No. 40

軸調整不良の共軸球面光學系の收差

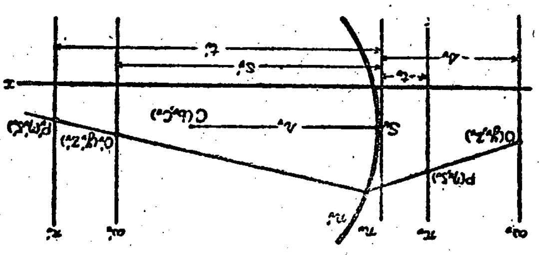
木内政藏・石黒浩三・三宅和夫

(1947年10月15日受理)

1. 序　望遠鏡などの共軸球面系ではその各屈折球面の球心がすべて系の軸上にあるものとして收差が論ぜられるのであるが，製作上この條件が完全にみたされず特殊の收差を生じてゐる品物が屢々出來あがる．本論文はかゝる軸調整不良の球面系の收差を五次以上の微小量を無視して計算し，Seidelの收差がどの樣に變るかを調べるものである．末記の文獻の内 Conrady の論文は同樣な內容のものであるが，彼が單に式の形だけを定めたのに對し，吾々は式に現はれる諸係數を系の定數や調整不良の度で數量的に計算出來る樣に定めた外，結果の檢討において興味深い關係を得たと信ずるのである．

2. 計算　軸調整不良を表はすのに與へられた光學系に對して一つの軸を考へ，之を x-軸とした垂直座標に於いて各屈折面の球心のとる y-及び z-座標，第 ν 球面に對して b_ν 及び c_ν を用ひ，これを偏心度と呼ぶことにする．この軸は b_ν, c_ν が十分小である樣にすれば任意に選べるが，先づ調整が完全ならば系の主軸になつて b_ν, c_ν がすべて零である樣なものをとる．

結像すべき物平面 ω_1 及び入射瞳の平面 π_1 はこの軸に垂直であるとし，偏心度がすべて零の場合にそれ



第 1 圖

らが近軸光線により次々の球面で結像される像平面を ω_1', ω'_2, $\cdots\omega_k'$; π'_1, π'_2, $\cdots\pi_k'$ (k は球面の總數)とする．$\omega'_{\nu-1}$, $\pi'_{\nu-1}$ は第 ν 球面に對する物平面，入射瞳面であるから ω_ν, π_ν とも表はす．第1圖で示した樣に第 ν 球面の球頂 S_ν から x-軸の正方向(光の進む方向)に測つた ω_ν, π_ν, ω'_ν, π'_ν の距離を s_ν, t_ν, s'_ν, t'_ν とすれば Abbe の不變量の關係(1)及び $s_\nu - t_\nu = s'_{\nu-1} - t'_{\nu-1}$ の關係がある．r_ν は第 ν 球面の半徑(球心 C_ν が S_ν の正 x-方向にあれば正)，n'_ν, n_ν, はその前後の空間の屈折率で，$n_\nu = n'_{\nu-1}$ である．(印刷の都合上式類を大部分一まとめにして第1表に掲げる)

偏心が値を持つ場合に於いても上に定めた ω, π 等の平面を用ひ，一光線がそれらを切る點によつてその光線を指定する．第 ν 球面に入射する光線はそれが ω_ν, π_ν を切る點 $O_\nu(s_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $P_\nu(t_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$ によつて之を定める．

物點 (s_1, y_1, z_1) を發して入射瞳上の點 (t_1, η_1, ζ_1) に向ふ光線が全系を通過して像平面 ω'_k に達し，點 (s'_k, y'_k, z'_k) でそれを切るのであるが，y'_k, z'_k を y_1, z_1, η_1, ζ_1 の函數として定めるのが吾々の問題である．(こゝでは第1の入射瞳が有效絞りである場合を考へておく．若し第 ν 球面に對する入射瞳が有效絞りをなす場合ならば獨立變數として y_1, z_1, η_ν, ζ_ν をとる方が適當である．)軸調整が完全で且つ近軸光線のみが使はれる場合には y', z'_k は η_1, ζ_1 によらないで (y_1, z_1) に對する完全な像點の座標となり，この際廣倍率は $\frac{n_1 s'_1 s'_2 \cdots s'_k}{n'_k s_1 s_2 \cdots s_k}$ であるから(2)となる．

第 ν 球面による結像に對して，その球心 C_ν を通り x-軸に平行な直線を軸とすれば Seidel の式を利用することが出來る．それにより(3)が得られる．但し普通に $z_\nu=0$ とした Seidel の式を $y_\nu \neq 0$, $z_\nu \neq 0$ の場合に一般化してそれを用ひるのである．(4)は(3)を書き直したものであるが y-成分だけを掲げたのである．

偖先づ第一近似として(4)の大括弧內の三次の微小量(普通の樣に y_ν, z_ν, η_ν, ζ_ν 等及び偏心度 b_ν, c_ν を一次の微小量と考へる)を省略する．$\nu=1$ から $\nu=\nu$ まで(4)式を書きならべ，順次に $1=\frac{h_1}{h_1}$, $\frac{s_2}{s_1}=\frac{k_2}{h_1}$, $\frac{s_2 s_3}{s'_1 s'_2}=\frac{h_3}{h_1}$, $\cdots \frac{s_2 s_3 \cdots s_\nu}{s'_1 s'_2 \cdots s'_{\nu-1}}=\frac{h_\nu}{h_1}$ (h_1, h_2, $\cdots$ は偏心のない場合物點 $(y_1=0,\ z_1=0)$ から出る一近軸光線が各球面に入射する點の軸からの距離に比例する)を掛けて加へ合せれば，$n'_\mu = n_{\mu+1}$, $y'_\mu = y_{\mu+1}$ により(5)の第一式が得られる．第二式は z-成分に對するものである．この近似にて (s'_ν, y'_ν, z'_ν) は第1から第 ν に至る球面によつて得られる (s_1, y_1, z_1) の完

全な像で，(5) の右邊は軸調整不良のために起るプリズム作用を表はすものである．

同じ程度の近似で (t_1, η_1, ζ_1) の像 $(t'_\nu, \eta'_\nu, \zeta'_\nu)$ に關し(6)が得られる．そこでは $1=\frac{H_1}{H_1}$, $\frac{t_2}{t'_1}=\frac{H_2}{H_1}$, $\frac{t_2t_3}{t'_1t'_2}=\frac{H_3}{H_1}, \cdots \frac{t_2t_3\cdots t_\nu}{t'_1t'_2\cdots t'_{\nu-1}}=\frac{H_\nu}{H_1}$ である．

次の近似に進むのに(4)の三次の項に含まれた η_ν, ζ_ν, y_ν, z_ν を η_1, ζ_1, y_1, z_1 で表はす必要があり，このために(5)，(6)を用ゐる．例へば η_ν は (7) の樣にするのであるが，それらの結果を(9)の記號を用ゐて(8)の樣に表はす．新記號 b'_ν, b''_ν には(10)の遞加式が成り立ち，c'_ν, c''_ν に對しても同樣なものがあるがそれらの關係式は夫々の量の意味を判り易くすると共に實際の計算に役立つと考へられる．

次に x-座標に關して $s_\nu-t_\nu=s'_{\nu-1}-t'_{\nu-1}$ 及び (1) を繰り返し應用して次の關係を得ておく．

$$n_\nu h_{1\nu} H_\nu \frac{b_\nu-t_\nu}{s_\nu t_\nu}=n_1 h_1 H_1 \frac{s_1-t_1}{s_1 t_1}.$$

以上の諸關係式によつて (4) を書き直すと(11)が得られる．$\nu=1$ から $\nu=k$ まで(11)式を書きならべ順次に $1=\frac{h_1}{h_1}$, $\frac{s_2}{s_1'}=\frac{h_2}{h_1}, \cdots \frac{s_2s_3\cdots s_k}{s'_1s'_2\cdots s'_{k-1}}=\frac{h_k}{h_1}$ を掛けて加へ合せると吾々の求める結果に達するのであるが，尙その前に(11)の右邊大括弧中の量を $(\eta_1-b'_\nu)$ 等の組合せでなく，$\eta_1, \zeta_1, y_1, z_1$ の冪に開いておくのである．計算は甚だ複雜であるので，こゝに一々それを記すことを省略する．

3．計算の結果　結果は(12)で與へられ，式の右邊は y'_k, z'_k, を $\eta_1, \zeta_1, y_1, z_1$ の冪級數で表はして居り，その係數は例へば $\eta_1 y_1$ なる冪項に對して y'_k にあつては $Y_{\eta y}$, Z'_k にあつては $Z_{\eta y}$ の樣に記されて居る．それらの係數の値が (13) により偏心度の函數として揭げられて居る．係數のあるものゝ間には關係があり例へば $Y_\zeta=Z_\eta$ の如きである．偏心度としては b'_ν, b''_ν, c'_ν, c''_ν の組合せである (15) の樣なものが使はれてゐる．$\eta_1, \zeta_1, y_1, z_1$ について三乘の項の係數は Seidel の係數に外ならないので，Schwarzschild にならつて B, C, D, E, F の記號を用ひ，(14)に揭げた．

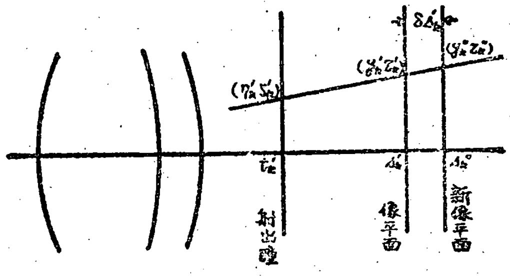
(12) は物點 (y_1, z_1) から發する一光線が最後の像平面上で理想的の像點から外れるのを示すのであるが左邊で見る樣に，その外れ自身でなく，それを倍率で割つて物平面上の物體尺度に換算し，更に n_1/s_1 を掛けたものが與へられ，それは軸調整不良のためのプリズム作用による像全體としてのふれを差引いてある．

(12) の右邊の第一項 Y_0 はプリズム作用の追加であり，第二行の諸項はコマ收差を，第三，四行は非點收差と像面のまがりを，第五行は歪みを引き起すものである．この內特にコマ，非點收差，像面のまがりを次に考へて見ることにする．

4．コマ收差　軸調整不良によつて起る η_1, ζ_1 について二次の項は (12) 右邊第二行の如く Seidel のコマ收差 F 項と結びつけ，それを變貌させるものとして意味づけされる．上記の樣な尺度で測られた收差はこれらの項により，(16) の樣になる．收差曲線即ち物點 (y_1, z_1) から出發して入射瞳上半徑 σ の圓周 $\eta_1^2+\zeta_1^2=\sigma^2$ の上の點に向ふ光線群が像平面 (ω'_k) の上に切りとる曲線は (17) なる方程式で與へられ，これは $\eta_1=0$, $\zeta_1=0$ なる光線に對する像點 (y'_{k0}, z'_{k0}) を尖端とし 60° の開きをなす二直線に內接する圓であること普通の Seidel コマと同樣である．然し普通の場合では軸上の物點に對してコマ收差零となるのに對し今は物點 $y_1=-\frac{Y_{\zeta\zeta}}{F}$, $z_1=-\frac{Z_{\eta\eta}}{F}$ に對してコマ收差零となり，且つ他の點のコマの尖端はすべてこの點に向ふか又は逆に向ふかである．

$Y_{\zeta\zeta}$ 及び $Z_{\eta\eta}$ は夫々 b_ν 及び c_ν の整一次式である．係數 F が小さくなければ上の點 $\left(-\frac{Y_{\zeta\zeta}}{F}, -\frac{Z_{\eta\eta}}{F}\right)$ は軸點から一次の微小距離にある．然し與へられた球面系が Seidel コマに對して補正されたものであると F は小さく，この點は遠くに去る．∞ の距離に去ればすべての物點に對し一樣で平行なコマが生ずるのである．$Y_{\zeta\zeta}$, $Z_{\eta\eta}$ が b_ν, c_ν の整一次式であるから，x-軸の平行移動とそれに伴ふ入射瞳の移動を施せばそれを零ならしめることが出來る．

5．非點收差及び像面のまがり　(12)兩式の右邊第三，四行の項の影響を考へる．これらは η_1, ζ_1 について一次の項であつてその樣な項のあるのは考へた像平面がピントの合ふ面でなく，即ち之を移動してピントを合せれば，それらの項はなくなるのである．但し η_1 と ζ_1 とが係數を異にするとそこに非點收差が起り，又係數が y_1, z_1 に依存することによつて像面のまがり



第　2　圖

第 1 表 (其の一)

① $n'_\nu\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{s'_\nu}\right)=n_\nu\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{s_\nu}\right)=Q_\nu,\quad n'_\nu\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{t'_\nu}\right)=n_\nu\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{t_\nu}\right)=P_\nu,\qquad s_\nu-t_\nu=s'_{\nu-1}-t'_{\nu-1}$

② $y'_k=\frac{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_k}{n'_k s_1 s_2\cdots\cdots s_k}y_1,\qquad z'_k=\frac{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_k}{n'_k s_1 s_2\cdots\cdots s_k}z_1$

③ $$\frac{n'_\nu}{s'_\nu}(y'_\nu-b_\nu)=\frac{n_\nu}{s_\nu}(y_\nu-b_\nu)+\frac{1}{(s_\nu-t_\nu)^3}\Big[\!\Big[-\frac{s_\nu^3}{2}Q_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(\eta_\nu-b_\nu)\left\{(\eta_\nu-b_\nu)^2+(\zeta_\nu-c_\nu)^2\right\}+\frac{s_\nu^2 t_\nu}{2}Q_\nu P_\nu\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\Big[(y_\nu-b_\nu)\left\{(\eta_\nu-b_\nu)^2+(\zeta_\nu-c_\nu)^2\right\}+2(\eta_\nu-b_\nu)\left\{(y_\nu-b_\nu)(\eta_\nu-b_\nu)+(z_\nu-c_\nu)(\zeta_\nu-c_\nu)\right\}\Big]$$
$$-s_\nu t_\nu^3 P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(y_\nu-b_\nu)\left\{(y_\nu-b_\nu)(\eta_\nu-b_\nu)+(z_\nu-c_\nu)(\zeta_\nu-c_\nu)\right\}-\frac{s_\nu t_\nu^2}{2}\left\{P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu-(P_\nu-Q_\nu)^2\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu\right\}(\eta_\nu-b_\nu)\left\{(y_\nu-b_\nu)^2+(z_\nu-c_\nu)^2\right\}$$
$$+\frac{t_\nu^3}{2}\frac{P_\nu}{Q_\nu}\left\{P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu-(P_\nu-Q_\nu)^2\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu\right\}(y_\nu-b_\nu)\left\{(y_\nu-b_\nu)^2+(z_\nu-c_\nu)^2\right\}\Big]\!\Big]$$

$\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu=\frac{1}{n'_\nu s'_\nu}-\frac{1}{n_\nu s_\nu},\quad \left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu=\frac{1}{n'_\nu}-\frac{1}{n_\nu},\quad (\Delta n)_\nu=n'_\nu-n_\nu$.

$\frac{n'_\nu}{\lambda'_\nu}(z'_\nu-c_\nu)=$ 上式に於て y_ν,η_ν,b_ν と z_ν,ζ_ν,c_ν とを夫々入れかへたもの

④ $\frac{n'_\nu}{s'_\nu}y'_\nu=\frac{n_\nu}{s_\nu}y_\nu+(\Delta n)_\nu\frac{b_\nu}{\lambda_\nu}+\frac{1}{(s_\nu-t_\nu)^3}\Big[\!\Big[-\frac{s_\nu^3}{2}Q_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(\eta_\nu-b_\nu)\left\{(\eta_\nu-b_\nu)^2+(\zeta_\nu-c_\nu)^2\right\}+\cdots\cdots\cdots\Big]\!\Big]$

⑤ $$\begin{cases}\frac{n_1}{s_1}\left(\frac{n'_\nu s_1 s_2\cdots\cdots s_\nu}{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_\nu}y'_\nu-y_1\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{h_\mu}{h_1}\frac{(\Delta n)_\mu b_\mu}{\lambda_\mu}\\ \frac{n_1}{s_1}\left(\frac{n'_\nu s_1 s_2\cdots\cdots s_\nu}{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_\nu}z'_\nu-z_1\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{h_\mu}{h_1}\frac{(\Delta n)_\mu c_\mu}{\lambda_\mu}\end{cases}$$

⑥ $$\begin{cases}\frac{n_1}{t_1}\left(\frac{n'_\nu t_1 t_2\cdots\cdots t_\nu}{n_1 t'_1 t'_2\cdots\cdots t'_\nu}\eta'_\nu-\eta_1\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{H_\mu}{H_1}\frac{(\Delta n)_\mu b_\mu}{\lambda_\mu}\\ \frac{n_1}{t_1}\left(\frac{n'_\nu t_1 t_2\cdots\cdots t_\nu}{n_1 t'_1 t'_2\cdots\cdots t'_\nu}\zeta'_\nu-\zeta_1\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{H_\mu}{H_1}\frac{(\Delta n)_\mu c_\mu}{\lambda_\mu}\end{cases}$$

⑦ $\eta_\nu=\eta'_{\nu-1}=\frac{n_1 t_\nu}{n_\nu t_1}\frac{H_1}{H_\nu}\left(\eta_1+\frac{t_1}{n_1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{H_\mu}{H_1}\frac{(\Delta n)_\mu b_\mu}{\lambda_\mu}\right)$

⑧ $$\begin{cases}\eta_\nu-b_\nu=\frac{n_1 t_\nu}{n_\nu t_1}\frac{H_1}{H_\nu}(\eta_1-b'_\nu), & \zeta_\nu-c_\nu=\frac{n_1 t_\nu}{n_\nu t_1}\frac{H_1}{H_\nu}(\zeta_1-c'_\nu)\\ y_\nu-b_\nu=\frac{n_1 s_\nu}{n_\nu s_1}\frac{h_1}{h_\nu}(y_1-b''_\nu), & z_\nu-c_\nu=\frac{n_1 s_\nu}{n_\nu s_1}\frac{h_1}{h_\nu}(z_1-c''_\nu)\end{cases}$$

⑨ $$\begin{cases}b'_\nu=-\frac{t_1}{n_1}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{H_\mu}{H_1}\frac{(\Delta n)_\mu b_\mu}{\lambda_\mu}-\frac{H_\nu}{H_1}\frac{n_\nu}{t_\nu}b_\nu\right), & c'_\nu=-\frac{t_1}{n_1}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{H_\mu}{H_1}\frac{(\Delta n)_\mu c_\mu}{\lambda_\mu}-\frac{H_\nu}{H_1}\frac{n_\nu}{t_\nu}c_\nu\right)\\ b''_\nu=-\frac{s_1}{n_1}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{h_\mu}{h_1}\frac{(\Delta n)_\mu b_\mu}{\lambda_\mu}-\frac{h_\nu}{h_1}\frac{n_\nu}{s_\nu}b_\nu\right), & c''_\nu=-\frac{s_1}{n_1}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{h_\mu}{h_1}\frac{(\Delta n)_\mu c_\mu}{\lambda_\mu}-\frac{h_\nu}{h_1}\frac{n_\nu}{s_\nu}c_\nu\right)\end{cases}$$

⑩ $b'_\nu-b'_{\nu-1}=\frac{n'_{\nu-1}t_1 t_2\cdots\cdots t_{\nu-1}}{n_1 t'_1 t'_2\cdots\cdots t'_{\nu-1}}(b_\nu-b_{\nu-1}),\qquad b''_\nu-b''_{\nu-1}=\frac{n'_{\nu-1}s_1 s_2\cdots\cdots s_{\nu-1}}{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_{\nu-1}}(b_\nu-b_{\nu-1})$

⑪ $$\frac{n'_\nu}{s'_\nu}y'_\nu=\frac{n_\nu}{s_\nu}y_\nu+\frac{(\Delta n)_\nu b_\nu}{\lambda_\nu}+\frac{1}{(s_1-t_1)^3}\Big[\!\Big[-\frac{s_1^3}{2}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^3Q_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(\eta_1-b'_\nu)\left\{(\eta_1-b'_\nu)^2+(\zeta_1-c'_\nu)^2\right\}+\frac{s_1^2 t_1}{2}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\frac{H_\nu}{H_1}Q_\nu P_\nu\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\Big[(y_1-b''_\nu)\left\{(\eta_1-b'_\nu)^2+(\zeta_1-c'_\nu)^2\right\}+2(\eta_1-b'_\nu)\left\{(y_1-b''_\nu)(\eta_1-b'_\nu)+(z_1-c''_\nu)(\zeta_1-c'_\nu)\right\}\Big]$$
$$-\frac{s_1 t_1^2}{2}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^2P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\Big[2(y_1-b''_\nu)\left\{(y_1-b''_\nu)(\eta_1-b'_\nu)+(z_1-c''_\nu)(\zeta_1-c'_\nu)\right\}+(\eta_1-b'_\nu)\left\{(y_1-b''_\nu)^2+(z_1-c''_\nu)^2\right\}\Big]+\frac{s_1 t_1^2}{2}(P_1-Q_1)^2\frac{h_1}{h_\nu}\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu(\eta_1-b'_\nu)\left\{(y_1-b''_\nu)^2+(z_1-c''_\nu)^2\right\}$$
$$+\frac{t_1^3}{2}\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^3\frac{P_\nu}{Q_\nu}P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(y_1-b''_\nu)\left\{(y_1-b''_\nu)^2+(z_1-c''_\nu)^2\right\}-\frac{t_1^3}{2}(P_1-Q_1)^2\left(\frac{h_1}{h_\nu}\right)^2\frac{H_\nu}{H_1}\frac{P_\nu}{Q_\nu}\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu(y_1-b''_\nu)\left\{(y_1-b''_\nu)^2+(z_1-c''_\nu)^2\right\}\Big]\!\Big]$$
$$\frac{n'_\nu}{s'_\nu}z'_\nu=\frac{n_\nu}{s_\nu}z_\nu+\frac{(\Delta n)_\nu c_\nu}{\lambda_\nu}+\frac{1}{(s_1-t_1)^3}\Big[\!\Big[-\frac{s_1^3}{2}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^3Q_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(\zeta_1-c'_\nu)\left\{(\eta_1-b'_\nu)^2+(\zeta_1-c'_\nu)^2\right\}+\cdots\cdots\cdots\cdots\Big]\!\Big]$$

⑫ $$\frac{n_1}{s_1}\left(\frac{n'_k s_1 s_2\cdots\cdots s_k}{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_k}y'_k-y_1\right)-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\frac{(\Delta n)_\nu}{\lambda_\nu}b_\nu=Y_0$$
$$+(Y_{\zeta\zeta}+Fy_1)(3\eta_1^2+\zeta_1^2)+2(Z_{\eta\eta}+Fz_1)\eta_1\zeta_1$$
$$+\left\{Y_\eta+Y_{\eta y}y_1+Y_{\eta z}z_1+(2C+D)y_1^2+Dz_1^2\right\}\eta_1$$
$$+\left\{Y_\zeta+Y_{\zeta y}y_1+Y_{\zeta z}z_1+2Cy_1z_1\right\}\zeta_1$$

$$\frac{n_1}{s_1}\left(\frac{n'_k s_1 s_2\cdots\cdots s_k}{n_1 s'_1 s'_2\cdots\cdots s'_k}z'_k-z_1\right)-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\frac{(\Delta n)_\nu}{\lambda_\nu}c_\nu=Z_0$$
$$+(Z_{\eta\eta}+Fz_1)(\eta_1^2+3\zeta_1^2)+2(Y_{\zeta\zeta}+Fy_1)\eta_1\zeta_1$$
$$+\left\{Y_\zeta+Y_{\zeta y}y_1+Y_{\zeta z}z_1+2Cy_1z_1\right\}\eta_1$$
$$+\left\{Z_\zeta+Z_{\zeta y}y_1+Z_{\zeta z}z_1+(2C+D)z_1^2+Dy_1^2\right\}\zeta_1$$

第 1 表 (其の二)

$$+Y_y y_1+Y_z z_1+Y_{yy}y_1^2+Y_{yz}y_1z_1+Y_{zz}z_1^2+Ey_1(y_1^2+z_1^2) \qquad +Z_y y_1+Z_z z_1+Z_{yy}y_1^2+Z_{yz}y_1z_1+Z_{zz}z_1^2+Ez_1(y_1^2+z_1^2)$$

(13)

$$\left.\begin{matrix}Y_0\\Z_0\end{matrix}\right)=\frac{-1}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\frac{1}{Q_\nu}\begin{pmatrix}B_\nu\\C_\nu\end{pmatrix}\left[-\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu(B_\nu^2+C_\nu^2)+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}(\beta_\nu^2+\gamma_\nu^2)\right]$$

$$\left.\begin{matrix}Y_\eta\\Z_\zeta\end{matrix}\right)=\frac{s_1}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\left\{-\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}(3B_\nu^2+C_\nu^2)\\(B_\nu^2+3C_\nu^2)\end{pmatrix}+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}(\beta_\nu^2+\gamma_\nu^2)\right\}$$

$$Y_\zeta=Z_\eta=-\frac{s_1}{(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu B_\nu C_\nu$$

$$\left.\begin{matrix}Y_y\\Z_z\end{matrix}\right)=\frac{t_1}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\frac{H_\nu}{H_1}\frac{P_\nu}{Q_\nu}\left\{\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}3B_\nu^2+C_\nu^2\\B_\nu^2+3C_\nu^2\end{pmatrix}-\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\left(\beta_\nu^2+\gamma_\nu^2-\begin{pmatrix}2B_\nu\beta_\nu\\2C_\nu\gamma_\nu\end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_z\\Z_y\end{matrix}\right)=\frac{t_1}{(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\frac{H_\nu}{H_1}\frac{P_\nu}{Q_\nu}\left\{\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu B_\nu C_\nu+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\begin{pmatrix}B_\nu\gamma_\nu\\C_\nu\beta_\nu\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{y\eta}\\Z_{z\zeta}\end{matrix}\right)=-\frac{s_1t_1}{(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu\left\{3\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}B_\nu\\C_\nu\end{pmatrix}+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\begin{pmatrix}\beta_\nu\\\gamma_\nu\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{z\eta}\\Z_{y\zeta}\end{matrix}\right)=-\frac{s_1t_1}{(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu\left\{\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}C_\nu\\B_\nu\end{pmatrix}+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\begin{pmatrix}\gamma_\nu\\\beta_\nu\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{y\zeta}\\Z_{z\eta}\end{matrix}\right)=\left.\begin{matrix}Z_{y\eta}\\Y_{z\zeta}\end{matrix}\right)=-\frac{s_1t_1}{(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}C_\nu\\B_\nu\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}Z_{\eta\zeta}\\\frac{1}{2}Y_{\eta\zeta}\end{matrix}\right)=\left.\begin{matrix}\frac{1}{3}Y_{\eta\eta}\\\frac{1}{3}Z_{\zeta\zeta}\end{matrix}\right)=\left.\begin{matrix}Y_{\zeta\zeta}\\Z_{\eta\eta}\end{matrix}\right)=\frac{s_1^2}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^3Q_\nu\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}B_\nu\\C_\nu\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{yy}\\Z_{zz}\end{matrix}\right)=-\frac{t_1^2}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^2\frac{P_\nu^2}{Q_\nu}\left\{-3\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}B_\nu\\C_\nu\end{pmatrix}+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\begin{pmatrix}(B_\nu-2\beta_\nu)\\(C_\nu-2\gamma_\nu)\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{yz}\\Z_{yz}\end{matrix}\right)=-\frac{t_1^2}{(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^2\frac{P_\nu^2}{Q_\nu}\left\{-\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu\begin{pmatrix}C_\nu\\B_\nu\end{pmatrix}-\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\begin{pmatrix}\gamma_\nu\\\beta_\nu\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{zz}\\Z_{yy}\end{matrix}\right)=-\frac{t_1^2}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^2\frac{P_\nu^2}{Q_\nu}\left\{-\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu+\frac{(P_\nu-Q_\nu)^2}{P_\nu^2}\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu}{\lambda_\nu}\right\}\begin{pmatrix}B_\nu\\C_\nu\end{pmatrix}$$

(14)

$$B=-\frac{s_1^3}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^4Q_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu,\qquad F=\frac{s_1^2t_1}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^3\frac{H_\nu}{H_1}Q_\nu P_\nu\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu,\qquad C=-\frac{s_1t_1^2}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^2P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu$$

$$D=-\frac{s_1t_1^2}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^2\left\{P_\nu^2\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu-(P_\nu-Q_\nu)^2\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu\right\}\qquad E=\frac{t_1^3}{2(s_1-t_1)^3}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{h_\nu}{h_1}\left(\frac{H_\nu}{H_1}\right)^3\left\{\frac{P_\nu^2}{Q_\nu}\left(\Delta\frac{1}{ns}\right)_\nu-\frac{P_\nu}{Q_\nu}(P_\nu-Q_\nu)^2\frac{1}{\lambda_\nu}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_\nu\right\}$$

(15) $B_\nu=s_1\frac{h_\nu}{h_1}Q_\nu b_\nu'-t_1\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu b_\nu''$, $\quad C_\nu=s_1\frac{h_\nu}{h_1}Q_\nu c_\nu'-t_1\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu c_\nu''$, $\quad \beta_\nu=t_1\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu b_\nu''$, $\quad \gamma_\nu=t_1\frac{H_\nu}{H_1}P_\nu c_\nu''$

(16)
$$\begin{cases}\delta y=(Y_{\zeta\zeta}+Fy_1)(3\eta_1^2+\zeta_1^2)+2(Z_{\eta\eta}+Fz_1)\eta_1\zeta_1\\\delta z=(Z_{\eta\eta}+Fz_1)(\eta_1^2+3\zeta_1^2)+2(Y_{\zeta\zeta}+Fy_1)\eta_1\zeta_1\end{cases}$$

(17) $\{\delta y-2\sigma^2(Y_{\zeta\zeta}+Fy_1)\}^2+\{\delta z-2\sigma^2(Z_{\eta\eta}+Fz_1)\}^2=\sigma^4\{(Y_{\zeta\zeta}+Fy_1)^2+(Z_{\eta\eta}+Fz_1)^2\}$

(19) $\delta s_1=\frac{n_k'}{n_1}\left(\frac{s_1\cdots\cdots s_k}{s_1'\cdots\cdots s_k'}\right)^2\delta s_k'$

(18)
$$\begin{cases}\frac{n_1}{s_1}\frac{n_k's_1s_2\cdots\cdots s_k}{n_1s_1's_2'\cdots s_k'}(y_k''-y_{k0}'')=\left\{Y_\eta+Y_{\eta y}y_1+Y_{\eta z}z_1+(2C+D)y_1^2+Dz_1^2-\frac{n_1}{s_1}\frac{\delta s_1}{s_1-t_1}\right\}\eta_1+\left\{Y_\zeta+Y_{\zeta y}y_1+Y_{\zeta z}z_1+2Cy_1z_1\right\}\zeta_1\\\frac{n_1}{s_1}\frac{n_k's_1s_2\cdots\cdots s_k}{n_1s_1's_2'\cdots s_k'}(z_k''-z_{k0}'')=\left\{Y_\zeta+Y_{\zeta y}y_1+Y_{\zeta z}z_1+2Cy_1z_1\right\}\eta_1+\left\{Z_\zeta+Z_{\zeta y}y_1+Z_{\zeta z}z_1+(2C+D)z_1^2+Dy_1^2-\frac{n_1}{s_1}\frac{\delta s_1}{s_1-t_1}\right\}\zeta_1\end{cases}$$

(20) $\delta y=L\eta_1+M\zeta_1$, $\quad \delta z=M\eta_1+N\zeta_1$

(21) $(M^2+N^2)(\delta y)^2-2M(L+N)(\delta y)(\delta z)+(L^2+M^2)(\delta z)^2=(LN-M^2)^2\sigma^2$

(22) $\delta z=\frac{N}{M}\delta y$

(23) $\tan\Phi_{\mathrm{I}}=\frac{N_{\mathrm{I}}}{M}$, $\quad \tan\Phi_{\mathrm{II}}=\frac{N_{\mathrm{II}}}{M}$

(24) $\tan 2\Phi_{\mathrm{I}}=\frac{2M}{L-N}=\tan 2\Phi_{\mathrm{II}}$

(25) $\frac{n_1}{s_1}\frac{\delta s_{\mathrm{I}}+\delta s_{\mathrm{II}}}{2(s_1-t_1)}=\frac{1}{2}\left\{(Y_\eta+Y_\zeta)+(Y_{\eta y}+Z_{\zeta y})y_1+(Y_{\eta z}+Z_{\zeta z})z_1+2(C+D)(y_1^2+z_1^2)\right\}$

(26) $y_1=-\frac{Y_{\eta y}+Z_{\zeta y}}{4(C+D)}$, $\quad z_1=-\frac{Y_{\eta z}+Z_{\zeta z}}{4(C+D)}$

(27) $\frac{n_1}{s_1}\frac{\delta s_{\mathrm{I}}-\delta s_{\mathrm{II}}}{(s_1-t_1)}=\sqrt{(L-N)^2+4M^2}=\sqrt{\{(Y_\eta-Z_\zeta)+2Y_{\zeta z}y_1-2Y_{\zeta y}z_1+2C(y_1^2-z_1^2)\}^2+4\{Y_\zeta+Y_{\zeta y}y_1+Y_{\zeta z}z_1+2Cy_1z_1\}^2}$

(28)
$$\begin{cases}L-N=(Y_\eta-Z_\zeta)+2Y_{\zeta z}y_1-2Y_{\zeta y}z_1+2C(y_1^2-z_1^2)=0\\M=Y_\zeta+Y_{\zeta y}y_1+Y_{\zeta z}z_1+2Cy_1z_1=0\end{cases}$$

が起る．今像平面を $\delta s_k'=s_k''-s_k'$ だけ移して s_k'' の位置に持つて來たとき，$y_k', z_k', \eta_k', \zeta_k'$ で定められる光線が新像平面を切る點（y_k'', z_k''）を求めるに第2圖で明らかな樣に

$$y''=y_k'+\frac{\delta s_k'}{s_k'-t_k'}(y'_k-\eta_k'),$$

$$z_k''=z_k'+\frac{\delta s'_k}{s_k'-t'_k}(z_k'-\zeta_k')$$

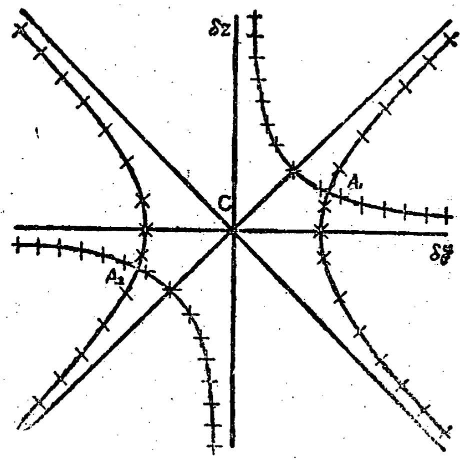
である．$\delta s_k'$ は後に見る樣に二次の微小量であるから右邊第二項の $y_k', \eta_k', z_k', \zeta_k'$ に對しては（5），（6）を用ひて計算する．尙プリズム作用や歪みの影響を除外するために，物點から入射瞳の中心に向ふ $\eta_1=0$, $\zeta_1=0$ なる光線の像點（y_{k0}'', z_{k0}''）からの外れ $y_k''-y_{k0}''$, $z_k''-z_{k0}''$ をとり，且つ今絞りが十分小さく η_1, ζ_1 について二次であるコマ項は小であるとすれば（18）を得る．こゝに δs_1 は（19）の樣に $\delta s_k'$ を系の縱倍率 $\frac{n_1}{n_k'}\left(\frac{s_1's_2'\cdots s_k'}{s_1s_2\cdots s_k}\right)^2$ で割り物空間の長さに直したものである．L, M, N なる記號を用ひて（18）を（20）の樣に記す．この場合の收差曲線の方程式は（20）から η_1, ζ_1 を解いて $\eta^2+\zeta_1^2=\sigma^2$ に入れゝば得られ，（21）となる．これは，判別式が

$$(L^2+M^2)(M^2+N^2)-M^2(L+N)^2=(LN-M^2)^2>0$$

であるから楕圓である．像平面をすらし $\delta s_k'$ をかへて行くと L, N が變り，楕圓の形が變る．$N-M^2=0$ となるとき楕圓は一直線（22）となる．$LN-M^2=0$ は δs_1 についての二次方程式で二實根 δs_{I}, δs_{II} を持つ．δs_1 がこの値をとる二個所でこれが起り，非點收差における二焦線に外ならない．二焦線が y-軸となす角を夫々 $\phi_{\mathrm{I}}, \varphi_{\mathrm{II}}$ とすれば（22）により（23）でそれは與へられる．N_{I}, N_{II} は δs_1 が夫々 δs_{I}, δs_{II} なるときの N である．これらの角の2倍の正切をとれば（24）の樣に等しくなつて二焦線は互に垂直な方位をとることが判る．

L, M, N が y_1, z_1 を含むので δs_{I}, δs_{II} は物點によつて變るのであつて，それは非點收差兩像面のまがりを與へる．兩根の平均値は（25）で與へられ，像面のまがりの平均値を定める．この平均像面は x-軸に平行な軸をもつ回轉拋物體表面であつて，その頂點は物空間に直して（26）に當る．兩根の差は（27）で與へられるが，これは非點隔差を與へる．

（27）により非點收差は（28）なる二つの双曲線の交



第　3　圖

點で與へられる物點に對して零であり，從つてそういふ點が二つ起る（第3圖 A_1, A_2）．この二つの双曲線は何れも中心を $y_1=-\frac{Y_{sz}}{2C}$, $z_1=-\frac{Y_{\zeta y}}{2C}$ に持つ直角双曲線で漸近線が45°だけ方向を異にするものである．（24）により双曲線 $L-N=0$ 上の物點に對しては二つの焦線の方位は y-, z-軸と45°の角をなし，$M=0$ の上の物點に對しては二焦線は y-, z-軸に平行である．一般に二焦線が y-, z-軸と一定の角をなす樣な物點の軌跡は k をその角度に對する定數として

$$\frac{k}{2}(L-N)-M=0$$

なる双曲線であり，それらは何れも A_1, A_2 を通り，漸近線の方向が二焦線の方向である．

6．今後の研究　吾々の得た一般式は甚だ複雜である．今後簡單な特別な場合からはじめて之が應用を試み樣と考へる．この方向には旣に研究を進めて居る．後には與へられた光學系に對して收差の觀測から逆にどの球面が偏心して居るかを定める樣にしたいのである．軸調整不良の望遠鏡に著しく現はれる收差について尙檢討を要するものがあるのでその方面にも進みたいと思ふ．

文　　獻

A. E. Conrady, Month. Not. Roy. Astronom. Soc., 79 (1918/19), 334.

H. Schulz, ZS. f. techn. Phys., (1940), Nr. 1.

A. Thomerscheit, Instrumentenkunde, 61 (1941), 201.

Luigi Martinelli, Ottica 3 (1938), 11-29, Nr1.