

粘性流体の遅い流れに対する一つの近似解法

III. 補遺と訂正

川口 光年

(1954年2月9日受理)

An Approximate Solution to the Viscous Flow at Low Speeds.

III. Supplementary Note and Errata.

Mitutosi KAWAGUTI

(Received February 9, 1954)

ABSTRACT: In parts I, II of the author's previous paper which deals with the viscous flow past a circular cylinder and a sphere by means of the Galerkin method, there was some arbitrariness in determination of the pressure at infinity p_∞ . In this note, we define p_∞ as the pressure at infinity upstream, and recalculate the pressure distribution over the surface of the circular cylinder and sphere.

Further discussion is also given concerning the discrepancy between the results obtained by the use of the Galerkin method and the experimental ones as the Reynolds number approaches the critical Reynolds number (which is defined as the Reynolds number above which no steady flow takes place experimentally).

§ 1. はしがき

著者は前報告 [1], [2], (今後 I, II と記す) において, 円柱及び球を過ぎる粘性流体の遅い流れのばあいに線型化しない Navier-Stokes の方程式を Galerkin の方法で取扱い, Stokes や Oseen の線型化の近似がなりたたなくなるような Reynolds 数領域において, かなり実験と一致する解を得た. しかしその後の考察によつて, 前論文の圧力の計算の所で, 基準とする無限遠の圧力 p_∞ のとり方に幾分あいまいな点があることがわかつた. 又当時の議論中不明であつた点が, その後の研究 [3], [4], [5] によつて, 幾分明らかになつた点もある. この報告では I, II の補遺として以上の点を述べる.

尙最後に I, II の印刷の誤りも同時に訂正しておく.

§ 2. 圧力分布の計算

(a) まず円柱のばあいを考える. (II. §.4 (a) 参照)

円柱表面の圧力 $[p]_{r=1}$ を計算するのに基礎となる式は運動方程式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \nu \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) - \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right) \quad (2.2)$$

である. しかし I. で求めた解は近似解であるのでこの2つの式を同時に満足するように圧力 p を求めることは不可能である. I. では (2.2) を表

面上で積分して、表面上の圧力 p を

$$[p]_{r=1} = c_1 \cos \theta + c_2 \cos 2\theta + \text{const.} \quad (2.3)$$

(但し c_1, c_2 は R の函数) の形に求め、この const. (R にはよる) が、(2.1) を r について $r=1$ から $r=\infty$ まで積分したときの θ によらない項に等しいと考えた。しかしこの定め方では、基準にとる無限遠の圧力 p_∞ が実際にどこかの点の圧力かという点にいく分のあいまいさがある。このあいまいさをなくする為に、本報告では圧力の基準にとる点として流れの無限遠前方をとり、(2.1) により $\theta=\pi$ の線上を $r=\infty$ から $r=1$ まで積分し、次に (2.2) により $r=1$ の円周上を π から θ まで積分することによつて、円柱表面上の圧力を求めた。これは円柱の存在の影響の少ない無限遠上流がもつとも適当な基準点のとり方と考えられたからである。このばあい圧力の計算は次のようになる。

無限の上流 ($\theta=\pi, r \rightarrow \infty$) での圧力を p_∞ とする。まず円柱上流端 ($\theta=\pi, r=1$) における圧力 p_0 を求める。それには (2.1) を使う。積分の結果として

$$\frac{1}{\rho}(p_0 - p_\infty) = \frac{1}{2} + \nu \left(\frac{208}{105} + \frac{184}{945} A_1 \right) \quad (2.4)$$

を得る。

次に p_0 を基準にして円柱表面上の圧力を求める。(2.2) を θ から π まで積分すると

$$\frac{1}{\rho}([p]_{r=1} - p_0) = -\nu \left\{ \left(80 + \frac{248}{9} A_1 \right) (\cos \theta + 1) + \frac{40}{3} B_0 (\cos 2\theta - 1) \right\} \quad (2.5)$$

を得る。(但し (2.4), (2.5) 式の A_1, B_0 は I. の第1表で与えられるような R の函数である。) 従つて表面上の圧力係数は (2.4), (2.5) から

$$C_p = \left[\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right]_{r=1} = 1 + \frac{1}{R} \left(\frac{832}{105} + \frac{736}{945} A_1 \right) - \frac{1}{R} \left\{ \left(320 + \frac{992}{9} A_1 \right) (\cos \theta + 1) + \frac{160}{3} B_0 (\cos 2\theta - 1) \right\} \quad (2.6)$$

のようになる。

このように圧力の基準点のとり方を変えても抵抗には全然変化のないことは明らかである。

(2.6) 式で $R=20$ のばあいの A_1, B_0 の値を入れると、

$$C_p = -1.1320 \cos \theta + 1.5944 \cos 2\theta - 1.4397 \quad (2.7)$$

となり、これは I. の計算方法より定数 (1.2487) だけ小さいという結果になる。第1図にこの結果を完全流体の理論値及び実験値と比較してある。

(I. 第3図参照)

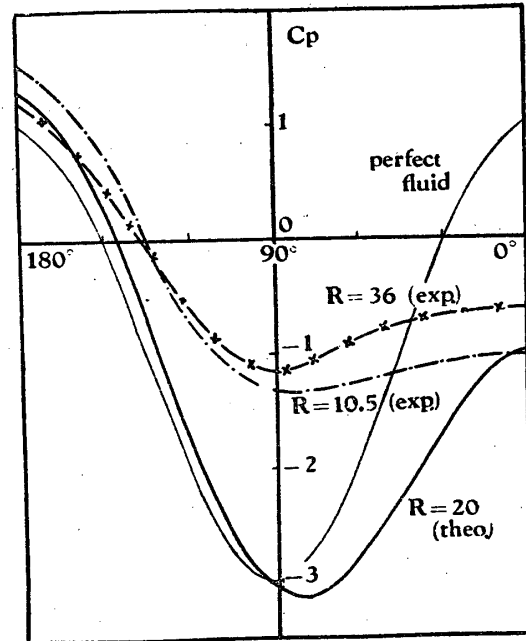


Fig. 1. Pressure distribution over the surface of a circular cylinder.

(b) 球のばあい (II. § 5.1 参照)

このばあいも全く同様に、 p_∞ として無限の上流 ($\theta=\pi, r \rightarrow \infty$) の圧力をとると圧力係数は

$$C_p = 1 + \frac{1}{R} \frac{2064 + 72 A_1}{203} - \frac{1}{R} \left\{ \frac{2400 + 456 A_1}{29} (\cos \theta + 1) + \frac{14}{3} B_1 (\cos 2\theta - 1) \right\} \quad (2.8)$$

となる。(但し A_1, B_1 は II. 第2表で与えられる R の函数である)。これを Reynolds 数が 10, 20, 40, 60 のばあいについて求め、第2図に示す。(II. 第3図参照) 又 II. の第2表の圧力係数の段では、定数項を省いてあるがこれは次のようになる。

R	10	20	40	60	80
圧力係数の定数項	.1930	.3313	.3458	.3025	.2358

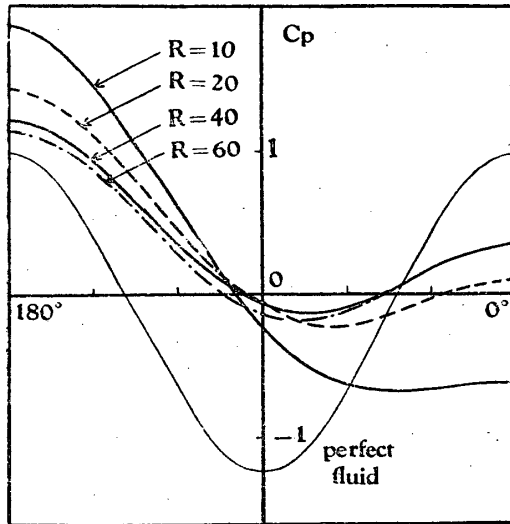


Fig. 2. Pressure distribution over the surface of a sphere.

§ 3. 議論の補遺

Reynolds 数が大きくなつたばあい、Galerkin 法による近似解が実験値から離れてゆく原因として、II. § 5.2 では

(a) R が大きくなると流れは複雑になり、この程度の近似では十分表わせないこと。

(b) 最早定常な解が最も安定な解でなく、時間的に振動するような解の方が抵抗少く安定であること。

の2つの可能性を述べている。しかしその後の研究 [4], [5] により Reynolds 数がいくら大きくなつても、Navier-Stokes の方程式の解は定常解として存在し、しかも実験的に定常な流れが得られる Reynolds 数範囲では、実際の流れをよく表わすことが明らかになつたので、この原因は (a) であるように思われる。

又 I. II. の結果によれば、同じ程度の Reynolds 数に対し同様な Galerkin の近似方法を用いながら、円柱のばあいは実験値とかなり離れた抵抗係数を与えるのに、球のばあいには極めてよい結果を与えるが、この原因として § 5.2 では

(a) 無限遠での流速が同じであつても、最高速度は円柱のばあいの方が大きく、又圧力係数の変化も大きいので、円柱のばあいの方が小さい Reynolds 数で安定でなくなること。

(b) 円柱のばあいの実験では、端の補正が必要であり、実験値も数が少く、実験値そのものにある程度の不正確がありうること。

の2つを挙げている。しかしその後、Navier-Stokes 方程式を数値的に積分した結果、[3], [4], 球、円柱いずれのばあいも実験と理論との一致は極めて良好であつたので、(b) を原因と考えることはできない。又 (a) は事実ではあるが、円柱のばあいに実験的に定常な流れが存在する Reynolds 数でも実験と理論が一致しないことを説明することはできない。円柱を過ぎる流れの方が球を過ぎる流れよりも速度、圧力等の変動が大きく、同程度の近似では球のばあいの方が円柱のばあいより近似がよい為であろうと思われる。

§ 4. I. II. の印刷の誤りの訂正

頁	段	行	誤	正
33	右	2	$\alpha=2\alpha$	$(d=2a)$
33	右	(3.1)	A_n	A_{mn}
34	左	6	$(-r \theta + \pi)$	$(-r, \theta + \pi)$
34	左	(4.6)	$\int_1^\infty \int_0^{2\pi}$	$\int_1^\infty \int_0^{2\pi}$
34	左	(4.8)	$A_7 = -1 + \dots$	$A_7 = -1 - \dots$
34	右	(4.6')	$+0.0444A_1^2$	$+0.0444A_1^2$
34	右	(4.11)	$-[p_r]_{r-1} \sin\theta$	$-[p_{0r}]_{r-1} \sin\theta$
34	右	(4.11)	$\left\{ \left[\frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r-1} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \right]_{r-1} \right\}$	$\left\{ \left[\frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r-1} + \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \right]_{r-1} \right\}$
34	右	(4.13)	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} =$	$\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} =$
35	左	(4.14)	$[p]_{r-1}$	$[p]_{r-1}$
35	左	18	$[p]_{r-1}$	$[p]_{r-1}$
35	左	12'	$=S, 10,$	$=5, 10,$
35	右	4	$[\omega]_{r-1}$	$[\omega]_{r-1}$
67	左	(2.4)	$\omega=0;$	$\omega=0; (\text{仮定})$
67	右	(4.1)	A_n/r^n	A_{mn}/r^n
67	第1表	3'	$-\frac{3}{2} + 9x^2 + \frac{15}{2}x^4$	$-\frac{3}{2} + 9x^2 - \frac{15}{2}x^4$
69	左	3'	$\rho U^2]_{r-1}$	$\rho U^2]_{r-1}$
69	左	図	第2図	第3図
69	右	図	第3図	第2図
70	右	14'	$[\zeta]_{r-1}$	$[\zeta]_{r-1}$

但しダッシュをつけた行数は下から数えたものである。

文 献

- (1) 川口光年; 理工研報告, 2 (1948) 33-37
- (2) 川口光年; 理工研報告, 2 (1948) 66-71
- (3) 川口光年; 理工研報告, 4 (1950) 154-158
- (4) Kawaguti M.; J. Phys. Soc. Japan, 8 (1953) 747-757
- (5) Kawaguti M.; J. Phys. Soc. Japan, 8 (1953) 403-406