

蔓巻ばねを伝わる波動に対する粘性の影響

新澤 順悦, 吉村 慶丸

Effects of Viscosity of Wire on Waves Propagated along Coil Springs.

Jun'etsu NIIZAWA and Yoshimaru YOSHIMURA

ABSTRACT: The effects of the viscosity of the wire of a coil spring, which is not negligible when the spring is made of a twined wire, on the velocities and the amplitudes of both the torsional and extensional waves propagated along the spring are studied analytically. The characteristic behavior of the spring in this case is that the correction for the velocities and the damping coefficients for the two waves have their maximum values near $x=1.8$ and vanish at $x=1$, where $x=\frac{\lambda}{2\pi r}$, λ denoting the wave length, r the radius of the coil. For x smaller than a certain value there exists no oscillatory motion. The damping is larger for the extensional wave than for the torsional wave because bending and torsion of the wire are coupled for the former. The velocity corrections and dampings increase with the ratio of the radius of the wire to that of the coil.

(Received December 12, 1952)

1. はしがき

筆者の一人がさきに発表した“コイルばねを伝わる弾性波”[1]において波の伝播速度が波長のある値で減少することを指摘した。この特典性から類推して、そのばねの内部粘性の影響の仕方も一般の直線状の棒の場合とは異つた形を取るであろうと思われる。単に材料の内部粘性のみであれば、その影響は、従来の研究から、極めて小さいものと考えてよりであろうから、更に検討を必要とする重要な問題ではない。しかし池田氏の“撚り線ばね”[2]のようなものを考えると、更に撚り線を構成する線要素間の乾性摩擦が共存し、その影響は無視するわけには行かなくなる。こゝでは乾性摩擦をも簡単のために速度比例型と仮定して、波長の広い範囲にわたつて粘性の速度えの影響、振巾の減衰率について計算した。

2. 粘性を考慮した曲棒の断面モーメント

ばね線の断面は円形とし、座標軸を断面の主軸に取る。法線の保存に関するベルヌーイの仮定が

成立する程の微小歪を考えると、断面内の任意の点における歪の各成分は次の如く示される。

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= -(\tau_1 - \tau_0)y \\ e_{zy} &= (\tau_1 - \tau_0)x \\ e_{zz} &= (\kappa_1 - \kappa_{10})y - (\kappa_2 - \kappa_{20})x \end{aligned} \right\} (1)$$

κ_{10} , κ_{20} , τ_0 ; κ_1 , κ_2 , τ_1 は夫々断面主軸に関する変形の前における曲率, 撓率. 粘性は速度例型とし、応力の形で

$$C \frac{\partial e}{\partial t}$$

にかく。したがつて変形時における全モーメントは x , y , z 軸について

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \iint y \cdot Z_x dx dy \\ &= EI(\kappa_1 - \kappa_{10}) + C_1 I \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_1 - \kappa_{10}) \\ G_2 &= \iint -x \cdot Z_x dx dy \\ &= EI(\kappa_2 - \kappa_{20}) + C_1 I \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_2 - \kappa_{20}) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$H = \iint (x \cdot Y_z - y \cdot X_z) dx dy$$

$$= 2\mu I(\tau_1 - \tau_0) + 2C_2 I \frac{\partial}{\partial t} (\tau_1 - \tau_0)$$

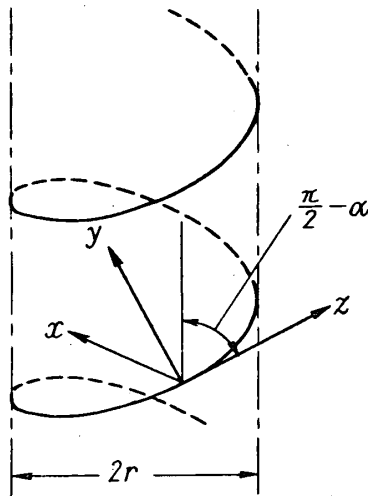
となる。こゝに

C_1, C_2 : 垂直, 切線粘性係数

E, μ : ヤング率, 剛性率

I : 断面の二次モーメント

である。今主軸の 2 軸とばね線の主法線とを一致させると, r をコイルの半径, α をばね線の傾斜角とすると,



第 1 図

$$\kappa_{10} = 0, \quad \kappa_{20} = \kappa_0 = \cos^2 \alpha / r$$

$$\tau_0 = \sin \alpha \cdot \cos \alpha / r$$

とかくことが出来るから, (2) は簡単化され

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= EI\kappa_1 + C_1 I \frac{\partial \kappa_1}{\partial t} \\ G_2 &= EI(\kappa_2 - \kappa_0) + C_1 I \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_2 - \kappa_0) \\ H &= 2\mu I(\tau_1 - \tau_0) + 2C_2 I \frac{\partial}{\partial t} (\tau_1 - \tau_0) \end{aligned} \right\} (2')$$

となる。

3. 運動方程式

筆者の一人がさきに導いた式を使つて回転慣性を省略すると, 運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s} - N_2 \tau_0 + T \kappa_0 &= \rho a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s} + N_1 \tau_0 &= \rho a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T}{\partial s} - N_1 \kappa_0 &= \rho a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial s} - G_2 \tau_0 + H \kappa_0 - N_2 &= 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial s} + G_1 \tau_0 + N_1 &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial s} - G_1 \kappa_0 &= 2\rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (4)$$

によつて与えられる。こゝで N_1, N_2, T : x, y, z 軸に関する断面力の成分, a : ばね線の断面積, ρ : 線密度, 更に曲線の変化を変位成分であらわすと

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_0 \beta - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \tau_0 u \right) \\ &\quad - \tau_0 \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \tau_0 v + \kappa_0 w \right) \\ \kappa_2 &= \kappa_0 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \tau_0 v + \kappa_0 w \right) \\ &\quad - \tau_0 \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \tau_0 u \right) \\ \tau_1 &= \tau_0 + \frac{\partial \beta}{\partial s} + \kappa_0 \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \tau_0 u \right) \end{aligned} \right\} (5)$$

である。こゝに u, v, w : 変位の x, y, z 成分, β : z 軸まわりの捩れ角。(3) の第 1 式を s で微分し, (3) の 3 式, (4) の 1, 2 式を使つて T, N_1, N_2 を消去すると, u, w の満足する運動方程式として,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^3 G_2}{\partial s^3} - 2\tau_0 \frac{\partial^2 G_1}{\partial s^2} + (\tau_0^2 - \kappa_0^2) \frac{\partial^2 G_2}{\partial s^2} \\ - \tau_0 \kappa_0 \frac{\partial H}{\partial s} + \rho a \kappa_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa_0^2 \tau_0 G_1 &= \rho a \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial s} \end{aligned} \right\} (6)$$

を得る。次に (3) の 2 式, (4) の 3 式を使い, 同様に N_1, N_2 を消去すると, v, β の満足する運動方程式として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial s^2} - 2\tau_0 \frac{\partial G_2}{\partial s} + \kappa_0 \frac{\partial H}{\partial s} - \tau_0^2 G_2 &= \rho a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial H}{\partial s} - G_1 \kappa_0 &= 2\rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (7)$$

を得る。

4. 方程式の解

ばねの変形は不伸張変形と考えられるから

$$\frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial w}{\partial s} = u$$

が成立つ。この条件を用い, 各変位成分を

$$\left. \begin{aligned} u &= i(W/\kappa_0)me^{i\theta} \\ v &= Ve^{i\theta} \\ w &= We^{i\theta} \\ \beta &= Be^{i\theta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

の様を仮定することが出来る。ここで $\theta = ms - pt$ である。ばね線の傾斜角が小さい、即ち $m, \kappa_0 \gg \tau_0$ として、微小項を省略すると (2'), (5), (8) 及び (6) から $u-w$ 波に対する特性方程式

$$(m^2 - \kappa_0^2)^2 m^2 EI - p(m^2 - \kappa_0^2)^2 m^2 C_1 I i \\ = \rho a p^2 (m^2 + \kappa_0^2)$$

が得られる。したがってばねを伝わる波の波長を λ とし $x = \lambda/2\pi r = \kappa_0/m$ とおけば

$$\frac{p^2}{m^2} + i \frac{C_1}{\rho} I \frac{m^2}{a^2} \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \frac{p}{m} \\ - \frac{E}{\rho} I \frac{m^2}{a^2} \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} = 0$$

となり、 $n = r/c$ (c : ばね線の半径) とおけば

$$Im^2/a^2 = 1/4n^2x^2$$

とかけるから p/m について解けば

$$\frac{p}{m} = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{\rho} \frac{1}{4n^2x^2} \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} mi \\ \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \frac{E}{\rho} \frac{(1-x^2)^2}{4n^2x^2(1+x^2)} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{C_1}{\rho} \frac{(1-x^2)^2}{4n^2x^2(1+x^2)} m \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

を得る。したがって伝播速度は

$$v_1 = \left[\frac{E}{\rho} \frac{(1-x^2)^2}{4n^2x^2(1+x^2)} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1\right) \quad (10)$$

$$\varepsilon_1/4 \left(\frac{C_1/\rho}{\sqrt{E/\rho}} \kappa_0 \right)^2 = \frac{(1-x^2)^2}{4n^2x^2(1+x^2)} \quad (11)$$

によつて与えられ、 ε_1 は粘性による補正值を表わす。次に $v-\beta$ 波の特性方程式は (2'), (5), (8) 及び (7) から V, B を消去することによつて

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -2\mu Im^2\kappa_0 - EIm^2\kappa_0 \\ &\quad + (2C_2 + C_1)Im^2\rho\kappa_0 i \\ P_2 &= -EIm^4 - 2\mu Im^2\kappa_0^2 + \rho a p^2 \\ &\quad + (C_1 m^2 + 2C_2 \kappa_0^2)m^2 \rho I i \\ Q_1 &= -2\mu Im^2 - E I \kappa_0^2 + 2\rho I p^2 \\ &\quad + (2m^2 C_2 + \kappa_0^2 C_1) \rho I i \\ Q_2 &= -EIm^2\kappa_0 - 2I\mu m^2\kappa_0 \\ &\quad + (2C_2 + C_1)Im^2\kappa_0 \rho i \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{m}\right)^4 + Ai\left(\frac{p}{m}\right)^3 - B\left(\frac{p}{m}\right)^2 \\ - Ci\left(\frac{p}{m}\right) + D = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

こゝで

$$A = \left[\frac{C_1}{\mu} m(1+2n^2x^4) + \frac{C_2}{\mu} m(1+2n^2)x^2 \right] \frac{\mu/\rho}{2n^2x^2}$$

$$B = \left[1+x^2(1+\nu) + \frac{(1+\nu)+x^2}{2n^2x^2} \right] \mu/\rho$$

$$C = \left[\frac{C_1}{2\mu} m(1-x^2)^2 + \frac{C_2}{\mu} m(1-x^2)^2(1+\nu) \right] \frac{\mu/\rho}{2n^2x^2}$$

$$D = (1-x^2)(1+\nu) \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 / 2n^2x^2$$

の如く得られる。

前記論文において (14) の根の内 2 根が大きい根であることが知られているので、大きい根は

$$\left(\frac{p}{m}\right)^2 + Ai\left(\frac{p}{m}\right) - B = 0 \quad (15)$$

小さい根は

$$\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{C}{B}i\left(\frac{p}{m}\right) + \frac{D}{B} = 0 \quad (16)$$

から求められる。(15) より

$$\frac{p}{m} = - \left\{ \frac{C_1}{2\rho} m(1+2n^2x^4) + \frac{C_2}{\rho} m(1+2n^2)x^2 \right\} i/4n^2x^2 \\ \pm \left[\frac{\mu}{\rho} \left\{ 1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2x^2} \right\} \right. \\ \left. - \frac{C_1}{2\rho} m(1+2n^2x^4) + \frac{C_2}{\rho} m(1+2n^2)x^2 \right]^{1/2} / (8n^2x^2)^2 \quad (15')$$

したがって、伝播速度及び粘性による補正值は

$$v_2 = \left[\frac{\mu}{\rho} \left\{ 1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2x^2} \right\} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2\right) \quad (15'')$$

$$\varepsilon_2/4 \left\{ \frac{C_1(1+2n^2x^4) + \frac{C_2}{\rho}(1+2n^2)x^2}{\sqrt{\mu/\rho}} \kappa_0 \right\}^2 \\ = 1/4n^4x^6 \left[1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2x^2} \right] \quad (17)$$

(16) より

$$\frac{p}{m} = - \left\{ \frac{C_1}{2\rho} + \frac{C_2}{\rho}(1+\nu) \right\} m(1+x^2)^2 \\ 4n^2x^2 \left[1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2x^2} \right] \\ \pm \left[\frac{\mu}{\rho} \frac{(1-x^2)^2(1+\nu)}{2n^2x^2 \left\{ 1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2x^2} \right\}} \right]$$

$$-\left[\frac{\left\{ \frac{C_1}{2\rho} + \frac{C_2}{\rho} (1+\nu) \right\} m(1-x^2)^2}{2n^2 x^2 \left[1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2 x^2} \right]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16')$$

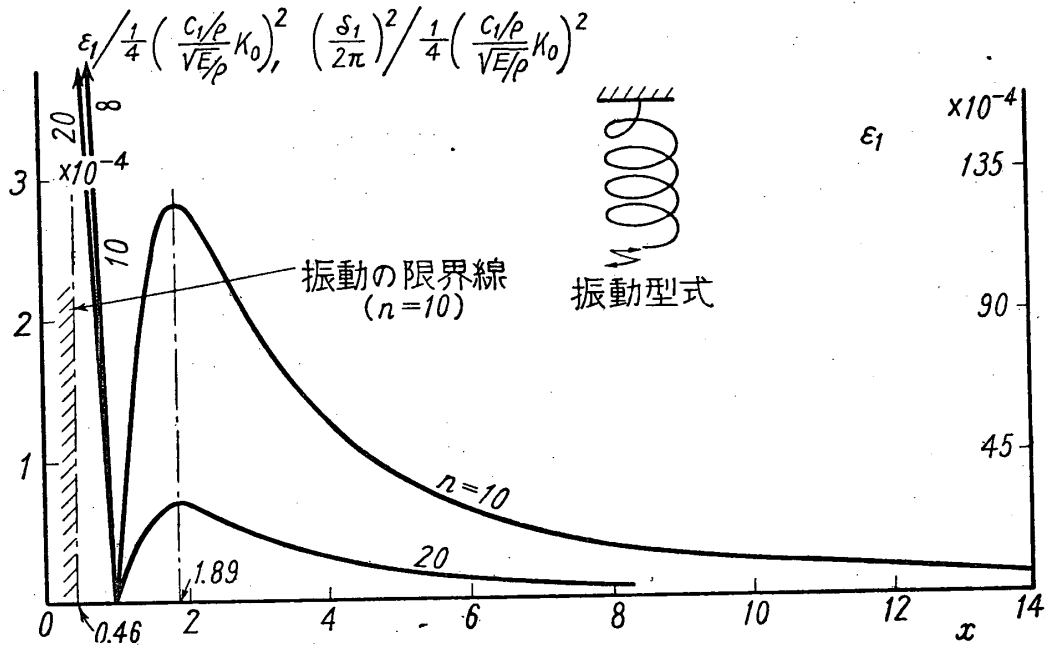
$$\begin{aligned} \varepsilon_3 / \frac{1}{4} \left\{ \frac{C_1}{2\rho(1+\nu)} + \frac{C_2}{\rho} \kappa_0 \right\}^2 \\ = \frac{(1-x^2)^2}{2n^2 x^4 \left[\frac{1}{1+\nu} + x^2 + \frac{1+x^2}{2n^2 x^2} \right]} \end{aligned} \quad (18)$$

したがって

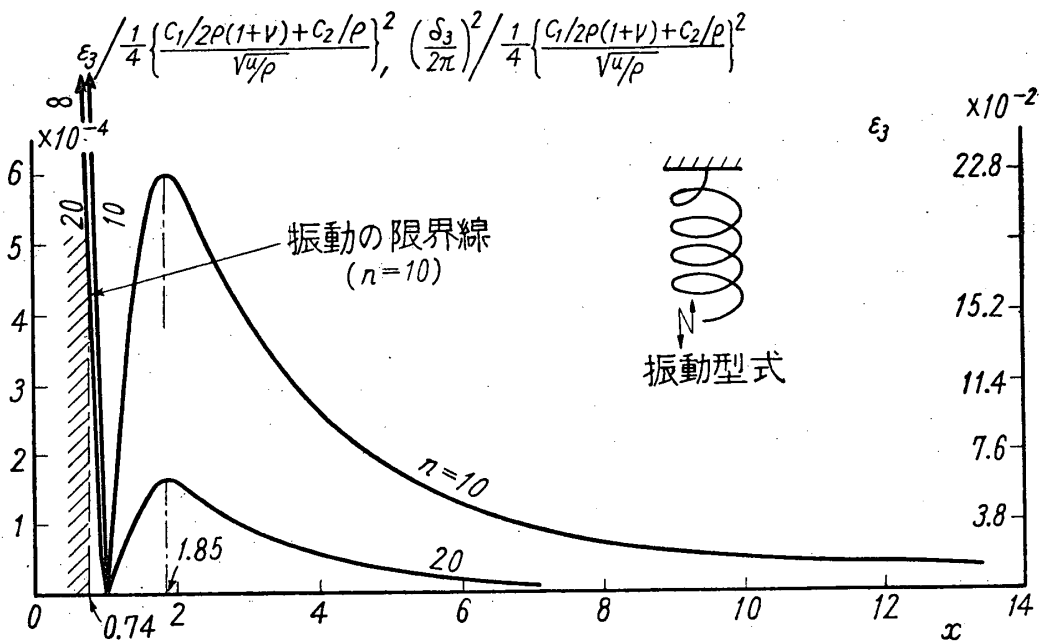
$$v_3 = \left[\frac{\mu}{\rho} \frac{(1-x^2)^2(1+\nu)}{2n^2 x^2 \left\{ 1+x^2(1+\nu) + \frac{1+\nu+x^2}{2n^2 x^2} \right\}} \right]^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2} \varepsilon_3) \quad (16'')$$

が得られる。

ε_3 においては曲げと捩れが聯成するために粘性の影響の形は C_1, C_2 の和となり, $C_1/2(1+\nu), C_2$ は E, μ の関係と同じ形になっている。



第 2 図



第 3 図

5. 速度の補正值及び波動の存在範囲

伝播速度については、前論文においてつくされているので、こゝでは省略するが、 v_2 波は相当に早い波であり、実際的には問題にならないので、以下では v_1 波、即ちばねをその軸のまわりに振るときに発生する波（ばね線については横波）と、 v_3 波、即ちばねを軸方向に伸縮させるときに発生する波（ばね線については横波と振り波の聯成波）とについてのみ考えることにする。これらの波に対する粘性の補正值 $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ を波の波長 x に対して示すと第 2, 3 図の如くなる。 C_1, C_2 の値については大部論議があり、本田博士 [3] は $C_1=5 \times 10^8, C_2=8 \times 10^8$ (C.G.S) を出しておられ、未広博士 [4] は $C_1=5 \times 10^5$ である可きことを主張しておられる。こゝでは前に述べたように撚り線ばねを主眼とするから、 C_1, C_2 の絶対値についての論議は別とし、波長 x に対しての $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の定性的な内容丈に言及することにし、縦軸には

$$\varepsilon_1 / \frac{1}{4} \left(\frac{C_1/\rho}{\sqrt{E/\rho}} \kappa_0 \right)^2, \quad \varepsilon_3 / \frac{1}{4} \left\{ \frac{C_1/2\rho(1+\nu)+C_2/\rho}{\sqrt{\mu/\rho}} \right\}$$

をとつた。試みに $C_1=5 \times 10^8, C_2=8 \times 10^8, E=2 \times 10^{12}, \rho=7.85$ にとつたときの $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ の絶対値が右側の縦軸に記入してある。こゝで $\kappa_0=1/10 \text{ cm}^{-1}$ である。

普通に機械的に発生する波は $x \cong 6$ 以上の大きい所であり、その範囲では x に関して漸減的に減少するにすぎない。機械の高速化と共に x の小さい所も実現は可能であり、その範囲では特長ある変化を示し、 $x \cong 2$ 附近で急に増加し、 ε_1 では $x=1.89, \varepsilon_2$ では $x=1.85$ で夫々最大の値を示す。それを越えると $x=1.0$ での 0 の値まで急減し、即ち $x=1.0$ では補正值は 0 となる。伝播速度についても云えることであるが、これはピッチ 0 と考えた結果によるので、傾斜を考慮すれば有限の値をもつことは予想される。次に $x=1.0$ 以下では ∞ まで急激に増加するのであるが、内部粘性の存在のために周期的振動の存在範囲に制限をうけるようになる。次にその限界を求めてみる。

v_1 波の存在に対する条件は (9) より

$$2\pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left[\frac{(1-x^2)^2}{4n^2x^4(1+x^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \kappa_0 > \frac{C_1\pi}{E} \quad (19)$$

となる。左辺は粘性のない場合の振動の周期を表わし、これを T_{v1} とすると

$$T_{v1} > \frac{C_1\pi}{E} \cong 1/1200$$

とかくことが出来る。 v_3 波に対しては、その周期を T_{v3} とすれば同様に

$$T_{v3} > \left[\frac{C_1}{2(1+\nu)} + C_2 \right] \pi / \mu \cong 1/255$$

が得られる。即ち粘性を考えない場合における 1200, 255 サイクル以上の振動が周期性を失うことになる。これに対応する x の値を $n=10$ の場合で夫々求めると 0.46, 0.74。即ち $n=10, \kappa_0=1/10 \text{ cm}^{-1}$ なるばねについては $x=0.46, 0.74$ 以下の波長では振動しない。この限界線が第 2, 3 図に示してある。 $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ について絶対値を比較すると、 ε_3 の方が 1 次丈大きい。各々について n が大きい程小さい補正でよいことが図で分かる。

6. 減衰率

一般に $p = -\zeta m^2 i \pm \eta m$ の形にかける。

$S=0$ での振巾に着目すると一般に振巾は

$$w = W e^{-m^2 \zeta t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} m \eta t \quad (20)$$

の形にかける。したがって対数減衰率は

$$\delta_i = m^2 \zeta T_{vi}$$

によつて与えられ、 v_1 波については

$$\delta_1 / \pi \frac{C_1/\rho}{\sqrt{E/\rho}} \kappa_0 = \left[\frac{(1-x^2)}{4n^2x^4(1+x^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

v_3 波については

$$\begin{aligned} & \delta_3 / \pi \frac{\left\{ \frac{C_1}{2\rho(1+\nu)} + \frac{C_2}{\rho} \right\}}{\sqrt{\mu/\rho}} \kappa_0 \\ &= \left[\frac{(1-x^2)^2}{2n^2x^4 \left\{ \frac{1}{1+\nu} x + x^2 + \frac{1}{2n^2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+\nu} \right) \right\}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22) \end{aligned}$$

となる。こゝで周期には粘性の影響は除外してある。これと $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ との間に

$$\delta_i = 2\pi \sqrt{\varepsilon_i}$$

なる関係があるから、縦軸を

$$\left(\frac{\delta_i}{2\pi} \right)^2 / \frac{1}{4} \left(\frac{C_1/\rho}{\sqrt{E/\rho}} \kappa_0 \right)^2,$$

$$\left(\frac{\delta_3}{2\pi} \right)^2 / \frac{1}{4} \left\{ \frac{C_1}{2\rho(1+\nu)} + \frac{C_2}{\rho} \right\} \kappa_0$$

にとれば $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ の場合と全く同じになる。した

がつて δ_1 , δ_3 については第 2, 3 図で考えればよい。この場合でも $x=1.0$ で δ_1 , $\delta_3=0$ となるから減衰の殆んど効かなくなるような波長が存在する。

7. 結 語

粘性係数はこゝでは“撚り線ばね”を主眼とするから乾性摩擦を含めて解釋しており、その限りにおいては速度えの影響も増大するであろうことが考えられる。この場合の特長は、速度の補正值及び振幅の減衰率が、コイルの周の約 2 倍の波長において最大値を示し、波長がコイルの周と略々等しいところで最小値を示し、極めて小さい値を有することである。而して更に波長が短くな

ると周期的波動の存在しない範囲が存在する。尙ばねの振りによつて生ずる波は単独であるが、伸縮によつて生ずる波はばね線の曲げと振りが連成する結果、粘性係数は垂直及び切線方向の係数の和の形で入り、減衰を早める結果となつている。又速度の補正值も減衰率もばね線の径がコイルの径に比して大きい程増大する。

文 献

- [1] 吉村, 村田; 理工研報告 第 6 卷, 第 1 号
- [2] 池田 ; 機械学会論文集第 15 卷, 51 号
- [3] 本田 ; 理化研彙報 第 2 卷, 第 3 報
- [4] 末広恭二論文集

(1952 年 12 月 12 日受理)