圓筒殼の軸壓縮力による挫屈機構

吉　村　慶　丸

On the Mechanism of Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression

Yoshimaru YOSHIMURA

ABSTRACT: It is unquestionable that the lowering of the buckling load of a circular cylindrical shell is due to the non-linear characteristic of finite displacement theory proposed by v. Karman and Tsien. The author developes further considerations about the essential features of the buckling phenomena. First of all, the fact that the buckled surface is very near to a developable one different from the original cylindrical surface, and therefore the deformation in this case is finite and approximately inextensional, is confirmed both theoretically and experimentally. Based upon this fact, the general buckling and the local buckling with and without the loading spring being analysed from the view-point of energy, it is clarified that the buckling processes are all explained by the energy difference before and after buckling and the energy barrier to be jumped in this case. According to the results, the local buckling is more liable to occur than the general buckling, and in all cases the minimum load, above which the buckling can take place, exists, it being smaller in the case of local buckling than that of general buckling, and further depends on the rigidity of the spring in the case of local buckling.

(Received September. 3, 1951)

1. 緒　言

圓筒殼の軸壓縮力による挫屈の理論的限界荷重に對して，はるかに小さな實驗的挫屈荷重が A. Robertson,(1) E. E. Lundquist(2) 及び L. H. Donnell(3) によつて得られて以來，この矛盾を解決せんとする多くの努力と時間が費されたが，そのうちで挫屈荷重の低下以外に，挫屈の際の突發的大變位及び挫屈後の荷重の低下等という圓筒殼に特有の現象を合理的に解決する手段として Th. von Kármán and Hsue-Shen Tsien(4) 及び河野氏(5) の有限變形による非線型理論が妥當であることは，われわれの行つた實驗及び變形に關する理論的考察にてらして見ても略々確かである．

この考えのもとに，Kármán 等によつて得られた荷重～歪關係は確かに圓筒殼の一つの重要な特性を表わすものであるが，その計算は挫屈の波形の縱橫比の特定の値に對して行われているのみならず，そこに於て考えられている如く，荷重～歪關係において荷重の極小値が挫屈後につねに實現されるものとすることは正當でない．實際に實現される狀態は，あらゆる可能な狀態のうちで，恒にエネルギー極小の條件を滿たすものであり，その狀態は，この種の正常でない問題に對しては，必ずしも荷重極小の狀態と一致するものではなく，むしろ一般に異るものである．この結果われわれはすべての事柄をエネルギーの立場から考えなおす必要に迫られ，それによつて挫屈荷重，挫屈後の狀態並びにその際の變形等が決定されると考えなければならない．このことから更に又，圓

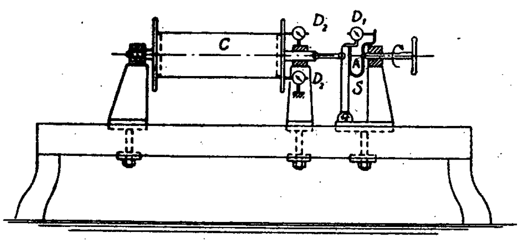
筒が全般的に挫屈することゝ局部的に挫屈することゝは荷重の面からは同一であつてもエネルギー論的には全く異る現象であることも豫想されるであろう.

筆者は圓筒殼の挫屈による變形が概不伸脹變形であり且つ局部的であることを實驗的並びに理論的に明かにし，それ等の事實を基礎として，變形エネルギーの立場から挫屈の機構に關する考察を行おうとするものである.

2. 實驗及び實驗結果

圓筒殼の軸壓縮による挫屈荷重に關しては既に多くの實驗があり，今更事新しく附加える必要はないが，挫屈後の荷重といわゆる挫屈荷重との相違，或いは挫屈後の變形の特性並びに荷重裝置の剛性による挫屈過程の相違等について確かな實驗的資料を得ることは理論的考察にとつて重要である．この挫屈後の變形は金屬では多くの場合塑性狀態に入るので極めて不規則なものであり，彈性的性質を明かにすることが困難である．從つて以下に述べる實驗はすべて挫屈後も彈性的狀態を保つセルロイド製圓筒について行つた.

實驗裝置は第1圖に示す如く，圓筒 C の一端を



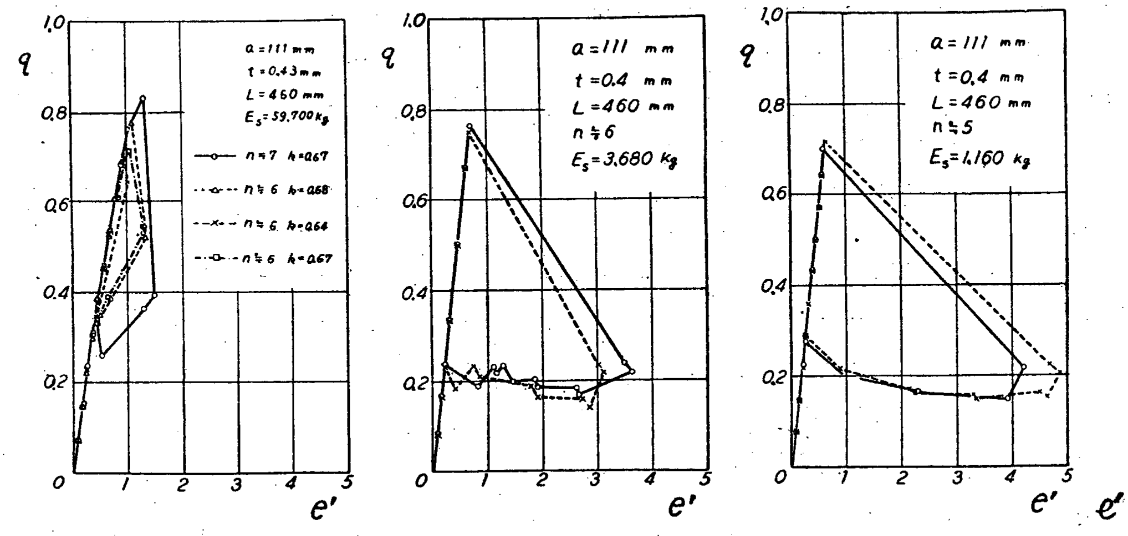
第 1 圖

固定し，他端を馬蹄形バネ S によつて軸受を介して壓縮した．荷重はバネの縮みをダィアルゲージ D_1 により直接讀取ることによつて求め，その際軸受の摩擦力による補正（±2 kg）は測定された荷重に比べて極めて小さいので省略した．又圓筒の縮みはその荷重端にとり付けたダィアルゲージ D_2 より求めた．外力は A 點においてネヂによつて加えられるので，着力點 A の位置は挫屈の前後において不變，即ちバネと圓筒を含む全體系の長さが一定である樣に，バネ及び圓筒が夫々挫屈の前後においてその長さを變化する．この樣な挫屈は境界條件が複雜であるので，後に述べる如く，理論的に單純でない．これに對して，後の數理的取扱いに際して最も單純であり，すべての場合の基礎となるのは荷重端の變位一定，即ち外力による仕事が 0 の場合の挫屈であり，このためには剛性が無限大の荷重裝置を必要とする．しかしかゝる場合の荷重の測定は困難であるので，それに極めて近い場合として，圓筒に比較して極めて剛性の大きいバネを用いた場合を實驗した.

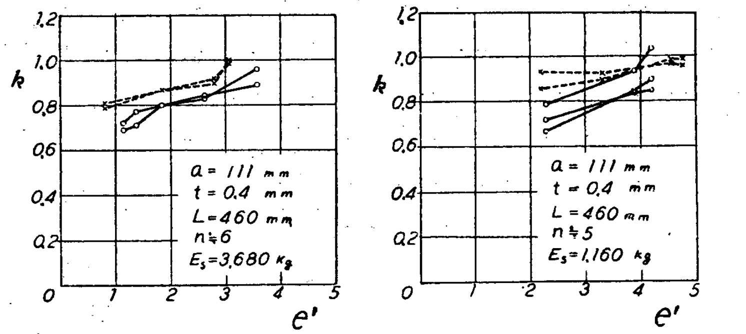
實驗はすべて半徑 $a=111$mm, 長さ $L=460$mm, 板厚$=t=0.4\sim0.43$mm. の圓筒について三種類の剛性のバネを用いて行い，その一例を第 2 圖（實驗 1, 實驗 2, 實驗 3)に示す．實驗 1 は剛性 $E_s=59,700$kg, 長さ $L_s=52$mm のバネ，實驗 2 は $E_s=3,680$kg, $L_s=46$mm のバネ，實驗 3 は $E_s=1,160$kg, $L_s=43$mm. のバネを用いた場合である．圖に於いて，橫軸は $e'=\varepsilon'/\sqrt{\alpha}$, 縱軸は $q=\sigma/(E\sqrt{\alpha})$並びに $k=l_y/l_x$ であり，ε' は圓筒の單位長さ當りの軸方向の縮み, $\alpha=\dfrac{t^2}{12(1-\nu^2)a^2}$ （a は半徑，t は板厚)，E はセルロイドのヤング率で 300kg/mm^2 である．又 $2l_x$, $2l_y$ は夫々挫屈による波形の軸方向及び圓周方向の波長であり，從つて k はその縱橫比，n は波形の圓周方向の數（全圓周にわたつて挫屈したと假定した場合）を表わす.

實驗 1 では挫屈の直前及び直後の e' の相違は極めて小さく，即ち完全に剛なバネで壓縮した $e'=\mathrm{const}$ の場合と考えてもよいであろう．この樣な剛いバネで壓縮した場合には荷重裝置及び圓筒の非對稱性が挫屈後の狀態に大きな影響を及ぼすので，圓筒の大部分にわたつて一樣な挫屈波形を作ることが極めて難しい．この影響を調べるために，同一の圓筒について，軸に對して 90° づゝ位置を廻轉した場合の四つの實驗を圖に示した．實線は圓周方向に 5 箇，軸方向に 1 波長半，破線は圓周方向に 4 箇，軸方向に 1 波長，點線は圓周方向に 2 箇，軸方向に 1 波長，鎖線は圓周方向に 3 箇，軸方向に 1 波長半の範圍に挫屈波形を生じた場合であり，挫屈直後の n 及び k の値は夫々圖に示してある．これによれば n の値はおよそ 6～7, k の値は 0.6～0.7 の範圍にある．又圖から分る如く，實際に生じた波形の數が少い程挫屈荷重が小く，挫屈後の荷重は大きい傾向にある．これは廻轉非對稱のためにある部分に

第 2 圖



實驗 1.



實驗 2. 實驗 3.

應力が集中し早く挫屈するためであり，挫屈後の荷重の大きいのは挫屈しない部分が大きいことによるものである．大體順調に波形が生じた場合を考えるならば，挫屈荷重は約 $q=0.8$ で理論的限界荷重 $q=2$ の 40％ 程度，挫屈後の荷重は $q=0.4$ でその 20％ 程度である．圓筒の縮みを逆にもどすと荷重が減少し，挫屈の回復と同時に荷重が急激にやゝ増加し，回復後の荷重はすべての場合略々同一で約 $q=0.35$ である．

實驗 2 は實驗 1 に比べてバネが可なり軟いために挫屈後の變形が大きく，從つて荷重装置及び試驗圓筒の非對稱の影響も餘り大きくなく實驗結果もほゞ一定している．われわれの實驗においては圓筒のディメンションとバネの剛性を一定とすれば挫屈荷重等の値は圓筒の個性によつて餘り左右されず，そのバラッキは從來の實驗結果に比べてはるかに小さい（これは從來の實驗が試驗機の剛性等の異る條件の下に行われたためと考えられる）．從つて圖にはこれらの實驗結果を二つの例によつて示した．又この場合，縮みをもどして行くと，n の値は一定のまゝ波形が變化することが認められるので，荷重と共に k の變化を測定し，その結果を第 2 圖に示す．これらの結果によれば，挫屈荷重 $q=0.76$ は理論的限界荷重の約 38％で實驗 1 の場合より稍々小さい．挫屈直後の荷重 $q=0.235$ は理論値の 12％，縮みをもどすときは略々一定の荷重 $q=0.2$ で，回復に際して不連續的に上昇する．倘 n は大體 6，k は平均して挫屈直後の値 0.93 より回復直前の値 0.75 位まで變化する．

實驗 3 は實驗 2 の場合よりバネが更に軟く，挫屈荷重は約 $q=0.72$ で理論的限界荷重の 36％，挫屈後の荷重は $q=0.22$ で理論的限界荷重の 11％ である．實驗 2 に比べてすべての荷重が稍々小さく，挫屈後の e' ははるかに大きい．又 $n≒5$ で實驗 2 の場合より稍々小さく，$k=0.95\sim0.8$ 程度で僅かに大きくなつている．

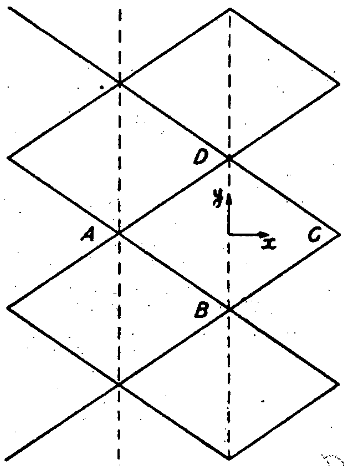
以上の實驗結果を概觀して著しい點は，挫屈荷重及び挫屈直後の荷重はバネの剛性が小さい程減少し，挫屈直後の波形の形狀はバネが剛いほど軸方向に長い，即ち k の値が小さいこと，及び n の値はバネが剛いほど增大する傾向にあること等である．又縮みをもどす際の荷重の變化の有樣等もバネの剛性によつて著しく異るようである．

3. 挫屈による變形の特性

圓筒殼の挫屈による變形には，以上に述べた波形の數及びその縱横比に關する特性以外に，倘次の様な二つの著しい性質がある．

第1はわれわれが實験に用いた様な可なり長い圓筒においては，挫屈が圓筒全體にわたつて生じた例は全くなく，つねに一局部に限定されることである．而してこの挫屈の生じる範圍はほとんどすべての場合に軸方向には 1.5 波長の長さであり，圓周方向にはその時の條件により一定しない．この軸方向の長さが一定であることは後に述べる如くエネルギーの條件によるものと考えられる．又多くの場合圓周方向全體にわたつて挫屈しないことは，圓筒及び荷重條件を圓筒の軸に對して完全に軸對稱とすることが困難なことによるものである．

第2の特性は，挫屈直前或いは挫屈の回復直前の極めて小さな變形狀態においては平板の場合に似た性質の單純な三角函數で表わせる様な變形が現われるが，挫屈後の變位の大きな安定した狀態では變形が展開可能面に極めて近い形のものであることである．即ち挫屈後の大きな變形は第3圖に示すごとく，ABCD の部分の規則正しい連



第 3 圖

續であり，AB, BC, CD 及び DA は夫々圓筒の外部から見て峰，BC は谷に相當し，且つ何れもほとんど直線に近い．又面 ABD 及び BCD は僅に曲つてはいるが極めて平面に近い．即ち峰，谷及び面 ABD の至る處で Gauss の曲率

$$K=1/(R_1R_2) \tag{3.1}$$

は 0 に近い値をもち，從つて挫屈した曲面は展開可能面に極めて近いことを示すものである．然るに圓筒面は展開可能面であるから，挫屈に伴う變位がどれ程大きなものであつても，挫屈後の曲面が展開可能面に近いためにはその變形は不伸脹變形に近いものでなくてはならない．何故ならば，適合條件

$$\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial\theta}-\frac{\partial^2 E}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right]=LN-M^2 \tag{3.2}$$

（但し $E,\ F,\ G;L,\ M,\ N$ は夫々曲面の第一種及び第二種の基礎量）において，右邊

$$LN-M^2=KH^2,\quad H^2=EG-F^2 \tag{3.3}$$

は變形前の圓筒面に對しては完全に 0，變形後の曲面に對しては 0 に近い値をもち，從つて中性面の歪成分を $\varepsilon_x,\ \varepsilon_\theta,\ \gamma_{x\theta}$ とするとき

$$2\frac{\partial^2\gamma_{x\theta}}{\partial x\partial\theta}-\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial x^2}$$

が 0 に近い値をもつ．從つて中性面の歪に關する限り，圓筒はそれ自身の面內の變形に近い變形を行うことゝ同等であり，この様な變形を生じるための中性面の歪は薄い殼の場合には極めて小さなものでなくてはならない．この意味でわれわれは變形した曲面が展開可能面に近いためにはその變形は概不伸脹變形でなくてはならぬということが出來る．而して變形後の中性面のこの完全な展開可能面よりの距りは殼の板厚によつて異り，板厚が薄い程峰又は谷はますます直線に近づき，面 ABD はますます平面に近づく．薄くなつた極限，即ち理想的な膜においては AB, BC, CD, DA 及び BD において折れ曲つた完全な平面 ABD の連結した形のものとなることが豫想される．

この理想的な膜において實現される完全な展開可能面の場合に第 3 圖の A 點を通る様な橫斷面を圖示すれば第 4 圖 (a) の様な多角形となる．この多角形を一般に n 邊形とすれば，上に述べた様にこの變形は完全な不伸脹變形であるから，n 邊形の一邊の長さは $2\pi a/n$ である．從つて圖において

$$h=\frac{\pi a}{n}\cot\frac{\pi}{n}\fallingdotseq a\left(1-\frac{\pi^2}{3n^2}\right)$$

となり，谷における最大變位 δ は

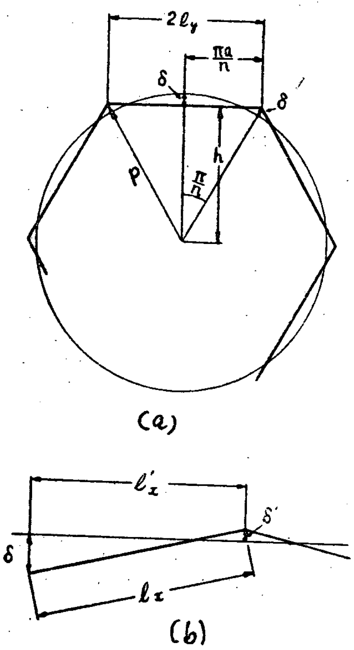
$$\delta=a-h=a\frac{\pi^2}{3n^2} \tag{3.4}$$

によつて與えられる．又

$$p=\frac{\pi a}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}\fallingdotseq a\left(1+\frac{\pi^2}{6n^2}\right)$$

であるから，峰における最大變位は外側に

$$\delta'=p-a=a\frac{\pi^2}{6n^2} \tag{3.5}$$



第 4 圖

である．前に述べた如く，挫屈波形の軸 (x) 方向及び圓周 (y) 方向の波長 $2l_x$, $2l_y$ の比を

$$k=l_y/l_x \tag{3.6}$$

とおけば，$l_y=\pi a/n$ により

$$l_x=\pi a/(nk) \tag{3.7}$$

又第 3 圖の A 點を通る縱斷面圖第 4 圖 (b)において

$$l'_x=\sqrt{l_x^2-(\delta+\delta')^2}$$

であるから，圓筒の軸方向の單位長さ當りの縮み(歪) ε は

$$\varepsilon=\frac{l_x-l'_x}{l_x}\doteq\frac{1}{2}\frac{(\delta+\delta')^2}{l_x^2}$$

によつて與えられる．從つて (3.4), (3.5) 及び (3.7) により

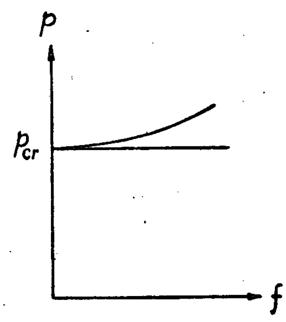
$$\varepsilon=\frac{\pi^2}{8}\frac{k^2}{n^2} \tag{3.8}$$

が得られ，理想的圓筒形膜の軸方向の縮みは波形が軸方向に偏平であり，波形の全圓周についての數が小さい程大きい．理想的な膜においては，曲げに對して全く抵抗をもたないから，この樣な挫屈を生ぜしめるための壓縮力は 0 である．膜においては上述の如く圓筒面と全く異つた完全な展開可能面が存在するが，實際の殼の場合には，曲げ剛性のためにこの展開可能面から變形がずれてきて，その結果 0 でない壓縮應力を示すものと考えられる．圓筒殼の場合にも常數が異るのみで(3.8)と同樣の關係が成立つことが後に示されるが，このことは上の事實を裏付けるものといえよう．

一般に平板の有限變位においては，曲げが大きくなればそれに伴つて中性面の伸びも大きくならざるを得ない．これは通常の境界條件の下では，平面がそれ自身以外に展開可能面をもたないことによるものである．即ち變位が大きくなるに從つて，全變形のエネルギーに對して伸びのエネルギーの占める割合が益々大きくなり，遂には曲げのエネルギーはその變形には近似的に關與しなくなると考えられる．勿論圓筒殼においてもこの樣な意味の有限變位も存在するのであるが，挫屈による變形は上述の如くこれと全く異る性質のもので，極めて大きな變位に對して略々不伸脹と考えられ曲げ及び伸びのエネルギーの關與する割合は同程度のものである．このために，圓筒殼の挫屈を取扱うに當つて曲率變化における變位の導函數に關する高次の項を考える必要を生ずるのであつて，それは丁度長柱の壓縮挫屈において曲率を $w_{xx}(1+\frac{1}{2}w_x^2)$ の如く取る必要を生じたのと同樣である，

長柱における補正項 $\frac{1}{2}w_x$ の影響は第 5 圖に見られる如く撓み f と共に增大する．圓筒殼の場合にもこれと同じような影響があるものと考えられるが，後にわれわれが假定する變形は實際の挫屈による變形とは可なり距つたものであり，これに起因する誤差も可なり大きいものと考えられる．從つて曲率變化における高次の項を考慮したとしても量的な正確さを望むことは困難であるから，以下の計算ではそれをすべて省略することゝする．

第 5 圖



以上のような假定のもとに，展開可能面の存在をやゝ數理的に取扱うために次に Gauss の曲率 K, 即ち (3.3) について考える．L, M, N における高次の項を省略することが出來るから，

$$L=\frac{1}{a}w_{xx},\ M=w_{xy},\ N=a(1+w_{yy}) \tag{3.9}$$

が得られる[(6)]．但しこゝに w/a. x/a, y/a の代りに夫々 w, x, y と記してある．以下の計算においてはすべて dimensionless の量をとり，u/a,

v/a についても同様に u, v と記す．そうすると K は

$$K=\frac{1}{a^2}\left[w_{xx}(1+w_{yy})-w_{xy}^2\right] \qquad (3.10)$$

によつて與えられる．變位 w によつて第 3 圖の様な展開可能面に近い變形を表わすためには，Fourier 二重級數

$$w=\sum f_{ij}\cos i\lambda x\cos j\mu y \qquad (3.11)$$

の相當の項數をとらなければならない．こゝに f_{ij} は δ_{ij} を各變形成分の撓みとするとき，

$$f_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{a} \qquad (3.12)$$

によつて與えられ，且つ

$$\lambda=2\pi a/2l_x, \quad \mu=2\pi a/2l_y \qquad (3.13)$$

である．今簡單のために，假りに x, y 軸に平行な節線をもつ波形

$$\cos\lambda x\cos\mu y$$

と x 軸と $\pm\arctan\dfrac{\lambda}{\mu}$ の方向に節線をもつ波形

$$\cos(\lambda x+\mu y)\cos(\lambda x-\mu y)$$
$$=\tfrac{1}{2}(\cos 2\lambda x+\cos 2\mu y)$$

とを重ね合せた

$$w=f_0+f_1\cos\lambda x\cos\mu y + \tfrac{1}{2}f_2(\cos 2\lambda x+\cos 2\mu y) \qquad (3.14)$$

を採用するならば

$$\begin{aligned}a^2K=&\lambda^2(2f_1f_2\mu^2-f_1)\cos\lambda x\cos\mu y\\&+\lambda^2(\tfrac{1}{2}f_1^2\mu^2-2f_2)\cos 2\lambda x\\&+\tfrac{1}{2}f_1^2\lambda^2\mu^2\cos 2\mu y\\&+4f_2^2\lambda^2\mu^2\cos 2\lambda x\cos 2\mu y\\&+f_1f_2\lambda^2\mu^2(\cos\lambda x\cos 3\mu y\\&+\cos 3\lambda x\cos\mu y)\end{aligned} \qquad (3.15)$$

となり，これらの各項の中 0 とすることが出來るのは第 1，第 2 項のみであり，假りにそれを 0 とする様に f_1, f_2 をえらべば

$$f_1=\sqrt{2}/\mu^2, \qquad f_2=1/2\mu^2 \qquad (3.16)$$

である．周方向の波形の數を n とすれば (3.13) により $\mu=n$ となり (3.4) と同じ形の結果を得ることは注目に値する．第 3 項以下は f_1, $f_2=0$ 以外の値によつて消失せしめることが出來ないが，しかしこれによつて K を出來るだけ小さくする 0 でない f_1, f_2 の有限の値が存在することが豫想される．實際に (3.14) の代りに無限級數 (3.11) をとれば完全に $K=0$ ならしめるような係數

$$f_{ij}=g_{ij}/\mu^2, \qquad g_{ij}=\text{const}, \qquad (3.17)$$

が存在し，有限の項數に限ればその範圍において K を最小ならしめる係數が存在する．從つて殼が薄くなるほど項數の多い級數を必要とし，理想的な膜においては無限級數を必要とするものと考えられる．

平板においては (3.10) において w_{xx} の項が存在しないために，K の各項が正となり，$f_{ij}=0$ 以外には K を 0 とする f_{ij} の値が存在しない．以上の考察によつても，平板ではそれ自身以外に展開可能面が存在しないが，圓筒殼ではそれ自身以外に有限の變位によつて與えられる他の展開可能面が存在することが明かである．これが平板と圓筒殼が挫屈に對して根本的に異る性質を示す原因である．

4. 全般的挫屈

前節に述べた如く，實際の挫屈はほとんどの場合局所的であるといつてよいのであるが，そのような場合を取り扱うときの基礎となるのは，圓筒全體にわたつて挫屈する全般的挫屈 (general buckling) である．

本論に入る前に，われわれはこれから取扱う挫屈の變形において應力函數が存在することを證明しておく必要がある．それは從來は應力函數の存在は平衡方程式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}-T_{13}L-T_{23}\frac{M}{a}=0\\&\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}-T_{13}\frac{M}{a}-T_{23}\frac{N}{a^2}=0\\&\frac{\partial T_{13}}{\partial x}+\frac{\partial T_{23}}{\partial y}+T_{11}L+2T_{12}\frac{M}{a}\\&\quad+T_{22}\frac{N}{a^2}=0\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)^{(6)}$$

において第 1．第 2 式の第 3，第 4 項が第 1，第 2 項に對して省略されることゝ解されているのが常であるからである．これは物理的には伸脹に對して曲げが省略出來ることを意味するものであつて，通常の伸脹變形に對する考え方である．これに對して挫屈による變形は概不伸脹變形で，挫屈後の T_{11}, T_{12}, T_{22} は相當小さく，L, M, N は大きいのであるから簡單に上の様な理由で應力函數の存在を結論することは出來ない．併しこの様な大きな曲率變化を伴う變形に對しても，

變形曲面が展開可能面である場合に限つてわれわれは應力函數の存在を導くことが出來る．即ち(4.1)の第1，第2式を T_{13}, T_{23} について解くときは

$$\left.\begin{aligned} T_{13}\frac{LN-M^2}{a^2} &= -\frac{M}{a}\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}\right)\\ &+\frac{N}{a^2}\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}\right)\\ T_{23}\frac{LN-M^2}{a^2} &= L\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}\right)\\ &-\frac{M}{a}\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

となり，展開可能面，即ち $LN-M^2=0$ に對しては

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}=0 \quad (4.3)$$

が成立つ．從つて圓筒殼の挫屈に對しては近似的に應力函數が存在するという結論が得られ，これは結果においては從來と全く同じであるが，理由を異にするものである．

以上によつて

$$T_{11}=Et\chi_{yy}, \quad T_{12}=-Et\chi_{xy}, \quad T_{22}=Et\chi_{xx} \quad (4.4)$$

とおくことが出來るから，適合條件は高次の微小量を省略することによつて

$$\nabla^4\chi=-(LN-M^2) \quad (4.5)$$

と書かれる．こゝに χ は應力函數である．而して L, M, N としては(3.9)を用うことが出來る．(4.5)の右邊は極めて小さな量であるから，變位 w としてはこの條件を滿足し得るものを選ぶべきである．前にも述べた樣にこの條件を一應滿足し得る函數として(3.14)を採用するならば(4.5)より

$$\begin{aligned} \chi = &-\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}(2\mu^2 f_1 f_2 - f_1)\cos\lambda x\cos\mu y\\ &-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\lambda^2}f_1^2-\frac{2}{\lambda^2}f_2\right)\cos 2\lambda x\\ &-\frac{1}{32}\frac{\lambda^2}{\mu^2}f_1^2\cos\mu y-\frac{\lambda^2\mu^2 f_1 f_2}{(\lambda^2+9\mu^2)^2}\cos\lambda x\cos 3\mu y\\ &-\frac{\lambda^2\mu^2 f_1 f_2}{(9\lambda^2+\mu^2)^2}\cos 3\lambda x\cos\mu y\\ &-\frac{1}{4}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}f_2^2\cos 2\lambda x\cos 2\mu y\\ &-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{E}y^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

が得られ，こゝに σ は壓縮應力を正とするごとく取つてある．これより(4.4)により斷面力 T_{11}, T_{12}, T_{22} 從つて中性面の歪 e_{11}, e_{12}, e_{22} が得られ，

$$e_{11}=u_x+\tfrac{1}{2}w_x^2, \qquad e_{22}=v_y-w+\tfrac{1}{2}w_y^2$$

により，周期項を省略するならば

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\frac{\sigma}{E}-\frac{\lambda^2}{8}f_1^2-\frac{\lambda^2}{4}f_2^2\\ v_y &= \nu\frac{\sigma}{E}-\frac{\mu^2}{8}f_1^2-\frac{\mu^2}{4}f_2^2+f_0 \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

が得られる．

完全な展開可能面においてはわれわれは既に

$$f_1,\ f_2=\frac{\text{const}}{n^2}$$

とおき得ることを(2.4)或いは(2.16)において知つているので，展開可能面に近い曲面においても

$$f_1=\frac{g_1}{n^2}, \quad f_2=\frac{g_2}{n^2} \quad (4.8)$$

とおくときは，g_1, g_2 を近似的に常數と考えることが出來るであろう．このようなパラメーター g_1, g_2 を導入することの有利な點はこれによつて後の計算を容易にすることが出來るのみならず，挫屈による變形の機構に對して具體的な概念を得ることが出來ることである．(3.6)により

$$k=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda}{n} \quad (4.9)$$

であるから，圓筒の軸方向の單位長さ當りの縮みを ε とすると

$$\varepsilon=-u_x=\frac{\sigma}{E}+\frac{k^2}{n^2}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \quad (4.10)$$

$$v_y=\nu\frac{\sigma}{E}-\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right)+f_0 \quad (4.11)$$

となる．f_0 は $v_y=0$ の條件より

$$f_0=-\nu\frac{\sigma}{E}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \quad (4.12)$$

(4.10)は或いは

$$q=\frac{\sigma}{E\sqrt{\alpha}}, \qquad e=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}} \quad (4.13)$$

$$\eta=n^2\sqrt{\alpha} \quad (4.14)$$

$$\alpha=\frac{t^2}{12(1-\nu^2)a^2} \quad (4.15)$$

を用いることにより

$$e=q+\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \quad (4.10')$$

と書くことが出來る．

(4.10)より，圓筒の軸方向の縮み ε 或いは e

は圓筒が挫屈しないとした場合の平均壓縮應力による彈性的な縮み

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma}{E} \quad 或いは \quad e_1=q \tag{4.16}$$

と壓縮應力が作用しないと假定した場合の挫屈による幾何學的形狀の變化による縮み

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2&=\frac{k^2}{n^2}\left(\frac{1}{8}g_1{}^2+\frac{1}{4}g_2{}^2\right) \\ 或いは \quad e_2&=\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1{}^2+\frac{1}{4}g_2{}^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

との和であることが分る. (4.17) を (3.8) と比較すると常數を除いて全く同じ形であり, (4.17) の係數 $\frac{1}{8}g_1{}^2+\frac{1}{4}g_2{}^2$ の値の (3.8) の係數 $\pi^2/8$ との相違は完全な展開可能面からの偏差を表わす一種の尺度と考えてよいであろう. 同様に, (4.12) により, 平均の半徑の減少も純彈性的な部分と純幾何學的な部分との和からなり, 後者は n^2 に逆比例することが分る.

次に圓筒全體の彈性變形エネルギーを W, 伸脹エネルギーを W_e, 曲げのエネルギーを W_b で表わすときは

$$W=W_e+W_b \tag{4.18}$$

であり, 從つて今圓筒の長さを L, その材料のヤング率を E として, (3.14) の w 及び (4.6) の χ を用いて W_e, W_b を計算し (但し前に述べた如く, 曲率變化における高次の項は省略する),

$$\left.\begin{aligned} W&=2\pi aL(^1/_2)\,Et\alpha\cdot\Pi \\ W_e&=2\pi aL(^1/_2)\,Et\alpha\cdot\Pi_e \\ W_b&=2\pi aL(^1/_2)\,Et\alpha\cdot\Pi_b \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

とおくときは

$$\Pi=\Pi_e+\Pi_b \tag{4.20}$$

であり,

$$\Pi_e=\frac{1}{n^4\alpha}Q+\left(\frac{\sigma}{E\sqrt{\alpha}}\right)^2=\frac{1}{\eta^2}Q+q^2 \tag{4.21}$$

$$\Pi_b=Gg_1{}^2+Hg_2{}^2 \tag{4.22}$$

が得られる. こゝに

$$\begin{aligned} Q=&Ag_1{}^4+Bg_1{}^2g_2{}^2+Cg_2{}^4-Dg_1{}^2\,g_2 \\ &+Cg_1{}^2+Fg_2{}^2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\left.\begin{aligned} A&=(k^4+1)/128 \\ B&=k^4\left[\frac{1}{(k^2+1)^2}+\frac{1}{4(9k^2+1)^2}+\frac{1}{4(k^2+9)^2}\right] \\ C&=\frac{k^4}{4(k^2+1)^2} \\ D&=\frac{k^4}{(k^2+1)^2}+\frac{1}{16} \\ F&=1/8 \\ G&=(k^2+1)^2/4 \\ H&=2(k^4+1) \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

である.

即ち伸脹エネルギー W_e は平均應力 q に起因する彈性エネルギー q^2 と q からの變動應力による彈性エネルギー $\frac{1}{\eta^2}Q$ よりなり, 曲げエネルギー W_b は波數 n に無關係であることが分る. こゝでも明かな樣に圓筒殼が平板と異る點は Q の中に負の項 $-Dg_1{}^2g_2$ が存在することであり, このために與えられた圓筒に對して, w を與える級數の項數を增す程 g_{ij} を適當に選ぶことによつて Q はますます小さくなり得る. 之に對して Π_b はすべて正の項よりなるから, w の項數を增すほど大きくなる. 一方 n が增加すると Π_e は減少し, q が增加すると Π_e は增加する. 結局において W を極小とする樣な變形と應力 q が實現されて平衡狀態が成立するのであつて, この場合に上の考察から W_e は可なり小さく W_b と同程度の大きさであると考えられる. 即ち圓筒殼の挫屈はエネルギーの立場からも概不伸脹變形と見なすことが出來る.

次に平衡狀態を決定するエネルギー極小の條件がこれからわれわれが扱おうとする挫屈問題に對しては特別の注意を必要とするのでそれについて述べる. 考うる狀態からの僅かの變化に對して外力のなす仕事は

$$\delta A=2\pi at\sigma\cdot L\delta\varepsilon=2\pi aL(^1/_2)Et\alpha\cdot(2q\delta e) \tag{4.25}$$

であり, 平衡條件は

$$\delta W=\delta A \tag{4.26}$$

によつて與えられる. これはすべての場合に成立つ關係であるが, 注意すべきことは, 後に明かになる樣に, 圓筒殼の挫屈の際の荷重～歪曲線は一義的に定まるものでなく, 種々の經路を取り得ること, 從つてその時の外力のなす仕事も一義的に定まらず, そのポテンシャル

$$V=-2\pi aL\cdot\tfrac{1}{2}\,Et\alpha\,(2qe) \tag{4.27}$$

も存在しないことである. 從つてわれわれは q を獨立變數とすることは不合理であり, e を獨立變數と考えるべきである. 實際に (4.18) 及び (4.27) より全ポテンシャル・エネルギー $U=W+V$ を求め $\partial U/\partial q=0$ を計算するときは荷重～歪の關係その他において矛盾した結果が導かれることが分

る．これは簡單なことであるが，これから扱う問題にとつては極めて重要なことである．

以上の考えに從つて (4.10′) を (4.21) に入れ，q を e によつて表わせば

$$\Pi_e=\frac{1}{\eta^2}Q'+e^2-2e\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \tag{4.21′}$$

但し

$$Q=A'g_1^4+B'g_1^2g_2^2+C'g_2^4 -Dg_1^2g_2+Cg_1^2+Fg_2^2 \tag{4.28}$$

$$\left.\begin{aligned} A'&=A+k^4/64\\ B'&=B+k^4/64\\ C'&=C+k^4/64\end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

從つて (4.26) 即ち

$$q=\frac{\partial\Pi}{\partial e} \tag{4.30}$$

より再び (4.10′) が得られる．

e を獨立變數と考えるときは，e=const 即ち外力の仕事が0である様な條件の下にエネルギーの極小を考えればよいから平衡の條件は

$$\delta W=0 \tag{4.31}$$

によつて與えられる．然るに W は (4.18) により圓筒のディメンション即ち a, L 及び t 並びに Π にによつて定まり

$$\Pi=\Pi(e,\ \eta(n),\ k,\ g_1,\ g_2) \tag{4.32}$$

と考えられるから，e, η, k=const の條件の下の釣合は任意の圓筒に對して

$$\frac{\partial\Pi}{\partial g_1}=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial g_2}=0 \tag{4.33}$$

即ち

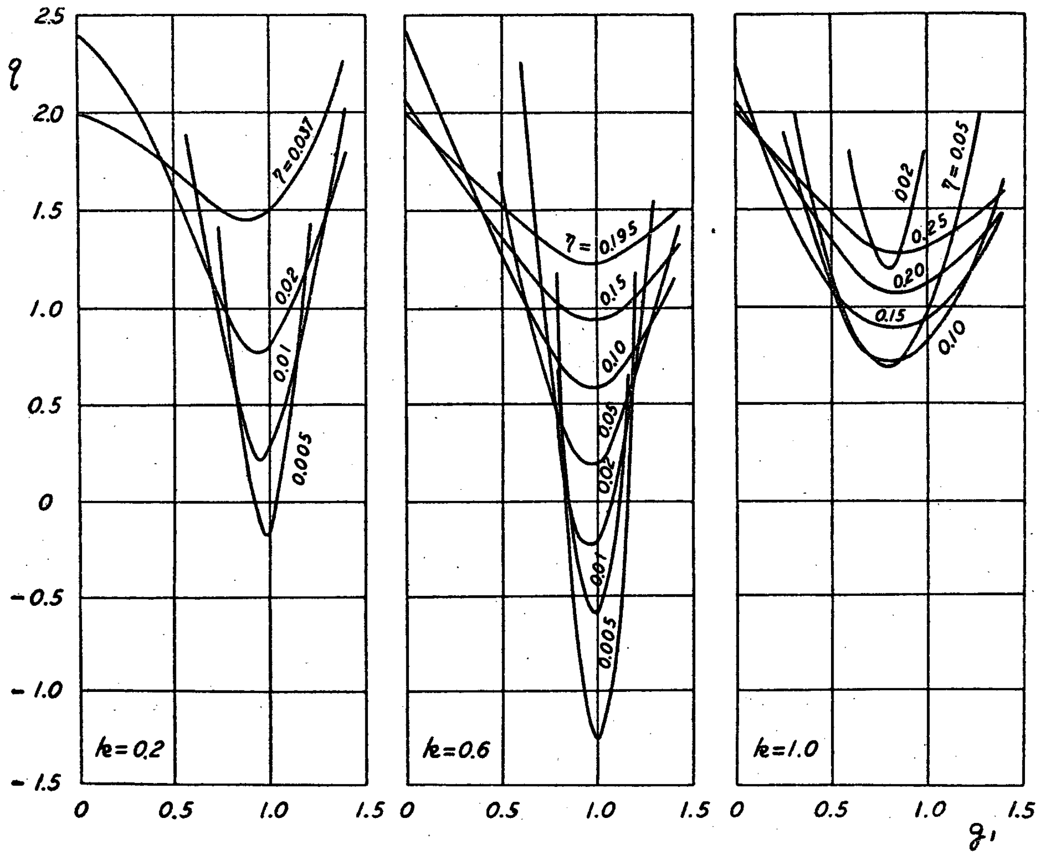
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\eta^2}\left[4A'g_1^2+2B'g_1^2\rho^2-2Dg_1\rho+2C\right]+2G-\frac{1}{2}e\frac{k^2}{\eta}=0\\ &\frac{1}{\eta^2}\left[2B'g_1^2\rho+4C'g_1^2\rho^3-Dg_1+2F\rho\right]+2H\rho-e\frac{k^2}{\eta}\rho=0\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

$$g_2/g_1=\rho \tag{4.35}$$

によつて與えられる．これらより e を消去すれば ρ に關する三次式

$$4(B'-C')g_1^2\rho^3-4Dg_1\rho^2+[(8A'-2B')g_1^2+4C-2F+\eta^2(4G-2H)]\rho+Dg_1=0 \tag{4.36}$$

が得られる．これから種々の k, η, g_1 の値に對して ρ を解き，その結果を用いて (4.34) の第1



第　6　圖

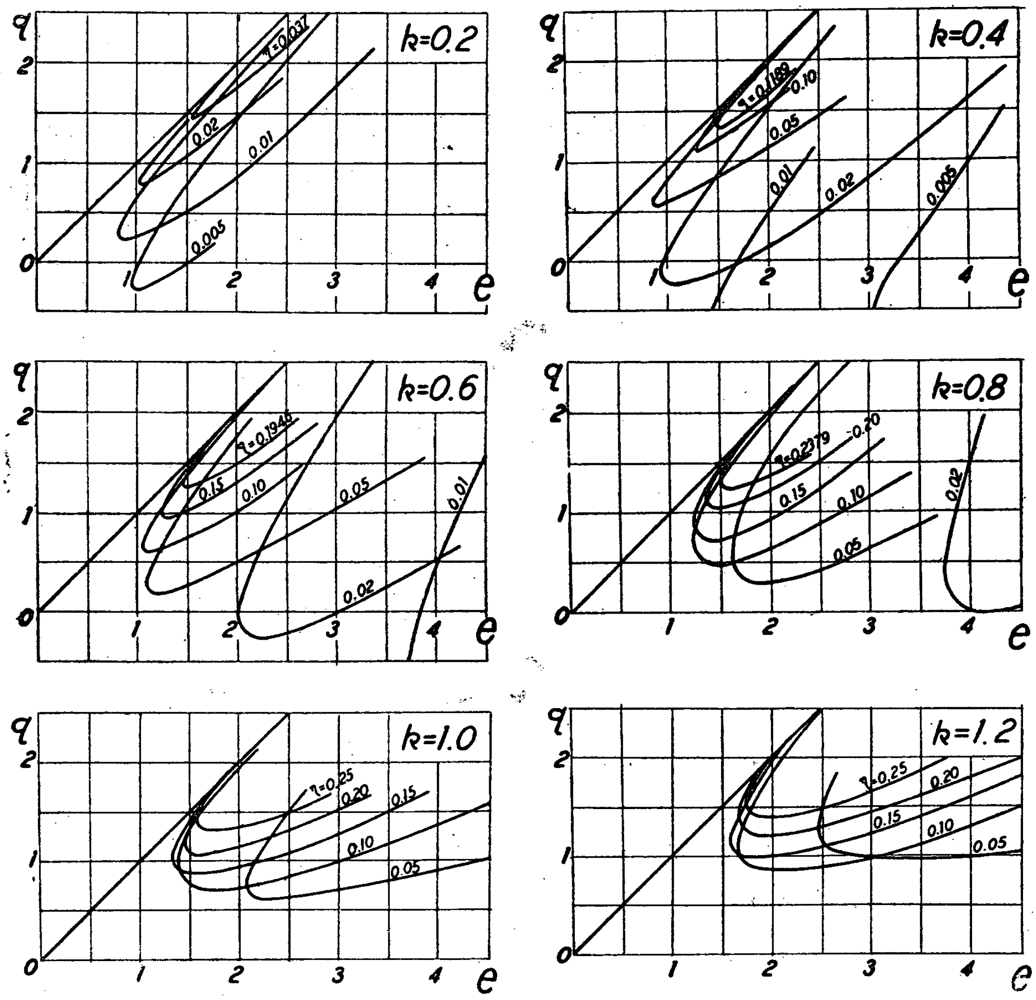
式より e を求めることが出來，從つて(4.10′)により應力 q が決定される．この樣にして求めた q の値を，例えば $k=0.2,\ 0.6,\ 1.0$ の場合に η をパラメーターとして g_1 に對して示すと第6圖の如くなる．この曲線から平衡狀態に對する g_1 の値が定まるわけではないが，$k,\ \eta$ の値の如何にかゝわらず曲線が g_1 の値の一定の範圍內に存在して相似形を示すことは(4.8)の假定が合理的であることを示すものである．

次に $e\sim q$ の關係を $k,\ \eta$ をパラメーターとして示すと第7圖のごとくなる．圖より明かに挫屈曲線の分岐點の最小値は k のすべての値に對して線型理論による限界荷重

$$q=2$$

を示す．Th. von Kármán and Hsue-Shen Tsien は $k=1$ と假定して計算し，その結果挫屈後の最小荷重が理論的限界荷重 $q=2$ の約 1/3 であること（第7圖 $k=1.0$ の場合參照）から，從來實驗的に求められている挫屈荷重が理論的限界荷重の20%～50%程度であるという事實を說明した．この說明によれば挫屈荷重はほゞ挫屈後の荷重に等しいことゝなり，われわれの實驗結果（第2節）即ち挫屈後の荷重が挫屈荷重（實驗値）の更に ½ 乃至 1/4 であるという事實と矛盾するばかりでなく，挫屈後の狀態が $e\sim q$ 曲線における q の極小値によつて定まるという考えも後に述べる理由により誤れるものである．又 $k=1.0$ という假定も實驗的にそれに近い場合が多いだけであつて，實驗の條件によつて變化するものである．

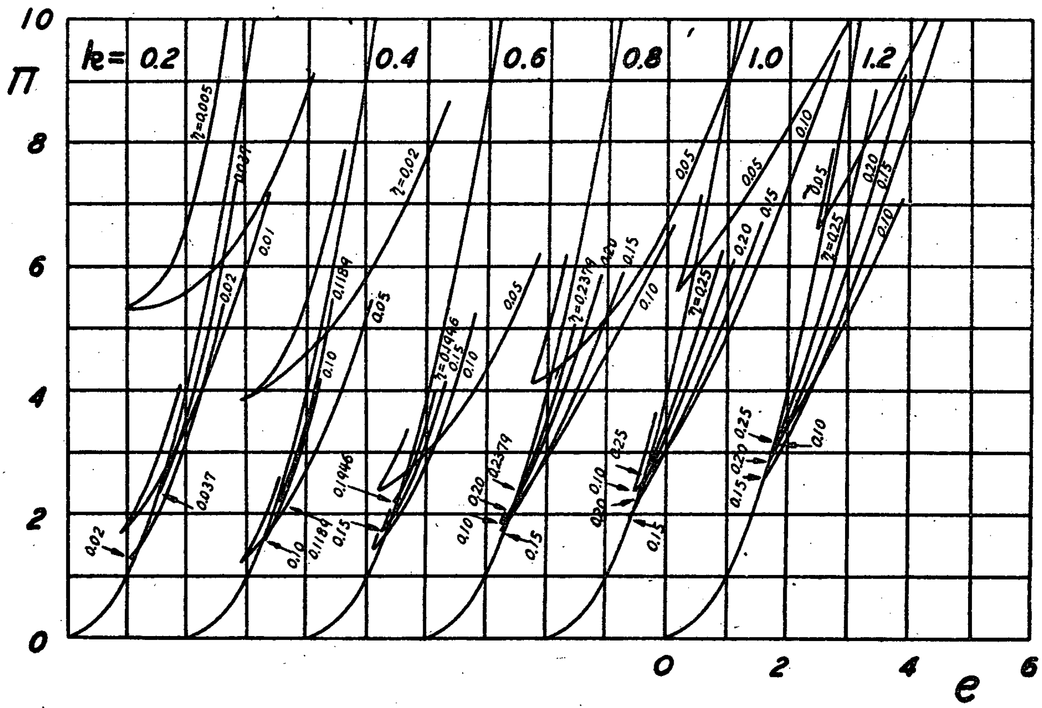
第7圖から明かな樣に，一定の k に對する η をパラメーターとする曲線群の包絡線によつて表わされる荷重は k が減少すると共に減少し，$k=0.2$ と 0.4 との間で弱い極小を示すようであり，且つ絶對値の極めて大きな負の値を示す．從つて q の小さい値程實現され易いと考えるならば，挫屈は引張荷重によつておこるという不合理を生ずる．これは上の計算が $k,\ \eta=\mathrm{const}$ の條件



第 7 圖

の下の $\Pi=\min$ を與えるもので，$\Pi(e,\ \eta,\ k,\ g_1,\ g_2)$ の各變數に對する極小を與えるものでないからである．換言すれば，q が負になるということは，與えられた全體の縮み e よりも挫屈波形による縮み (4.17) が大きくなることを意味し，その結果伸脹エネルギー Π_e が増加し，その様な狀態に對しては Π が極小とならないことによるものである．

上に述べた様に，挫屈後の狀態を決定するのには $\Pi(e,\ \eta,\ k,\ g_1,\ g_2)$ なる超曲面の極小値に對する e, η, k, g_1, g_2 從つて q の値を決定する必要があり，そのためには Π の $\eta,\ k=\mathrm{const}$ なる斷面における極小値の更に $\eta,\ k$ に對する極小値を調べればよい．そのために $k,\ \eta$ をパラメーターとして，ρ の計算値，第 6 圖，第 7 圖をもとにして Π を計算したものが第 8 圖である．從つてこの様にして計算された Π の値は各斷面におけるエネルギー Π の極小値を與えるものである．圖中の原點から出る拋物線は第 7 圖における直線 $q=e$ に對應し，挫屈しないとした場合のエネルギー q^2 を與える．挫屈後の各曲線が如何なる性質のものかを明かにするために，今その中から考うる $\eta,\ k$ に對する曲線を取出して考える (第 9 圖 (a))．この曲線は與えられた $\eta,\ k$ によつて定まる限界歪 e_{cr}(理論的限界荷重 q_{cr} に對する縮み e の値) に對する拋物線 OBA 上の點 P から出發して，挫屈しない場合よりもエネルギーの大きな狀態 Q を經て，R に於いて最小の $e=e^*$ 及び $q=q^*$ に達し，$S(e=e_0,\ q=q_0)$ において OBA と交り，ST の範圍では上記エネルギーよりも小さなエネルギーをもつ．而して P においては $g_1=0$ であり，$Q,\ R,\ S,\ T$ と進むに從つて g_1 の値卽ち挫屈による撓みが増加する．$e<e^*$ では挫屈は不可能であるが，$e^*\leqq e<e_0$ では外からエネルギーを供給すれば挫屈せしめることが不可能ではない．$e\geqq e_0$ では挫屈前よりも挫屈後のエネルギーが小さくなるので挫屈可能であるが，そのためには一定のエネルギーの山を飛び越えなければならない．例えば圖において $e=e_1$ では挫屈して C から C'' の狀態に移るためには CC' に相

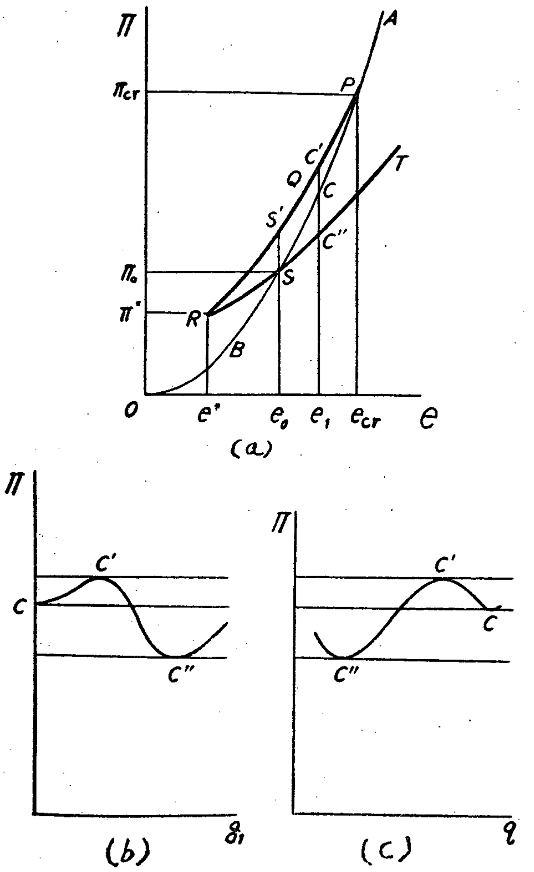


第　8　圖

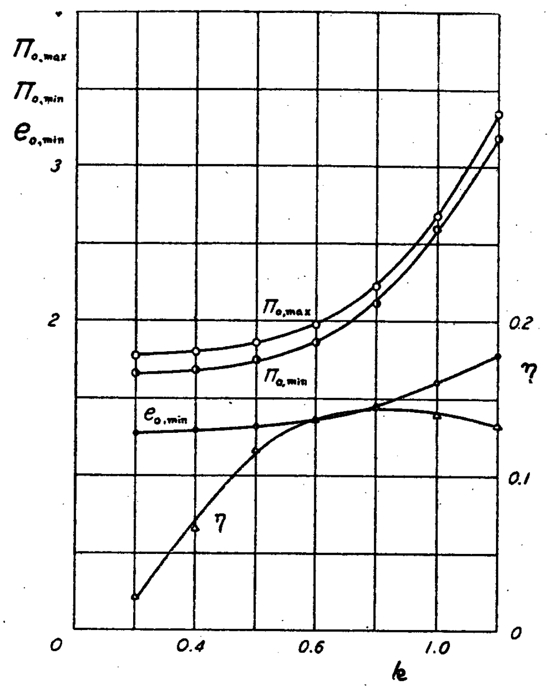
當するエネルギー障壁を越えなければならない．この過程を分りやすくするために，g_1 或いは q に對して Π を畫けば第 9 圖 (b), (c) の如くなる．以上を要約すれば次のことが結論出來るであろう．卽ち，

(1) 挫屈の可能性は $e\geqq e_0$ なること．卽ち e_0 が小さい程挫屈し得る荷重が小さい．

(2) 挫屈をおこす確率或いは挫屈し易さともいうべき量はエネルギー障壁 CC' が小さい程大きい．



第　9　圖



第　10　圖

(3) 挫屈した後如何なる狀態が實現されるかということは，C'' に相當するエネルギーが最小になる樣な k, η, q の値によつて決定される．

尙 e_0 に對する g_1, g_2 の値は k, η の如何に拘らず殆ど一定していることが第8圖より導かれるのであつて，これは最初の假定(4.8)が妥當であることを示すものとして注目される．

この考えの下に第8圖を見るときは，k=const に對しては e_0 の値は η が減少するに從つて最初減少し，或る η に對して極小となり，次に增加する．この k=const に對する e_0 の極小値を $e_{0,\min}$ と記せば，$e_{0,\min}$ 及びそれに對する S, S' に相當するエネルギー値 $\Pi_{0,\min}$, $\Pi_{0,\max}$ 並びに η の値は k と共に變化し，その有樣を第10圖に示す．これによれば $\Pi_{0,\min}$ は k が減少すると共に下つているが，k=0.2 附近において極めてゆるやかな極小が存在する樣であり，そこでの η は約 0.02, $e_{0,\min}$ は約 1.3 である．從つてそのときの挫屈荷重は q=1.3 であり，挫屈後は第7圖より推定すれば ($e=e_{0,\min,\min}$ の挫屈であるから) q=0.9 である．而してこの際は挫屈直前と直後のエネルギーは等しいが，挫屈に際して飛越えるべきエネルギー障壁は 0.14 程度で，挫屈直前のエネルギーの十數分の一に相當する．これは最小の挫屈荷重であり，一般には $q\geqq$ 1.3 において挫屈し，挫屈荷重が大きくなる程エネルギー障壁の値は小さく，從つて挫屈し易く，又挫屈前後のエネルギーの値の差が大きく，從つて挫屈に際して生ずる音や振動等も大きくなる．實際に最小挫屈荷重以上の如何なる荷重で挫屈するかは圓筒の初期歪，實驗の條件等によつてきまるものであろう．而して e=const>1.3 なる一定の e の下ではエネルギーの極小値に對する k の値は稍々增加し，それに伴つて η の値も稍々大きくなる．卽ち挫屈荷重が最小挫屈荷重よりも大きくなる程，挫屈後の波形は軸方向の細長さを減じ，その圓周方向の數が增す傾向にある．又その時の荷重は第7圖から求められる．

結局この樣な考察から，定量的なことはともかくとして，最小挫屈荷重なるものが存在し，實際の挫屈はそれ以上の荷重において生ずること，挫屈後の狀態はその場合の e における最小エネルギーに對する k, η(第10圖に準じた圖) 及び q (第7圖) によつて決定されることが導かれる．併し一定の e に對するエネルギー分布は極めてゆるやかな極小を示すので，挫屈後の狀態は鋭く定まるものではなく，或る範圍に散在する可能性がある．而して何れにしてもこの樣な全般的挫屈

の場合の波形は軸方向に極めて細長い.

われわれの實驗では，前述のごとく，多くの場合軸方向には1.5波長の範圍が局所的に挫屈したに過ぎないので，この様な全般的挫屈の場合の計算結果を適用することは出來ない（k の値から見てもそうである）が，若し假りに1.5波長に相當する長さの圓筒について，e=const の條件の下に實驗するならば，本節に述べた様な結果が定性的に實現されるものと考えてよいであろう.

5. 局所的挫屈

前節の結果によれば，挫屈後實現される狀態が如何なるものであるにせよ，挫屈に際して荷重が急激に下り歪によるその增加率が極めて小さい範圍の存在することが第7圖によつて明かである. この様な性質の荷重曲線に對しては變形が傳播することなく一個所に局限せられ，その變形がある程度發達してから順次隣接せる部分に擴つてゆくことは理論的にも當然なことである. 第3節で述べた局所的挫屈の發生の理由はこれによつても想像がつくであろうが，本節ではこれを前節の結果を基礎としてエネルギーの立場から考えて見る.

今圓筒を挫屈した部分としない部分とに分けて

	挫屈しない部分	挫屈した部分	圓筒全體
長さ	L_1	L_2	L
平均壓縮應力	σ_1	σ_2	σ
縮み	ε_1'	ε_2'	ε'
彈性エネルギー	W_1'	W_2'	W'

とすれば（全般的挫屈の場合と區別するために“ ′ ”をつけて表わす），

$$L=L_1+L_2 \tag{5.1}$$

$$\sigma=\sigma_2=\sigma \tag{5.2}$$

$$\sigma=\sigma_1=E\varepsilon_1' \tag{5.3}$$

$$W'=W_1'+W_2' \tag{5.4}$$

$$L\varepsilon'=L_1\varepsilon_1'+L_2\varepsilon_2' \tag{5.5}$$

が成立つ. ε', ε_1', ε_2' の代りに

$$e'=\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\alpha}},\quad e_1'=\frac{\varepsilon_1'}{\sqrt{\alpha}},\quad e_2'=\frac{\varepsilon_2'}{\sqrt{\alpha}} \tag{5.6}$$

を用いれば (5.5) は

$$Le'=L_1e_1'+L_2e_2' \tag{5.5'}$$

と書かれ，e_1' は (5.3), e_2' は (4.10′) により

$$e'=q+\frac{L_2}{L}\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \tag{5.7}$$

が導かれる. 即ち全體の縮み e' は n, k, g_1, g_2 のみならず，圓筒の長さ L と挫屈した部分の長さ L_2 との比にもよることが分る. 前述の如く

$$L_2=1.5\ (2l_x) \tag{5.8}$$

と假定してよいから (3.6) 及び (3.13) により

$$L_2=3\pi a/(nk) \tag{5.9}$$

故に (5.7) は

$$e'=q+\frac{3\pi a}{Lnk}\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \tag{5.10}$$

となり，第1項は挫屈しないと假定した場合の彈性的歪による縮みを表わし，これは全般的挫屈の場合と同様であるが，第2項は局所的挫屈波形による幾何學的縮みを表わし，全般的挫屈の場合と異り，k 及び a^2 に比例し，n^3, t 及び L に逆比例する.

次に全體の變形エネルギーは挫屈しない部分の變形エネルギー

$$W_1'=2\pi at\cdot L_1\tfrac{1}{2}E\varepsilon_1'^2=2\pi aL_1\frac{Et}{2}\alpha\cdot q^2 \tag{5.11}$$

と挫屈した部分の變形エネルギー

$$W_2'=\frac{L_2}{L}W \tag{5.12}$$

との和である. 但し W は (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) 及び (4.22) によつて與えられる. 從つて

$$\left.\begin{aligned}W'&=2\pi aL\cdot(1/2)\,Et\alpha\cdot\Pi'\\W_1'&=2\pi aL\cdot(1/2)\,Et\alpha\cdot\Pi_1'\\W_2'&=2\pi aL\cdot(1/2)\,Et\alpha\cdot\Pi_2'\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

とおくときは

$$\left.\begin{aligned}\Pi_1'&=(L_1/L)\,q^2\\\Pi_2'&=\frac{L_2}{L}\left[\frac{1}{\eta^2}Q+q^2+(Gg_1^2+Hg_2^2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

となり，(5.9) により

$$\Pi'=\Pi_1'+\Pi_2'=\frac{3\pi a}{Lnk}\left[\frac{1}{\eta^2}Q+(Gg_1^2+Hg_2^2)\right]+q^2 \tag{5.15}$$

が得られる. こゝでも前に述べた様に e' を獨立變數とすべきであるから (5.10) により (5.15)は

$$\Pi'=\frac{3\pi a}{Lnk}\left[\frac{1}{\eta^2}Q''+(Gg_1^2+Hg_2^2)\right]$$

$$+e'^2-2e'\frac{3\pi a}{Lnk}\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1{}^2+\frac{1}{4}g_2{}^2\right) \quad (5.16)$$

の如く書き換えられる．こゝに

$$Q''=A''g_1{}^4+B''g_2{}^2g_1{}^2+C''g_2{}^4$$
$$-Dg_1{}^2g_2+Cg_1{}^2+Fg_2{}^2 \quad (5.17)$$

$$\left.\begin{aligned}A''&=A+[3\pi a/(Lnk)](k^4/64)\\B''&=B+[3\pi a/(Lnk)](k^4/64)\\C''&=C+[3\pi a/(Lnk)](k^4/64)\end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

である．

前節と同様に $e', \eta, k=\text{const.}$ の下の $W'=\text{min.}$ の條件は

$$\partial\Pi'/\partial g_1=0, \qquad \partial\Pi'/\partial g_2=0$$

卽ち

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\eta^2}\left[4A''g_1{}^2+2B''g_1{}^2\rho^2-2Dg_1\rho+2C\right]\\&\quad+2G-\frac{e'}{2}\frac{k^2}{\eta}=0\\&\frac{1}{\eta^2}\left[2B''g_1{}^2\rho+4C''g_1{}^2\rho^3-Dg_1+2F\rho\right]\\&\quad+2H\rho-e'\frac{k^2}{\eta}\rho=0\end{aligned}\right\} \quad (5.19)$$

によつて與えられ，(5.19) より e' を消去すれば ρ に關する三次方程式

$$4(B''-C'')g_1{}^2\rho^3-4Dg_1\rho^2$$
$$[(8A''-2B'')g_1{}^2+4C-2F$$
$$+\eta^2(4G-2H)]\rho+Dg_1=0 \quad (5.20)$$

が得られる．(5.17) 及び (4.29) により

$$\left.\begin{aligned}B''-C''&=B'-C'=B-C\\8A''-2B''&=8A'-2B'=8A-2B\end{aligned}\right\} \quad (5.26)$$

であるから (5.20) は全般的挫屈の場合の (4.36) と全く同一の式となり，從つて全般的挫屈の場合の g_1, ρ, η に關する計算結果をそのまゝ用うことが出來る．この結果を用いて (5.19) の第1式より e' を求めれば，(4.34) の第 1 式より求めた e と比較することにより，

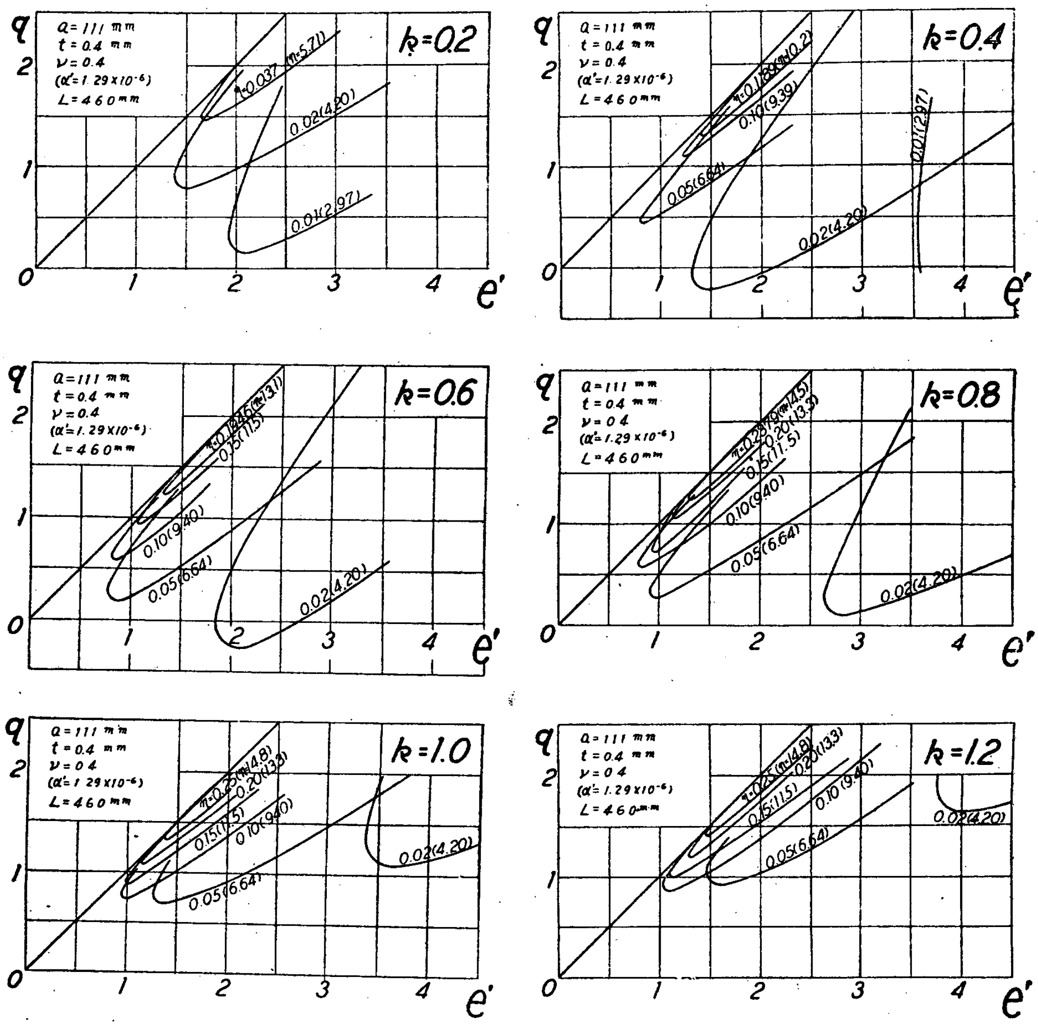
$$e'=e+\left(\frac{3\pi a}{Lnk}-1\right)\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1{}^2+\frac{1}{4}g_2{}^2\right) \quad (5.21)$$

が得られる．從つて(4.10′)の q を用えば(5.10)と全く同一の式が導かれ，全般的挫屈の場合の q と局所的挫屈の場合の q とは全く同一の値を有することが分る．從つてわれわれは局所的挫屈の場合の計算を $e'=\text{const.}$ の條件の下にやり直す必要はなく，全般的挫屈の場合の計算結果をもとゝして，g_1, g_2 に對するエネルギーの極小條件を滿足するところの e' を(5.10)により，Π' を(5.15)により計算することが出來る．こゝで全般的挫屈と異る點は，局所的挫屈においては圓筒のディメンション a, L, t 及びポアッソン比 ν，從つて n の値をそれぞれ與える必要のあることである．

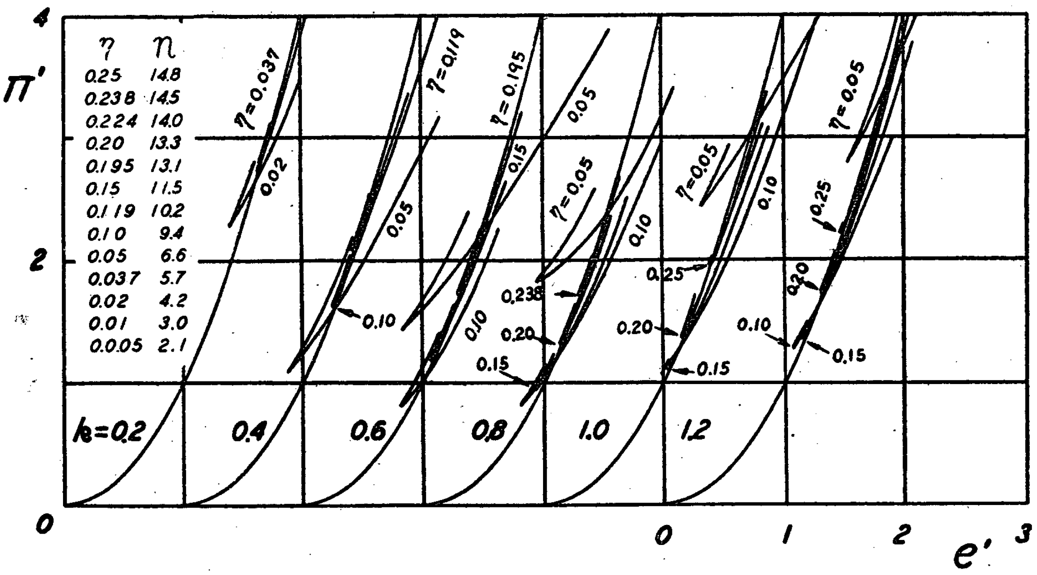
實驗に供した圓筒の値$a=111$mm., $L=460$mm., $t=0.4$mm.，$\nu=0.4$ を用いて上記の手續きにより計算した $e'\sim q$ 及び $e'\sim\Pi'$ の關係を第 11 圖及び第 12 圖に示した．第 12 圖の拋物線は挫屈しないと假定した場合のエネルギー曲線 $\Pi'=e'^2$ で，それと k 及び η 或いは n を與えた場合の挫屈後のエネルギー曲線との交點に對する e', Π' の値を夫々 e'_0, Π'_0, k を一定した場合の e'_0, Π'_0 の極小値を夫々 $e'_{0,\text{min.}}$，$\Pi'_{0,\text{min.}}$，且つ $e'_{0,\text{min}}$ に對する Π' の山の値を $\Pi'_{0,\text{max.}}$ と記せば，k に對するそれらの變化の狀態及びその時の η 又は n の値は第13圖によつて表わされる．これによれば $e'_{0,\text{min.}}$ 及び $\Pi'_{0,\text{min.}}$ の極小値は明かに $k=0.7$ 附近に存在し，その極小値は $e'_{0,\text{min, min}}=1.04$ であり，そのときの η の値は約 0.10，從つて $n=9.40$ である．尙 $e'=1.04$, $k=0.7$, $\eta=0.10$ における挫屈後の荷重は第 11 圖より約 $q=0.7$ であり，エネルギー障壁 $\Pi'_{0,\text{max.}}-\Pi'_{0,\text{min.}}$ は約 0.07 であることが分る．$q=e'_{0,\text{min, min.}}=1.04$ はこの場合の最小挫屈荷重を與えるもので，一般にはこれよりも稍々大きな荷重に達したときに挫屈し，その場合の挫屈後の狀態はその樣な挫屈荷重卽ちe' に對する挫屈後のエネルギー極小の條件より決定されるものであるが，その狀態は第 13 圖におけるエネルギー極小の狀態と大差ないものである．

尙第 10 圖と第 13 圖を比較すれば局所的挫屈の場合の極小エネルギー $\Pi'_{0,\text{min, min.}}$ は全般的挫屈の場合の極少エネルギー $\Pi_{0,\text{min, min.}}$ よりはるかに小さく，局所的挫屈の方が生じ易いことを示す．又 $\Pi'_{0,\text{min}}$ の曲線は $\Pi_{0,\text{min.}}$ の曲線よりも鋭い極小値を示すので局所的挫屈の場合の挫屈後の狀態は全般的挫屈の場合の挫屈後の狀態の樣に散在することがないであろう．

以上の計算は $e'=\text{const.}$ という條件を假定して居り，われわれの實驗はすべてバネによつて負荷したためこの樣な理想的な狀態を實現し得なかつ

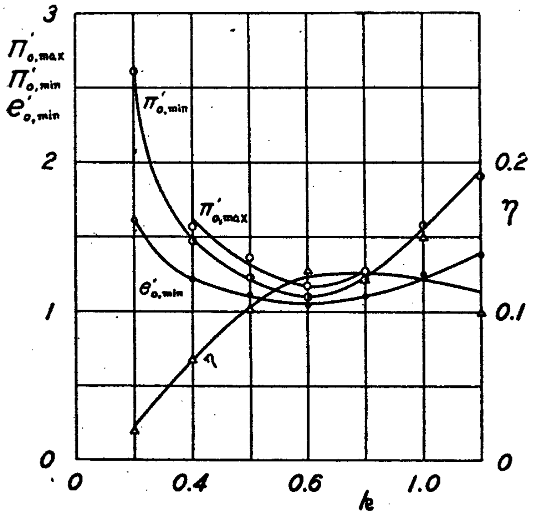


第 11 圖



第 12 圖

たが，實驗1（第2圖）は極めてこの條件に近いものと考えて差支えない．從つてこの場合の實驗結果を計算値と比較したものを第1表に示す．これによれば k の値は兩者略々一致するが，挫屈荷重，挫屈後の荷重及び波數 n は何れも計算値が實驗値よりも稍々大きくなつている．併しこの程度の量的相違は現在の近似計算の結果としてはむしろ滿足すべきものと言わなければならない．



第　13　圖

6.　弾性をもつ負荷装置による局所的挫屈

前節までは壓縮端の變位一定，即ち $e, e'=\mathrm{const}$ の場合を考えたのであるが，この様な狀態を完全に實現することは通常の試驗機においては不可能である．バネ，油壓或いは重錘等におけるごとく負荷裝置の荷重點が荷重によつて變位する場合は勿論であるが，そうでない場合においても試驗機を構成する物質が剛體でない以上負荷裝置乃至は試驗機による變形エネルギーの吸收はまぬがれ得ないものである．而してこのエネルギーは一定の荷重に對しては剛性が小さい程大きいのであつて，このエネルギーの外部及び試驗圓筒との間の受授が挫屈現象に何等かの影響を及ぼすことは必然の結果であろう．本節ではこの様な負荷裝置及び試驗機の剛性をバネによつて代表した場合を解析し，實驗結果と比較して見たい．

この場合も圓筒は前節と同樣に局所的挫屈を行うものとし，圓筒の單位長さ當りの縮みを前の局所的挫屈の場合と同樣に $\varepsilon'(e'=\varepsilon'/\sqrt{\alpha})$，バネの長さを L_s，單位長さ當りの縮みを ε_s，バネと圓筒とを含んだ全體系の長さを L_t，縮みを $\varepsilon_t(e_t=\varepsilon_t/\sqrt{\alpha})$ とすれば，

$$L_t=L+L_s \tag{6.1}$$

$$L_t\varepsilon_t=L\varepsilon'+L_s\varepsilon_s \tag{6.2}$$

バネの剛性を E_s とすれば，その受持つ荷重 $P=E_s\varepsilon_s$ は圓筒に作用する外力 $P=2\pi at\sigma$ に等しく

$$\varepsilon_s=2\pi at\sigma/E_s \tag{6.3}$$

である．ε' は (5.10) の兩邊に $\sqrt{\alpha}$ を乘じた式によつて與えられるから (6.2) に (6.3) 及びこの ε' を入れて $\sqrt{\alpha}$ で割れば

$$\frac{L_t}{L}e_t=\left(1+\frac{L_s}{L}\frac{2\pi atE}{E_s}\right)q+\frac{3\pi a}{Lnk}\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right) \tag{6.4}$$

を得る．即ち全體の縮みがバネによる縮みの部分

$$(L_s/L)(2\pi atE/E_s)q \tag{6.5}$$

と圓筒の縮み e' とからなることが分る．$E_s\to\infty$ のときは (6.5) は 0 となり (6.4) はバネのない場合の式 (5.10) に一致する．

バネの彈性エネルギー W_s は

$$W_s=\tfrac{1}{2}L_sE_s\varepsilon_s^2$$

從つて

$$W_s=2\pi aL(1/2)Et\alpha\cdot\Pi_s \tag{6.6}$$

とおくときは

$$\Pi_s=(L_s/L)(2\pi atE/E_s)q^2 \tag{6.7}$$

によつて與えられ，圓筒の彈性エネルギーは (5.13) 及び (5.15) によつて與えられるから，それ等の和であるところの全體系の彈性變形エネルギーは

$$W''=2\pi aL(1/2)Et\alpha\cdot\Pi'' \tag{6.8}$$

$$\Pi''=\frac{3\pi a}{Lnk}\left[\frac{1}{\eta^2}Q+(Gg_1^2+Hg_2^2)\right]+\left(1+\frac{L_s}{L}\frac{2\pi atE}{E_s}\right)q^2 \tag{6.9}$$

によつて與えられる．即ちバネの變形エネルギーの項 $(L_s/L)(2\pi atE/E_s)q^2$ は L_s が大きく，E_s が小さいほど大きい．

この場合の挫屈は，全般的挫屈において e を一定，局所的挫屈において e' を一定と考えたのと同樣に全體系の縮み $e_t=\mathrm{const}$ の條件の下に考えなければならない．そのためには獨立變數を e_t とする必要があり，(6.4) の q を (6.9) に入れて

$$\Pi''=\frac{3\pi a}{Lnk}\left[\frac{1}{\eta^2}Q'''+(Gg_1^2+Hg_2^2)\right]+\frac{1}{1+\dfrac{L_s}{L}\dfrac{2\pi atE}{E_s}}\left[\left(\frac{L_t}{L}e_t\right)^2-2\frac{L_t}{L}e_t\frac{3\pi a}{Lnk}\frac{k^2}{\eta}\left(\frac{1}{8}g_1^2+\frac{1}{4}g_2^2\right)\right] \tag{6.10}$$

$$Q'''=A'''g_1^4+B'''g_1^2g_2^2+C'''g_2^4-Dg_1^2g_2+Cg_1^2+Fg_2^2 \tag{6.11}$$

$$\left.\begin{aligned} A'''&=A+\frac{3\pi a/(Lnk)}{1+\dfrac{L_s}{L}\dfrac{2\pi akE}{E_s}}\cdot\frac{k^4}{64}\\ B'''&=B+\frac{3\pi a/(Lnk)}{1+\dfrac{L_s}{L}\dfrac{2\pi atE}{E_s}}\cdot\frac{k^4}{16}\\ C'''&=C+\frac{3\pi a/(Lnk)}{1+\dfrac{L_s}{L}\dfrac{2\pi atE}{E_s}}\cdot\frac{k^4}{16}\end{aligned}\right\}\qquad(6.12)$$

を得る．從つて $e_t=\text{const.}$ の條件の下に，n, k を與えれば平衡條件は

$$\partial\Pi''/\partial g_1=0,\qquad \partial\Pi''/\partial g_2=0$$

即ち

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\eta^2}\left[4A'''g_1^2+2B'''g_1^2\rho^2-2Dg_1\rho+2C\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\frac{(L_t/L)e_t}{1+(L_s/L)(2\pi atE/E_s)}\cdot\frac{k^2}{\eta}+2G=0\\&\frac{1}{\eta^2}\left[2B'''g_1^2\rho+4C'''g_1^2\rho^3-Dg_1+2F\rho\right]\\&\quad-\frac{(L_t/L)e_t}{1+(L_s/L)(2\pi atE/E_s)}\cdot\frac{k^2}{\eta}\rho+2H\rho=0\end{aligned}\right\}(6\cdot13)$$

によつて與えられ，これより e_t を消去して(6·12)を用いれば (4.36) 及び(5·20)と全く同じ ρ に關する三次方程式を得る．從つて g_1, η, k, ρ の値は第4節の場合をそのまゝ用うことが出來る．從つて本節の計算過程から q は第 5 節即ち第 4 節の q と全く同じ値を有することが證明出來，エネルギーの計算には (6.10) を用いることなく，第 5 節の結果を基礎として (6.9) を用うのが簡單である．同樣に e_t を計算するには (6.13) による必要がなく，前節の結果から (6.4) によつて計算すればよい．

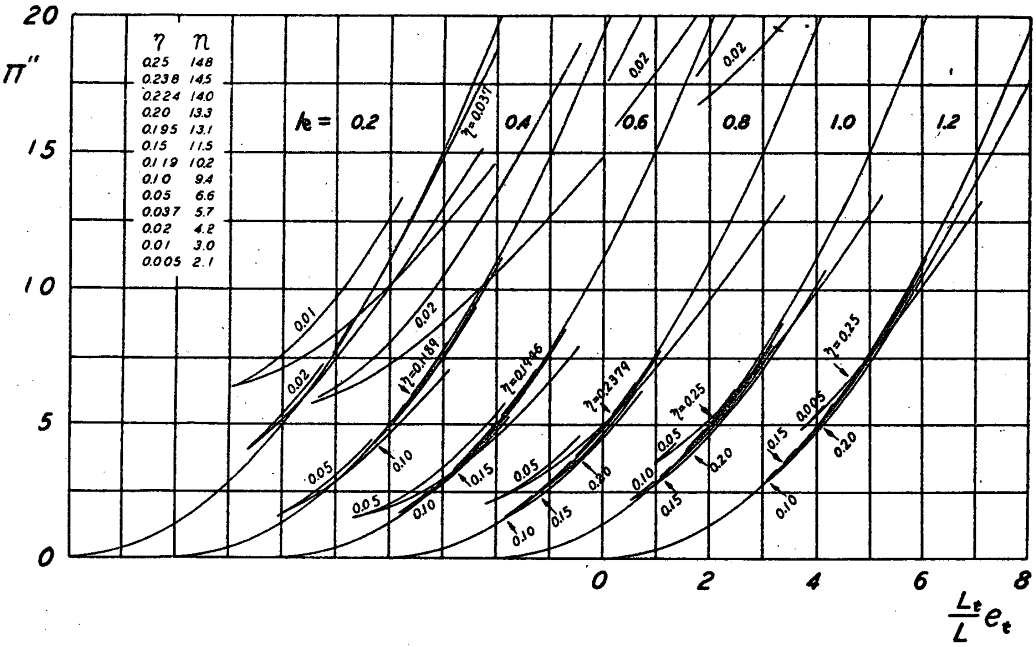
この樣にして前節と同じ圓筒について，實驗 2 及び 3 に用いた二つのバネに對してエネルギー及び縮みの計算を行つた．第 14 圖及び第 15 圖は實驗 2 の $L_s=46\text{mm}$, $E_s=3,680\text{kg}$ なるバネに對する $\Pi''\sim(L_t/L)e_t$ 及び $\Pi''\sim e'$ の關係を，第 16 圖及び第 17 圖は $L_s=43\text{mm}$, $E_s=1,160\text{kg}$ (實驗 3) のバネに對する $\Pi''\sim(L_t/L)e_t$ 及び $\Pi''\sim e'$ の關係を示す．圖の原點より出る拋物線は何れも圓筒が挫屈しないとした場合，即ち g_1, $g_2=0$ に對するエネルギー曲線

$$\left.\begin{aligned}\Pi''&=[1+(L_s/L)2\pi atE/E_s]\,q^2\\(L_t/L)e_t&=[1+(L_s/L)2\pi atE/E_s]\,q\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\Pi''&=[1+(L_s/L)2\pi atE/E_s]\,q^2\\e'&=q\end{aligned}\right\}$$

である．最小挫屈荷重は第 14 圖及び第 16 圖におけるこの拋物線と挫屈後のエネルギー曲線との交點に對する e_t の値 $e_{t,0}$ の k, η に關する極小値 $e_{t,0,\min,\min}$ に對應する e' の値によつて與えられる．

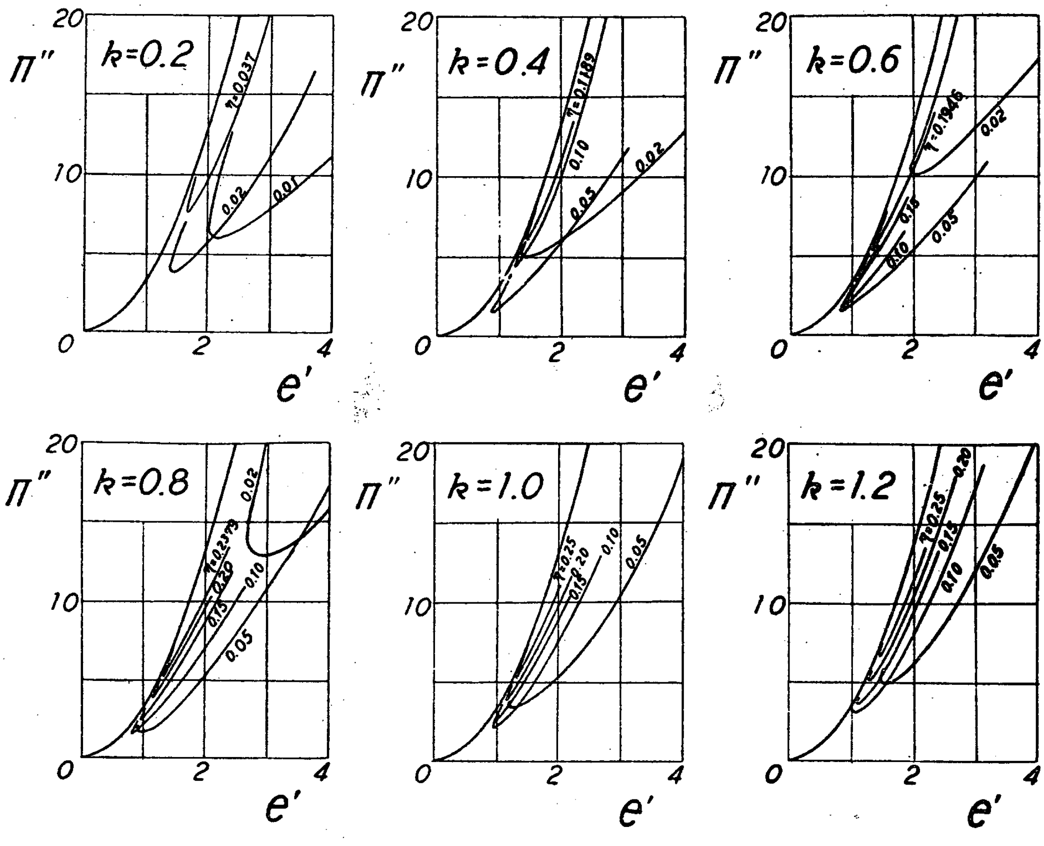
われわれの實驗では挫屈前後における e_t は不變であるから，挫屈荷重及び挫屈後の狀態はこれ



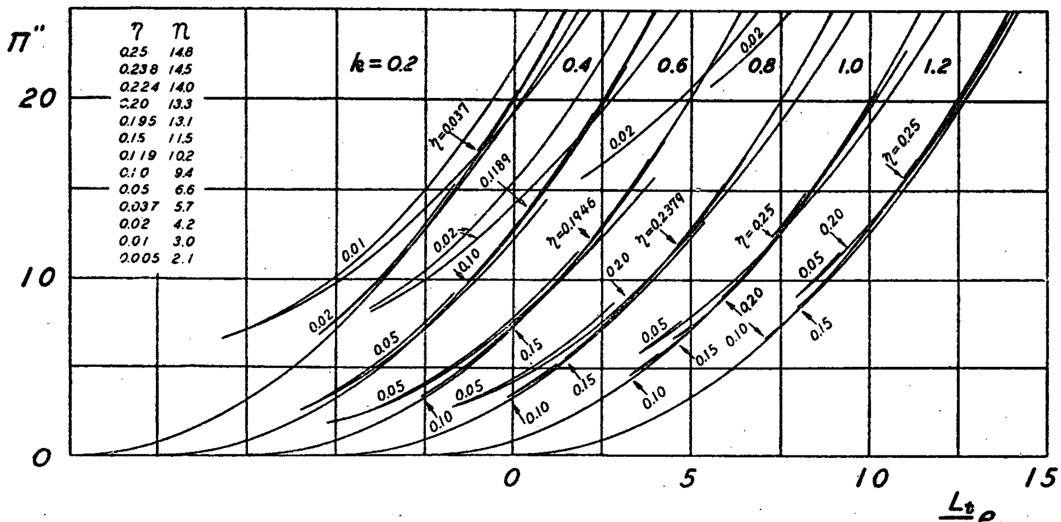
第　14　圖

らのエネルギー線圖を $e_t=\text{const.}$ の下に考えることによつて決定される．即ち第 14 圖或いは第 16 圖において $e_{t,0,\min,\min}$ 以上の e_t の値を考えるならば，それに對する拋物線上の點が定まり，從つて第 15，第 17 圖からそれに對する e' 即ち挫屈荷重 q が定まる．又挫屈後の狀態は與えられた e_t に對して最小のエネルギーを示す樣な k, $\eta(n)$ 及び Π'' の値が第 14，第 16 圖より定まり，それに對する e' の値が第 15，第 17 圖より定まる．從つて圓筒が與えられゝばバネの種類の如何にかゝわらず第 11 圖によつてこの樣にして得られた k, η 及び e' に對する q 即ち挫屈後の荷重が定まる．

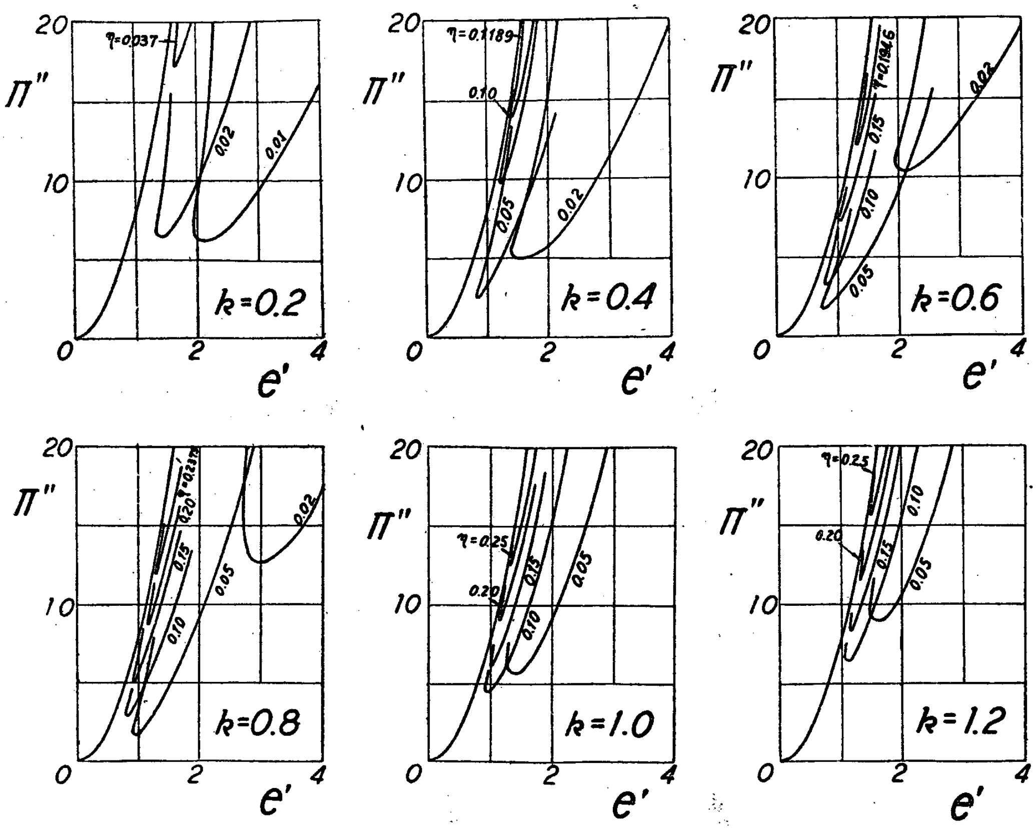
これらの圖から實驗 2 及び 3 のバネの場合に對する最小挫屈荷重及びそれに對するエネルギー障壁並びに挫屈後の諸量を求め，實驗値と比較す



第 15 圖



第 16 圖



第　17　圖

第　1　表

			全般的挫屈	局所的挫屈 實驗 1	バネによる局所的挫屈 實驗 2	バネによる局所的挫屈 實驗 3
最小挫屈荷重 (q)		計算値	1.3	1.04	0.80	0.80
		實驗値		0.8	0.76	0.72
エネルギー障壁 (Π, Π', Π'')			0.14	0.07	0.20	0.10
挫屈後の狀態	荷重 (q)	計算値	0.9	0.7	0.55	0.70
		實驗値		0.4	0.24	0.22
	k	計算値	0.2	0.7	0.75	0.80
		實驗値		0.64～0.68	0.93	0.95
	η (n)	計算値	0.02	0.10(9.4)	0.085(8.6)	0.085(8.6)
		實驗値		6～7	6	5
	e'	計算値			1.0	1.25
		實驗値			3.2	4.4

れば第 1 表の如くである．こゝで挫屈荷重の計算値と實驗値とを比較して見ると，最小挫屈荷重が實驗 2, 3 の場合に等しいにも拘らず實驗の挫屈荷重は實驗 2 より 3 の方が小さい．これはエネルギー障壁が實驗 2 より 3 の方が小さいことによるものと考えられる．又實驗 2 及び 3 の挫屈荷重が實驗 1 の場合より，最小挫屈荷重と同程度に下つていないこともエネルギー障壁に原因をもつものと考えてよいであろう．實際に實驗 2, 3 の場合の挫屈が實驗 1 の場合に比して，最小挫屈荷重をある程度こえた挫屈前後のエネルギーの差の大きいところ，即ちエネルギー障壁としては兩

者相近づいたところでおこることは，前者の場合が後者の場合よりも挫屈に際して發する音の大きいことによつても實證された．これらの結果から挫屈がおこるのは最小挫屈荷重によるよりもむしろエネルギー障壁によることが大きいものと考えられる．尙挫屈後の諸量についても計算値と實驗値の差は大きいが兩者の傾向はほゞ一致していると見てよい．最後に一言注意しておきたいことは，エネルギー～伸び曲線（例えば第 14, 16 圖）における挫屈前後の曲線の交わりが非常な鋭角をなす結果，最小挫屈荷重等の諸量の決定の精度を極めて惡くすることであつて，この傾向はバネの剛性が小さい程强い．從つて第 1 表の計算値は正確なものではなく，大體の傾向を示すものと考えるべきである．

7. 結　　言

圓筒殼の軸壓縮力による挫屈の際の曲面は特殊の展開可能面に極めて近いものであり，從つてその際の變形は概不伸脹有限變形である．結局圓筒殼の挫屈の機構は一種の Durchschlag の現象であるということが出來る．

挫屈前及び後のすべての平衡狀態從つて實際に實現される狀態を決定するものは全ポテンシアル・エネルギー極小の條件ではなく，彈性エネルギー極小の條件である．これは軸方向の縮み一定の條件の下のエネルギー極小を意味し，この現象に對しておかれるべき特別の制限である．この結果挫屈前後のエネルギーの同等の條件によつて定まるところの，理論的限界荷重よりも小さな，最小挫屈荷重と稱する挫屈し得る最小の荷重が存在し，挫屈はそれ以上の荷重においておこり，その際一定のエネルギー障壁をとび越えなければならない．而してこのエネルギー障壁は挫屈荷重の上昇と共に減少する．挫屈荷重は最小挫屈荷重とエネルギー障壁の値とによつて定まるものである．

この樣な點から考えれば，局所的挫屈の場合の最小挫屈荷重及びそれに對するエネルギー障壁は全般的挫屈におけるそれらよりも小さく，局所的挫屈の方がおこり易い．又局所的挫屈においても最小挫屈荷重及びエネルギー障壁は負荷裝置の剛性の減少と共に減少する傾向をもち，實驗結果も挫屈荷重に關する上の考えを實證しているようである．尙挫屈後の狀態もすべて變形エネルギー極小の條件によつて決定されることは勿論であるが，挫屈曲面が展開可能面に近いことから導かれる幾何學的結果もこの現象の理解に役立つものである．

本研究に對して吉識教授より御討議戴いたことを感謝すると共に，實驗，數値計算に示された村田與四郎，阿部愼藏，瀧田巖の諸君の努力を謝する次第である。尙研究費の一部は文部省科學研究費による。

文　　献

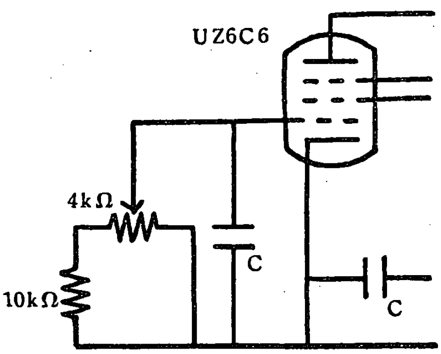
(1) A. Robertson, *Proc. Roy, Soc., London*, **A**, 121 (1928), 558.
(2) E. E. Lundquist, *N. A. C. A. Rep.*, 473,
(3) L. H. Donnell, *Trans. A. S. M. E.* 56, (1934).
(4) Th. v. Kármán and Hsue-Shen Tsien, *Journ. Aeron. Sci.* 7 (1939).
(5) 河野忠義，航空學會誌，8 (1941) 70, 178.
(6) 筆者，東大理工學研究所報告，2 (1948), 12. 3 (1941), 1.

(1951 年 9 月 3 日受理)

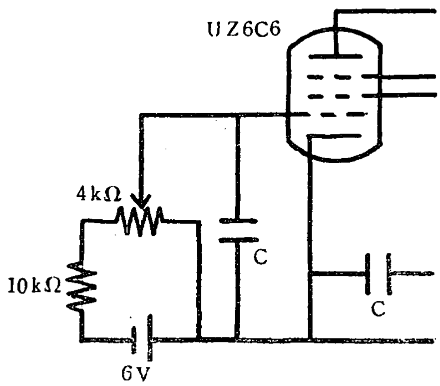
正　　誤

巻	號	頁	左	右	行*	誤	正
4	9～10	243	○		12	（本表 a 圖）第1圖左下部	本表 b圖
4	9～10	243	○		7′	(1) 式右邊第2項 $\frac{\varepsilon_0+1}{\varepsilon_0+2}\cdot(v+\beta)$	$\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0+2}\cdot(v_0+\beta)$
5	1～2	58	○		12	緒む	縮む
5	5	175		○	第9圖	0005 Mg	0.05 Mg
5	5	175		○	第9圖	10 Mg	1.0 Mg
5	5	177		○	28	効果	効果
5	5	185	○		5′	$\cos\mu y$	$\cos 2\mu y$
5	5	187	○		7	Q	Q′
5	6	218	○		31	分解液	分解
5	6	230		○	第1表	Gu 20.22	Cu 20.22

* 行數に ′ を附したものは下より數えたもの。



誤
（a 圖）



正
（b 圖）