対称性を検討する。最適状態は非常に範囲がクリティカルであるので、其の調節を慎重に行わねばならない。

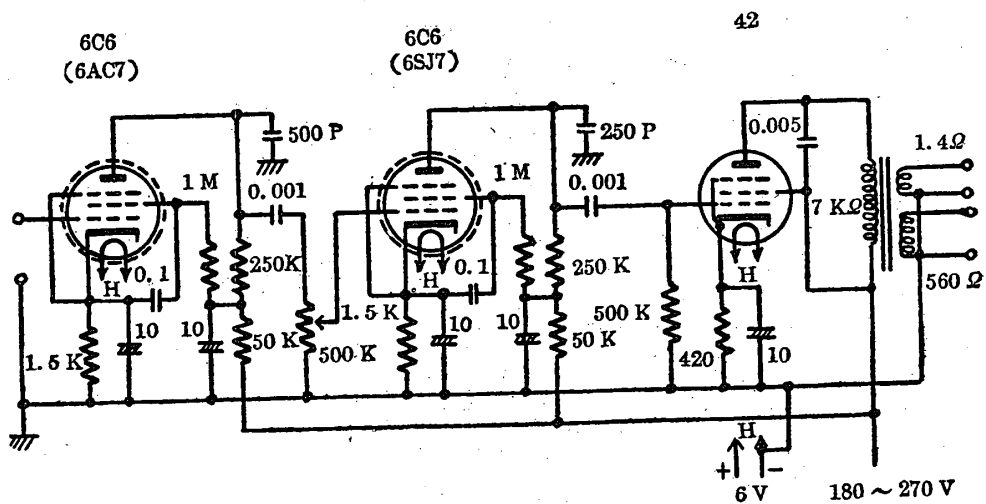
雑音・ハムを少なくする為、(i) より更に平滑回路を増し、定電圧放電管を二段に使用した。

最大出力電圧は 120Ω 負荷で、8V である。

6. 増幅部 (第5図)



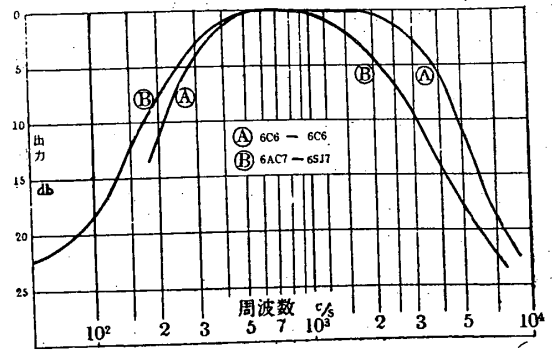
第4図 音叉発振器回路図



第5図 増幅器回路図

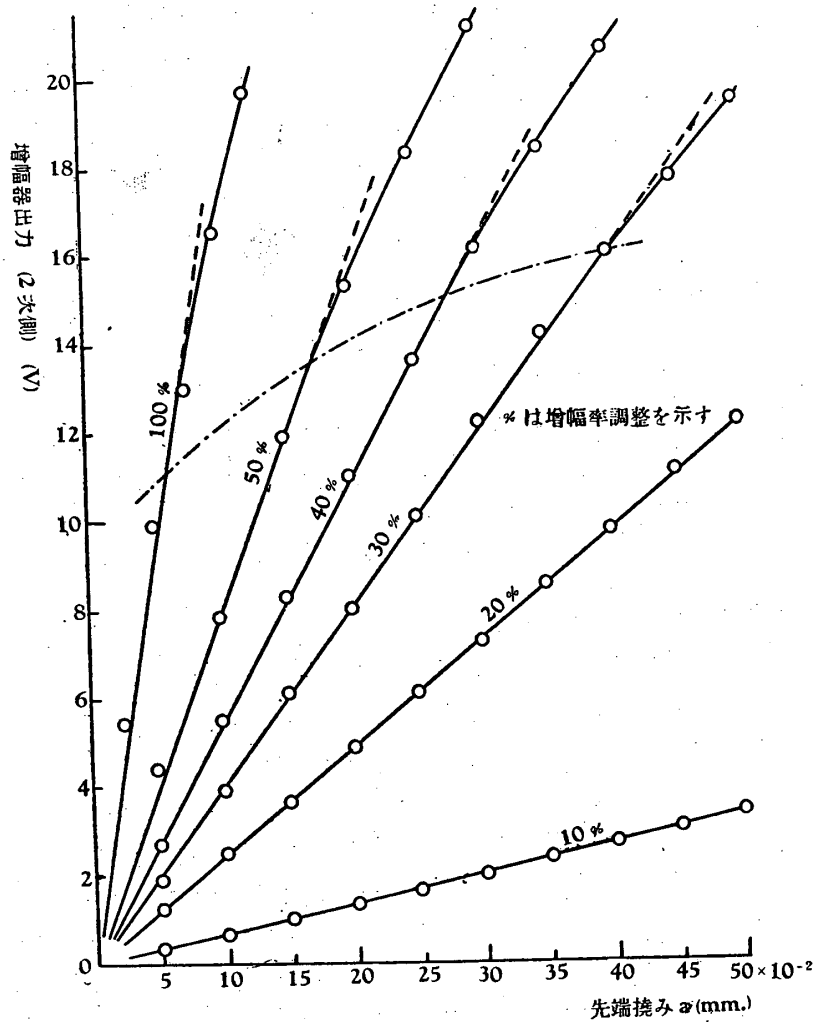
計算によつて電力増幅管のプレートまでには約100 dbの電圧増幅率を要する。従つて前段には、(a) 6C6 2段、又は (b) 6AC7, 6SJ7の抵抗容量結合の電圧増幅と、電力増幅段の次の出力回路に整合トランスを要する。

原波形を忠実に再現させる為に周波数特性は第6図に示すように、(a) 1000 c.p.s., (b) 700 c.p.s. を中心として山形の特性を持たせ、 $(F+f)$  と  $(F-f)$  (ここに  $F$  は搬送周波数,  $f$  は振動周波数) の間で増幅率は殆んど一定であるようにしてある。



第6図 周波数特性

入力電圧が非常に低く増幅度が高いので、信号



第7図 抵抗線歪計の静的出力特性

対雑音比 (S/N 比) を高くする必要がある。即ちハムや雑音を防止し、出力を安定にする為に、A電源、B電源に電池を用いた。又この程度の増幅器になると初段管の真空管雑音も考慮する必要がある。真空管雑音  $E_n$  は

$$E_n = \sqrt{4KT_0 R_n \beta} \quad (4)$$

( $K$ ; ボルツマン係数,  $R_n$ ; 格子等価雑音抵抗,  $T_0$ ; 室温,  $\beta$ ; 帯域幅) で表わされるので,  $R_n$  の小さい 6SJ7, 6AC7 のような真空管を用い,  $\beta$  もなるべく狭くすることが望ましい。真空管ソケットの防振も厳密にしてハウリングを防止し, 増幅器自体も防振材の上に置いて外部からの振動

に不感であるようにする。

出力特性を第7図に示すが、入力～出力が直線であるように、歪の大小によつて出力調整 500 KΩ を調整する必要がある。

出力を整流した方が直接に振動波形を記録出来るが、本実験ではその必要もなく、誤差の入ることを防止する為に直接に電磁オシロに入れて記録した。

出力回路は整合トランスを使用し、振動子のインピーダンスにマッチさせて、電力変換能率の向上をはかつた。良くマッチしていないと出力波形が非対称になつたりして歪むことがあるので特に注意した。又陰極線オシロで波形を監視出来るようにトランスにインピーダンスの高い端子を設けてある。

## 7. 配線方法

発振器、増幅器、振動部、記録装置等の相互間の連結には、出来るだけシールド線を用い、又各部の間隔を充分にとる必要がある。特に電磁オシロの電源箱は極力離すと共に別の電源配線より取る方がよい。又諸装置の近辺には不必要な導体は置かぬようにして、誘導電位を防止し、止むを得ないものは総てアースしなければならない。

## 8. 記録方法

通常の振動応力測定には引張、圧縮の位相を判別する為、特殊の回路を附加し又は出力を整流して搬送波を除き直接に振動波形を画かせることが多いが、本装置では次のような理由で、変調波そのものを記録した。

1. 振動が正弦波で位相判別の必要のないこと。
2. 整流回路を附加したことによる感度低下と直線性の減少を防ぐ。
3. 過変調として感度を上げられること。

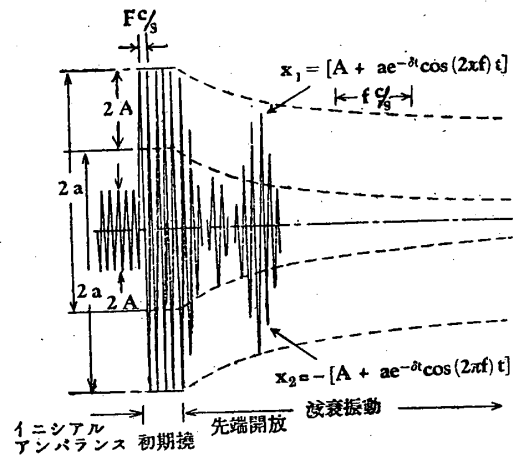
今電磁オシロの印画紙上に記録されるものを第8図に示す。即ち搬送波(周波数  $F$ , 振幅  $A$ )が、薄梁振動(周波数  $f$ , 振幅  $a$ )によつて変調されたものである。これを簡単に表わすと

$$x = \{A + ae^{-\delta t} \cos(2\pi ft)\} \cos(2\pi Ft) \quad (5)$$

となるが、 $F$  が大きく、且印画紙の回転が遅いときは

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \{A + ae^{-\delta t} \cos(2\pi ft)\} \\ x_2 &= -\{A + ae^{-\delta t} \cos(2\pi ft)\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のように上下に分れたように見える。



第8図 変調波(減衰振動波形)

出力を検波しない方式に於ても、通常の測定では位相を判別する為に  $A > a$  として過変調を防いでいるが、本実験では上記の理由で  $0 < A < a$  として使用する。この過変調法は変調率 100% 以上では、振動のピークが共に山のピークとなるので、100% 以下の変調率の場合のように一方が谷となるより、遙かに読取りが楽である。この方法を実際に行うには、抵抗微細調整のつまみをバランス位置から僅に引張側にずらせ  $2A$  を定め、振動体が最大引張を受けた時に、スケール・アウトしないように各部の増幅度を調整し、その後自由振動を行わせて記録をする。

## 9. むすび

以上抵抗線歪計による精密な振動波形記録装置を試作したので、その特性及測定方法を述べた。大方の参考資料となれば幸である。

終りに発振器の試作に当つて一部荒井昌昭氏に御教示を頂いたことを厚く感謝する。

### 参考文献

- (1) H. Hetényi: Handbook of Experimental Stress Analysis, John Wiley and Sons, (1950).
- (2) W.B. Dobie, P.C.G. Isaac: Electric Resistance Strain Gauges, English Univ. Press, (1948).
- (3) 小林韓治: 機械学会誌 54, No. 394, (1951), 465.
- (4) 応力測定技術研究会: 報告 No. 1, No. 2, (1952), No. 3 (1953).
- (5) 船体構造研究委員会: 造船協会誌, No. 296, (1952), p. 5~11.