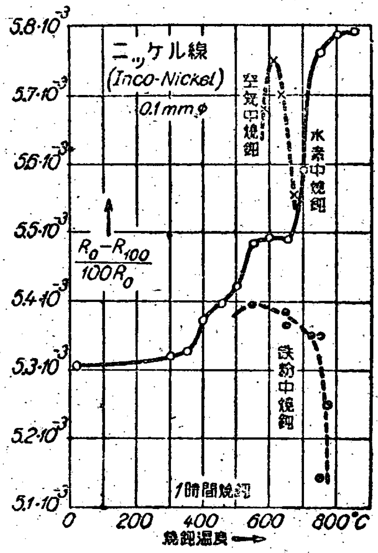
を燒鈍したものについて 0°C と 100°C とに於ける電氣抵抗を測定して (その値を夫々 R_0, R_{100} と書く), その溫度係數 $(R_0-R_{100})/(100\,R_0)$ を燒鈍溫度のかん數としてあらわす曲線を研究した. このような實驗は既に Bittel[5] によつて行なわれていて, 第4圖に示すような結果が發表されている. 我々の測定結果は第5圖によつてあらわされる.

電氣抵抗の溫度係數は不純物 (特にニッケルの場合は微量の硫黄) による內部歪に著しく左右されるから第5圖を解釋することは必ずしも簡單ではない. 水素中の燒鈍に關する曲線は矢張り 500°C で急激に上昇しているが, 600°C の附近では却つて水平になつている. これに反して空氣中の燒鈍に關する曲線は 610°C で極大となり, それ以上の溫度では急に下降している. しかも 600°C で燒鈍する場合には空氣中燒鈍の方が水素中燒鈍よりも大きな溫度係數を與えることは注目に値する事實である. これは恐らくインコ・ニッケルに含まれる S が 600°C の空氣中燒鈍により水素中燒鈍よりも有效に除去されるためではないかと想像されるが, 他にこれを裏付ける證據がないから, 確定的な事は何も云えない.

以上を要するに, この研究によつて冷間加工したニッケルの再結晶に關聯した現象が解明されたのではなく, 却つてわけのわからない現象が續出したというべきで, それの原因の少くとも一部分は不純物に歸せられるべきものであると考えられる. この點を明らかにするために, もつと純度の良いニッケルについてしらべることを準備中である.



第5圖 硬引したインコ・ニッケルの線の電氣抵抗の溫度係數と燒鈍溫度との關係

文 獻

(1) G. Tammann: Ann. d. Phys. [5] 16 (1933), 120, 667, 861.
(2) 村川: 理工學研究所報告 2 (1948), 115.
(3) 村川: 同上 1 (1947), 6.
(4) N. F. Mott: Proc. Roy. Soc. London A 156 (1936), 368.
(5) H. Bittel: Ann. d. Phys. [5] 31 (1938), 219.

殼體における有限變形の理論 (I)

吉 村 慶 丸

(1948 年 11 月 16 日受理)

序

板或いは殼體の微小變位に關する彈性論は古くは Kirchhoff, Gehring[1] に始まり Aron[2], Rayleigh[3]等を經て Love[4] に至つて一應完成されたといつてよいであろう. それのみでなく, それ以後の殼體に關する多くの研究は基礎理論に關する限りすべてその源を Love に發し, しかも Love の理論以上にどれだけの進歩を遂げたかは極めて疑わしいものゝ樣である. 一方殼體の有限變位に關する彈性論は三次元彈性體の有限變位理論に比べてむしろ重要であるにもかゝわらず, それに關する一般的な研究は少い樣である. K. Marguerre[5] は一般の形をした殼體の有限變位の理論を與えているが, その際空間固定の直角座標を用いたゝめに一樣な板厚の殼を取扱うことが出來ず, 板厚が場所と共に一定の關係で變化する場合に限られている. その他特に平板や圓筒形殼に關する二三の研究があるが完全なものとは云い難い. この意味で Love の理論はそれ等より以前のものであり, しかも微小變位に關するものであるにも拘らず, 有限變位の立場から見ても數學的方法においてそれ等よりむしろ勝れていると思われる. 併し Love の理論は歪の解析が

微小歪の假定の下に行われている結果，中性面を表わす曲面上の二群の媒介曲線（主曲率線）が同等の資格で扱われていないこと，平衡方程式では中性面の廻轉だけを考慮に入れ，その歪を考えていないこと，曲率變化の定義の仕方等はこれをそのまゝ有限變位の場合に擴張することを困難ならしめるものである．

本論文では殼體が有限變位を行う場合の彈性論を曲面論の立場から出來るだけ一般的に取扱うことを試みた．殼體が無限彈性體と異る點は，無限彈性體に於いてはそれ自身の占める空間と變位の行われる空間とが同一であるのに對して，殼體の變位はそれ自身の占める空間（中性面によつて代表される曲面，即ち二次元リーマン空間）内に限定されるのではなくて，それの置かれている三次元ユークリッド空間内に於いて行われることである．殼體の計算が困難な本質的な理由はこゝにあるのであつて，この困難は曲面に對しては曲線座標を，三次元空間に對しては曲面に則した自然座標をとることによつて容易に除くことが出來るのである．この樣な方法によつて我々は高次の項まで極めて容易に計算することが出來，且つ曲率變化その他種々の點であいまいな點を除くことに努めた．本論文では主として有限變位の場合を目的としたのであるが，歪の解析に於いては歪成分として有限歪に對しても成立つテンソル成分をとつてあり，又平衡方程式も變位，歪共に有限な場合に對する極めて一般的な場合を考えた．從つて彈性法則として一般的なものを考えるならば，變位のみでなく歪も有限な一般的な變形に對しても本計算は成立つものと考えてよい．又板厚は極めて薄いものと假定し，その高次の項を一應省略したが，これは必要に應じてその高次の項まで取ることは可能である．多くの材料では Hooke の法則によつて歪の大さが制限され，微小歪の範圍を取扱うことになるが，この場合にも變位は有限であり得る．むしろ殼體における大きな變形は不伸張變形に近い形で行われる場合が多いと考えられるので，この樣な場合を考慮して曲率變化に關して變位及びその微係數の高次の項まで計算した．

1.　中性面の歪

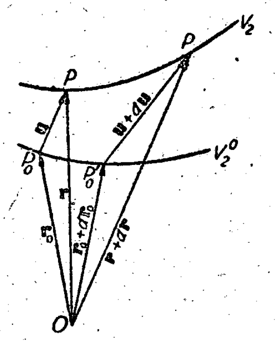
變形前の殼の中性面を表わす曲面 V_2^0（二次元リーマン面）上の任意の點を位置ヴェクトル $\mathbf{r}_0(\alpha,\beta)$ で表わし，(α,β) は V_2^0 の上にとつた曲線座標であり，この座標は曲面の變形に際して曲面に固定されているものと考える．そうすると曲面上の同一の點は變形の前後に於いて同一の曲線座標をもつから，V_2^0 に應ずる變形後の曲面 V_2 の上の同じ點の位置ヴェクトルは $\mathbf{r}(\alpha,\beta)$ によつて表わされる．曲面上に固定されたこの樣な媒介曲線は一般のものでも差支えないが，後に述べる樣に V_2^0 上の曲率線を選ぶのが便利である．

曲面上の點の座標を上の樣に定義し，且つ V_2^0 上の任意の點 P_0 の變位ヴェクトルを $\mathbf{u}(\alpha,\beta)$ とすれば，

$$\mathbf{r}(\alpha,\beta)=\mathbf{r}_0(\alpha,\beta)+\mathbf{u}(\alpha,\beta) \tag{1·1}$$

從つて V_2^0 上で P_0 に極めて近い點 P_0' を考えると

$$d\mathbf{r}(\alpha,\beta)=d\mathbf{r}_0(\alpha,\beta)+d\mathbf{u}(\alpha,\beta) \tag{1·2}$$



第　1　圖

こゝに

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{r}_0&=(\partial\mathbf{r}_0/\partial\alpha)d\alpha+(\partial\mathbf{r}_0/\partial\beta)d\beta \\ d\mathbf{r}&=(\partial\mathbf{r}/\partial\alpha)d\alpha+(\partial\mathbf{r}/\partial\beta)d\beta \end{aligned}\right\} \tag{1·3}$$

であり，$\partial\mathbf{r}_0/\partial\alpha$, $\partial\mathbf{r}_0/\partial\beta$ は媒介曲線 $\beta=\mathrm{const.}$ $\alpha=\mathrm{const.}$ の方向に於いて V_2^0 に切するヴェクトルであるから，その方向の單位切線ヴェクトルを $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ で表わす．同樣に $\partial\mathbf{r}/\partial\alpha$, $\partial\mathbf{r}/\partial\beta$ は變形後の媒介曲線の方向に於いて V_2 に切するヴェクトルであり，その方向の單位切線ヴェクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ で表わす．そうすると

$$\mathbf{a}_0=(1/\sqrt{E_0})\partial\mathbf{r}_0/\partial\alpha,\ \mathbf{b}_0=(1/\sqrt{G_0})\partial\mathbf{r}_0/\partial\beta \tag{1·4}$$

$$\left.\begin{aligned} E_0=\left(\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\alpha}\right)^2,\ F_0=\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\beta},\ G_0=\left(\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\beta}\right)^2 \\ H_0^2=E_0G_0-F_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{1·5}$$

$$\mathbf{a}=(1/\sqrt{E})\partial\mathbf{r}/\partial\alpha,\quad \mathbf{b}=(1/\sqrt{G})\partial\mathbf{r}/\partial\beta \tag{1·6}$$

$$\left.\begin{aligned} E=(\partial\mathbf{r}/\partial\alpha)^2,\ F=(\partial\mathbf{r}/\partial\alpha)\cdot(\partial\mathbf{r}/\partial\beta),\ G=(\partial\mathbf{r}/\partial\beta)^2 \\ H^2=EG-F^2 \end{aligned}\right\} \tag{1·7}$$

であつて，E_0, F_0, G_0 及び E, F, G は夫々曲面 V_2^0 及び V_2 に關する第一種の基礎量であり，V_2^0 上に於いて特に媒介曲線が直交するときは $F_0=0$ である．

尙曲面 V_2^0 の方程式は通常直角座標を用いて

$$x=x(\alpha,\beta),\ y=y(\alpha,\beta),\ z=z(\alpha,\beta) \tag{1·8}$$

の樣に與えるのが便利であるから，その場合には次の式を用いればよい．

$$\left.\begin{aligned} E_0&=(\partial x/\partial\alpha)^2+(\partial y/\partial\alpha)^2+(\partial z/\partial\alpha)^2\\ F_0&=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\\ G_0&=(\partial x/\partial\beta)^2+(\partial y/\partial\beta)^2+(\partial z/\partial\beta)^2 \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot9)$$

(1·2) は (1·4) によつて

$$\left.\begin{aligned} \partial\mathbf{r}/\partial\alpha&=\sqrt{E_0}\mathbf{a}_0+\partial\mathbf{u}/\partial\alpha\\ \partial\mathbf{r}/\partial\beta&=\sqrt{G_0}\mathbf{b}_0+\partial\mathbf{u}/\partial\beta \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot10)$$

と同等である．

今 $\mathbf{a}_0,\mathbf{b}_0,\mathbf{n}_0$ が右手系における單位基本ヴェクトルを構成する様に V_2^0 の單位法線ヴェクトル $\mathbf{n}_0$ を定義する．而して變位 $\mathbf{u}$ のその方向の成分を u,v,w とすれば，

$$\mathbf{u}(\alpha,\beta)=u(\alpha,\beta)\mathbf{a}_0+v(\alpha,\beta)\mathbf{b}_0+w(\alpha,\beta)\mathbf{n}_0\quad(1\cdot11)$$

の様に表わされる．媒介曲線を曲率線に一致する様にとれば，Gauss の公式[6]

$$\left.\begin{aligned} \partial\mathbf{a}_0/\partial\alpha&=(L_0/\sqrt{E_0})\mathbf{n}_0-[1/(2H_0)](\partial E_0/\partial\beta)\mathbf{b}_0\\ \partial\mathbf{a}_0/\partial\beta&=(M_0/\sqrt{E_0})\mathbf{n}_0+[1/(2H_0)](\partial G_0/\partial\alpha)\mathbf{b}_0\\ \partial\mathbf{b}_0/\partial\alpha&=(M_0/\sqrt{G_0})\mathbf{n}_0+[1/(2H_0)](\partial E_0/\partial\beta)\mathbf{a}_0\\ \partial\mathbf{b}_0/\partial\beta&=(N_0/\sqrt{G_0})\mathbf{n}_0-[1/(2H_0)](\partial G_0/\partial\alpha)\mathbf{a}_0 \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot12)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} L_0&=\mathbf{n}_0\cdot\partial^2\mathbf{r}_0/\partial\alpha^2=-(\partial\mathbf{n}_0/\partial\alpha)\cdot(\partial\mathbf{r}_0/\partial\alpha)\\ M_0&=\mathbf{n}_0\cdot\partial^2\mathbf{r}_0/\partial\alpha\partial\beta=\mathbf{n}_0\cdot\partial^2\mathbf{r}_0/\partial\beta\partial\alpha\\ &=-(\partial\mathbf{n}_0/\partial\alpha)\cdot(\partial\mathbf{r}_0/\partial\beta)=(\partial\mathbf{n}_0/\partial\beta)\cdot(\partial\mathbf{r}_0/\partial\alpha)\\ N_0&=\mathbf{n}_0\cdot\partial^2\mathbf{r}_0/\partial\beta^2=-(\partial\mathbf{n}_0/\partial\beta)\cdot(\partial\mathbf{r}_0/\partial\beta) \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot13)$$

或いは (1·8) に對しては

$$\left.\begin{aligned} L_0&=\frac{1}{H_0}\begin{vmatrix}\partial^2x/\partial\alpha^2 & \partial x/\partial\alpha & \partial x/\partial\beta\\ \partial^2y/\partial\alpha^2 & \partial y/\partial\alpha & \partial y/\partial\beta\\ \partial^2z/\partial\alpha^2 & \partial z/\partial\alpha & \partial z/\partial\beta\end{vmatrix}\\ M_0&=\frac{1}{H_0}\begin{vmatrix}\partial^2x/\partial\alpha\partial\beta & \partial x/\partial\alpha & \partial x/\partial\beta\\ \partial^2y/\partial\alpha\partial\beta & \partial y/\partial\alpha & \partial y/\partial\beta\\ \partial^2y/\partial\alpha\partial\beta & \partial z/\partial\alpha & \partial z/\partial\beta\end{vmatrix}\\ N_0&=\frac{1}{H_0}\begin{vmatrix}\partial^2x/\partial\beta^2 & \partial x/\partial\alpha & \partial x/\partial\beta\\ \partial^2y/\partial\beta^2 & \partial y/\partial\alpha & \partial y/\partial\beta\\ \partial^2z/\partial\beta^2 & \partial z/\partial\alpha & \partial z/\partial\beta\end{vmatrix} \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot14)$$

に於いて $M_0=0$ ととることが出來るから次の結果を得る．

$$\left.\begin{aligned} \partial\mathbf{u}/\partial\alpha&=\varphi_1\mathbf{a}_0+\varphi_2\mathbf{b}_0+\varphi_3\mathbf{n}_0\\ \partial\mathbf{u}/\partial\beta&=\psi_1\mathbf{a}_0+\psi_2\mathbf{b}_0+\psi_3\mathbf{n}_0 \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot15)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1&=\partial u/\partial\alpha+[1/(2H_0)](\partial E_0/\partial\beta)v-(L_0/\sqrt{E_0})w,\\ \varphi_2&=\partial v/\partial\alpha-[1/(2H_0)](\partial E_0/\partial\beta)u,\\ \varphi_3&=\partial w/\partial\alpha+(L_0/\sqrt{E_0})u\\ \psi_1&=\partial u/\partial\beta-[1/(2H_0)](\partial G_0/\partial\alpha)v,\\ \psi_2&=\partial v/\partial\beta+[1/(2H_0)](\partial G_0/\partial\alpha)u-(N_0/\sqrt{G_0})w,\\ \psi_3&=\partial w/\partial\beta+(N_0/\sqrt{G_0})v \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot16)$$

從つて (1·10)，(1·15) より

$$\left.\begin{aligned} \partial\mathbf{r}/\partial\alpha&=(\sqrt{E_0}+\varphi_1)\mathbf{a}_0+\varphi_2\mathbf{b}_0+\varphi_3\mathbf{n}_0\\ \partial\mathbf{r}/\partial\beta&=\psi_1\mathbf{a}_0+(\sqrt{G_0}+\psi_2)\mathbf{b}_0+\psi_3\mathbf{n}_0 \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot17)$$

が得られ，中性面の變形狀態は (1·3) の第二式及び (1·17) によつて完全に規定される．$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\psi_1,\psi_2,\psi_3$ は變位の成分 u,v,w 及びその導函數に關して線型であり，(1·17) は任意の大さの變位に對して成立つ．

次に曲面の歪を定義するために變形の前後の曲面上の線素の二乘の差を作ると

$$(d\mathbf{r})^2-(d\mathbf{r}_0)^2=(E-E_0)d\alpha^2+2Fd\alpha d\beta+(G-G_0)d\beta^2\quad(1\cdot18)$$

從つて

$$g_{11}=(E-E_0)/E_0,\ g_{12}=F/H_0,\ g_{22}=(G-G_0)/G_0\quad(1\cdot19)$$

とおけば (1·18) は

$$(d\mathbf{r})^2-(d\mathbf{r}_0)^2=g_{11}(\sqrt{E_0}d\alpha)^2+2g_{12}(\sqrt{E_0}d\alpha)(\sqrt{G_0}d\beta)+g_{22}(\sqrt{G_0}d\beta)^2\quad(1\cdot20)$$

となり，$g_{iK}(Ki,=1,2)$は二次のテンソルを形づくる．この係數 g_{ik} は曲面のその面内の伸び及び剪斷に關係する量であり，g_{ik} が全て 0 である場合には，曲面のその面內の變形は存在しないが，後に述べる曲面の不伸張變形は存在することが出來る．$\mathbf{a}_0$，$\mathbf{b}_0$，$\mathbf{n}_0$ の直交性を考えると (1·7)，(1·17) より

$$\left.\begin{aligned} E&=E_0\Big[1+\frac{2}{\sqrt{E_0}}\varphi_1+\frac{1}{E_0}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)\Big]\\ F&=H_0[(1/\sqrt{G_0})\psi_1+(1/\sqrt{E_0})\varphi_2\\ &\quad+(1/H_0)(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)]\\ G&=G_0\Big[1+\frac{2}{\sqrt{G_0}}\psi_2+\frac{1}{G_0}(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)\Big] \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot21)$$

從つて (1·19) によつて

$$\left.\begin{aligned} g_{11}&=(2/\sqrt{E_0})\varphi_1+(1/E_0)(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)\\ g_{12}&=\frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_2+\frac{1}{\sqrt{G_0}}\psi_1+\frac{1}{H_0}(\varphi_1\psi_1\\ &\quad+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)\\ g_{22}&=(2/\sqrt{G_0})\psi_2+(1/G_0)(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2) \end{aligned}\right\}\quad(1\cdot22)$$

(1·16) を (1·22) に代入すれば，g_{ik} は變位及びその導函數に關して一次及び二次の項よりなることが分る．その結果をこゝに記すことは省略する．尙(1·22)に於いては微小量に關する省略は全然行われていないから，この關係は任意の大さの變位に對して成立つ．併し若し Hooke の法則の成立範圍內のことがらを考えるならば，このこととは別に Hooke の法則によつてこの大さが制限されることは勿論である．

歪テンソル g_{ik} と通常用いられる伸び歪 e，剪斷歪

γ との間の關係は次の樣にして求められる．即ち曲面上の點 (α,β) を通る邊が變形前にはヴェクトル $\mathbf{a}_0\sqrt{E_0}d\alpha$, $\mathbf{b}_0\sqrt{G_0}d\beta$ により變形後には $(\partial\mathbf{r}/\partial\alpha)d\alpha=\mathbf{a}\sqrt{E}\,d\alpha$, $(\partial\mathbf{r}/\partial\beta)d\beta=\mathbf{b}\sqrt{G}\,d\beta$ により表わされる曲面上の三角形を考えることによつて

$$1+\varepsilon_1=\left|\frac{\sqrt{E}\,\mathbf{a}}{\sqrt{E_0}\,\mathbf{a}_0}\right|=\sqrt{1+g_{11}}$$

$$1+\varepsilon_2=\left|\frac{\sqrt{G}\,\mathbf{b}}{\sqrt{G_0}\mathbf{b}_0}\right|=\sqrt{1+g_{22}}$$

二邊の間の角の變化（減少を正にとる）を γ とすれば，

$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cos[(\pi/2)-\gamma]=g_{12}$$

從つて，

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1=\sqrt{1+g_{11}}-1,\quad \varepsilon_2=\sqrt{1+g_{22}}-1\\&\sin\gamma=g_{12}/(\sqrt{1+g_{11}}\,\sqrt{1+g_{22}})\end{aligned}\right\}\quad(1\cdot23)$$

こゝで我々は殼の中性面の歪成分として g_{ik} 或ひは ε,γ の何れを取るべきかという疑問を生ずる．微小變位の場合にはこの區別は問題にならないが，有限變位の場合には變位及びその導函數の二次以上の項に於いて差異を生ずるからである．これに對する解答は後の歪の解析に於いて得られるのであるが，それによれば我々は歪成分として

$$e_{11}=g_{11}/2,\ e_{12}=g_{12},\ e_{22}=g_{22}/2\qquad(1\cdot24)$$

をとるべきであることが分る．

2. 中性面の曲率變化

前節に述べた曲面の伸張變形を規定する歪成分はその曲面の曲げや捩りの變形には無關係に定義出來る量であつた．これに反して以下に於いて求めようとする曲率變化は曲面の曲げだけによつて決定されるのではなくて，歪成分 g_{ik} 或いは e_{ik} によつて影響されるものである．即ち伸張變形が存在しない場合には彈性論的の曲率變化は幾何學的の曲率變化と一致する筈であるが，伸張變形を伴う場合には彈性論的の曲率變化は幾何學的曲率變化から伸張變形の影響を除いたものである筈である．曲率變化をこの樣な考えから求めることは困難なばかりでなく，上の意味の影響の除き方によつても異る結果を與える．從つて曲率變化はどこまでも殼の歪の解析から數學的に定義されなければならない性質のものであつて，次節の歪の解析の結果によれば次の樣に定義するべきであることが分る．

$$\left.\begin{aligned}\kappa_1&=\frac{L}{E_0}-\frac{L_0E}{E_0^2}=\frac{E}{E_0}\left(\frac{L}{E}-\frac{L_0}{E_0}\right)\\ \kappa_{12}&=\frac{M}{\sqrt{E_0G_0}}-\frac{1}{2}\frac{F}{\sqrt{E_0G_0}}\left(\frac{L_0}{E_0}+\frac{N_0}{G_0}\right)\\ \kappa_2&=\frac{N}{G_0}-\frac{N_0G}{G_0^2}=\frac{G}{G_0}\left(\frac{N}{G}-\frac{N_0}{G_0}\right)\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot1)$$

Love は一次の近似理論に於いて曲面の indicatrix の解析から曲率變化を定義して居り，その結果を現在の記號を用いて表わせば

$$\kappa_1'=L/\sqrt{E_0E}-L_0/E_0,$$
$$\kappa_{12}'=M/\sqrt{E_0G_0},$$
$$\kappa_2'=N/\sqrt{G_0G}-N_0/G_0$$

である．この定義は筆者のものとは一次の項に於いても異るものである．

次に曲率變化を變位及びその導函數の函數として表わすために必要な量の計算を行う．(1・17) を用いて

$$H^2=\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right|^2\qquad(2\cdot2)$$

を計算すると

$$H^2=[\varphi_2\psi_3-(\sqrt{G_0}+\psi_2)\varphi_3]^2+[\varphi_3\psi_1-\psi_3(\sqrt{E_0}+\varphi_1)]^2+[(\sqrt{E_0}+\varphi_1)(\sqrt{G_0}+\psi_2)-\psi_1\varphi_2]^2\quad(2\cdot3)$$

中性面に垂直な變位成分とその導函數は切線成分及びその導函數に比べてはるかに大きな値を取る場合が普通であり，それ等の3乘の項まで取る必要のある場合があるであろうことが細い棒の彈性論の類推より，豫想される．從つて以下の曲率變化の計算では，u, v, w 及びその導函數の3次の項までとり，4次以上を省略することゝする．そうすると

$$\left.\begin{aligned}1/H&=(1/H_0)(1+\Delta^{(1)}+\Delta^{(2)}+\Delta^{(3)})\\ \Delta^{(1)}&=-(1/\sqrt{E_0})\varphi_1-(1/\sqrt{G_0})\psi_2\\ \Delta^{(2)}&=\frac{1}{E_0}\varphi_1^2-\frac{1}{2E_0}\varphi_3^2+\frac{1}{G_0}\psi_2^2\\&\quad-\frac{1}{2G_0}\psi_3^2+\frac{1}{H_0}(\varphi_1\psi_2+\varphi_2\psi_1)\\ \Delta^{(3)}&=\frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}[\varphi_1(-2\psi_2^2+\psi_3^2)\\&\quad+2\varphi_3\psi_1\psi_3]\\&\quad+\frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}[\psi_2(-2\varphi_1^2+\varphi_3^2)\\&\quad+2\varphi_2\varphi_3\psi_3]\\&\quad+\frac{1}{2E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1(-2\varphi_1^2+3\varphi_3^2)\\&\quad+\frac{1}{2G_0\sqrt{G_0}}\psi_2(-2\psi_2^2+3\psi_3^2)\\&\quad-\frac{2}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_1\varphi_2\psi_1-\frac{2}{\sqrt{E_0}G_0}\varphi_2\psi_1\psi_2\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot4)$$

從つて今變形後の曲面 V_2 に對する自然座標の單位基本ヴェクトルを $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}$ とすれば $\mathbf{n}$ は V_2 に對する單位法線ヴェクトルであつて

$$\mathbf{n}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\alpha}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\beta}\right)\qquad(2\cdot5)$$

によつて表わされるから, (1·17), (2·4) より

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}=\Big[&-\frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_3+\frac{1}{H_0}\varphi_2\psi_3+\frac{1}{E_0}\varphi_1\varphi_3\\
&-\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}(\varphi_1\varphi_2\psi_3+\varphi_2\psi_1\varphi_3)-\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\varphi_2\psi_2\psi_3\\
&-\frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1^2\varphi_3\\
&+\frac{1}{2E_0\sqrt{E_0}}\varphi_3^3+\frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_3^2\Big]\mathbf{a}_0\\
+\Big[&-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\psi_3+\frac{1}{H_0}\psi_1\varphi_3+\frac{1}{G_0}\psi_2\psi_3\\
&-\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}(\psi_1\psi_2\varphi_3+\psi_1\varphi_2\psi_3)-\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_1\psi_1\varphi_3\\
&-\frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2^2\psi_3\\
&+\frac{1}{2G_0\sqrt{G_0}}\psi_3^3+\frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_3^2\psi_3\Big]\mathbf{b}_0\\
+\Big[&1-\{1/(2E_0)\}\varphi_3^2-\{1/(2G_0)\}\psi_3^2\\
&+\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3\psi_3+\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\psi_1\varphi_3\psi_3\\
&+\frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3^2+\frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3^2\Big]\mathbf{n}_0
\end{aligned}\qquad(2\cdot6)$$

(1·17), (2·6) によつて二つの座標系 $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{n}_0$ と $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ との間の變換關係が與えられる. 而して特に $F=0$ の場合にはこれ等は直交變換である.

(1·17) を更に α, β で微分して (1·12) を用いれば

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha^2}=&\Big[\frac{\partial E_0/\partial\alpha}{2\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2H_0}\varphi_2-\frac{L_0}{\sqrt{E_0}}\varphi_3\Big]\mathbf{a}_0\\
&+\Big[-\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2\sqrt{G_0}}-\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2H_0}\varphi_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\Big]\mathbf{b}_0\\
&+[L_0+(L_0/\sqrt{E_0})\varphi_1+\partial\varphi_3/\partial\alpha]\mathbf{n}_0\\
\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha\partial\beta}=&\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}(\sqrt{E_0}+\varphi_1)-\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0}\varphi_2\Big]\mathbf{a}_0\\
&+\Big[\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0}(\sqrt{E_0}+\varphi_1)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\\
&-\frac{N_0}{\sqrt{G_0}}\varphi_3\Big]\mathbf{b}_0+\Big[\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta}+\frac{N_0}{\sqrt{G_0}}\varphi_2\Big]\mathbf{n}_0\\
\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\beta\partial\alpha}=&\Big[\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2H_0}(\sqrt{G_0}+\psi_2)+\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}\\
&-\frac{L_0}{\sqrt{E_0}}\psi_3\Big]\mathbf{a}_0+\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sqrt{G_0}+\psi_2)\\
&-\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2H_0}\psi_1\Big]\mathbf{b}_0+\Big[\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\frac{L_0}{\sqrt{E_0}}\psi_1\Big]\mathbf{n}_0\\
\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\beta^2}=&\Big[-\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2\sqrt{E_0}}-\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0}\psi_2+\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\Big]\mathbf{a}_0\\
&+\Big[\frac{\partial G_0/\partial\beta}{2\sqrt{G_0}}+\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0}\psi_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}-\frac{N_0}{\sqrt{G_0}}\psi_3\Big]\mathbf{b}_0\\
&+[N_0+(N_0/\sqrt{G_0})\psi_2+(\partial\psi_3/\partial\beta)]\mathbf{n}_0
\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot7)$$

但し $\dfrac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha\partial\beta}=\dfrac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\beta\partial\alpha}$ であることが Codazzi の關係を用いて證明される. (2·6), (2·7) より V_2 に關する第二種の基礎量が次の樣に求められる.

$$\left.\begin{aligned}
L=&\,\mathbf{n}\cdot\partial^2\mathbf{r}/\partial\alpha^2\\
=&\,L_0-\frac{\partial E_0/\partial\alpha}{2E_0}\varphi_3+\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2G_0}\psi_3+\frac{L_0}{\sqrt{E_0}}\varphi_1\\
&+\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha}\\
&+\frac{\partial E_0/\partial\alpha}{2E_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3+\frac{1}{\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3\Big)\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial E_0}{\partial\beta}\Big[\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}(\varphi_3\psi_1-\varphi_1\psi_3)\\
&+\frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3+\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3\Big]\\
&-\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\varphi_3-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\psi_3\\
&+\frac{L_0}{2E_0}\varphi_3^2-\frac{L_0}{2G_0}\psi_3^2\\
&+\Big(\frac{1}{H_0}\varphi_2\psi_3+\frac{1}{E_0}\varphi_1\varphi_3\Big)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\\
&+\Big(\frac{1}{H_0}\varphi_3\psi_1+\frac{1}{G_0}\psi_2\psi_3\Big)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\\
&-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{E_0}\varphi_3^2+\frac{1}{G_0}\psi_3^2\Big)\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha}\\
&-\frac{L_0}{2E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3^2-\frac{L_0}{2G_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\psi_3^2\\
&+\frac{L_0}{G_0\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_1\psi_3+\frac{L_0}{G_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3^2\\
&+\frac{\partial E_0/\partial\alpha}{2H_0\sqrt{E_0}}\Big[-\frac{1}{\sqrt{E_0}}(\varphi_1\varphi_2\psi_3+\varphi_2\varphi_3\psi_1)\\
&-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_2\psi_3-\frac{\sqrt{G_0}}{E_0}\varphi_1^2\varphi_3\\
&+\frac{\sqrt{G_0}}{2E_0}\varphi_3^3+\frac{1}{2\sqrt{G_0}}\varphi_3\psi_3^2\Big]\\
&+\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2H_0}\Big[\frac{1}{H_0}\varphi_2^2\varphi_3+\frac{1}{E_0}\varphi_1\varphi_2\varphi_3\\
&-\frac{1}{G_0}\varphi_1\psi_2\psi_3\Big]\\
&-\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2H_0\sqrt{G_0}}\Big[-\frac{1}{\sqrt{G_0}}(\varphi_3\psi_1\varphi_2+\varphi_2\psi_1\psi_3)\\
&-\frac{\sqrt{E_0}}{G_0}\varphi_2^2\psi_3+\frac{\sqrt{E_0}}{2G_0}\psi_3^3\\
&+\frac{1}{2\sqrt{E_0}}\varphi_3^2\psi_3\Big]\\
M=&\,(1/2)\mathbf{n}\cdot(\partial^2\mathbf{r}/\partial\alpha\partial\beta+\partial^2\mathbf{r}/\partial\beta\partial\alpha)
\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot8)$$

$$
=-\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2E_0}\varphi_3-\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2G_0}\psi_3+\frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{\sqrt{E_0}}\varphi_1\right.
$$

$$
\left.+\frac{N_0}{\sqrt{G_0}}\varphi_2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta}+\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}\right)
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{\partial E_0}{\partial\beta}\left[\frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3-\frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_3\psi_2\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}\psi_1\psi_3+\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3\right]
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_1-\frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\psi_3\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3+\frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3\right]
$$

$$
-\frac{1}{2\sqrt{E_0}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}\right)\varphi_3-\frac{1}{2\sqrt{G_0}}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha}\right)\psi_3+\frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{E_0}+\frac{N_0}{G_0}\right)\varphi_3\psi_3
$$

$$
+\left(\frac{1}{H_0}\varphi_2\psi_3+\frac{1}{E_0}\varphi_1\varphi_3\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}
$$

$$
+\left(\frac{1}{H_0}\varphi_3\psi_1+\frac{1}{G_0}\psi_2\psi_3\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_0}\varphi_3^2+\frac{1}{G_0}\psi_3^2\right)\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta}
$$

$$
-\frac{N_0}{G_0\sqrt{E_0}}\varphi_3^2\psi_1-\frac{N_0}{G_0\sqrt{G_0}}\varphi_3\psi_2\psi_3
$$

$$
-\frac{N_0}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3^2-\frac{N_0}{2G_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3^2
$$

$$
+\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2\sqrt{E_0}}\left[-\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}(\varphi_1\varphi_2\psi_3+\varphi_2\varphi_3\psi_1)\right.
$$

$$
-\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\varphi_2\psi_2\psi_3
$$

$$
-\frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1^2\varphi_3+\frac{1}{2E_0\sqrt{E_0}}\varphi_3^3
$$

$$
\left.+\frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_3^2\right]
$$

$$
-\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0}\left[\frac{1}{H_0}\varphi_2^2\psi_3+\frac{1}{2E_0}\varphi_1\varphi_2\varphi_3\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{2G_0}\varphi_1\psi_2\psi_3\right]
$$

$$
+\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2\sqrt{G_0}}\left[-\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}(\varphi_3\psi_1\psi_2+\varphi_2\psi_1\psi_3)\right.
$$

$$
-\frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2^2\psi_3+\frac{1}{2G_0\sqrt{G_0}}\psi_3^3
$$

$$
\left.+\frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_3^2\psi_3\right]
$$

$$
-\frac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3+\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\psi_1\psi_3\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3-\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_3\psi_2\right]
$$

$$
+\frac{\partial G_0/\partial\beta}{2G_0}\left[\frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_1+\frac{1}{\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3\right]
$$

$$
-\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\varphi_3-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}\psi_3
$$

$$
-\frac{N_0}{2E_0}\varphi_3^2+\frac{N_0}{2G_0}\psi_3^2
$$

$$
+\left(\frac{1}{H_0}\varphi_3\psi_1+\frac{1}{G_0}\psi_2\psi_3\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}
$$

$$
+\left(\frac{1}{H_0}\varphi_2\psi_3+\frac{1}{E_0}\varphi_1\varphi_3\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_0}\psi_3^2+\frac{1}{E_0}\varphi_3^2\right)\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}
$$

$$
-\frac{N_0}{2G_0\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3^2-\frac{N_0}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_3^2\psi_2
$$

$$
+\frac{N_0}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3\psi_3+\frac{N_0}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3^2
$$

$$
+\frac{\partial G_0/\partial\beta}{2H_0\sqrt{G_0}}\left[-\frac{1}{\sqrt{G_0}}(\varphi_3\psi_1\psi_2+\varphi_2\psi_1\psi_3)\right.
$$

$$
-\frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_1\psi_1\psi_3-\frac{\sqrt{E_0}}{G_0}\psi_2^2\psi_3
$$

$$
\left.+\frac{\sqrt{E_0}}{2G_0}\psi_3^3+\frac{1}{2\sqrt{E_0}}\varphi_3^2\psi_3\right]
$$

$$
+\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0}\left[\frac{1}{H_0}\psi_1^2\psi_3+\frac{1}{G_0}\psi_1\psi_2\psi_3\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{E_0}\varphi_1\varphi_3\psi_2\right]
$$

$$
-\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2H_0\sqrt{E_0}}\left[-\frac{1}{\sqrt{E_0}}(\varphi_1\varphi_2\psi_3+\varphi_2\varphi_3\psi_1)\right.
$$

$$
-\frac{\sqrt{G_0}}{E_0}\varphi_1^2\varphi_3+\frac{\sqrt{G_0}}{2E_0}\varphi_3^3
$$

$$
\left.+\frac{1}{2\sqrt{G_0}}\varphi_3\psi_3^2\right].
$$

$N=\mathbf{n}\cdot\partial^2\mathbf{r}^2/\partial\beta^2$

$$
=N_0+\frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2E_0}\varphi_3-\frac{\partial G_0/\partial\beta}{2G_0}\psi_3
$$

$$
+\frac{N_0}{\sqrt{G_0}}\psi_2+\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}
$$

上式は一見可成り複雑であるが，これは u,v,w を變數とする以上止むを得ないことである．有限の變位に對して我々はなるべく簡單な L,M,N の表現を得たいのであるが，それにはEulerの角を用いること等が考えられるが，それ等の考察は將來にゆずり度い．特に平板，圓筒等の場合には (2·8) は可成り簡單化され，尙實際に殼體に於いては w 及びその導函數が u, v 及びその導函數に比べて大きいことを考え合わせると更に多くの項を省略することが出來る．

(2·1) 及び (2·8) より曲率變化が次の樣に得られる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\kappa_1 = \frac{1}{E_0}\Bigg\{ & -\frac{\partial E_0/\partial\alpha}{2E_0}\varphi_3 + \frac{\partial E_0/\partial\beta}{2G_0}\psi_3 \\
& \underline{-\frac{L_0}{\sqrt{E_0}}}\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha} \\
& + \frac{\partial E_0/\partial\alpha}{2E_0}\left[\frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3 + \frac{1}{\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3\right] \\
& - \frac{1}{2}\frac{\partial E_0}{\partial\beta}\left[\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}(\varphi_3\psi_1 - \varphi_1\psi_3)\right. \\
& \left. + \frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3 + \frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3\right] \\
& - \frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\varphi_3 - \frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\psi_3 \\
& - \frac{L_0}{2G_0}\psi_3^2 - \frac{L_0}{E_0}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\
& + (L\text{における3次の項})\Bigg\} \\
\kappa_{12} = \frac{1}{H_0}\Bigg\{ & -\frac{\partial E_0/\partial\beta}{2E_0}\varphi_3 - \frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2G_0}\psi_3 \\
& \underline{-\frac{L_0\sqrt{G_0}}{2E_0}\varphi_2 - \frac{N_0\sqrt{E_0}}{2G_0}\psi_1} \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}\right) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial E_0}{\partial\beta}\left[\frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3\right. \\
& - \frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_3\psi_2 + \frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}\psi_1\psi_3 \\
& \left. + \frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\psi_3\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_1\right. \\
& - \frac{1}{2G_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\psi_3 + \frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\varphi_2\varphi_3 \\
& \left. + \frac{1}{G_0\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3\right] - \frac{1}{2\sqrt{E_0}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\right. \\
& \left. + \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}\right)\varphi_3 - \frac{1}{2\sqrt{G_0}}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha}\right)\psi_3 \\
& - \frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{E_0} + \frac{N_0}{G_0}\right)(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \\
& + (M\text{における3次の項})\Bigg\} \\
\kappa_2 = \frac{1}{G_0}\Bigg\{ & -\frac{\partial G_0/\partial\beta}{2G_0}\psi_3 + \frac{\partial G_0/\partial\alpha}{2E_0}\varphi_3 \\
& \underline{-\frac{N_0}{\sqrt{G_0}}}\psi_2 + \frac{\partial\psi_3}{\partial\beta} \\
& + \frac{\partial G_0/\partial\beta}{2G_0}\left[\frac{1}{\sqrt{G_0}}\psi_2\psi_3 + \frac{1}{\sqrt{E_0}}\varphi_3\psi_1\right] \\
& - \frac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{E_0\sqrt{G_0}}(\varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2)\right. \\
& \left. + \frac{1}{E_0\sqrt{E_0}}\varphi_1\varphi_3 + \frac{1}{G_0\sqrt{E_0}}\psi_1\psi_3\right] \\
& - \frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}\psi_3 - \frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\varphi_3 \\
& - \frac{N_0}{2E_0}\varphi_3^2 - \frac{N_0}{G_0}(\psi_1^2 + \psi_2^2) \\
& + (N\text{における3次の項})\Bigg\}
\end{aligned}
\right\} \tag{2.9}
$$

こゝで $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ を u, v, w で表わせば $\kappa_1, \kappa_{12}, \kappa$ が u, v, w 及びその導函數に關して3次の項まで正確に求められる．尙上式で下線を施した項は Love の求めた結果には存在しない一次の項である．

（以下次號）

文　獻

(1) Kirchhoff : Vorlesungen über math. Phys. Mechanik.

(2) H. Aron : Journ. f. die reine und angewandte Math., (Crelle), 78 (1874).

(3) Rayleigh : Lond. Math. Soc. Proc., 13 (1882).

(4) A. E. H. Love : Phil. Trans. Roy. Soc. A. 179 (1888).
A. E. H. Love : Math. Theory of Elasticity 4th. ed. (1927).

(5) K. Marguerre : Proc. Fifth Intern. Congr. Applied Mech., (1939).

(6) 微分幾何學教科書，例えば
Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. 1.
Weatherburn : Differential Geometry of Three Dimensions (1927). 等
以下の微分幾何の公式についても同樣．

場の量子化に於ける Dirac の新しい試みに對する注意

武　藤　俊　之　助

(1948 年 11 月 16 日受理)

1. 緒　　言

波動場の量子理論に現はれる發散の困難を回避する努力も已に久しいけれども依然として混迷の域を脱し得ないと謂えよう．卽ち吾々は廣義に於ける素粒子の構造に就いて正しい理論的記述に未だ成功し得ないの