

皮の固有振動の近くで振動を起してしまふ。この偽の固有振動を區別するには、砂圖形が鮮明でないか、又は裏皮をゴムで強く押へて、減衰を大きくすれば、砂圖形がくづれてくるので大體の見當はつくが、區別の困難なものは、(9)式の示す直線にのるかからないかで判断することが出来る。

22枚の膜の張力比をみると、最小0.36から最大は1.23まであつてまちまちであるが、1以上のものは比較的少く、0.6乃至0.7のものが多い。表皮と裏皮との間にも目立つた関係はない。之は實際皮を張る場合皮の厚みの分布に應じて、つまり抗張力に應じて張るので、縦方向に強い皮ならば、縦に強く張るといふやうに、皮本位であつて、音響的考慮は拂はれてゐないためである。

従つて犬皮の場合には、犬の體のあらゆる部分の皮を利用するため、張力の強い方向は一定せず、猫皮の場合には、猫の胸の乳のある部分を中央にして用ひるので、縦方向中央に強い纖維があり、すべて縦方向に強く、0.3乃至0.6の張力比になつてゐる。

音響的にどの位がよいか未だたしかめてない。之は駒の作用と密接な関係があり、今後の研究に讓るが、多年の経験から舞臺用三味線には必ず猫の胸皮を用ひてゐる點を考へると、音響的な意味がある様に思へる。

尚、基本振動其他、共鳴が鈍く、砂圖形の方法で共鳴點が決定し難いものは、(9)式の示すグラフの直線から振動数を推定した。第1表中括弧をつけたものがそれである。(實測し得たものを同じく計算値と比較するには同じ値を得る。)

又、 ρ がわかれば(10)式及び(11)式から實際の張

第2表 張力と密度の値の例

番 號	$S_x(10^6 \text{ dynes/cm})$	$S_y(//)$	$\rho(10^{-2} \text{ g/cm}^2)$	
I	a	4.2	6.0	2.3
	b	9.0	7.8	2.9
II	a	2.7	3.0	1.6
	b	3.4	6.1	3.0

力が計算される。幸か不幸か三味線Iは事故のため又三味線IIは梅雨期に油断したために、皮をとめてある糊がはがれて、實際の面密度を知ることが出来た。一例として面密度と張力を第2表に示す。

5. 要 約

得られた結果をまとめてみると次の通りである。

- 1) 三味線の胴は大體矩形膜と考へて差支へない。
- 2) 振動スペクトラムはなだらかな山を示し、減衰が非常に大きいことを示してゐる。半減期で表はして1/100秒程度と考へられる。(減衰について詳細は後報の豫定)又聯成振動其の他のためにスペクトルのみから一枚の皮の固有振動数を決定することは出来ない。
- 3) 膜の基本振動数は、絃の基本振動数に比較すると約2.5乃至3オクターブ高くなつてゐる。ヴァイオリン族等では胴と絃の基本振動数が大體近くなるやうに製作するものであるから、この事は三味線のもつ著しい特徴の一つと言へる。減衰の大きいことと考へ合せると、三味線はむしろ打楽器に近い性質をもつてゐることになる。これは三味線の音色を決定する重要な事である。
- 4) 11ケの三味線を比較するに、基本振動数は590サイクルから960サイクルまで色々である。之は抗張力の許す限り高い方が良いとされてゐる。
- 5) 横と縦の張力比は0.36から1.23まで色々であるが舞臺用の猫皮三味線では大體0.3乃至0.6になつてゐる。つまり縦方向が横方向より2倍乃至3倍強くなつてゐる。

終りに、御指導を賜はつた佐藤孝二教授に御禮申上げると共に、長唄の今藤長十郎氏、並に三絃師石村榮次郎氏の全面的御援助に對して感謝の意を表する。

文 獻

- (1) J. Obata and Y. Ozawa, Phys. Math. Soc. Japan., Proc. 13. (1931) 1. 其他.
- (2) 小橋豊. 日本數學物理學會誌. 16卷2號(昭和17, 5月) 94頁.

プンクタール・レンズの形を決める方程式について

三 宅 和 夫

(1948年4月14日受理)

1. 緒 言

掛眼鏡レンズに於ては、非點收差を除くやうにその

形を決めることが行はれる。プンクタール・レンズとはツアイズの特許になつてゐる掛眼鏡レンズの商品名

で、無限遠の物點に對して非點收差を除くやうに設計されてゐる。ツアイはその設計の詳細を發表して居らず、僅かに O. Henker; Einführung in die Brillen-Lehre (1928) によつて多少その片鱗をうかがひ得るに過ぎない。

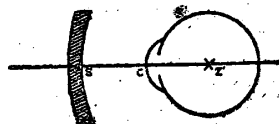
このレンズの形を收差論の應用として解析的に求めることを Southall¹⁾ が試みた。その方法は Seidel の收差式に於て非點收差を與へる係数を零ならしめるといふ條件から出發する。これは Zinken-Sommer の式から出發しても同じ結果に達する。

Southall は 1921 年の論文に於ては五次方程式を與へ、1926 年の論文に於ては七次方程式を與へてゐる。前者に於ては眼の廻轉中心であるべき射出瞳の位置がレンズの形を決めた後に定まつて来るやうな取扱ひをして居る。後者に於ては射出瞳の位置を與へてレンズの形を決めるやうに、問題を取扱つてゐるが、途中の計算に誤りがある。本論文に於ては、後者の誤りを正し、結果を二、三の實際的な場合につき検討して見た。

2. 計 算

眼の廻轉中心 Z' は角膜の前面の頂點 C から眼の視軸上 12~15 耗のところにある。通常 $CZ' = 13$ 耗にとる。眼鏡レンズの後側頂點 S から角膜の前面頂點 C までの距離は 12 耗にとる。従つて $SZ' = 25$ 耗にとる。(第1圖参照)

有效絞りの位置としては、實際の絞りである虹彩の位置よりも、廻轉の中心 Z' をとることによ



第 1 圖

り、眼球の廻轉の影響を考慮に入れる。

眼鏡の硝子の屈折率 n 、前面の曲率半徑を r_1 、後面の曲率半徑を r_2 とし、レンズの頂點から光の進む方向に中心のある場合を正とする。レンズの厚さ d 、 $d = nc$ とする。

$$F_1 = \frac{n-1}{r_1}, \quad F_2 = \frac{1-n}{r_2}, \quad F = F_1 + F_2 - cF_1F_2$$

にて與へられる F_1, F_2, F を第一、第二面及びレンズの屈折力と呼ぶ。長さに関する量をメートルにて測れば、これらの量の單位は dioptré である。レンズの後側の頂點から後側焦點までの距離、即ち back focus の逆數 V を頂點ディオプトリーと言ひ、眼鏡光學に於ては焦點距離 f の逆數である屈折力 F よりも重要な意味を持つてゐる。それらの間には

$$F = V(1 - cF_1) \tag{1}$$

なる關係がある*
收差論によれば²⁾

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_s} \right) = 2n_1C \tag{2}$$

である。こゝに ρ_i, ρ_s は子午的及び球缺的像面の曲率半徑をあらはす。非點收差が無いためには $\rho_i = \rho_s$ 、即ち $C=0$ であればよい。 C の形は³⁾

$$C = \frac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 P_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1}s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \tag{3}$$

である。故に $C=0$ は

$$P_1^2 \left(\Delta \frac{1}{ns} \right)_1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \left(\frac{H_2}{H_1} \right)^2 P_2^2 \left(\Delta \frac{1}{ns} \right)_2 = 0 \tag{4}$$

となる。この式の各項を夫々計算すると下の如くなる。この際ブクタル・レンズは無限遠の物點に對して非點收差が除かれるのであるから、 $s_i = -\infty$ ととる。また $\frac{1}{SZ'} = Z'$ と表はす。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{F_1}{n-1} - \frac{(1-cF_1)^2(Z'-V)}{1+c(1-cF_1)(Z'-V)} \\ P_2 &= \frac{1}{1-n} \frac{V(1-cF_1) - F_1}{1-cF_1} - Z' \\ \left(\Delta \frac{1}{ns} \right)_1 &= \frac{F_1}{n^2} \\ \left(\Delta \frac{1}{ns} \right)_2 &= \frac{V(1-cF_1) - F_1}{1-cF_1} \\ &\quad + \frac{n^2-1}{n^2} \frac{F_1}{1-cF_1} \\ \frac{h_2}{h_1} &= 1-cF_1 \\ \frac{H_2}{H_1} &= \frac{1-cF_1}{1+c(1-cF_1)(Z'-V)} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

3. 計算の結果

これらを(4)に入れて計算した結果は

$$KF_1^5 + LF_1^4 + MF_1^3 + NF_1^2 + PF_1 + Q = 0 \tag{6}$$

$$\left. \begin{aligned} K &= n^2(Z'-V)^2c^4 \\ L &= n^2V\{V+(n-1)Z'\}^2c^4 + \{[(2n^2+1)V \\ &\quad + (n-1)Z']\{V+(n-1)Z'\} \\ &\quad - 2n(2n-1)(Z'-V)^2\}c^3 + \{[(n^2+2) \\ &\quad V+2(n-1)Z']-2n(Z'-V)\}c^2 + c \\ M &= -4n^2V\{V+(n-1)Z'\}^2c^3 - [3\{(2n^2 \\ &\quad +1)V+(n-1)Z'\}\{V+(n-1)Z'\} \\ &\quad - (6n^2-6n+1)(Z'-V)^2\}c^2 - [2\{(n^2 \\ &\quad +2)V+2(n-1)Z'\}-2(2n-1)(Z' \\ &\quad -V)\}c \\ N &= 6n^2V\{V+(n-1)Z'\}^2c^2 + [3\{(2n^2 \\ &\quad +1)V+(n-1)Z'\}\{V+(n-1)Z'\} \\ &\quad - 2(n-1)(2n-1)(Z'-V)^2\}c + n(n \\ &\quad +2)V \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

$$P = -4n^2V \{V + (n-1)Z'\}^2 c - n \{ (n+2)V + 2(n^2-1)Z' \} V$$

$$Q = n^2V \{V + (n-1)Z'\}^2$$

(7) に於ては計算に便利なやうに、共通因数は括弧を解かずその儘にしてある。Southall は (6) を導く途中の計算に於て誤りを犯し、前述の如く七次方程式を興へた。(6) 及 (7) は (1) の關係を用ひて變形すると計算の結果小穴教授⁽⁴⁾ が F を用ひて導いた相當する式と一致することを確かめた。(6) により、 n, c, V, Z' が興へられた時、非點收差を零ならしめる F_1 を求めることが出来る。

4. 結果の検討

レンズの厚さを無視した場合には、 $c=0, V=F$ となり、

$K=L=M=0, N_0=n(n+2)V, P_0=-n\{(n+2)V+2(n^2-1)Z'\}V, Q_0=n^2\{(n-1)Z'+V\}^2V$ であるから、(6) は

$$\alpha F_1^2 + \beta F_1 + \gamma = 0 \quad (8)$$

但し $\alpha=n+2, \beta=-\{(n+2)V+2(n^2-1)Z'\}, \gamma=n\{(n-1)Z'+V\}^2$, なる二次方程式となる。これは V, F_1 を座標として表はせば、よく知られた Tscherning の楕圓となる。

實際眼鏡を設計するには、(8) を解いて得た値から三角追跡により光軸と $28\sim 30^\circ$ の傾きをなす光線に對して、非點收差が零となる様に F_1 を修正して行く。(8) は厚さを無視した式であるから、厚さが極めて大なる場合及び厚さの影響が大なる場合には近似が悪いと考へられる。

次に二、三の場合について $n=1.52, Z'=40$ dioptre

として、(8) の二次式を解いて得た値、(6) の五次式を解いて得た値、三角追跡によつて得られた値を比較して表に示した。厚さは實際に使用されてゐる程度に適宜選んだ。

Southall は七次方程式を解いて得られた値は、 28° の傾きをなす光線に對し相當非點收差が残つてゐるから、七次方程式を解く如き面倒なことをやつてもそれ程効果がないと結論してゐる。

(6) の方程式を解いて得る値は、 V が正の範圍では (8) の二次式を解いて得た値と、三角追跡により求めた値との中間に来る。 V が負の範圍では、これら二つの値の外にある。この様に三角追跡による値との間に少しの開きがあるのは (6) は Seidel の收差式を出発點とし Seidel の領域に於て非點收差を除くこと、即ち (2) から分る様に、子午的像面と球缺的像面が光軸上相接する點に於ける像面の曲率を等しからしめることを目的としてゐる。これに對して三角追跡に於ては 30° の傾きをなす光線に對して非點收差を零ならしめる様に F_1 を求めてゐる。

5. 結 語

ブクタルレンズの形を解析的に求める方式として、1926年の論文に於て Southall が興へた七次方程式は誤りである。これを正して (6) の五次方程式を得た。

本研究に際しては、東京大學理學部木内教授、小穴教授より有益な助言を頂いた。三角追跡の計算に對しては、吉原和子、大熊久子、巨勢典子の三君に手傳つて頂いた。此等の方々に厚く感謝の意を表します。

第 1 表

V dpt.	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7
$K \times 10^{11}$	2285.720	2783.077	3683.372	3332.783	7999.979	23146.019	45436.288	77564.820	128082.44	193281.71
$L \times 10^7$	773424.27	832395.76	872044.48	907581.16	1124008.2	1454218.7	1723127.5	1976176.3	2277438.1	2577422.9
$M \times 10^4$	108626.90	105221.51	100007.08	73232.57	32379.711	82822.413	73876.477	54836.489	24873.878	-16877.715
$N \times 10^3$	-17236.063	-13657.621	-7785.395	3877.507	7578.6513	15760.487	22463.645	27728.026	37578.275	44120.657
P	437393.23	303306.66	157357.66	-119.02923	-352.73339	-552.07118	-767.85228	-1001.3073	-1253.4278	-1528.5766
Q	-2156.0814	-1633.7955	-905.76727	1077.7985	2462.0767	3726.1059	5483.7527	7627.4733	9756.6302	12472.7667
d m	0.0013	0.0014	0.0015	0.0015	0.0020	0.0025	0.0030	0.0035	0.0040	0.0045
(8)より	6.3718	7.5377	8.2621	9.7639	10.5752	11.6755	12.4505	13.4169	14.7388	16.2698
(6)より	7.2680	8.2272	10.6727	8.3762	7.2082	10.3777	11.3444	12.3222	13.6201	15.8736
三角追跡	6.3727	7.5325	8.7451	7.6761	8.7807	7.6786	10.4401	11.7107	12.7277	14.6815

文 献

(1) James P. C. Southall; J. O. S. A., and R. S. I., 5 (1921), 398. 6 (1922), 292. 7 (1923), 219. 13 (1926), (99,

(2) Born; Optik, s. 95, (1)

(3) Born; Optik, s. 101, (5)

(4) 昭和22年11月日本物理學會光學及分光學分科會にて發表。